Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática a Distância

Laboratório de Ensino de Matemática

Fabiana Fiorezi de Marco
Francinildo Nobre Ferreira

Terceira Edição
Revista e Atualizada

UFU

2017

1ª edição 2011
2ª edição 2013
3ª edição 2017

M321l Marco, Fabiana Fiorezi de
Laboratório de Ensino de Matemática / Fabiana Fiorezi de Marco, Francinildo Nobre Ferreira. - 3ª ed. - São João del-Rei, MG: UFSJ, 2017.
94p.

Curso de Graduação em Matemática.

ISBN: 978.85.88414.98-3

1. Ensino de Matemática 2. Laboratório I. Ferreira, Francinildo Nobre II. Título.

CDU: 372.47

Agenda Geral da Disciplina

Módulo	Atividade	Desenvolvimento do conteúdo
Módulo 1 - Laboratório de Ensino de Matemática (15 horas)	**Atividade 1** – Fórum de Ideias	Participação no fórum de ideias explorando o tema Laboratório e Laboratório de Ensino de Matemática no processo ensino e aprendizagem de matemática.
	Atividade 2 – Leitura do Guia de Estudos.	Leitura do Módulo 1 do Guia de Estudos.
	Atividade 3 – Fórum de Dúvidas	Após você ter estudado e ter imaginado um trabalho pedagógico utilizando o Laboratório de Ensino de Matemática, converse com seus colegas e tutores, na **Atividade 4 - Fórum de Dúvidas**, para esclarecer dúvidas que surgiram.
	Atividade 4 – Tarefa	Elaboração de um texto reflexivo sobre sua concepção em relação ao conhecimento produzido neste módulo.

Módulo 2 - Ensino de áreas e perímetros de polígonos planos utilizando o Geoplano (20 horas)	**Atividade 5** – Fórum de Ideias	Participação no fórum de ideias registrando o que é um geoplano e se você já teve alguma experiência com este material para trabalhar/aprender conteúdos de matemática, mais especificamente de geometria plana elementar.
	Atividade 6 – Leitura de texto	Leitura do Módulo 2 do Guia de Estudos.
	Atividade 7 – Vídeos	Assista aos vídeos sobre Geoplano, disponíveis em http://www.youtube.com/watch?v=P3wkDJyXvDg e http://www.youtube.com/watch?v=qHhq3xJc38g e faça as anotações que julgar necessárias para prosseguir seus estudos.
	Atividade 8 – Tarefa	Faça as "Atividade para verificação da aprendizagem" de números 1, 4, 5, 7, 8, 9 e 13 para postar no moodle para avaliação.

Módulo 3 - Materiais básicos para um laboratório de ensino de matemática (20 horas)	**Atividade 9** – Leitura do Guia de Estudos.	Leitura do Módulo 3 do Guia de Estudos.
	Atividade 10 – Pesquisa	Você sabe como somar, subtrair, multiplicar e dividir usando ábaco? Faça uma pesquisa, a fim de encontrar uma resposta para essa pergunta e elabore uma proposta para o ensino dessas operações fundamentais usando esse instrumento. Lembre-se que você pode utilizar o *Fórum de Discussão* para compartilhar conhecimentos ou dúvidas com seu tutor e colegas.
	Atividade 11 – Vídeo	Assista aos vídeos sobre Tangram, disponíveis em http://www.youtube.com/watch?v=2EleXEqP5iE, http://www.youtube.com/watch?v=MIg5NBBnZVc e http://www.youtube.com/watch?v=aTAl9Q9X3_s e faça as anotações que julgar necessárias para prosseguir seus estudos.
	Atividade 12 – Tarefa	Escolha um dos materiais que acabamos de estudar e crie uma proposta de atividade que possa ser utilizada em um Laboratório de Ensino objetivando o desenvolvimento de um conteúdo matemático. Para tanto, não se esqueça de elencar: a) Tema (conteúdo, objetivo, resultados esperados); b) Ano a ser proposta a atividade; c) Materiais a serem utilizados; d) Desenvolvimento das atividades; e) Possível proposta de avaliação. Poste a atividade elaborada no AVA para que possa ser avaliada. **OBSERVAÇÃO:** Esta atividade pode ser feita em duplas, mas cada aluno deverá postar o seu arquivo.

Módulo 4 - Refletindo sobre a utilização de jogos no ensino de matemática (20 horas)	**Atividade 13** – Fórum de Ideias	Registre o que é jogo para você e como entende o trabalho com jogos na sala de aula e socialize com seus colegas no fórum de ideias.
	Atividade 14 – Leitura do Guia de Estudos.	Leitura do Módulo 4 do Guia de Estudos.
	Atividade 15 – Jogo Matix	Produza/construa o jogo Matix e jogue e anote tudo que você for percebendo de importante durante suas jogadas.
	Atividade 16 – Fórum de Discussões	Participação no fórum de discussões registrando suas anotações relativas à atividade 16, acompanhe as postagens de seus colegas e comente-as.
	Atividade 17 – Tarefa	Elabore 3 (três) situações-problema utilizando o jogo Matix e poste para que todos seus colegas de turma possam vê-las e comentá-las.

SUMÁRIO

SUMÁRIO

Para começo de conversa ...

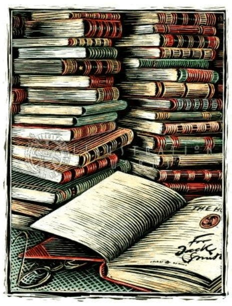
Prezado(a) aluno(a),

Nesta etapa do seu curso de graduação em Matemática, dentre as disciplinas propostas está a disciplina intitulada **Laboratório de Ensino de Matemática - LEM**.

Para iniciar nossas reflexões, propomos que você procure pensar sobre a seguinte questão: qual a diferença entre experimento e experiência?

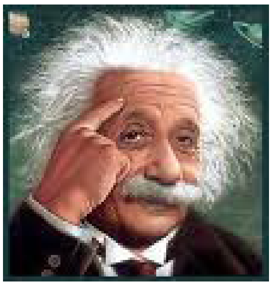
Segundo o dicionário Aurélio[1]

> **experimento** é uma ação de fazer algo, com o objetivo de analisar o seu desenvolvimento ou resultado. Ou ainda, é um método científico que testa uma hipótese ou demonstra um fato conhecido. Enquanto que **experiência** é um conhecimento que se obtém na prática. Ou ainda, habilidade ou perícia resultante do exercício contínuo duma profissão, arte ou ofício. (p.389).



Fonte: blog.anatolli.com.br

A história registra que vários matemáticos, físicos, filósofos etc realizaram experimentos e viveram experiências. A seguir, mencionaremos alguns pensamentos que, certamente, foram frutos de suas experiências e que, de certa forma, estão relacionado com a prática docente.



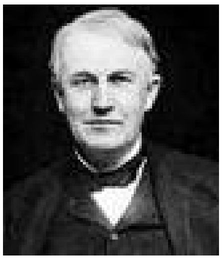
O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.
Albert Einstein[2]

Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio e levantarei o mundo.
Arquimedes de Siracusa[3]

1 FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Minidicionário: um dicionário da língua portuguesa. 7ª edição. Editora Positivo, 2009.

2 Albert Einstein foi um físico e humanista alemão (1879 – 1955), pai da teoria da relatividade, além de importantes estu dos em ondulatória. (http://www.pensador.info/pensamentos_de_albert_einstein, acesso em 22/03/2010).
Foto: http://www.biinternational.com.br/aluno/rodrigoramos/files/2009/07/albert_einstein.jpg, acesso em 22/03/2010.

3 Arquimedes de Siracusa foi matemático e físico grego (287 a.C. – 212 a.C.) Dedicou-se à aritmética, mecânica e hidrostática. Atribuem-se a Arquimedes a invenção do parafuso sem fim, da espiral ou parafuso de Arquimedes. (http://www.pensador.info/autor/ARQUIMEDES, acesso em 22/03/2010).
Foto: http://1.bp.blogspot.com/_cH2r3EmGF_Q/R_kzRRJgz5I/AAAAAAAAASc/8xnhszNPL-o/s400/arquimedes01.jpg, acesso em 22/03/2010).



Talento é 1% inspiração e 99% transpiração.
Thomas Edison[4]

Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível.
São Francisco de Assis[5]

Assim como esses pensadores, em diversos momentos de nossas vidas, realizamos experimentos e, em outros, vivemos experiências. Nosso desejo, nesta disciplina, é que você viva uma **experiência** do que efetivamente significa um Laboratório de Ensino de Matemática, de como implementar esse laboratório e, sobretudo, como utilizar esse laboratório no ensino de diversos conteúdos de matemática dos ensinos fundamental e médio. Desejamos, também, que você possa levar seus alunos a compreenderem que a matemática não é uma ciência pronta, acabada, como se revela no modelo de Euclides, mas é uma ciência que deve ser apresentada no processo de ser descoberta, como afirma Polya e, dessa forma, contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática em sua região.

Essa experiência será vivenciada ao longo dos dias dedicados ao estudo desta disciplina e será dividida em quatro etapas, chamadas **Módulos**. No **Módulo 1**, intitulado Laboratório de Ensino de Matemática, procuraremos responder questões, como: o que é um Laboratório de Ensino de Matemática? Como montar este Laboratório de Ensino? Que materiais podem fazer parte do laboratório? Quais objeções e limitações quanto ao uso desse? Já no **Módulo 2**, refletiremos sobre o ensino de áreas e perímetros de polígonos planos, utilizando o Geoplano. No **Módulo 3**, abordaremos sobre alguns materiais didáticos "básicos" de um Laboratório de Ensino de Matemática, um pouco da história desses materiais, seus usos, além de ressaltar a importância da intenção do professor pelo uso desses materiais em suas atividades didáticas. Por fim, no **Módulo 4**, veremos a utilização de jogos no ensino de Matemática.

Para dar início às nossas reflexões, buscamos Lorenzato (2006), que aborda alguns aspectos relacionados ao ensino-aprendizagem de Matemática e nos leva a refletir sobre a necessidade desse Laboratório, sua concepção e seu uso. Apresentamos, como nos últimos séculos, muitos educadores e pensadores famosos que ressaltaram a importância do apoio visual-tátil como facilitador para a aprendizagem.

> Por volta de 250 a.C, Arquimedes escreveu a Eratóstenes, dizendo: "é meu dever comunicar-te particularmente de certo método que poderás utilizar para descobrir, mediante a mecânica, determinadas verdades matemáticas [...] as quais eu pude demonstrar, depois, pela geometria". (apud NICOLET, 1967). Desse modo, Arquimedes revelou a maneira pela

4 Thomas Alva Edison (1847 - 1931) nasceu nos Estados Unidos, foi inventor e empresário dos Estados Unidos. Entre as suas contribuições encontram-se a lâmpada elétrica incandescente, o gramofone, o cinetoscópio, o ditafone e o microfone de grânulos de carvão para o telefone. Edison é um dos precursores da tecnologia do século XX (http://www.pensador.info/autor/Thomas_Edison, acesso em 22/03/2010).
Foto: http://www.google.com.br/search?hl=pt-BR&rlz=1W1ADRA_pt-BR&q=foto+de+thomas+edson&btnG=Pesquisar&meta=&aq=f&aqi=&aql=&oq=&gs_rfai=, acesso em 22/03/2010).

5 Giovanni di Pietro di Bernardone, conhecido como São Francisco de Assis (1181/1182 - 1226), frade católico da Itália. Foi um jovem rico e adepto dos prazeres da vida. Muito jovem, porém, renunciou à riqueza e passou a pregar a simplicidade e a espiritualidade.
(http://pt.wikipedia.org/wiki/Francisco_de_Assis, acesso em 22/03/2010).
(http://www.pensador.info/autor/Sao_Francisco_de_Assis/, acesso em 22/03/2010).
Foto: http://www.google.com.br/search?q=fotos+de+s%C3%A3o+francisco+de+assis&btnG=Pesquisar&hl=pt-BR&rlz=1W1ADRA_pt-BR&sa=2, acesso em 22/03/2010.

qual fazia descobertas matemáticas e confirmou a importância das imagens e dos objetos no processo de construção de novos saberes.

Por volta de 1650, Comenius escreveu que o ensino deveria dar-se do concreto ao abstrato, justificando que o conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo.

Em 1650, Locke dizia da necessidade da experiência sensível para alcançar o conhecimento.

Por volta de 1750, Rousseau recomendou a experiência direta sobre os objetos, visando à aprendizagem.

Por volta de 1800, Pestalozzi e Froebel reconheceram que o ensino deveria começar pelo concreto, já Herbart, na mesma época, defendeu que a aprendizagem começa pelo campo sensorial.

Em 1900, Dewey confirmou o pensamento de Comenius, ressaltando a importância da experiência direta como fator básico para construção do conhecimento.

Poincaré[6] recomendava o uso de imagens vivas para clarear verdades matemáticas.

Montessori [7] legou-nos diversos exemplos de materiais didáticos e atividades de ensino que valorizam a aprendizagem dos sentidos, especialmente do tátil.

Piaget[8] deixou claro que o conhecimento se dá pela ação refletida sobre o objeto.

Vygotsky[9], na Rússia, e Bruner[10], nos Estados Unidos, concordaram que as experiências no mundo real constituem o caminho para a criança construir seu raciocínio. (LORENZATO, 2006, pp.3 e 4).

Por fim, Lorenzato (2006) conclui, afirmando que cada educador, a seu modo, reconheceu que a ação do indivíduo sobre o objeto é básica para a aprendizagem e que, em termos de sala de aula, durante a ação pedagógica, esse reconhecimento evidencia o fundamental papel que o material didático pode desempenhar na aprendizagem. Além disso, menciona diversos pensadores e educadores que reconheceram que a eficácia do material didático, na aprendizagem, poderia ser muito maior, mesmo se restrita ao ensino da matemática. No Brasil, destaca Júlio César de Mello e Souza, isto é, Malba Tahan e Manoel Jairo Bezerra, e comenta que também outros educadores muito contribuíram para a divulgação do uso de material didático como apoio às aulas de Matemática.

Mediante esses argumentos, além de outros que serão discutidos ao longo desta disciplina, podemos ressaltar

6 http://pt.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9. Acesso em 30/09/2010.
7 http://pt.wikipedia.org/wiki/Maria_Montessori e http://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_Montessori. Acesso em 30/09/2010.
8 http://pt.wikipedia.org/wiki/Jean_Piaget. Acesso em 30/09/2010.
9 http://pt.wikipedia.org/wiki/Lev_Vygotsky e http://revistaescola.abril.com.br/historia/pratica-pedagogica/lev-vygotsky-teorico-423354.shtml. Acesso em 30/09/2010.
10 http://pt.wikipedia.org/wiki/Jerome_Bruner. Acesso em 30/09/2010.

que é importante a implementação e o uso do Laboratório de Ensino de Matemática em nossas escolas, mesmo havendo limitações do seu uso, como veremos no decorrer desta disciplina. Destacaremos, também, como Lorenzato (2006), a importância da função do professor perante a concepção, implementação e uso do laboratório.

Mas.... o que dizem os PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNs) (BRASIL, 1998) sobre o LEM?

Embora não esteja explícito o termo Laboratório de Ensino de Matemática, podemos encontrar neste documento:

> Em Matemática, existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade. Um exemplo bastante conhecido é a representação do teorema de Pitágoras, mediante figuras que permitem ver a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos.
>
> Outro aspecto a ser considerado é o fato de que hoje a computação gráfica é um recurso bastante estimulador para compreensão e análise do comportamento de gráficos de funções como as alterações que estes sofrem quando ocorrem mudanças nos parâmetros de suas equações.
>
> Assim, a visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráficas. A disponibilidade de modernos recursos para produzir imagens impõe a necessidade de atualização das imagens matemáticas, de acordo com as tendências tecnológicas e artísticas, incorporando a cor, os gráficos, a fotografia, assim como a importância de ensinar os alunos a fazer uso desses recursos. (pp.45 e 46).

Além dessas considerações, nos PCNs, encontramos diversos aspectos sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, que nos remetem à concepção e implementação desse laboratório.

É importante destacar que, ao concluir esta disciplina, você será capaz de elaborar e utilizar material didático para o ensino de temas da matemática, presentes nos ensinos fundamental e médio. A elaboração e utilização desses materiais serão objetos de avaliações.

Organize-se e procure se dedicar da melhor forma possível às atividades referentes a esta disciplina. É muito importante, em cada módulo, você realizar as tarefas no tempo estipulado para isso. Se você tiver dificuldade para tal, procure trocar ideias com colegas que estão cursando a disciplina, com o tutor presencial, com o tutor a distância ou com o professor da disciplina.

Desejamos-lhe sucesso em sua caminhada!!!!

ANOTAÇÕES

LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Objetivos:

- Explicitar a concepção de Laboratório de Ensino de Matemática no Ensino Básico.
- Identificar o papel do Laboratório de Ensino de Matemática no Ensino Básico.
- Contribuir para a implementação de um Laboratório de Ensino de Matemática.
- Propor sugestões para uma melhor utilização do Laboratório de Ensino de Matemática.

Agenda do Módulo 1 - Laboratório de ensino de matemática (15 horas)

Atividade	Desenvolvimento do conteúdo	Avaliação
Atividade 1 – Fórum de Ideias	Participação no fórum de ideias explorando o tema Laboratório e Laboratório de Ensino de Matemática no processo ensino e aprendizagem de matemática.	Atividade de **Avaliação** no AVA: 2 pontos
Atividade 2 – Leitura do Guia de Estudos.	Leitura do Módulo I do Guia de Estudos.	
Atividade 3 – Fórum de Dúvidas	Após você ter estudado e ter imaginado um trabalho pedagógico utilizando o Laboratório de Ensino de Matemática, converse com seus colegas e tutores, na **Atividade 4 - Fórum de Dúvidas**, para esclarecer dúvidas que surgiram.	
Atividade 4 – Tarefa	Elaboração de um texto reflexivo sobre sua concepção em relação ao conhecimento produzido neste módulo.	Atividade de **Avaliação** no AVA: 4 pontos

Atividade 1 - Fórum de Ideias

Neste momento de nosso curso, sugerimos que você:

1. Procure registrar o que é um Laboratório para você e como entende o Laboratório de Ensino de Matemática no processo ensino e aprendizagem.

2. Socialize com o grupo-classe, via Ambiente Virtual de Aprendizagem, no *Fórum de Ideias*, o que registrou, discutindo as questões que julgar mais relevantes para nosso trabalho nesta disciplina.

Para auxiliá-los, podemos sugerir algumas questões que poderão fazer parte da discussão do Fórum de Ideias:

- A escola na qual você atua ou estudou possui/possuía um espaço que pode/poderia ser considerado um Laboratório de Ensino de Matemática, de acordo com sua concepção?
- Quais fatores devem ser considerados no planejamento de idealização de um Laboratório de Ensino de Matemática?
- O que você considera importante existir em um Laboratório de Ensino de Matemática?
- Você já realizou alguma(s) atividade(s) em Laboratório para ensinar/aprender matemática?
- Quais as facilidades/dificuldades que você encontrou na realização de atividades no Laboratório de Ensino de Matemática?

1.1. O que é um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM)

1.1.1. Concepções de Laboratório de Ensino de Matemática

Já parou para pensar o que o termo **Laboratório de Ensino de Matemática** significa para você?? Será possível encontrar uma definição única para a expressão **Laboratório de Ensino de Matemática**?

Que tal tentarmos responder a essas e tantas outras questões? Vamos lá????

Quando ouvimos o termo "laboratório", logo pensamos em um local organizado para a realização de experiências, misturas, transformações, pesquisas.... Mas um Laboratório de Ensino de Matemática, o que se faz nesse espaço?

Existem diferentes concepções de LEM, pois existem várias formas de utilizá-lo e organizá-lo. Podemos considerar esse espaço como um local para guardar materiais, sendo um depósito / arquivo de instrumentos; um local da escola reservado para aulas de matemática e para plantão de dúvidas de alunos; um local para professores planejarem suas aulas e atividades, tendo um rol de materiais à sua disposição; um local para os professores discutirem projetos, tendências e inovações; um local para criação, produção e desenvolvimento de materiais didáticos que possam auxiliar a prática pedagógica do professor, tornando o ensino da matemática mais compreensível aos alunos. (LORENZATO, 2006).

Lorenzato (2006) também nos lembra que

> para aqueles que possuem uma visão atualizada de educação matemática, o laboratório de ensino é uma grata alternativa metodológica porque, mais do que nunca, o ensino de matemática se apresenta com necessidades especiais e o LEM pode e deve prover a escola para atender essas necessidades. (p.6).

A instalação de um LEM depende dos objetivos e de suas finalidades, podendo ser montado em uma sala ou num armário, ou, ainda, em apenas uma caixa. O que precisa ficar claro é que esse espaço deve ser utilizado

> para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor; questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir. Enfim, aprender e, principalmente, aprender a aprender. (LORENZATO, 2006, p.7).

É importante que o professor conheça o material e saiba quando, como e porque utilizá-lo, neste ou naquele momento, no LEM e seus materiais, ou seja, o professor precisa planejar sua atividade no LEM intencionalmente e levar seus alunos a serem investigativos. Buscar, investigar, pesquisar é mais importante para a formação do indivíduo do que as respostas às indagações. (LORENZATO, 2006).

Diante de todo esse contexto, podemos considerar que uma definição adequada para o Laboratório de Ensino de Matemática não pode ficar restrita a um lugar ou processo, mas deve incluir também atitude do professor. Este deve levar o aluno a pensar por si mesmo, a questionar, a hipotetizar, a testar, observar padrões e generalizar, levando-o a um processo de investigação. (GRANDO e PASSOS, 1998).

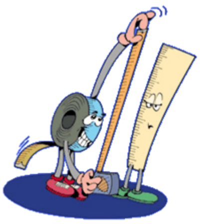
No entanto, para que o professor possa optar por desenvolver um trabalho em um LEM, é importante que tenha clara a proposta pedagógica que pretende desenvolver, bem como seus objetivos, pressupostos teóricos que fundamentam suas concepções sobre o ensino de Matemática e a relação professor-aluno. Chamamos a atenção também para que o professor conheça, experimente, vivencie e pesquise novas metodologias e formas de abordagens do ensino de matemática. (GRANDO e PASSOS, 1998).

1.2. A implementação de um Laboratório de Ensino de Matemática

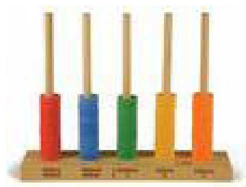
Para a criação/implementação de um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), o professor precisa ter claros os objetivos e finalidades para que se destina tal implementação (LOPES; ARAÚJO, 2007). Além disso,

> O importante é começar, por mais simples que seja este início. O ideal é que o aprendiz produza seu próprio material e, portanto, a situação oposta é esperar que a escola forneça o material pronto. É importante a atuação do professor de Matemática na produção de material, bem como na utilização de sucatas (caixas, canudos, palitos, barbantes, tampinhas etc.). (LORENZATO, 1989, p.149)

Lorenzato (2006) considera que, para a implementação de um LEM em escolas, é importante que essa realização seja uma atividade coletiva, sendo uma conquista de professores, alunos e administração escolar. Essa parceria entre os diversos atores que compõem o cenário escolar pode oferecer um diferencial na constituição desse espaço importante para a escola.



Outro ponto a se considerar é o público alvo ao qual o LEM se destina. Lorenzato (2006) sugere que, se for para crianças da educação infantil, os materiais do LEM devem estar relacionados ao desenvolvimento delas, no que se refere aos processos mentais básicos – correspondência, comparação, classificação, sequenciação, seriação, inclusão e conservação – importantes para a formação do conceito de número e, também, materiais relacionados à percepção espacial – formas, tamanhos, posições. Materiais relacionados à noção de distância também não podem ser deixados de lado, pois auxiliarão na construção do conceito de medida.



Esse mesmo autor destaca que, se o LEM for destinado às séries iniciais do Ensino Fundamental, grande relação de materiais que envolvem o aspecto tátil e visual da criança precisam se fazer presentes. No entanto, tais materiais devem auxiliar o professor no trabalho relacionado à ampliação de conceitos, à construção de propriedades, à percepção da necessidade da utilização de termos e símbolos matemáticos.

Para os anos finais do Ensino Fundamental, Lorenzato (2006) nos lembra que o professor precisa estar atento a materiais que desafiem o raciocínio lógico do aluno em todos os aspectos matemáticos, ou seja, aritméticos, geométricos, algébricos, trigonométricos, estatísticos.

Já para o Ensino Médio, o mesmo autor destaca que “podem ser acrescidos artigos de jornais ou revistas, problemas de aplicação da matemática, questões de vestibulares, desafios ao raciocínio topológico ou combinatório, entre outros.” (LORENZATO, 2006, p.10).

Além desses materiais citados e que serão melhor discutidos no módulo 3, é importante que diversos livros – dentre eles didáticos, paradidáticos, relacionados à história da Matemática e a temas matemáticos[1] – estejam à disposição dos alunos para consultas a qualquer momento.

1 Como sugestão podemos citar:
- **Teorema do Papagaio** de Denis Guedj, com tradução de Eduardo Brandão. Este livro é uma publicação da Companhia das Letras.
- **O Enigma de Sherazade** de Raymond Smullyan, com tradução de Sérgio Flaksman. Publicado pela Jorge Zahar Editor.

É importante lembrarmos que a implementação/construção de um LEM não é um objetivo a ser atingido em curto prazo, mas sim, uma atividade que demanda atualização e complementação constantes dos materiais.

Para finalizarmos, recorremos a Turrioni e Perez (2006, p.74), quando sugerem algumas etapas para a implementação de um LEM: conscientização da direção da instituição sobre a importância do LEM e sobre os recursos e o espaço físico necessários; condução de trabalhos investigativos no ambiente do LEM; divulgação dos resultados dos trabalhos realizados no LEM.

1.3 Utilização do Laboratório de Ensino de Matemática e dos recursos didáticos

Você já utilizou um laboratório de Ensino de Matemática ou já desenvolveu alguma aula de investigação enquanto aluno? Você se lembra de quais aspectos foram considerados importantes para você?

Neste item, vamos discutir o que é importante considerarmos ao utilizar o LEM ou algum recurso didático.

Está pronto??? Vamos começar???

Antes de utilizarmos um LEM ou qualquer recurso didático, devemos refletir sobre a nossa proposta político-pedagógica e pressupostos teóricos, quais nossas concepções sobre ensino e ensino de matemática, quais nossos objetivos, que aluno queremos formar, dentre outros.

É importante destacarmos também que, por trás de cada material, se esconde uma visão de educação, de matemática, de homem e de mundo; ou seja, existe subjacente ao material uma proposta pedagógica que o justifica. (FIORENTINI; MIORIM, 1990). Além disso, o professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente, colorido, lúdico ou porque ouviu dizer que é bom. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano, pois a simples utilização de recursos didáticos no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem dessa disciplina.

Carraher & Schilemann (1988) afirmam, com base em suas pesquisas, que «não precisamos de objetos na sala de aula, mas de objetivos na sala de aula, de situações em que a resolução de um problema implique a utilização dos princípios lógico-matemáticos a serem ensinados». (p. 179). Isso porque o material, «apesar de ser formado por objetivos, pode ser considerado como um conjunto de objetos 'abstratos', porque esses objetos existem apenas na escola, para a finalidade de ensino, e não têm qualquer conexão com o mundo da criança». (p. 180). Ou seja, para esses pesquisadores, o professor deve estar atento a qual proposta pedagógica fará para seus alunos, ao utilizar um recurso didático para ensinar matemática.

Assim, podemos dizer que os materiais didáticos e o LEM devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento, no momento em que está sendo construído, propiciando ao aluno um aprender significativo no qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. (FIORENTINI; MIORIM, 1990).

1.4 Objeções e limitações quanto ao uso do Laboratório de Ensino de Matemática

Apesar de considerarmos o LEM uma boa opção metodológica, é preciso lembrar que existem limitações

- **O diabo dos números** de Hans Magnus Enzensberger, com tradução de Sérgio Tellaroli. Publicado pela Companhia das Letras.
- **Mania de Matemática** de Ian Stewart, tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Publicado pela Jorge Zahar Editor.
- **O homem que calculava**; **Meu anel de sete pedras**; **Matemática divertida e curiosa**, dentre outros títulos do autor Malba Tahan (Júlio César de Mello e Souza). Obras publicadas pela Editora Record.

didáticas quanto ao seu uso. Sobre esse aspecto, recorremos a Lorenzato (2006, pp.12-15) quando discute que:

• *O LEM é caro, exige materiais que a escola não dá ao professor e raríssimas escolas possuem um LEM.*

Lecionar numa escola que não possui LEM é uma ótima oportunidade para construí-lo com a participação dos alunos, utilizando sucatas locais. Assim, o custo é diminuto e todos, alunos e professor, conhecem a aplicabilidade dos materiais produzidos; dessa forma, evita-se um fato comum nas escolas que recebem os materiais: muitos não são utilizados por desconhecimento de suas aplicações. Afinal, mais importante do que receber pronto ou comprar o LEM é o processo de construção dele.

• *O LEM exige do professor uma boa formação.*

É nossa obrigação estar bem preparados para propiciar a aprendizagem da matemática àqueles que nos são confiados. Além disso, qual é o método de ensino que não exige do professor uma boa formação matemática e didático-pedagógica? Na verdade, com professor despreparado, nenhum método produz aprendizagem significativa.

• *O LEM possibilita o «uso pelo uso».*

Sim, como todo instrumento ou meio. Daí a importância dos saberes do professor, indispensáveis para a utilização da quadra e dos equipamentos de esportes, da biblioteca, dos computadores, entre outros. O LEM possibilita o «uso pelo uso» dele como também o seu mau uso. Tudo dependerá do professor. Aqui cabe uma analogia: diga-me como usa o LEM e eu saberei que tipo de professor é.

• *O LEM não pode ser aplicado a todos os assuntos do programa.*

Realmente o LEM não é uma panaceia para o ensino, não é um caminho para todos os momentos da prática pedagógica, mas seguramente pode disponibilizar uma diversificação de meios e uma excelente prontidão ao uso deles como nenhuma outra alternativa oferece.

• *O LEM não pode ser usado em classes numerosas.*

Em educação, a quantidade e a qualidade geralmente se desenvolvem inversamente. Por isso, em turmas de até trinta alunos, é possível distribuí-las em subgrupos, todos estudando um mesmo tema, utilizando-se de materiais idênticos, e com o professor dando atendimento a cada subgrupo. Para turmas maiores, infelizmente, o «fazer» é substituído pelo «ver», e o material individual manipulável é, inevitavelmente, substituído pelo material de observação coletiva, pois a manipulação é realizada pelo professor, cabendo aos alunos apenas a observação.

• *O LEM exige do professor mais tempo para ensinar.*

Antes de considerar o tempo dispendido para que os alunos aprendam, é preciso considerar a qualidade da aprendizagem, questionando: com o LEM, o rendimento dos alunos melhora? Os alunos preferem aulas com ou sem o LEM? Por quê? Apesar de as respostas a essas questões dependerem do perfil profissional do professor, dos interesses dos alunos e dos objetivos da escola, é provável que o uso do LEM desperte nos alunos indagações não previstas pelo professor e, nesse sentido, se eles forem atendidos, o ensino demandará mais tempo que o previsto. Em contrapartida, muitas vezes, o uso do LEM, por facilitar a aprendizagem, faz o professor ganhar tempo.

• *É mais difícil lecionar utilizando o LEM.*

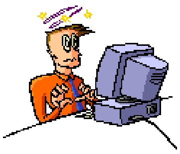
Essa frase insinua uma limitação do LEM. Se a dificuldade aqui se refere ao aumento de movimentação e de motivação dos alunos e de troca de informações entre eles, causadas pelo LEM, podemos dizer que o LEM exige do professor uma conduta diferente da exigida pela aula tradicional; se a dificuldade for referente ao fato de que os alunos, influenciados pelo LEM, passam a fazer perguntas difíceis ou fora do planejamento da aula, então, realmente, usar o LEM pode ser mais difícil para parte dos professores. Em ambos os casos, não se trata de limitação própria ao LEM, mas, sim, de situações em que os alunos efetivamente trabalham mais do que quando apenas assistem à explanação do professor. Em outras palavras, o LEM pode ocasionar nos alunos uma mudança de comportamento.

• *O LEM pode induzir o aluno a aceitar como verdadeiras as propriedades matemáticas que lhes foram propiciadas pelo material manipulável ou gráfico.*

Dependendo do nível de desenvolvimento dos alunos, é altamente desejável que essa afirmação seja verdadeira, pois, até o aparecimento do raciocínio lógico-dedutivo, por volta dos 13 ou 14 anos de idade, a aquisição do conhecimento apoia-se fortemente no verbal (audição), no gráfico (visão) e na manipulação (tato). Confiando plenamente naquilo que veem, pois praticam o «é verdade porque vi», «vale porque tem a mesma medida», «se vale para dois ou três casos, então, valerá para todos», confundem constatação de natureza perceptual com demonstração, e não sentem a necessidade de provas lógico-dedutivas porque tomam a percepção visual como prova. Quando os jovens adquirem o poder de dedução lógica, é importante mostrar-lhes sofismas, falácias e paradoxos matemáticos com o objetivo de eles perceberem que conclusões baseadas apenas na intuição ou naquilo que se vê podem contrapor-se ao que o raciocínio lógico-dedutivo aponta como verdadeiro. Raciocínio dedutivo será fundamental para todos os estudos posteriores: ele vai logicamente permitir-nos, de agora em diante, separar aquilo que parece ser verdadeiro daquilo que essencialmente é verdadeiro.

AVA

Atividade 3 – Fórum de Dúvidas



Após você ter estudado e ter imaginado um trabalho pedagógico utilizando o Laboratório de Ensino de Matemática, converse com seus colegas, tutores e professor, na **Atividade 4 - Fórum de Dúvidas**, para esclarecer as dúvidas que surgiram.

AVA

Atividade 4 – Tarefa

Após o estudo do Módulo 1, elabore um texto reflexivo sobre sua concepção em relação ao conhecimento produzido sobre um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM). Não se esqueça de identificar o papel do LEM no Ensino Básico, as principais características para a implementação do LEM e suas sugestões para uma melhor utilização do mesmo.

UTILIZAÇÃO DO GEOPLANO NO ENSINO DE PERÍMETRO E ÁREA DE REGIÕES POLIGONAIS PLANAS

Objetivos:

- Utilizar o geoplano para construir diversos polígonos planos.
- Construir, utilizando o geoplano, retângulos com perímetros de medida inteira dada.
- Determinar as dimensões de retângulos, cuja medida do perímetro é um número inteiro positivo.
- Calcular o perímetro de regiões poligonais planas considerando polígonos com perímetro de medidas inteiras.
- Determinar a área de regiões poligonais planas, a partir do geoplano.
- Construir materiais didáticos, a partir de atividades com o uso do geoplano.

Agenda do Módulo 2 - Ensino de áreas e perímetros de polígonos planos utilizando o Geoplano (20 horas)

Atividade	Desenvolvimento do conteúdo	Avaliação
Atividade 5 – Fórum de Ideias	Participação no fórum de ideias registrando o que é um geoplano e se você já teve alguma experiência com este material para trabalhar/aprender conteúdos de matemática, mais especificamente de geometria plana elementar.	Atividade de **Avaliação** no AVA: 2 pontos
Atividade 6 – Leitura de texto	Leitura do Módulo 2 do Guia de Estudos.	
Atividade 7 – Vídeos	Assista aos vídeos sobre Geoplano, disponíveis em http://www.youtube.com/watch?v=P3wkDJyXvDg e http://www.youtube.com/watch?v=qHhq3xJc38g e faça as anotações que julgar necessárias para prosseguir seus estudos.	
Atividade 4 – Tarefa	Faça as “Atividade para verificação da aprendizagem” de números 1, 4, 5, 7, 8, 9 e 13 para postar no moodle para avaliação.	Atividade de **Avaliação** no AVA: 7 pontos

2. O Geoplano

Atividade 5 - Fórum de Ideias

Vamos iniciar este módulo refletindo sobre as questões abaixo.

Anotem suas reflexões no Fórum de Ideias para socializar com seus colegas seus conhecimentos prévios a respeito do assunto.

- Você sabe o que é um geoplano?
- Você já teve alguma experiência com este material para trabalhar/aprender conteúdos de matemática, mais especificamente de geometria plana elementar? Explicite-as.

Neste módulo, vamos refletir sobre o ensino de perímetro e de área de regiões poligonais planas, a partir do uso do geoplano. Nosso objetivo aqui não é produzir um texto completo sobre o uso do geoplano para o ensino de perímetro e área, tarefa que seria impossível, uma vez que, como afirma Polya (1978), “nenhum problema fica completamente esgotado”. (p.10).

Desejamos que vocês vivam uma experiência do uso do geoplano, a fim de que possam realizá-la com seus alunos em sala de aula, proporcionando a eles uma alternativa para aprendizagem dos temas acima descritos.

2.1. Afinal, o que é um Geoplano?

O geoplano é um material que foi utilizado, pela primeira vez, em 1961, pelo matemático inglês Calleb Gattegno. Esse material consiste em uma placa de madeira na forma quadrada, retangular, circular ou de outra forma geométrica, que possui pregos em uma malha quadriculada, ou em uma outra forma, dependendo do modelo de placa escolhido. Esse material pode ser utilizado para o ensino de conteúdos de geometria plana elementar, frações, dentre outros. Neste Módulo, utilizaremos o geoplano para trabalhar, principalmente, os conceitos de perímetro e área de polígonos planos, além de propriedades a esses relacionadas.

Como construir um geoplano?

Você pode construir geoplanos de vários tamanhos de acordo com o número de pregos (pinos) a ser utilizado. Se você escolheu a forma quadrada, que é o modelo que utilizaremos neste texto, pode, por exemplo, confeccionar um geoplano com 9 pregos, ou 3 x 3; 16 pregos, ou 4 x 4; 25 pregos, ou 5 x 5 e, assim por diante. A figura a seguir, (Figura 1) mostra um geoplano com 100 pregos, dispostos 10 x 10, em que a distância entre dois pregos consecutivos, na horizontal ou vertical, mede 3 cm de comprimento. Em geoplanos com dimensões maiores, mantendo os quadradinhos com 3cm de lado, é possível construir maior diversidade de polígonos, no mesmo geoplano.

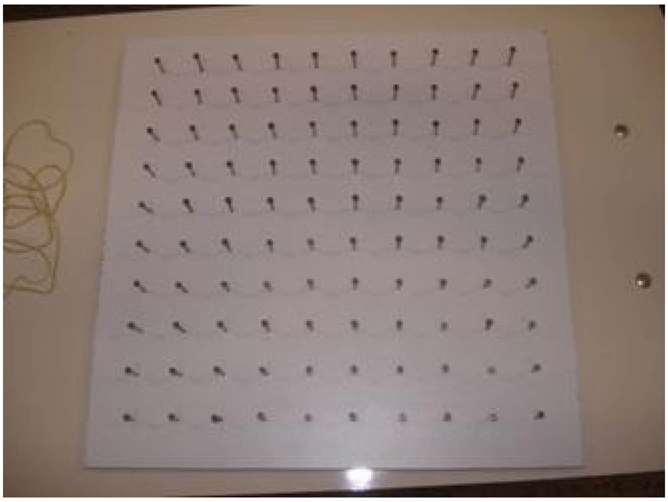


Figura 1 – Geoplano quadrado 10 x 10
Fonte: Arquivo dos autores

Os pregos da malha quadriculada são utilizados para prender os elásticos ou gomas, que são também utilizados para prender dinheiro. Na figura, a seguir, (Figura 2), temos alguns polígonos construídos utilizando o geoplano da figura anterior.

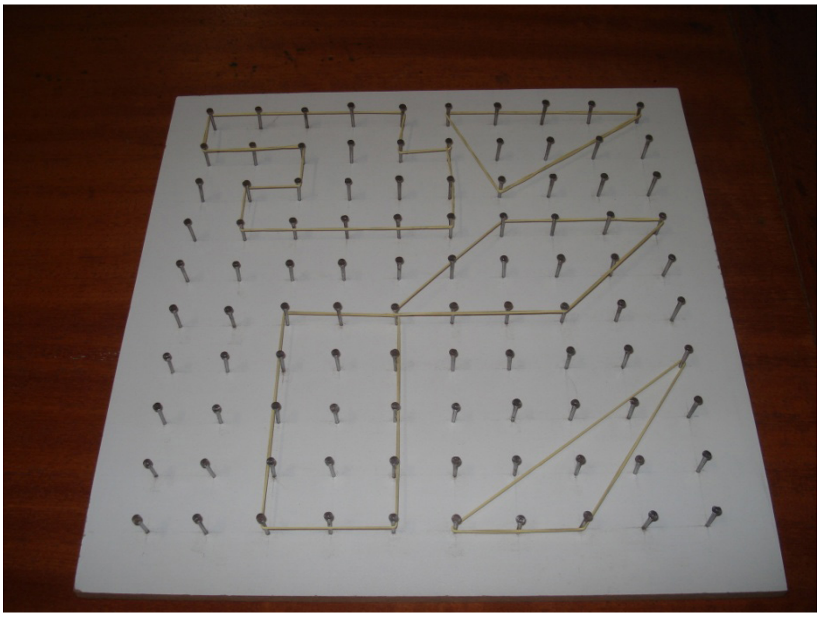


Figura 2 - Polígonos construídos utilizando o geoplano
Fonte: Arquivo dos autores

Que procedimentos devemos seguir para conduzir o aluno a realizar atividades com o geoplano de modo proveitoso, em se tratando do ensino de perímetro e área de polígonos planos, em sala de aula ou fora dela? Anote a seguir suas hipóteses.

É importante destacar que não adianta você simplesmente fazer uso de um determinado material sem fazer um planejamento detalhado de atividades a serem realizadas. Além disso, é importante que o professor esteja aberto para discutir novas idéias, a partir das realidades que viverá em sala de aula.

Cabe lembrar, aqui, que, sem um ambiente acolhedor, principalmente da parte do professor, no qual todos os alunos possam discutir suas ideias, dificilmente o ensino, e mais especificamente o ensino de matemática, produzirá bons resultados.

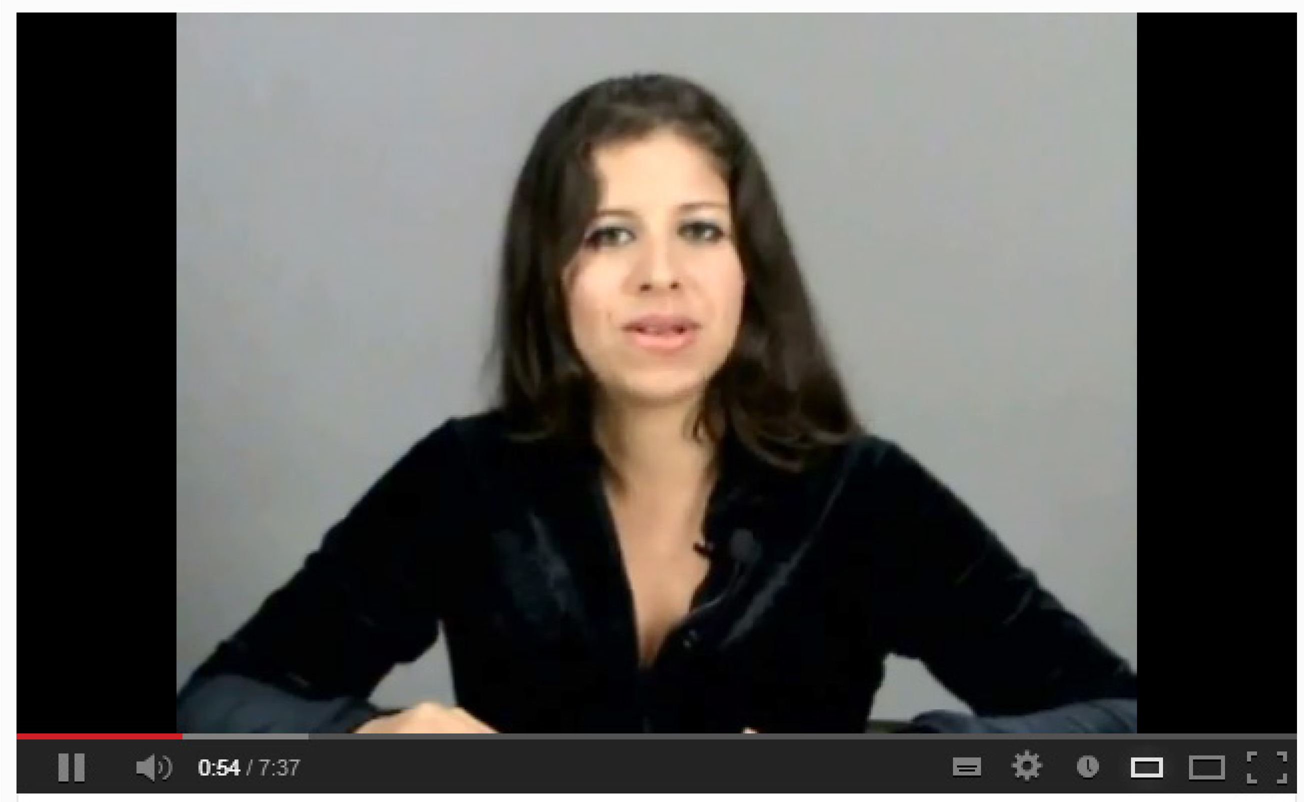
De acordo com Machado (2004),

> o papel do professor deve ser condutor ou guia. Ele deve orientar o trabalho dos estudantes com o geoplano e guiar as observações para que eles encontrem todas as possibilidades do caso, nos deslocamentos dos atilhos, chegando a descobertas de relações através de ações, percepções e abstrações. E acrescenta que a mente do professor deve estar sempre aberta para introduzir as possíveis variações que derivem do diálogo em classe com os estudantes. Esta flexibilidade do professor, segundo a pesquisadora, proporcionará novas descobertas e tornará o estudo mais atraente. As perguntas devem ser dinâmicas, mais do que formais. O diálogo com a classe deve ser ágil, sem impedir que cada estudante elabore o seu pensamento. Deve dar tempo para que o estudante observe, pense e expresse seu pensamento. A linguagem do professor deve ser concisa e cuidadosa, suficientemente rica para utilizar expressões equivalentes que tornem claras as ideias e facilitem a compreensão dos significados. Deve motivar o aluno que expresse suas ideias com clareza a fim de que seja interpretado corretamente. Após o estudante ter encontrado as relações esperadas, deve utilizar seu caderno para fazer os registros, a fim de ir adquirindo a simbologia adequada. (http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf. Acesso em 11/06/2010).

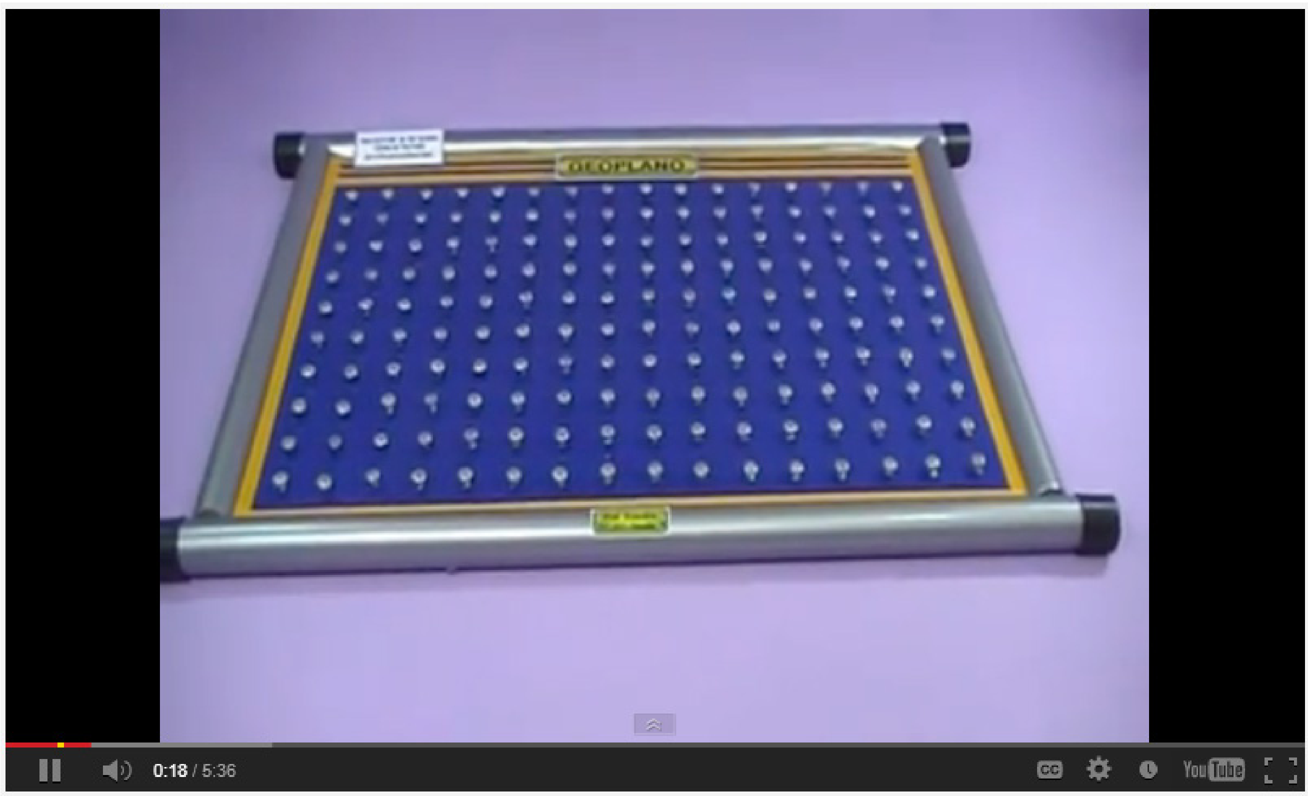
A seguir, introduziremos várias atividades, a partir do uso do geoplano, visando ao ensino de perímetro e áreas de regiões poligonais planas. Essas atividades foram idealizadas como parte do projeto de extensão, Gincana Regional de Matemática, que faz parte do programa de extensão, Universidade na escola e escola na universidade: a matemática em foco, do PIBEX 2010 – Programa de Bolsa de Extensão da UFSJ/2010, coordenado pelo professor Francinildo Nobre Ferreira e tendo, como membro, a discente do curso de matemática da UFSJ, Eliza Maria Ferreira.

Atividade 7 – Vídeos

Antes de prosseguir nosso estudo sobre geoplano, sugerimos que você assista aos vídeos a seguir:



http://www.youtube.com/watch?v=P3wkDJyXvDg



http://www.youtube.com/watch?v=qHhq3xJc38g

Deixe, no espaço a seguir, anotações que julgar necessárias para prosseguir seus estudos:

2.2 Atividades envolvendo o Geoplano

Nesta seção, apresentaremos várias atividades utilizando um geoplano. É importante lembrar que, após cada atividade, o professor deve solicitar que os alunos registrem os desenhos e demais informações em seus cadernos.

Você já parou para pensar o que o termo polígono plano significa para você??

Que tal tentarmos responder a essa questão?

Vamos lá????

Lembramos que o conceito de polígono deve ser apresentado formalmente ao aluno, somente após as construções de diversos polígonos no geoplano. Ao longo deste texto, admitiremos os conceitos de triângulo, retângulo, quadrado, paralelogramo, trapézio e polígono regular, perímetro e área de um polígono.

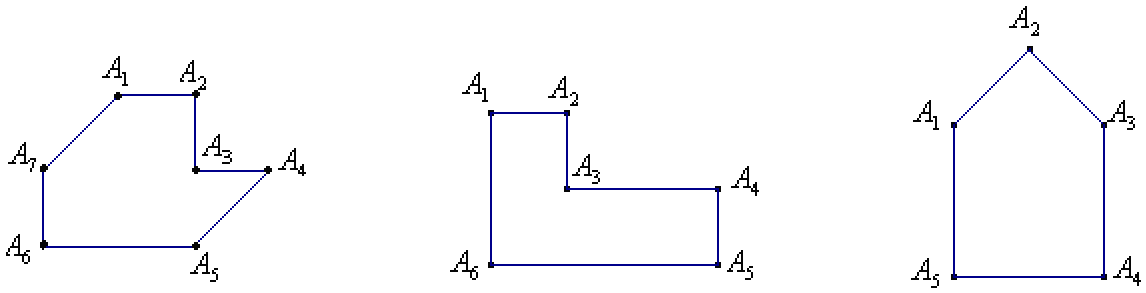
Referenciando-nos em Barbosa (2006), definimos um polígono plano como uma figura plana (ou seja, contida num plano), formada por uma sequência de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_N$ (que são os vértices do polígono) e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ (que são os lados do polígono), que satisfazem as seguintes condições:

a) $A_n = A_1$,

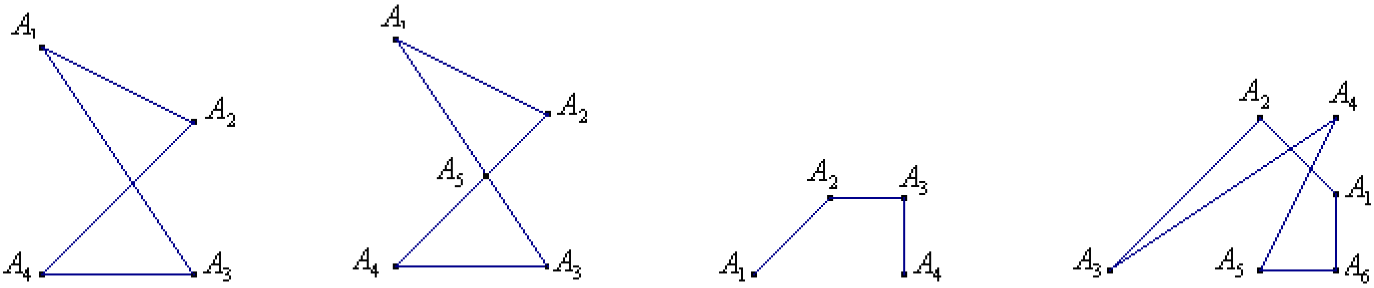
b) os lados do polígono se interceptam somente em suas extremidades,

c) dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Pensando nessas condições, as figuras apresentadas, a seguir, são polígonos[1].



As condições explicitadas acima não se aplicam às figuras abaixo.



A primeira e a quarta figuras não satisfazem a condição (b) da definição de polígono, a segunda não satisfaz (c), já a terceira não satisfaz (a). Assim, essas figuras não são polígonos.

Atividade para verificação da aprendizagem 1

Em um geoplano quadriculado, construa 5 polígonos quaisquer e um quadradinho unindo os quatro pinos mais próximos. Justifique, por escrito, como você faria para calcular a área de cada uma destas figuras. Atividade para verificação da aprendizagem 2

1 Figuras construídas no *software* Cabri Géomètre II.

Nas atividades a seguir, usaremos esse quadrinho como **unidade de medida de área**, e seu lado como **unidade de medida de comprimento**. E, a menos que esteja explícito, construiremos os polígonos com um dos lados paralelo ao “lado” do geoplano, como, por exemplo, os polígonos construídos na figura 2. Entendemos, como lado do geoplano, cada lado do contorno da malha quadriculada, como da figura 2. Consideraremos iguais, sem maiores esclarecimentos, dois retângulos que possuem as mesmas dimensões. Lembramos também que um **retângulo** é um quadrilátero plano que possui todos os seus ângulos retos.

Atividade para verificação da aprendizagem 2

Utilizando o geoplano, construa retângulos, tendo lados com medidas inteiras e com perímetros de medidas: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18 e 20 unidades de comprimento.

Vale lembrar que todo quadrado é um retângulo, mas que nem todo retângulo é um quadrado. Procure na internet sobre esta questão e registre a seguir suas conclusões.

Exercício Resolvido 1

Construa, no geoplano, todos os retângulos possíveis distintos com dimensões de medidas inteiras e perímetro medindo 8 unidades de comprimento. Justifique suas conclusões.

Observação: Use o geoplano para se convencer de que só existem duas maneiras de construir os retângulos, que são 3x1 e 2x2 .

Justificativa: Se a e b forem as dimensões do retângulo, seu perímetro mede $2a + 2b = 8$, ou seja, $a + b = 4$. Como a e b são medidas inteiras, temos duas possibilidades: $a = 1$ e $b = 3$, ou $a = 2$ e $b = 2$.

Lembramos que estamos trabalhando somente com retângulo de lados com medidas inteiras, caso contrário, se trabalhássemos com retângulos com medidas que não fossem inteiras, teríamos infinitas formas. Encontre as dimensões de três desses retângulos.

Exercício Resolvido 2

É possível construir dois retângulos distintos, com dimensões inteiras, tendo perímetro medindo 6 unidades de comprimento? Justifique suas conclusões.

Observação: Use o geoplano para se convencer de que não. Nesse caso, existe uma única forma de construir um retângulo com essas propriedades.

Justificativa: Se a e b forem as dimensões do retângulo, seu perímetro mede $2a + 2b = 6$, ou seja, $a + b = 3$. Como a e b são medidas inteiras, temos duas possibilidades: $a = 1$ e $b = 2$, ou $a = 2$ e $b = 1$. Entretanto, esses dois retângulos são os mesmos.

Lembramos que estamos trabalhando somente com retângulo de lados com medidas inteiras, caso contrário, se trabalhássemos com retângulos com medidas que não fossem inteiras, teríamos infinitas formas. Encontre as dimensões de três desses retângulos.

Exercício Resolvido 3

É possível construir um retângulo, com os lados de medida inteira, tendo perímetro medindo 17 unidades de comprimento? Justifique suas conclusões.

Observação: Não é possível construir tal retângulo.

Justificativa: Se a e b forem as dimensões de tal retângulo, seu perímetro mede $2a + 2b = 17$. Como 17 não é divisível por 2, segue que não existe um retângulo com os lados de medida inteira, tendo perímetro medindo 17 unidades de comprimento.

Considerando somente retângulo de lados com medidas inteiras, vimos que não é possível construir um retângulo com perímetro 17 unidades. Entretanto, se não exigirmos que as dimensões sejam inteiras, teremos infinitas formas de construir retângulos com essa propriedade. Encontre as dimensões de três desses retângulos.

O processo que nós utilizamos nas atividades “4”, “5” e “6” pode ser estendido para outras medidas de perímetros. O professor deve conduzir o aluno a refletir sobre o processo utilizado nas soluções, usando outras medidas de perímetros.

Atividade para verificação da aprendizagem 3

É possível construir um retângulo, com os lados de medida inteira, ou seja, um número natural, tendo como perímetro um valor ímpar de unidades de comprimento?

Atividade para verificação da aprendizagem 4

A partir dos processos utilizados nos exercícios resolvidos "1", "2" e "3", determine as dimensões inteiras de todos os retângulos, cujos perímetros medem até 20 unidades, quando isso for possível, justificando sua resposta.

Atividade para verificação da aprendizagem 5

Usando o geoplano, construa um polígono, com os lados de medidas inteiras, que tenha perímetro medindo 8 unidades e que não seja um retângulo. Observe que esse polígono não pode ser quadrado, pois todo quadrado é um retângulo.

Atividade para verificação da aprendizagem 6

Usando o geoplano, construa todos os polígonos, com os lados de medidas inteiras, que tenham perímetro medindo 10 unidades e que não sejam um retângulo.

Exercício Resolvido 4

Como calcular a medida do perímetro de um retângulo que não possua lado paralelo ao "lado" do geoplano?

Para responder a essa pergunta, uma alternativa é calcular a medida da diagonal de um retângulo, com o lado paralelo ao "lado" do geoplano. Para isso, uma forma é utilizar um resultado conhecido como Teorema de Pitágoras, que abordaremos, posteriormente, neste módulo.

ATIVIDADE PARA DESENVOLVER EM SALA DE AULA

Usando o geoplano, construa um retângulo com 16 unidades de área.

a) Descreva a maneira que você utilizou para construir esse retângulo e encontrar sua área.

b) Discuta com seus colegas a maneira como cada um construiu seu retângulo e como encontrou a sua área. Qual a maneira mais prática para encontrar a área do retângulo? Todos os retângulos construídos por seus colegas são iguais?

É importante que o professor permita que os alunos discutam entre si para que eles possam perceber as diferentes formas usadas para construir os retângulos com área de 16 unidades. O professor pode, também, proporcionar aos alunos concluir que a forma mais prática, para calcular a área de um retângulo, é multiplicando as duas dimensões do mesmo.

Note que, nesse caso, uma construção possível para o retângulo é um quadrado de lado medindo 4 unidades de comprimento. Aqui, é importante o professor lembrar os alunos que todo quadrado é um retângulo, e a recíproca é falsa, ou seja, nem todo retângulo é um quadrado.

Atividade para verificação da aprendizagem 7

Construa, no geoplano, um retângulo cujas medidas dos lados sejam, respectivamente, iguais a três e cinco unidades de comprimento como, por exemplo, o retângulo da figura abaixo (Figura 3). É interessante que o professor deixe que os alunos construam seus retângulos.

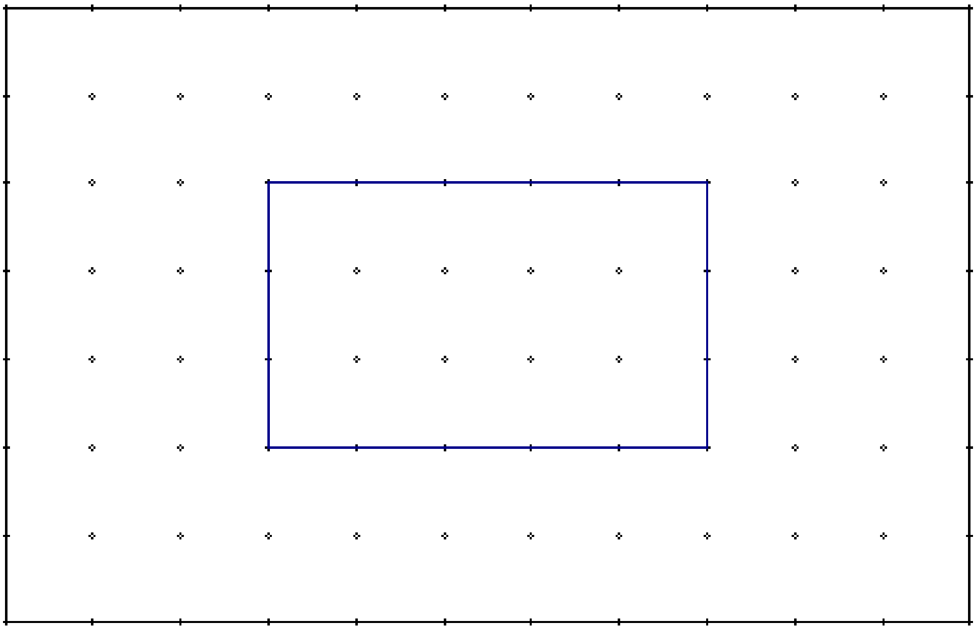


Figura 3 – Retângulo construído no geoplano

a) Qual o perímetro e a área desse retângulo?

b) Qual é o valor do produto da medida do lado maior, pelo lado menor (ou do lado menor, pelo lado maior)?

c) Qual é a relação entre a área calculada no item “a” e o produto calculado no item “b”?

É comum chamar as medidas desses lados, citados no item “b”, como base e altura do retângulo. O professor deve destacar que o valor correspondente à área do retângulo é o produto do comprimento da base, pela medida da altura, e isso acontece para todos os retângulos. Vale salientar que o professor deve solicitar que os alunos registrem essas informações em seus cadernos.

Exercício Resolvido 5

Já vimos, na atividade para verificação da aprendizagem 7, que é possível construir retângulos distintos (tendo lados com medidas inteiras) cuja área seja 16 unidades. É possível construir retângulos distintos, com dimensões de medidas inteiras, e com área igual a 7 unidades? Use o geoplano para responder a essa pergunta e justifique sua resposta.

Observação: Note que, como estamos utilizando medidas inteiras, só é possível construir um retângulo de área igual a 7 unidades, que é o retângulo de dimensões 1 x 7.

Justificativa: Se a e b forem as dimensões inteiras do retângulo, então, a área do retângulo será dada por $a \times b$, ou seja, $a \times b = 7$. Como a e b são medidas inteiras, temos somente duas possibilidades: $a = 7$ e $b = 1$, ou $a = 1$ e $b = 7$. Porém, esses retângulos são os mesmos, logo, só podemos construir um retângulo distinto de área igual a 7 unidades.

Aqui, também, devemos lembrar que estamos trabalhando somente com retângulo de lados com medidas inteiras, caso contrário, teríamos infinitas formas. Encontre as dimensões de três desses retângulos.

Exercício Resolvido 6

Quantos retângulos distintos podemos construir, tendo dimensões inteiras, de área igual a 12 unidades?

Solução: Devemos encontrar todos os números naturais cujo produto seja 12. As possibilidades são: 1 x 12, 2 x 6, 3 x 4. Descrevemos formalmente essas possibilidades da seguinte forma: sejam a e b as dimensões do retângulo. Então, a área do retângulo será dada por: $a \times b = 12$. Assim, as únicas possibilidades que teremos para as dimensões do retângulo serão: $a = 12$ e $b = 1$, $a = 6$ e $b = 2$, ou $a = 4$ e $b = 3$. Ou, em cada caso, trocando a por b, que corresponde ao mesmo retângulo. Teremos, então, três possibilidades.

Como salientamos em atividades anteriores, estamos trabalhando somente com retângulo de lados, com medidas inteiras, caso contrário, teríamos infinitas formas. Encontre as dimensões de três desses retângulos.

Atenção!!!

De agora em diante, neste texto adotaremos u.a., quando estivermos nos referindo a unidade de área.

Exercício Resolvido 7

Quais as dimensões inteiras dos retângulos, que têm área 72 u.a.?

Solução: Fatorando o número 72, como produto de números primos, teremos 2^3 X 3^2. Nesse caso, as possíveis dimensões dos retângulos são: 1 por 2^3 X 3^2; 2 por 2^2 X 3^2; 2^2 por 2^2 X 3^2; 2^3 por 3^2; 3 por 2^3 X 3; 2 x 3 por 2 X 3^2.

Observe que esse processo pode ser estendido da seguinte forma: encontrar todos os retângulos de dimensões inteiras que tenham uma determinada área, também de medida inteira.

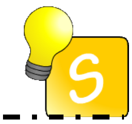
Atividade para verificação da aprendizagem 8

Quais as dimensões inteiras dos retângulos que têm área 572 u.a.?

Exercício Resolvido 8

Na atividade para verificação da aprendizagem 4, você encontrou as dimensões inteiras de todos os retângulos que tinham perímetro medindo 16 unidades de comprimento. Calcule as áreas desses retângulos. Quais as dimensões do retângulo que possui maior área?

Ao resolver a atividade 8, você verá que o retângulo que possui maior área, com perímetro medindo 16 unidades, é o quadrado de lado medindo 4 unidades de comprimento. Essa propriedade é verdadeira, mesmo que o perímetro não seja um número inteiro. Ou seja, é verdadeiro o seguinte resultado



Dentre os retângulos que possuem o mesmo perímetro p, o quadrado de lado medindo $\frac{1}{4}p$ é aquele que possui maior área.

Com relação ao resultado anterior, observe que, mesmo o número sendo inteiro, nem sempre a medida do lado do quadrado será inteira como, por exemplo, quando for igual a 15 unidades.

Você sabe como justificar, ou, mais especificamente, como demonstrar o resultado anterior?

Então, vamos lá!

Considerando que geralmente denotamos a área de um retângulo por A e suas dimensões por x e y, temos que $A = x \, . \, y$.

Como todos os retângulos devem ter o mesmo perímetro p, devemos ter

$$p = 2x + 2y$$

Desse modo, temos o seguinte sistema de equações:

$$A = x.y$$

$$p = 2x + 2y$$

Eliminando a incógnita y, na segunda equação, e substituindo, na primeira, obteremos,

$$A = x\left(\frac{p - 2x}{2}\right) = -x^2 + \frac{1}{2}px$$

Nesse caso, temos a função quadrática $A(x) = -x^2 + \frac{1}{2}px$,com variável x. E o maior valor dessa função ocorre quando o valor da variável x assume o valor da abscissa do vértice, ou seja,

$$x = x(\textit{vértice da função quadrática}) = -\frac{\frac{1}{2}p}{2(-1)} = \frac{1}{4}p \quad .$$

E substituindo na equação $p = 2x + 2y$, calculamos o valor de y. Ou seja,

$p = 2\left(\frac{1}{4}p\right) + 2y$, obtendo, $y = \frac{1}{4}p$.

Uma outra forma de encontrar o maior valor da função quadrática

$A(x) = -x^2 + \frac{1}{2}px$ é observando que $A(x) = -x^2 + \frac{1}{2}px = -(x - \frac{1}{4}p)^2 - \frac{p^2}{16}$.

Como o número $\frac{p^2}{16}$, que aparece na expressão de $A(x)$, é sempre positivo e que $(x - \frac{1}{4}p)^2$ é maior ou igual a zero.

Nesse caso, o maior valor para $A(x)$ ocorre quando $(x - \frac{1}{4}p)^2 = 0$, ou seja, quando $x = \frac{1}{4}p$. Substituindo , na equação $p = 2x + 2y$, obtemos $y = \frac{1}{4}p$. Portanto, o retângulo é um quadrado de lado medindo $\frac{1}{4}p$.

O problema de encontrar um retângulo que possui maior área, fixada a medida do perímetro, pode ser generalizado da seguinte forma:

Entre todas as "curvas" simples (que não se autointercepta) e fechadas (que começa e termina em um mesmo ponto) no plano (contida em um plano), com um dado comprimento p, qual é a curva que limita a maior área possível?

Esse problema é conhecido como o Problema isoperimétrico no plano, ou a Desigualdade isoperimétrica no plano[2]. Esse problema foi e ainda é fonte de pesquisas em diversas áreas da Matemática.

Voltando ao geoplano...

Atividade para verificação da aprendizagem 9

Considere, no geoplano, um retângulo cujas medidas dos lados sejam, respectivamente, iguais a três e cinco unidades de comprimento como, por exemplo, o retângulo da figura abaixo (Figura 4). O professor deve deixar que os alunos construam seus retângulos.

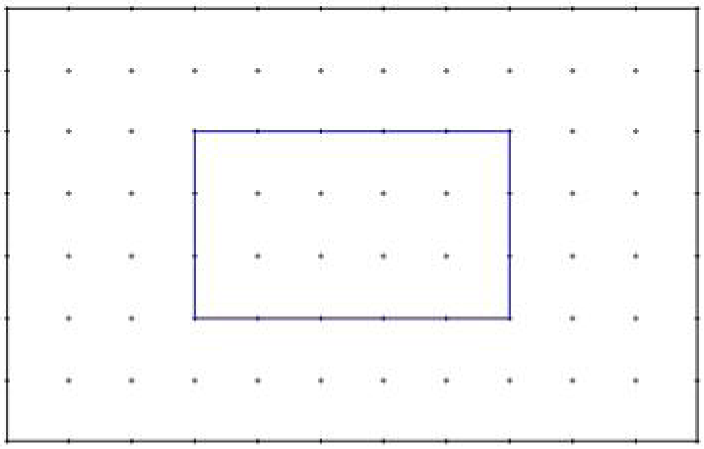


Figura 4 – Retângulo no geoplano

Desloque um dos lados do retângulo (na figura acima, o lado superior ou o inferior), duas unidades para a direita ou para a esquerda (o retângulo da figura abaixo foi deslocado, o lado superior, para a direita). Desse modo, o aluno construirá um novo paralelogramo (Figura 5). Observe que um retângulo já é um paralelogramo.

2 Para outras informações sobre esse problema consulte: DO CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. v.01. 610p e VIEIRA, F. B. P; RODRIGUES, L. B.; AGUSTINI, E. O Teorema Isoperimétrico e o problema da cerca. *FAMAT em revista*. Uberlândia: UFU. n. 4, abril de 2005. Disponível em http://www.famat.ufu.br/revista/revistaabril2005/artigos/ArtigoFlavianoLaisEdson.pdf. Acesso em 6 out 2008.

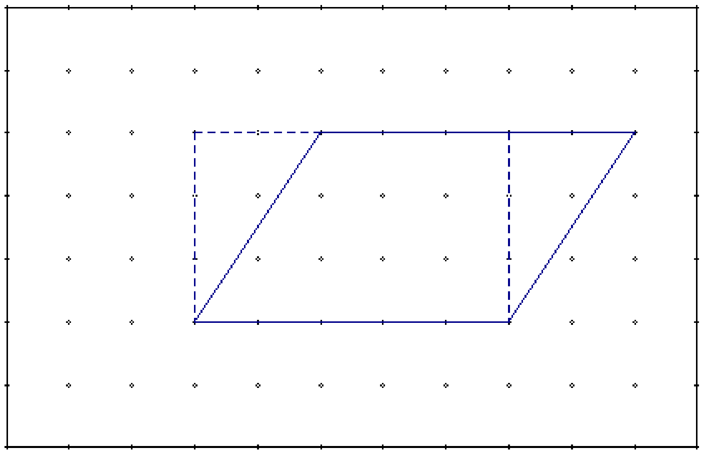


Figura 5 – Novo paralelogramo

Considere agora as seguintes questões:

a) Qual a área do retângulo considerado?

b) Qual a área do paralelogramo construído?

c) Qual é a relação que existe entre o valor da área calculada no item "b" e o valor da área do retângulo calculada no item "a"?

d) Calcule o produto da medida da "base" pela "altura". Compare esse resultado com o resultado obtido no item "b".

O professor, utilizando a figura, deve deixar claro para o aluno o que significa a base e a altura do paralelogramo.

O aluno deve construir vários paralelogramos, deslocando uma, duas (já feito), três unidades (para a direita ou para a esquerda), e calcular os produtos das medidas da base pela medida da altura, para se convencer de que as áreas desses paralelogramos são iguais, pois foram mantidas as medidas da base e da altura. O professor deve conduzir o aluno a concluir que isso acontece para todos os paralelogramos.

Atividade para verificação da aprendizagem 10

Se traçarmos a diagonal do retângulo, considerado na atividade para verificação da aprendizagem 10, como na figura abaixo (Figura 6), obteremos dois triângulos. Calcule a área de cada um deles e, depois, compare-as entre si e com a área do retângulo.

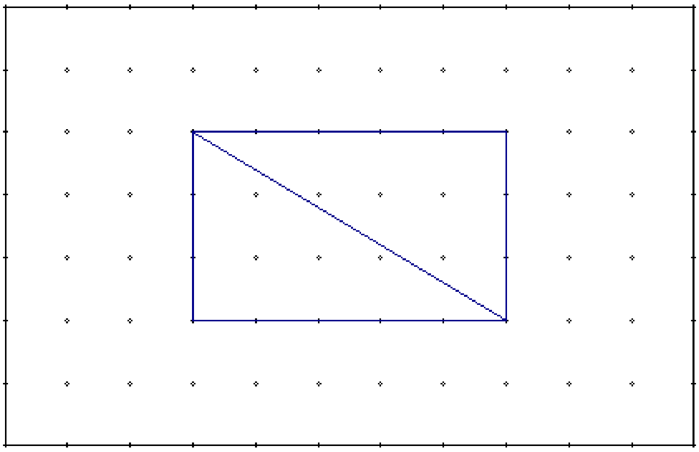


Figura 6 - Traçado da diagonal do retângulo

O aluno deve concluir que os dois triângulos possuem áreas iguais e que, dessa forma, a área do triângulo é igual à metade da área do retângulo. Como a área do retângulo é igual à medida da base multiplicada pela altura, segue que a área do triângulo é metade da medida da base multiplicada pela altura.

O aluno deve construir vários retângulos, considerar a diagonal de cada retângulo, para se convencer de que a área de um triângulo retângulo qualquer é sempre metade da área do retângulo, ou seja, metade da medida da base multiplicada pela altura.

Atividade para verificação da aprendizagem 11

Considere o paralelogramo da figura abaixo. Trace uma das suas diagonais, como na figura, a seguir (nesse caso, traçamos a menor diagonal do paralelogramo) (Figura 7), e encontre a medida da área de cada um dos triângulos formados.

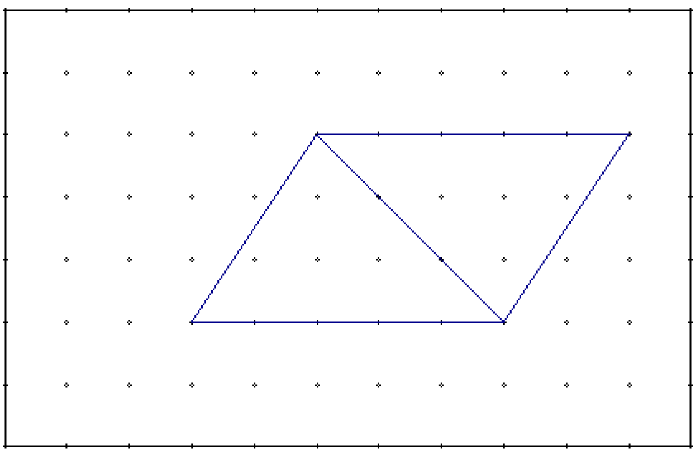


Figura 7 – Traçado de uma das diagonais do paralelogramo

Note que a área do paralelogramo, assim como a área do retângulo construído, é igual à medida da medida da base multiplicada pela altura. Então, a área de cada um dos triângulos obtidos também será igual à metade da medida da base multiplicada pela altura.

O aluno deve construir vários paralelogramos, calcular a área dos triângulos formados, para se convencer de que a área de um triângulo qualquer é sempre metade da área do paralelogramo, construído a partir desse triângulo, ou seja, metade da medida da base multiplicada pela altura.

Atividade para verificação da aprendizagem 12

Usando o geoplano, considere um triângulo retângulo. A partir desse triângulo, construa um retângulo, de modo que esse triângulo seja metade do retângulo construído (Figura 8).

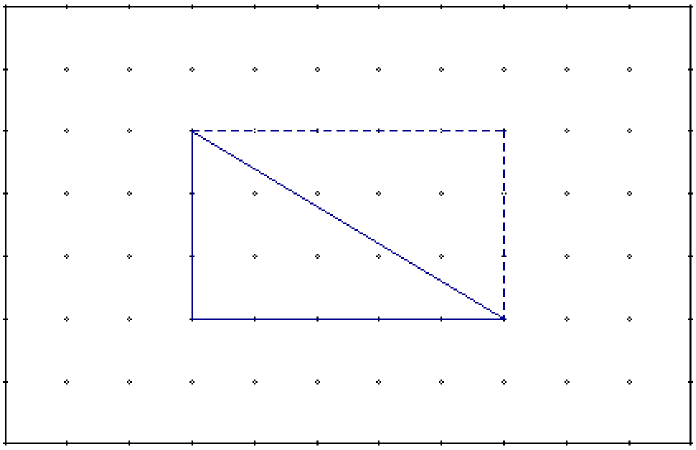


Figura 8 – Construção de um retângulo a partir de um triângulo retângul

A área de cada um dos triângulos obtidos será igual à metade da medida da base multiplicada pela altura.

Atividade para verificação da aprendizagem 13

Construa, no geoplano, um triângulo qualquer. A partir desse triângulo, construa um paralelogramo, de modo que esse triângulo seja metade do paralelogramo construído, como na figura, a seguir (Figura 9).

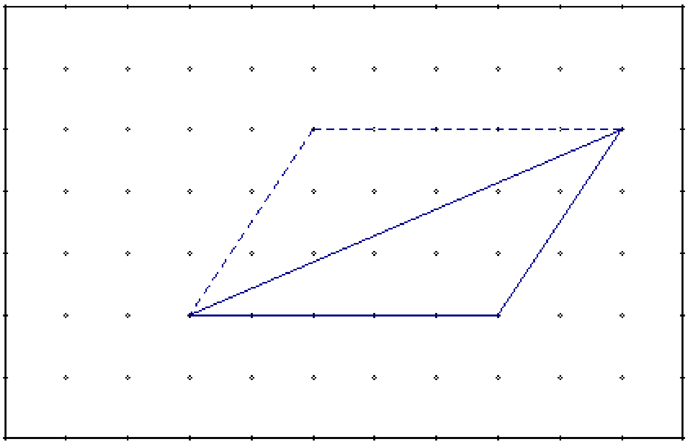


Figura 9 – Construção de um paralelogramo, a partir de um triângulo qualquer

Calcule as áreas dos triângulos e do paralelogramo. Qual a relação da área do paralelogramo com as áreas dos triângulos?

O aluno deve construir vários paralelogramos, a partir dos diferentes tipos de triângulos, para se convencer de que a área do triângulo é sempre metade da área do paralelogramo, construído a partir do triângulo.

O objetivo das duas últimas atividades é levar o aluno a compreender que a área de um triângulo qualquer é metade da área de um paralelogramo.

Exercício Resolvido 9

Construa um trapézio de bases medindo 9 e 5 unidades, respectivamente, e altura igual a 3 unidades, como o da figura abaixo (Figura 10).

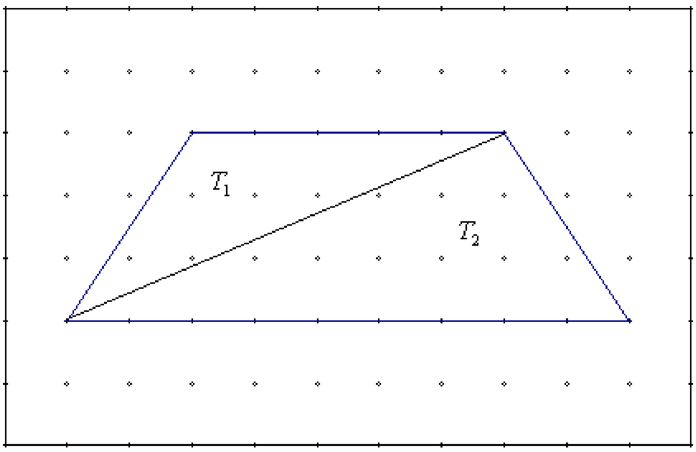


Figura 10 – Construção de um trapézio

Responda, agora, as seguintes questões:

a) Qual é a área do trapézio?

b) Traçando uma das diagonais do trapézio, obteremos dois triângulos e , como na figura 10, que, nesse caso, não serão congruentes. Qual é a área de cada um desses triângulos?

c) Qual a relação entre a área do trapézio e a área dos dois triângulos construídos?

d) Utilizando a relação de área de triângulos, qual a relação (generalização) que podemos estabelecer para calcular a área desse trapézio, a partir das medidas de suas bases e altura?

Solução: Para responder o item (a), você pode, por exemplo, dividir o trapézio em dois triângulos retângulos e um retângulo, obtendo 21 unidades de área. Respondendo o item (b), você obteve, respectivamente,

usando o resultado do item (a) desta atividade, 21u.a., as áreas dos triângulos T_1 e T_2 como $\frac{1}{2}(5 \times 3)$ e $\frac{1}{2}(9 \times 3)$. Respondendo

o item (c), você observa que a área do trapézio é dada também pela soma das áreas dos dois triângulos construídos no item (b), ou seja, $\frac{1}{2}(5 \times 3) + \frac{1}{2}(9 \times 3)$, isto é, $\frac{1}{2}(5 + 9) \times 3$, que é 21. Em outras palavras, a área do trapézio é metade do produto da soma das bases (que são 5 e 9), pela altura (que é 3) do trapézio.

O aluno deve construir vários trapézios e calcular as áreas, da forma proposta, para se convencer de que a área de qualquer trapézio é sempre metade da medida da altura multiplicada pela soma das medidas das bases.

Exercício Resolvido 10

Construa um quadrilátero no geoplano. Como calcular a área desse quadrilátero, tendo como unidade de área o quadradinho do geoplano?

Observação: Você pode contar quantos desses quadradinhos formam o quadrilátero. Mas você também pode dividir o quadrilátero em dois triângulos e calcular a área do quadrilátero como sendo a soma das áreas dos dois triângulos. Seguindo essa mesma ideia, você pode encontrar a área de um polígono plano qualquer, decompondo a região delimitada pelo polígono e calculando a soma das áreas das regiões triangulares.

2.3. Outras propriedades que podem ser abordadas usando o Geoplano

I) Dados dois números inteiros positivos, a e b, podemos, usando o geoplano, estabelecer o produto notável $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, como pode ser observado na figura, a seguir (Figura 11).

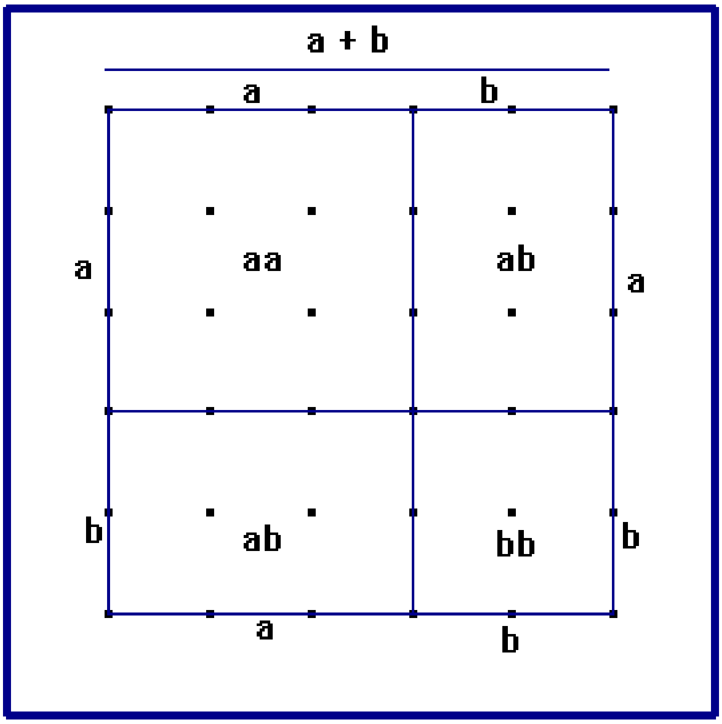


Figura 11 – Representação geométrica do produto notável (a + b)2

Embora a demonstração anterior da igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ tenha sido feita considerando *a* e *b* números inteiros positivos, ela também é verdadeira, quando esses números são inteiros negativos, ou nulos; racionais, irracionais, ou números complexos.

II) Dados dois números inteiros positivos *a* e *b*, com $a > b$, podemos, usando o geoplano, estabelecer o seguinte produto notável $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, como pode ser observado na figura, a seguir (Figura 12):

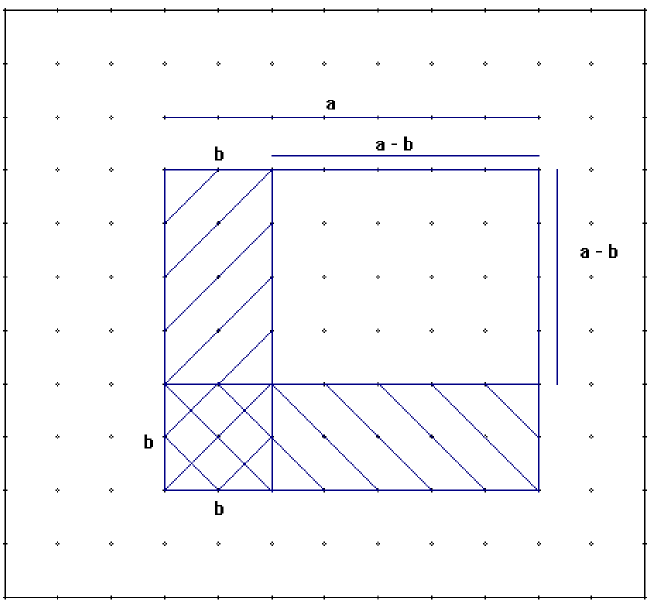


Figura 12 - Representação geométrica do produto notável (a - b)²

A conclusão da igualdade acima segue diretamente da figura. Entretanto, outra forma de observar a igualdade é a seguinte: usando a figura acima construída no geoplano, temos que

$$a^2 = (a - b)^2 + b^2 + 2b(a - b).$$

Dessa equação, temos que

$$a^2 = (a - b)^2 + b^2 + 2ab - b^2.$$

Ou seja,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Embora a demonstração anterior da igualdade $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ tenha sido feita considerando a e b números inteiros positivos, ela também é verdadeira, quando esses números são inteiros negativos, ou nulos; racionais, irracionais, ou números complexos.

III) Dados dois números inteiros positivos a e b, com $a > b$, podemos, usando o geoplano, estabelecer o seguinte produto notável $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, como pode ser observado na figura, a seguir (Figura 13).

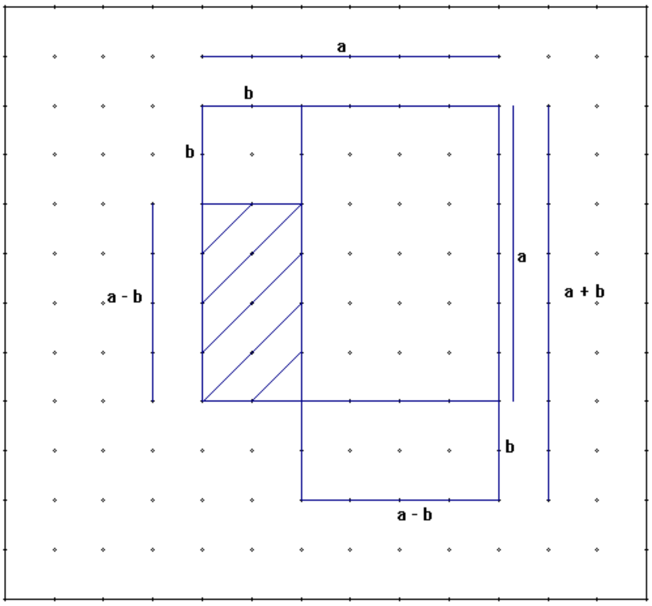


Figura 13 - Representação geométrica do produto notável (a + b) (a – b)

A conclusão da igualdade acima segue diretamente da figura. Entretanto, uma outra forma de observar a igualdade é a seguinte: usando a figura acima construída no geoplano, temos que

$$a^2 + (a - b)b = b^2 + 2(a - b)b + (a - b)a.$$

Dessa equação, temos que

$$a^2 - b^2 = (a - b)b + (a - b)a = (a - b)(a + b).$$

Ou seja,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Embora a demonstração anterior da igualdade $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ tenha sido feita considerando a e b números inteiros positivos, ela também é verdadeira, quando esses números são inteiros negativos, ou nulos; racionais, irracionais, ou números complexos.

IV) Considere um triângulo ABC retângulo, tendo $\hat{A}$ como ângulo reto, com a hipotenusa medindo 5 unidades de comprimento, e os catetos medindo, respectivamente, 4 e 3 unidades de comprimento. Construa quadrados, tendo como lado cada um dos lados do triângulo, como mostra a figura 13, a seguir, construída no geoplano. Observando a área dos quadrados construídos, temos que a seguinte propriedade é satisfeita:

A área do quadrado, tendo como lado a hipotenusa, é igual a soma das áreas dos quadrados, tendo como lados cada um dos catetos. Ou seja, a seguinte igualdade é estabelecida, $5^2 = 3^2 + 4^2$.

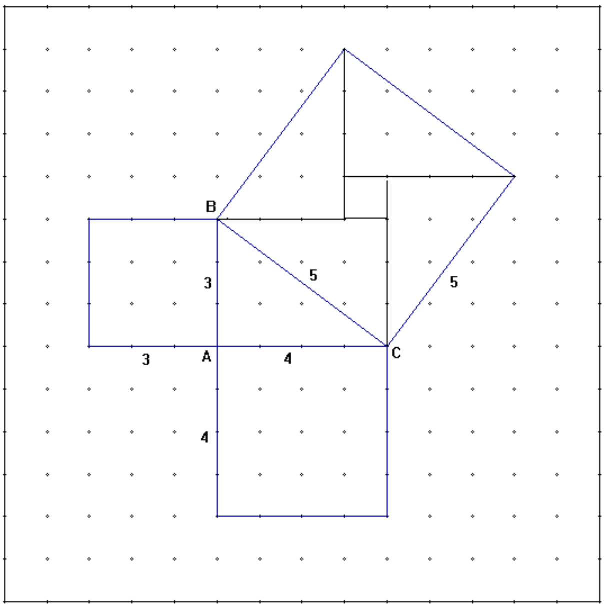


Figura 14 – Caso particular do Teorema de Pitágoras

A propriedade observada, a partir da figura anterior, pode ser generalizada da seguinte forma: dado um triângulo retângulo qualquer, com a hipotenusa e os catetos medindo, respectivamente, a, b e c, tem-se $a^2 = b^2 + c^2$, figura 15, a seguir. Esta igualdade é conhecida como **Teorema de Pitágoras**.

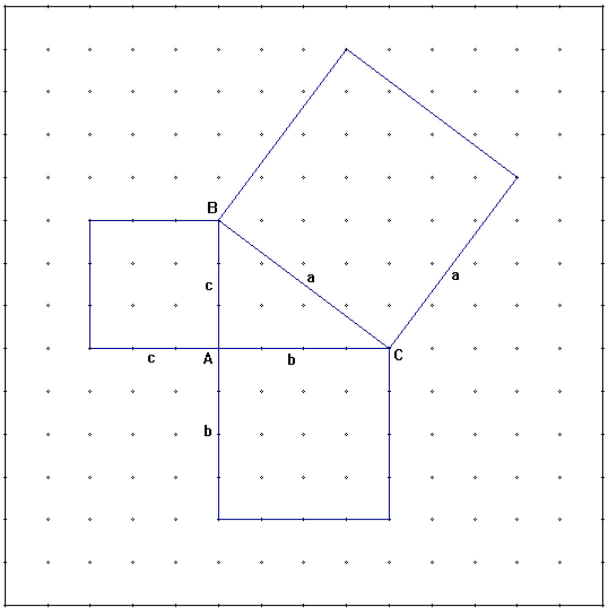


Figura 15 - Teorema de Pitágoras

V) Comparação entre a média aritmética e a média geométrica, a partir do geoplano.

Dados dois números positivos, *a* e *b*, a média aritmética e a média geométrica desses números são definidas, respectivamente, pelos números $\frac{a+b}{2}$ e $\sqrt{ab}$ e satisfazem a seguinte relação: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

De fato, quando *a* e *b* são números inteiros positivos, com $a > b$, a figura, a seguir, permite observar que a área do quadrado de lado $a + b$ é maior ou igual à área de quatro retângulos iguais de dimensões *a* e *b*, ou seja, $(a+b)^2 \geq 4ab$, já que, observando a área, a seguinte igualdade é concluída $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$ (Figura 16).

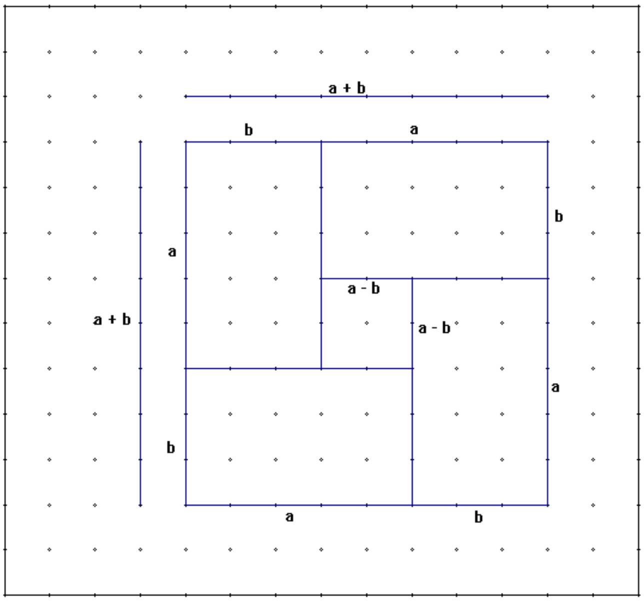


Figura 16 – Representação geométrica dos quadrados das médias aritmética e geométrica

Como a desigualdade $(a+b)^2 \geq 4ab$ é equivalente a $(\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$ e sabemos que a e b são números positivos, extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, temos que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

As figuras construídas nesta seção, usando o geoplano, podem ser reproduzidas, por exemplo, utilizando cartolina. Deixamos como tarefa essa atividade.

DICAS:

Para o uso do geoplano em atividades com números racionais, veja a Revista do Professor de Matemática, nº 57.

Para outros modelos de geoplanos, consulte, por exemplo, o trabalho presente no endereço http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf.

MATERIAIS BÁSICOS PARA UM LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA - LEM

Objetivos:

- Identificar materiais que podem fazer parte de um LEM.
- Produzir material para o LEM.
- Elaborar material didático para trabalhar conteúdos de matemática.
- Utilizar material do LEM no ensino de matemática, em sala de aula.

Agenda do Módulo 3 - Materiais básicos para um laboratório de ensino de matemática (20 horas)

Atividade	Desenvolvimento do conteúdo	Avaliação
Atividade 9 – Leitura do Guia de Estudos	Leitura do Módulo 3 do Guia de Estudos.	
Atividade 10 – Pesquisa	Você sabe como somar, subtrair, multiplicar e dividir usando ábaco? Faça uma pesquisa, a fim de encontrar uma resposta para essa pergunta e elabore uma proposta para o ensino dessas operações fundamentais usando esse instrumento. Lembre-se que você pode utilizar o *Fórum de Discussão* para compartilhar conhecimentos ou dúvidas com seu tutor e colegas.	Atividade de **Avaliação** no AVA: 4 pontos
Atividade 11 – Vídeos	Assista aos vídeos sobre Tangram, disponíveis em http://www.youtube.com/watch?v=2EleXEqP5iE, http://www.youtube.com/watch?v=MIg5NBBnZVc e http://www.youtube.com/watch?v=aTAl9Q9X3_s e faça as anotações que julgar necessárias para prosseguir seus estudos.	
Atividade 12 – Tarefa	Escolha um dos materiais que acabamos de estudar e crie uma proposta de atividade que possa ser utilizada em um Laboratório de Ensino objetivando o desenvolvimento de um conteúdo matemático. Para tanto, não se esqueça de elencar: f) Tema (conteúdo, objetivo, resultados esperados); g) Ano a ser proposta a atividade; h) Materiais a serem utilizados; i) Desenvolvimento das atividades; j) Possível proposta de avaliação. Poste a atividade elaborada no AVA para que possa ser avaliada. **OBSERVAÇÃO:** Esta atividade pode ser feita em duplas, mas cada aluno deverá postar o seu arquivo.	Atividade de **Avaliação** no AVA: 8 pontos

3.1 Materiais didáticos “básicos” para um LEM

Neste Módulo, vamos refletir sobre alguns materiais didáticos “básicos” que podem fazer parte de um LEM; em seguida, veremos um breve histórico de alguns desses materiais e de seus usos em sala de aula.

Refletiremos, também, sobre a intencionalidade do professor ao utilizar algum desses materiais em suas atividades didáticas.

Nossa proposta, aqui, é auxiliá-lo a prosseguir na direção de implementação/construção de um LEM, para trabalhar conteúdos de matemática dos ensinos fundamental e médio.

De acordo com Lorenzato (2006), existem diversos tipos de LEM, em função dos seus diferentes objetivos e concepções. Esse autor apresenta uma lista de sugestões de materiais, instrumentos ou equipamentos que pode ser a base para a constituição de muitos LEM, cada um adaptado ao contexto em que estiver inserido. São eles:

- livros didáticos;
- livros paradidáticos;
- livros sobre temas matemáticos;
- artigos de jornais e revistas;
- problemas interessantes;
- questões de vestibulares;
- registros de episódios da história da matemática;
- ilusões de ótica, falácias, sofismas e paradoxos;
- jogos;
- quebra-cabeças;
- figuras;
- sólidos;
- modelos estáticos ou dinâmicos;
- quadros murais ou pôsteres;
- materiais didáticos industrializados;
- materiais didáticos produzidos pelos alunos e professores;
- instrumentos de medida;
- transparências, fitas filmes e softwares;
- calculadoras;
- computadores;
- materiais e instrumentos necessários à produção de materiais didáticos. (LORENZATTO, 2006, p.11).

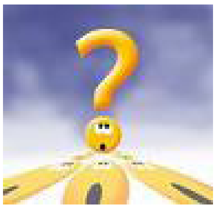
A implementação/construção de um laboratório, segundo o autor, não é objetivo para ser atingido a curto prazo. E, uma vez construído, demanda constante complementação, que exige do professor manter-se atualizado.

Embora a lista apresentada seja, a princípio, um tanto extensa, é importante termos em mente que o LEM deve estar sempre em processo de construção. Neste momento, vale lembrar o seguinte pensamento apresentado, no “para começo de conversa”: Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível e, de repente, você estará fazendo o impossível. Você pode seguir o pensamento citado, não necessariamente na mesma ordem. Pode, por exemplo, começar fazendo o que é possível, em seguida, verá o que é necessário fazer e, por fim, chegará a realizar coisas que pareciam impossíveis.

Alguns dos itens da lista proposta dependem obviamente de recursos que, muitas vezes, não são possíveis de serem disponibilizados, de modo imediato como, por exemplo, os três primeiros itens. Entretanto, a maioria pode ser construída com baixo custo, além de produzida pelos próprios alunos. Para isso, é necessário estarmos atento às nossas intenções, quando planejarmos nossas atividades para a sala de aula, ou em outro momento de leitura e/ou reflexões sobre o ensino-aprendizagem da matemática.

A seguir, trataremos de alguns materiais didáticos, não necessariamente explícitos na lista. Começaremos abordando sofismas, falácias e paradoxos; ilusão de ótica e quebra-cabeças, que podem ser apresentados aos jovens, para que se apoderem da dedução lógica, com o objetivo de perceberem que conclusões baseadas, apenas na intuição ou naquilo que se vê, podem contrapor-se ao que o raciocínio lógico dedutivo aponta como verdadeiro. Lorenzato (2006) acrescenta que esse raciocínio dedutivo é fundamental para todos os estudos posteriores, pois ele permite-nos distinguir aquilo que parece ser verdadeiro do que é realmente verdadeiro.

3.2 Sofismas, Falácias e Paradoxos; Ilusão de Ótica; Quebra-Cabeças



Você já parou para pensar o que são sofismas, falácias e paradoxos?

Segundo o dicionário Aurélio (2004, p.1867)[1]:

> **Sofisma**, em lógica, é um argumento que parte de premissas verdadeiras, ou tidas como verdadeiras, e chega a uma conclusão inadmissível, que não pode enganar ninguém, mas que se apresenta como resultante das regras formais do raciocínio; falácia.

Se buscarmos o conceito de falácia, na Wikipedia[2], temos:

> Uma **falácia** é um argumento logicamente inconsistente, sem fundamento, inválido ou falho na capacidade de provar eficazmente o que alega. Argumentos que se destinam à persuasão podem parecer convincentes para grande parte do público apesar de conterem falácias, mas não deixam de ser falsos por causa disso. Reconhecer as falácias é por vezes difícil. Os argumentos falaciosos podem ter validade emocional, íntima, psicológica ou emotiva, mas não validade lógica.

No dicionário da língua portuguesa, Houaiss (2007, p.2127)[3], paradoxo vem definido como:

> um raciocínio aparentemente bem fundamentado e coerente, embora esconda contradições decorrentes de uma análise insatisfatória de sua estrutura interna.

Em outras palavras, paradoxo é uma declaração que parece ser verdadeira, entretanto, leva a uma contradição lógica.

A seguir, apresentamos alguns **sofismas**, **falácias** e **paradoxos**, além de algumas ilusões de ótica.

1. Como $3 - 3 = 4 - 4$, então, $3(1 - 1) = 4(1 - 1)$, cancelando o fator comum $(1 - 1)$, obtém-se $3 = 4$. De modo análogo, dados dois números reais, a e b, segue que $a - a = b - b$. Então, $a(1 - 1) = b(1 - 1)$, cancelando o fator comum $(1 - 1)$, obtém-se $a = b$. Qual a razão de você ter concluído essa contradição? A resposta para essa pergunta é que, ao você cancelar o fator comum, na realidade, você dividiu os dois lados da igualdade por $(1 - 1)$, que é zero. Ou seja, você multiplicou ambos os lados da equação pelo número $(1 - 1)^{-1}$, mas $1 - 1 = 0$ e 0 não possui inverso multiplicativo. Em outras palavras, esta operação não é admissível, segundo as regras usuais de operações com número reais.

1 FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo dicionário da língua portuguesa. 3. ed. Curitiba: Positivo. 2004.
2 http://pt.wikipedia.org/wiki/Fal%C3%A1cia. Acesso em 09/04/2010.
3 Editora Objetiva, Rio de Janeiro 2007, 2ª reimpressão com alterações.

2. Monte um quadrado de lado medindo 8 cm, divida-o em dois trapézios e dois triângulos, conforme mostra a figura, a seguir (Figura 17):

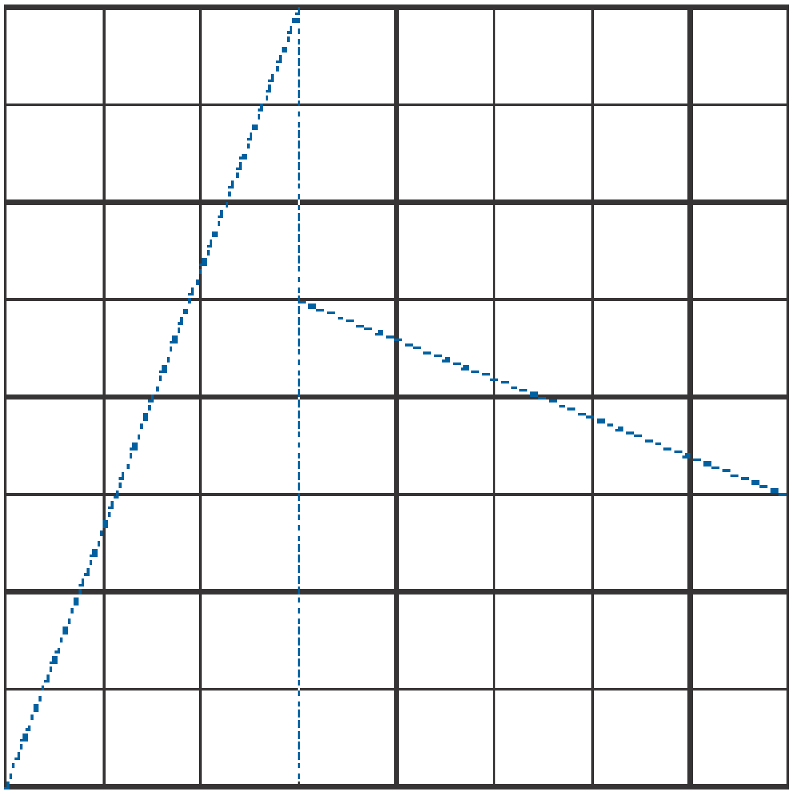


Figura 17 – Quadrado de lado 8 cm formado por dois triângulos e dois trapézios[4]

A área desse quadrado é 64 centímetros quadrados. Por outro lado, considere agora as mesmas quatro partes obtidas do quadrado, e monte um retângulo, conforme mostra a figura, a seguir (Figura 18):

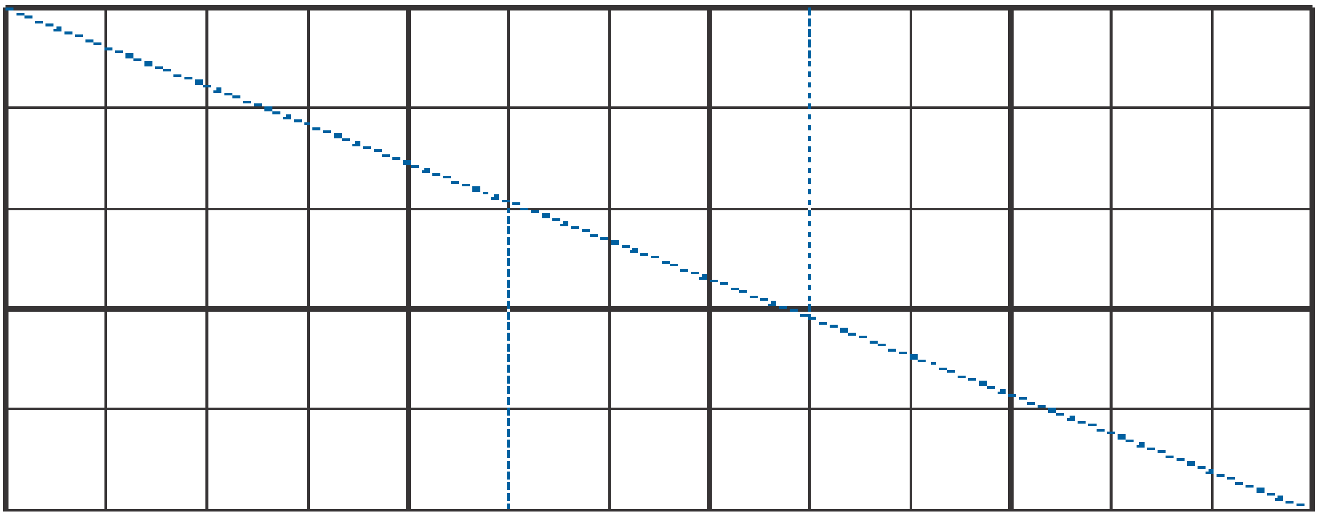


Figura 18 – Figura construída usando os polígonos da figura 17[5]

4 Fonte: Matemática divertida e curiosa, Malba Tahan, Editora Record, 2006, p.61.
5 Fonte: Matemática divertida e curiosa, Malba Tahan, Editora Record, 2006, p.61.

Desse modo, obtemos um retângulo, cuja área mede 65 centímetros quadrados. Assim, você concluiu que 64 = 65. Onde está a contradição?

A sutileza desse sofisma consiste no seguinte: as partes em que o quadrado foi decomposto não formam precisamente um retângulo. Pela posição em que deveriam ficar os dois segmentos que formam a suposta diagonal do retângulo, não são colineares. Há uma pequena diferença de ângulo, e entre os dois traços deveria ficar um espaço vazio, equivalente, precisamente, a um centímetro quadrado.

3. Observe a figura, a seguir (Figura 19):

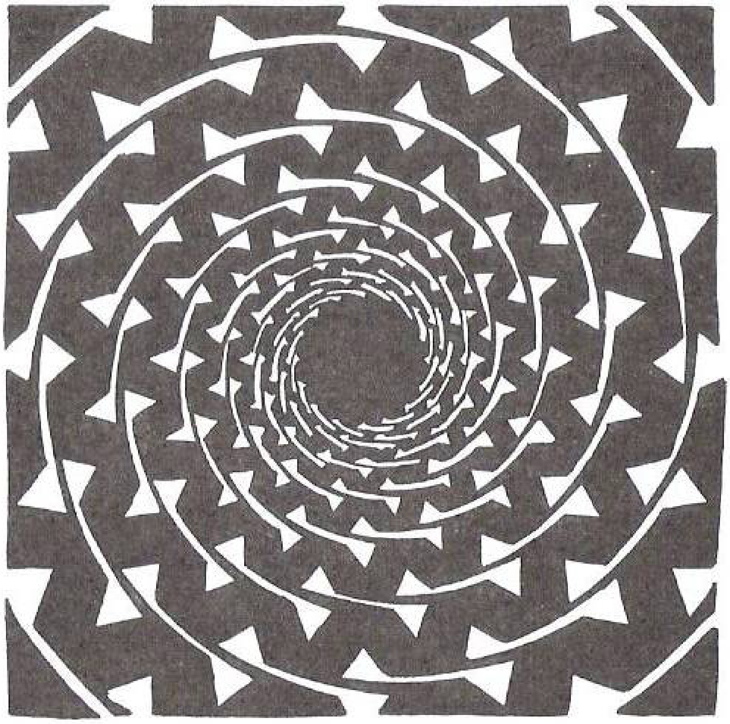


Figura 19 – Círculos concêntricos[6]

O que você vê?

Você viu que as curvas que nela aparecem são espirais perfeitas?

Pois isso não é verdade! A figura constitui uma ilusão de ótica. Todas as curvas do desenho são círculos concêntricos. Use o compasso para se convencer desse fato.

Como você pode observar, nem tudo que parece ser verdadeiro, é verdadeiro.

4. Observe com atenção a figura abaixo, na qual aparece um quadrilátero formado por dois paralelogramos. Em cada um desses paralelogramos, foi traçada uma diagonal (Figura 20):

6 Fonte: Matemática divertida e curiosa, Malba Tahan, Editora Record, 2006,p.11.

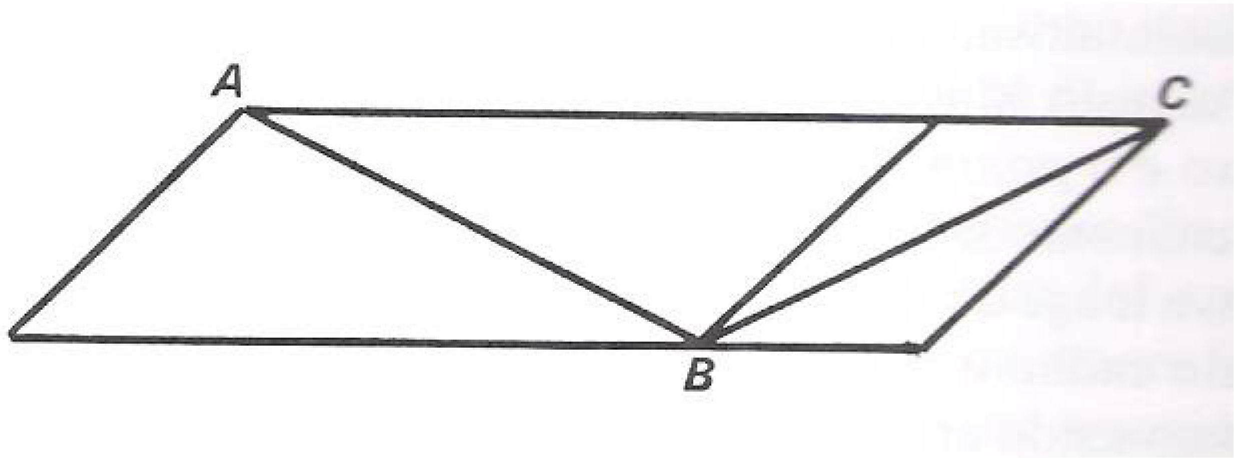


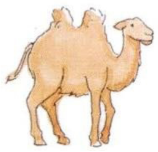
Figura 20 - Quadrilátero formado por dois paralelogramos[7]

Qual das duas diagonais AB ou BC é a maior?

Você pensou que AB é a maior? Pois isso não é verdade! Elas são iguais, use um compasso para se convencer disso.

5. Você conhece a aventura dos 35 camelos que deviam ser repartidos para três árabes, contada por Malba Tahan? Essa história pode ser encontrada no livro, "O Homem que Calculava", de Malba Tahan, 73ª edição, Rio de Janeiro: Record, 2008.

Vamos a essa aventura...



Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista.

Encontramos perto de um antigo caravançará[8], meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:

- Não pode ser!

- Isto é um roubo!

- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

- Somos irmãos: - esclareceu o mais velho – e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, meu irmão, Hamed Namir, uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 não são exatas?

7 Fonte: TAHAN, Malba. *Matemática divertida e curiosa*. Editora Record, 2006, p.52.
8 Refúgio construído pelo governo ou por uma pessoa piedosa à beira do caminho, para servir de abrigo aos pelegrinos. Espécie de rancho de grandes dimensões em que se acolhiam as caravanas.

-É muito simples – atalhou o homem que Calculava. - Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança esse belo animal que, em boa hora aqui nos trouxe!

Neste momento, procurei intervir na questão:

- Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem, se ficássemos sem o camelo?

- Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali – replicou-me em voz baixa Beremiz. – sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.

Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal[9], que, imediatamente foi reunido aos 35 camelos ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

- Vou, meus amigos – disse ele, dirigindo-se aos três irmãos -, fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como veem, em número de 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou: - Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é 17 e meio. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão!

E dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

- E tu, Hamed Namir, devias receber um terço de 35, isto é, 11 e um pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois tu saíste com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao mais moço:

-E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de seu pai, deverias receber uma nona parte de 35 camelos, isto é, 3 e um tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!

E concluiu com a maior segurança e serenidade:

- Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir – partilha em que todos três saíram lucrando – couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18 + 12 + 4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto dois. Um pertence, como sabem, ao bagdali, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

- Sois inteligente, ó Estrangeiro! – Exclamou o mais velho dos três irmãos. – Aceitamos a vossa partilha na certeza que foi feita com justiça e equidade!

E o astucioso Beremiz – o Homem que Calculava – tomou logo posse de um dos mais belos “jamales” do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

- Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim! E continuamos nossa jornada para Bagdá.

Você descobriu porque Beremiz conseguiu fazer a divisão e ainda sobraram dois camelos?

9 Uma das muitas denominações que os árabes dão ao camelo.

O total de 35 camelos, de acordo com o enunciado da história, deve ser repartido, pelos três herdeiros, do seguinte modo: o mais velho deveria receber a **metade** da herança, isto é, 17 camelos e meio; o segundo deveria receber **um terço** da herança, isto é, 11 camelos e dois terços; o terceiro, o mais moço, deveria receber **um nono** da herança, isto é, 3 camelos e oito nonos. Ou seja, de acordo com a partilha proposta, segue que o total a ser repartido é

$$17\frac{1}{2}+11\frac{2}{3}+3\frac{8}{9}=33\frac{1}{18}.$$

Esse resultado é menor do que os 35 camelos da partilha. Ou seja, feita a partilha, de acordo com as determinações do testador, haveria uma sobra.

6. Quebra-cabeças com palitos:

a) Considere 3 triângulos equiláteros, formados de palitos de picolés[10], como na figura abaixo (Figura 21):

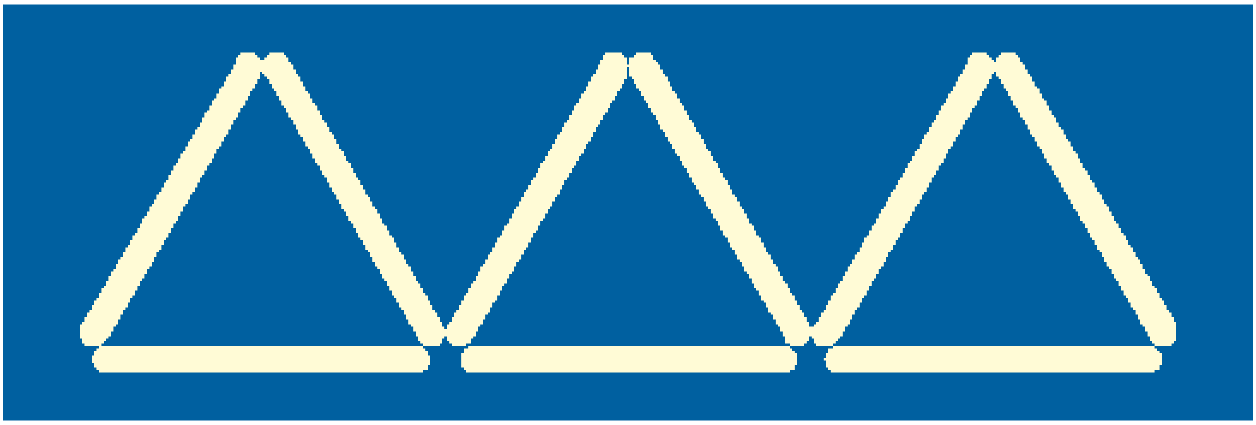


Figura 21 – Três triângulos equiláteros utilizando palitos

Agora, mexendo apenas 2 palitos, forme 4 triângulos.

Descobriu a resposta? Eis a resposta na figura 22:

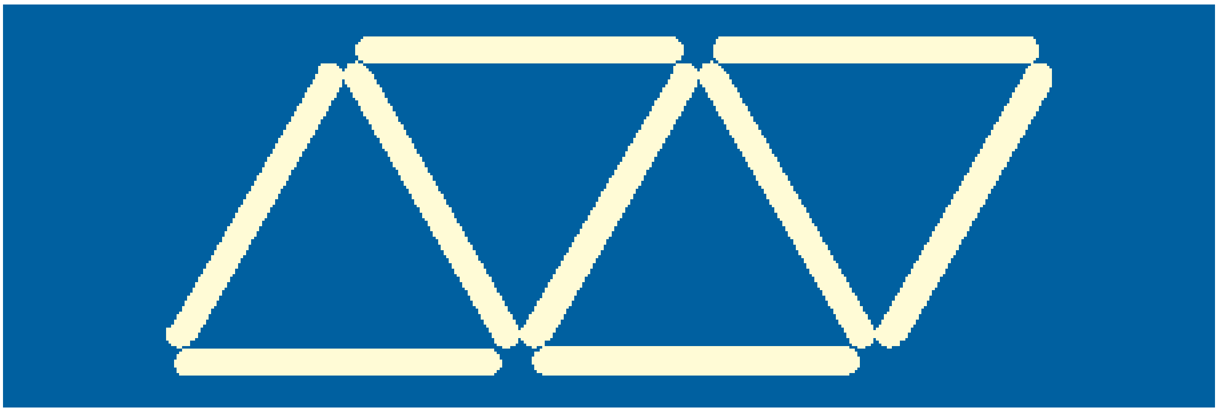


Figura 22 – Quatro triângulos equiláteros utilizando palitos

b) A figura abaixo foi construída com 12 palitos (Figura 23):

10 IMENES, Luiz Marcio. *Problemas curiosos*. Coleção vivendo a matemática. São Paulo: Scipione, 1991.

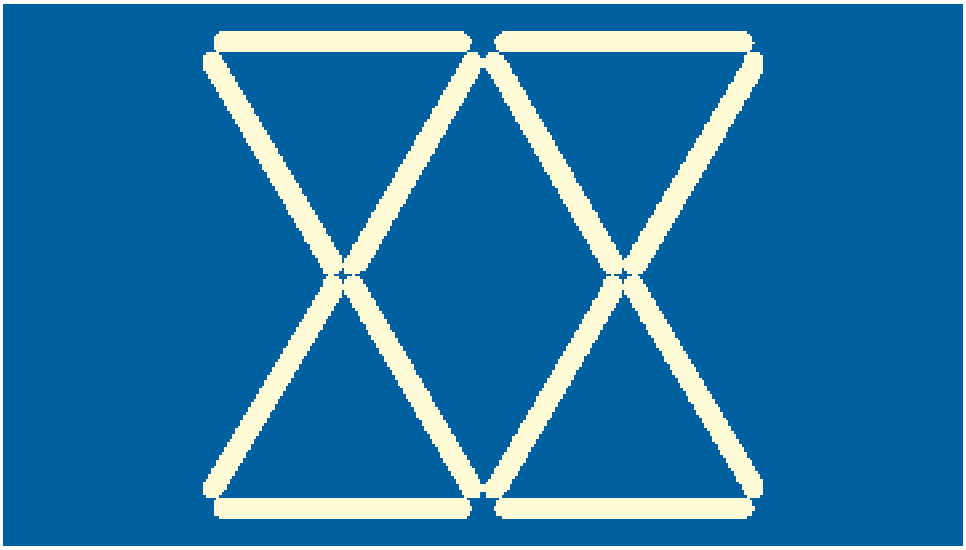


Figura 23 – Construção com 12 palitos

Movimentando apenas 4 palitos, obtenha 6 triângulos equiláteros iguais.

Descobriu a resposta? Eis a figura (Figura 24):

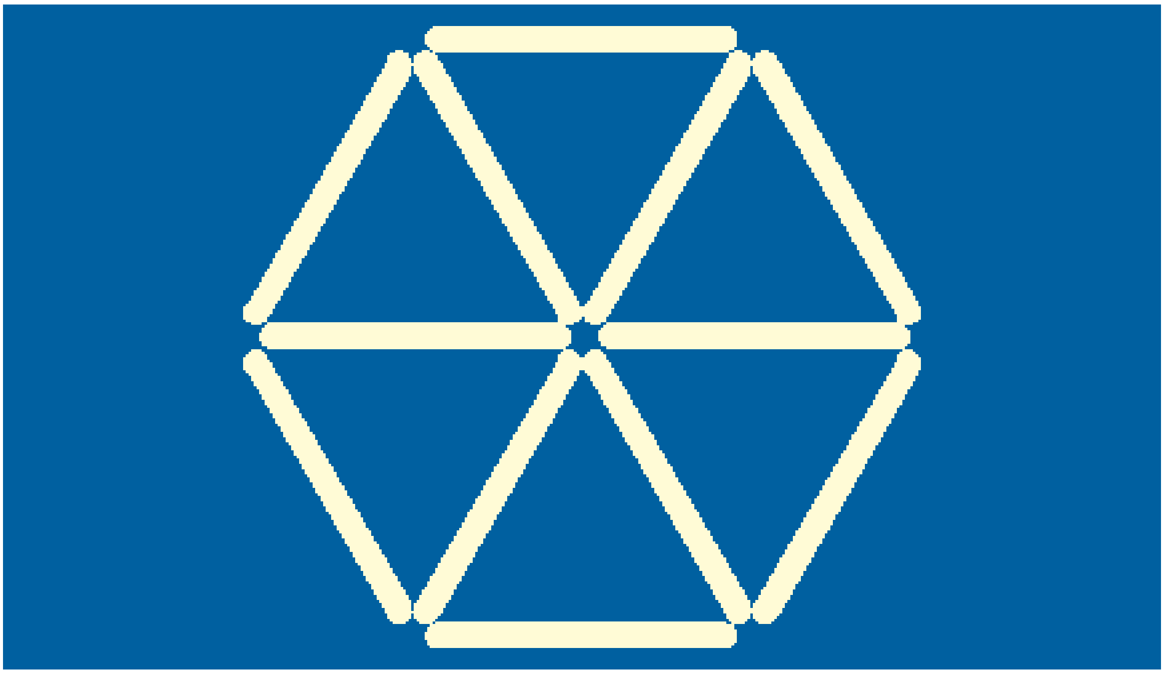


Figura 24 - Seis triângulos equiláteros

3.3. Outros materiais didáticos

3.3.1 O ábaco

Ao longo da história, há registros de que, para contar, o homem utilizava pedrinhas, seus próprios dedos, fazia riscos no chão, marcas em ossos, pedaços de pau, placas de barro e até nós em cordões (IMENES, 2001).

Para auxiliar nos cálculos, os homens criaram vários instrumentos, dentre eles, destaca-se o **ábaco**, pela sua simplicidade e eficiência.

No Japão, o ábaco é conhecido como soroban; já na China, por suànpan, que significa bandeja de calcular. Segundo Imenes (2001), esse instrumento foi usado por muitas civilizações antigas, do Ocidente e do Oriente, para efetuar cálculos. Embora existam muitos tipos diferentes de ábaco, em princípio, todos são equivalentes. Veja três deles:

Figura 25 – Ábaco de haste[11]

Figura 26 - Ábaco[12]

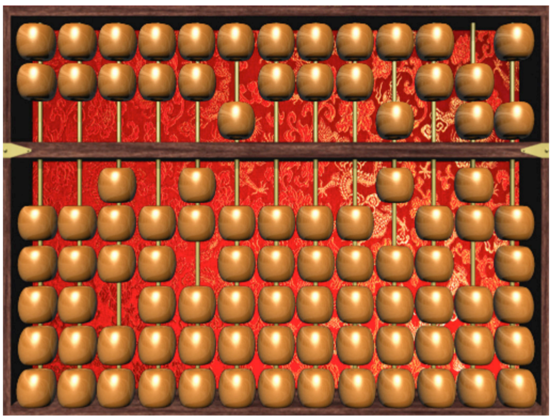
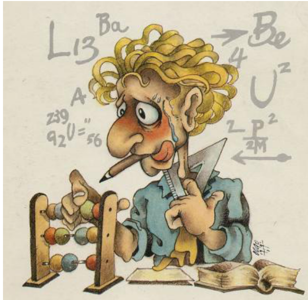


Figura 27 - Ábaco chinês ou Suan pan[13]

11 Fonte: http://vitoriamkt.files.wordpress.com/2010/02/2011custom.jpg, acesso em 08/03/2010.
12 Fonte: http://educar.sc.usp.br/matematica/l2t3.htm, acesso em 09/04/2010.
13 Fonte: http://a1.phobos.apple.com/us/r1000/054/Purple/66/a5/a0/mzl.vxoligaf.1024x1024-65.jpg, acesso em 28/05/2009.

Atividade 10



Você sabe como somar, subtrair, multiplicar e dividir usando ábaco?

1. Faça uma pesquisa, a fim de encontrar uma resposta para essa pergunta e elaborar uma proposta para o ensino dessas operações fundamentais usando esse instrumento. Lembre-se que você pode utilizar o *Fórum de Discussão* para compartilhar conhecimentos ou dúvidas com seu tutor e colegas.

3.3.2 O algeplan

Você conhece ou já ouviu falar em Algeplan? Sabe para que ele serve? Como ele é utilizado?

A seguir, trataremos de modo breve essas perguntas e deixaremos como atividades, para serem realizadas em grupos, as respostas de modo mais preciso, principalmente, para a terceira pergunta: como usar efetivamente esse material em sala de aula?

O Algeplan é um material didático, formado por 40 peças, constituído de quadrados e retângulos e seu uso está relacionado ao ensino de expressões algébricas, monômios, polinômios e fatoração de trinômios de segundo grau.

Figura 28 – Algeplan[14]

Esse material pode ser adquirido em lojas especializadas (em madeira) ou pode ser confeccionado em cartolina ou EVA.

Para uma abordagem mais ampla sobre o uso desse material no ensino e aprendizagem de polinômios, sugerimos a leitura do trabalho de conclusão de curso de Camila Pasquetti, intitulado Proposta de

14 Fonte: http://www.bambolecia.com.br/loja/product_images/b/ref.321_algeplan__82948.jpg, acesso em 16/06/2011.

aprendizagem de polinômios através de material concreto[15], além das referências nele contidas.

Outras referências sobre o uso do algeplan podem ser encontradas nos trabalhos *O algeplan como um recurso didático na exploração de expressões algébricas e fatoração*[16] e *O conhecimento algébrico que os alunos apresentam no início do curso de licenciatura em matemática: um olhar sob os aspectos da álgebra elementar*[17].

É importante observar que nosso objetivo, nesta disciplina, e mais especificamente neste item, não é fazer uma análise de como foi e é trabalhado o ensino de álgebra, mas a partir da experiência de outros professores, levar a prática do uso do algeplan para a sala de aula, nas escolas cujos futuros professores participam deste curso de graduação.

3.3.3 O tangram

Você sabe o que é o tangram? Como usá-lo em atividades de alguns conteúdos de matemática?

Segundo Oliveira (2007), o Tangram é um quebra-cabeça chinês, de origem milenar, formado por 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo). Com essas peças, é possivel criar e montar mais de 1700 figuras, entre pessoas, animais, plantas e objetos. A regra principal do jogo é usar as sete peças em qualquer montagem, sem sobrepô-las e sem repetir as mesmas.

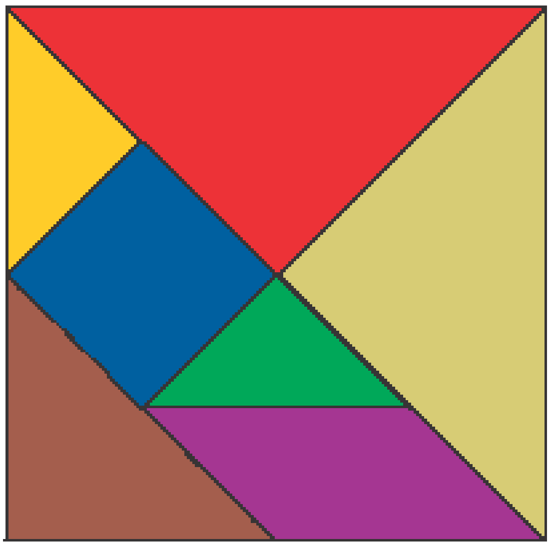


Figura 29 – Tangram

Segundo Oliveira (2007),

> No âmbito da matemática, o tangram pode ser usado na geometria, para criação de figuras, explorando suas propriedades, tais como no estudo de áreas e perímetros, redução e ampliação.
>
> Este jogo estimula a concentração, a orientação espacial, exercita a criatividade, estimula o interesse pelas formas geométricas, a criação de figuras, possibilita o desenvolvimento do

15 http://www.uri.com.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/845.pdf, acesso em 19/04/2010.
16 http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/minicursos.php, acesso em 01/05/2010.
17 http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/04/CC10940826860.pdf, acesso em 01/05/2010.

raciocínio geométrico. É também ótima diversão e poderá ser feito em grupos, socializando o ambiente escolar e desenvolvendo valores como: respeito, companheirismo, diálogo, equilíbrio das emoções, desenvolvendo uma consciência lúdica e apresentando um envolvente desafio a quem joga, além de ótimo atrativo para o desenvolvimento do senso artístico. (p.10).

A seguir, apresentamos algumas figuras que podem ser construídas, utilizando as sete peças do tangram (Figuras 30 e 31):

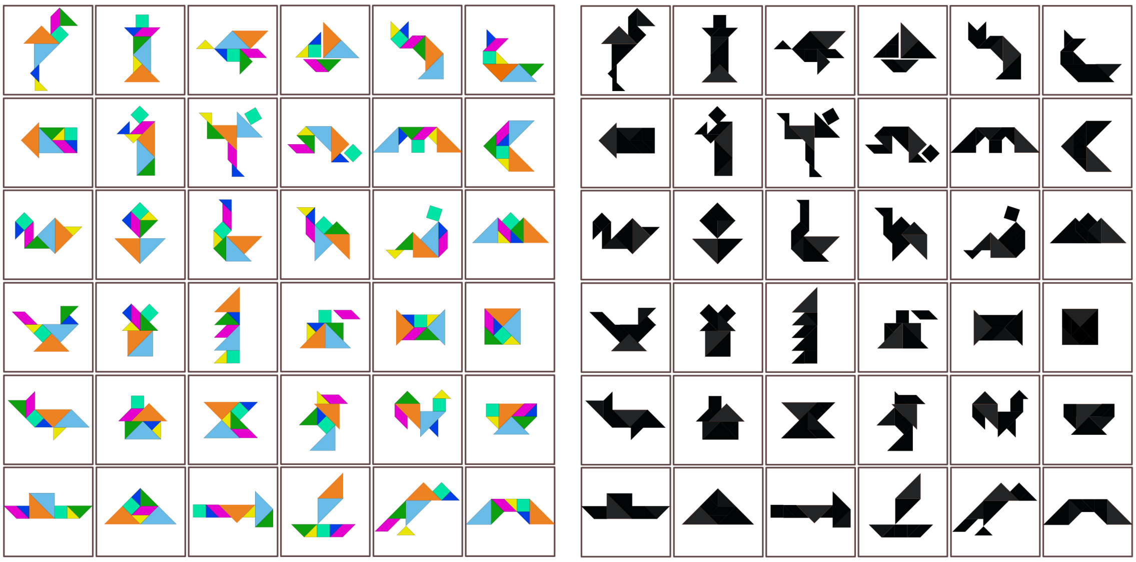


Figura 30 – Figuras construídas utilizando o tangram[18]

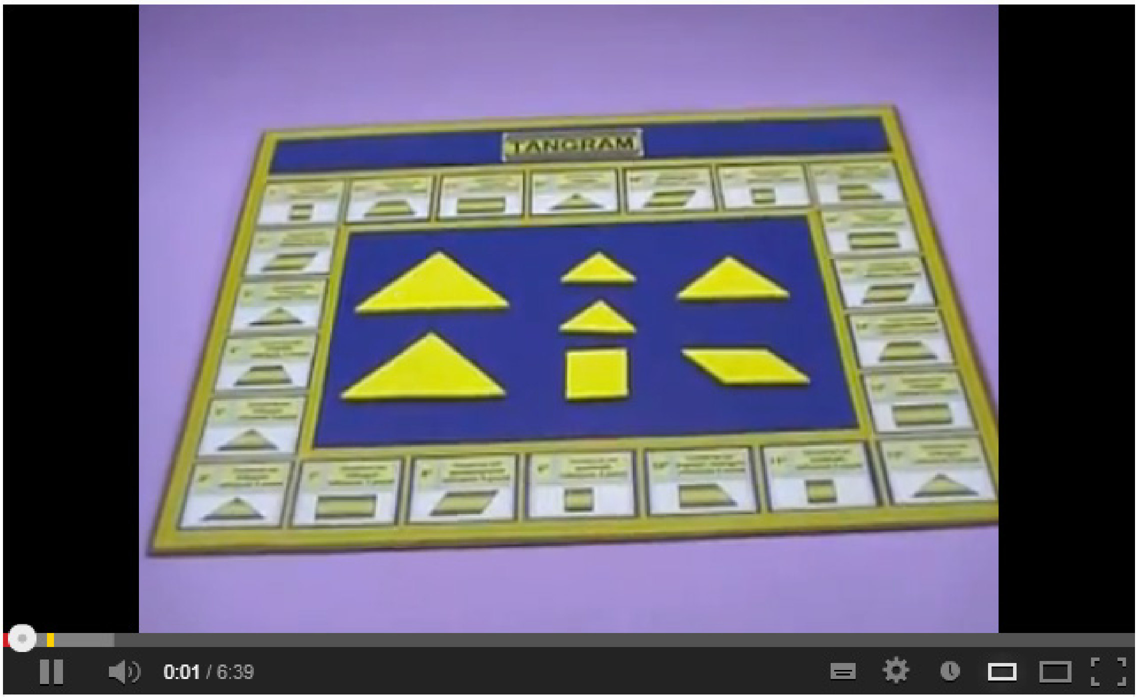
Figura 31- Outras figuras construídas utilizando o tangram[19]

18 Fonte: http://safvisuals.files.wordpress.com/2008/11/tangram_erwan_01-copy.jpg.
19 Fonte: http://2.bp.blogspot.com/_SQQUvKyRyGU/TNshAhTCNzI/AAAAAAAAAec/kt2q7DRNPmg/s1600/fig_tangram_01a.gif. Acesso em 01/05/2010.

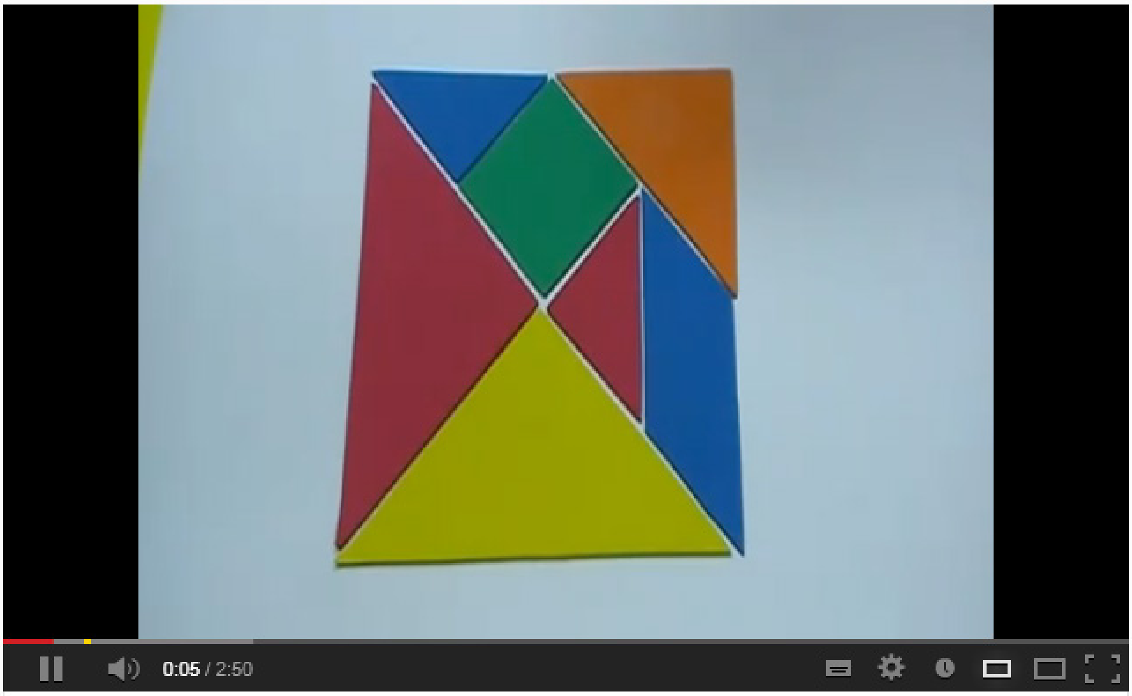
Atividade 11 – Vídeos

Para estimular ainda mais seu interesse pelo tangram, sugerimos que você assista a vídeos do youtube que demonstram a utilização deste recurso. Eis alguns links:

http://www.youtube.com/watch?v=2EleXEqP5iE



http://www.youtube.com/watch?v=MIg5NBBnZVc



http://www.youtube.com/watch?v=aTAl9Q9X3_s

Você pode encontrar inúmeros outros vídeos sobre o tangram para auxiliar seu trabalho.

Outras atividades com o tangram podem ser encontradas em:

- CRISTOVÃO, Eliane Matesco. Pelos Caminhos de uma nova experiência no ensino de geometria. In: FIORENTINI Dario; MIORIM, Maria Ângela (orgs.). *Por trás da porta, que matemática acontece?*. Campinas, SP: Editora Graf. FE/Unicamp – Cempem, 2001.

- OLIVEIRA, Durcilene Luiza de. *Uma Experiência com o tangram no estudo de geometria plana na 5ª série do ensino fundamental*. Monografia (Tabalho de Conclusão de Curso de Graduação). São João del-Rei, MG. UFSJ/DEMAT, 2007.

3.3.4 O Geoespaço

Você conhece ou já utilizou o geoespaço?

Nesta seção, faremos uma breve apresentação desse material, como construí-lo e como utilizá-lo para visualizar certos sólidos geométricos a fim de facilitar a compreensão de propriedades desses sólidos, estudadas em geometria espacial.

A partir do artigo, “Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática”[20], dos autores

20 In: LORENZATO, Sérgio (org.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

Rômulo Marinho do Rêgo e Rogéria Gaudencio do Rego, apresentamos o geoespaço que, segundo os autores supracitados:

> possibilita trabalhar com geometria espacial em sala de aula, com modelos tridimensionais, como destaca os autores citados, evitando-se recorrer apenas a figuras planas (no quadro ou livro) com representação de sólidos. (p.50).

O modelo proposto neste texto, segue o trabalho mencionado anteriormente e é construído utilizando uma base de madeira e quatro cantoneiras que dão sustentação a uma placa quadrada de acrílico transparente de 4 mm. Nos dois planos (base de madeira e placa de acrílico), são traçadas malhas quadriculadas com quadrados de 3cm de lado, em cujos vértices são fixados pequenos ganchos de cobre, utilizados pela indústria de mobiliário (e facilmente encontrados em casas de ferragens). Os esqueletos dos sólidos são construídos com ligas de borracha, presas entre os ganchos dos dois planos, delimitados por ligas que formam polígonos nas duas malhas quadriculadas, como pode ser observado nas figuras a seguir.

Figura 32 – Geoespaço
Fonte: Arquivo dos autores

Segundo os autores citados, através desse modelo:

> um simples deslocamento de um dos polígonos e das borrachas correspondentes possibilita a rápida transformação de um prisma reto em um prisma oblíquo de mesma base, tendo-se a visualização das vistas do poliedro facilitada pela transparência do acrílico, assim como a identificação e compreesão dos elementos que caracterizam um determinado tipo de sólido. Este modelo pode ser desmontável, facilitando seu transporte e armazenamento. (RÊGO e REGO, 2006, p.49).

3.3.5 O Geobloco

Um outro material que também permite a montagem de sólidos geométricos é o Geobloco (Figura 33):

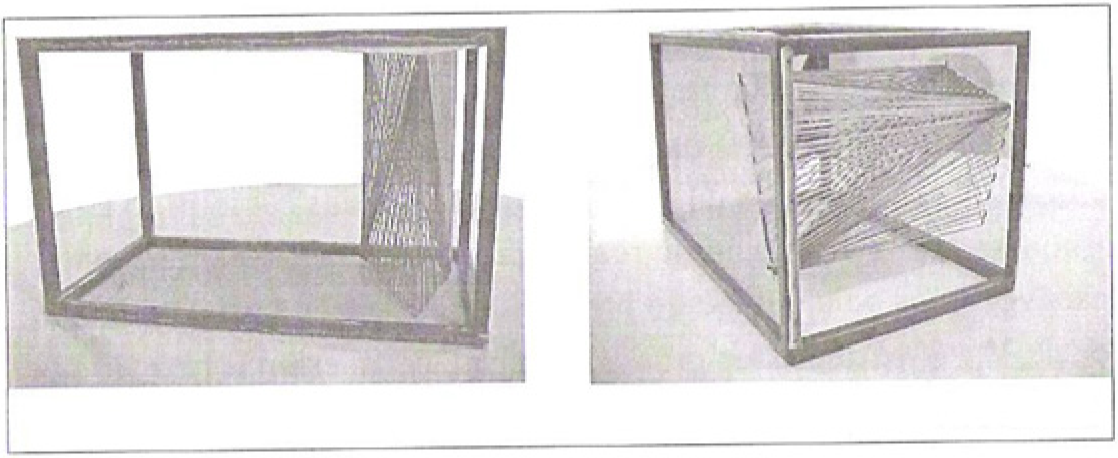


Figura 33 - Geobloco[21]

Segundo Bertoni e Gaspar (2006), esse material

> consta de um bloco retangular aberto, isto é, apenas as arestas são construídas e presas. Nas duas bases paralelas maiores, é colocada uma tela fina de náilon, de modo que fios de lã ou barbante podem passar de pontos de uma base para a outra. O geobloco permite, basicamente, a montagem de sólidos geométricos cuja altura coincide com a altura do bloco. Assim como o geoplano, ele possibilita o desenvolvimento de inúmeras atividades. Uma delas, por exemplo, foi a representação da decomposição de um prisma reto de base triangular em três pirâmides equivalentes, isto é, de mesma altura e bases equivalentes. (p.141).

Ainda de acordo com as pesquisadoras, a decomposição do prisma permite concluir que o volume de cada pirâmide é igual a um terço do volume do prisma que, por sua vez, é igual ao produto da medida da área de sua base triangular pela medida de sua altura.

3.3.6 Outros possíveis materiais para compor um Laboratório de Ensino de Matemática

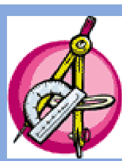
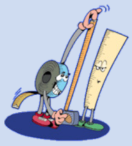
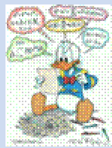
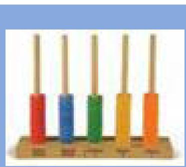
Lembramos também que, para atender a seus objetivos, é importante que o LEM esteja equipado com

amplo acervo de livros didáticos, paradidáticos, obras de interesse histórico, propostas curriculares, revistas científicas, registros de experiências, artigos para pesquisas e softwares educativos, assim como computadores

21 In: LORENZATO, Sergio (org.). *O Laboratório de Ensino de Matemátca na Formação de Professores*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

ligados a um sistema de busca pela internet. Tal acervo, intermediado por professor capacitado, certamente leva os alunos a terem uma atitude de investigação e, assim, cria-se a possibilidade de tornarem-se sujeitos críticos e criativos, participantes do seu próprio processo de aprendizagem. (LOPES; ARAÚJO, 2007, p.60)

Além dos materiais sugeridos por Lopes e Araújo (2007), podemos citar também:

• Materiais variados como: barbante, tesoura, elásticos, cartolinas, pregos, palitos, martelo, canetinhas hidrocor, papel sulfite, papel milimetrado, papel quadriculado, cola, lanterna, espelhos.	• Réguas • Compassos • Esquadros • Transferidores 
• Materiais de manipulação produzidos pelos próprios alunos e/ou professores.	• DVDs ou Fitas de vídeo.
• Sólidos geométricos.	• Televisão e DVD (ou vídeocassete).
• Instrumentos de medidas de diversas grandezas. 	• Problemas desafiadores e interessantes. 
• Ábacos. 	• Calculadoras. 
• Quebra-cabeças.	• Questões de vestibulares.
• Poliminós. 	• Computador(es).
• Geoplanos.	• *Softwares* matemáticos.

• Jornais, revistas, mapas.	• Blocos lógicos.
• Material Cuisenaire.	• Livros didáticos. • Livros paradidáticos. • Livros sobre temas matemáticos[22]. 
• Material dourado. 	
• Jogos.	• Dados. 

Outro recurso pedagógico, que muitos livros didáticos abordam, e que precisa ser melhor usado pelos alunos em sala de aula, são as dobraduras. Além de proporcionar uma experiência lúdica, provocam uma sensação de descoberta. Usando este instrumento, o aluno pode melhor compreender, por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180º. Para o uso de dobraduras, no ensino de vários conceitos de geometria plana, sugerimos a apostila Oficina de Dobraduras, dos autores Mario Jorge Dias Carneiro e Michel Spira, usada no programa de Iniciação Científica da OBMEP, que pode ser encontrada no endereço: http://www.obmep.org.br/prog_ic_2008/apostila2008.html[23].

Queremos concluir este módulo, lembrando que apresentamos, ao longo do mesmo, diversos materiais e alguns de seus usos como recursos didáticos. Entretanto, é necessário que o professor esteja sempre disposto a utilizar não só esses materias, como outros produzidos por ele ou por seus alunos, sempre que julgar conveniente, de acordo com o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula e de sua intencionalidade ao utilizar tal recurso didático.

22 Como sugestão podemos citar:
- **Teorema do Papagaio** de Denis Guedj, com tradução de Eduardo Brandão. Este livro é uma publicação da Companhia das Letras.
- **O Enigma de Sherazade** de Raymond Smullyan, com tradução de Sérgio Flaksman. Publicado pela Jorge Zahar Editor.
- **O diabo dos números** de Hans Magnus Enzensberger, com tradução de Sérgio Tellaroli. Publicado pela Companhia das Letras.
- **Mania de Matemática** de Ian Stewart, tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Publicado pela Jorge Zahar Editor.
- **O homem que calculava**; **Meu anel de sete pedras**; **Matemática divertida e curiosa**, dentre outros títulos do autor Malba Tahan (Júlio César de Mello e Souza). Obras publicadas pela Editora Record.

23 Acesso em 28 de maio de 2009.

Atividade 12

Escolha um dos materiais que acabamos de estudar e crie uma proposta de atividade que possa ser utilizada em um Laboratório de Ensino ou em sala de aula objetivando o desenvolvimento de um conteúdo matemático. Para tanto, não se esqueça de elencar:

a) Tema (conteúdo, objetivo, resultados esperados);

b) Ano a ser proposta a atividade;

c) Materiais a serem utilizados;

d) Desenvolvimento das atividades;

e) Possível proposta de avaliação.

Poste a atividade elaborada no AVA para que possa ser avaliada.

OBSERVAÇÃO: Esta atividade pode ser feita em duplas, mas cada aluno deverá postar o seu arquivo.

SUGESTÃO: Realize, se possível, com seus alunos a proposta que você elaborou na atividade 12. Lembre-se de estar atento às respostas de seus alunos e fazer as intervenções necessárias.

ANOTAÇÕES

REFLETINDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Objetivos:

- Repensar sobre o papel dos jogos no ensino de Matemática.
- Refletir sobre habilidades matemáticas como raciocínio lógico, cálculo mental, estratégias de análise de possibilidades e de antecipação de jogadas, construção de estratégias de jogo e de resolução de problemas.
- Elaborar atividades de ensino com jogos.
- Propor atividades de ensino que envolva a utilização do pensamento de resolução de problemas por meio de jogos.

Agenda do Módulo 4 - Refletindo sobre a utilização de jogos no ensino de matemática (20 horas)

Atividade	Desenvolvimento do conteúdo	Avaliação
Atividade 13 – Fórum de Ideias	Registre o que é jogo para você e como entende o trabalho com jogos na sala de aula e socialize com seus colegas no fórum de ideias.	Atividade de **Avaliação** no AVA: 2 pontos
Atividade 14 – Leitura do Guia de Estudos.	Leitura do Módulo 4 do Guia de Estudos.	
Atividade 15 – Jogo Matix	Produza/construa o jogo Matix e jogue e anote tudo que você for percebendo de importante durante suas jogadas.	
Atividade 16 – Fórum de Discussões	Participação no fórum de discussões registrando suas anotações relativas à atividade 16, acompanhe as postagens de seus colegas e comente-as.	Atividade de **Avaliação** no AVA: 3 pontos
Atividade 17 – Tarefa	Elabore 3 (três) situações-problema utilizando o jogo Matix e poste para que todos seus colegas de turma possam vê-las e comentá-las.	Atividade de **Avaliação** no AVA: 8 pontos

4.1. Jogos no Ensino de Matemática

Atividade 13 - Fórum de Ideias

1. Procure registrar o que é jogo para você e como entende o trabalho com jogos na sala de aula.

2. Socialize com o grupo-classe, via plataforma de ensino, no *Fórum de Ideias*, o que registrou, discutindo as questões que julgar mais relevantes para o trabalho nesta disciplina.

Para auxiliá-los, podemos sugerir algumas questões:

- Você já realizou alguma(s) atividade(s) com jogos para ensinar/aprender matemática?
- Em caso afirmativo, como foi essa experiência?
- Quais as facilidades/dificuldades que você encontrou na realização de atividades com jogos?
- Quais relações entre as atividades de jogos realizadas com o cotidiano, você consegue estabelecer?

- Você já observou a aprendizagem dos seus alunos mediante a utilização de jogos matemáticos? Relate.

4.2. Elementos históricos do jogo

> a melhor maneira de se ensinar Matemática é mergulhar as crianças num ambiente em que o desafio matemático esteja naturalmente presente.
>
> Ubiratan D'Ambrósio

Nesse item, faremos uma breve viagem para entendermos a trajetória histórica do jogo na sociedade. Para tanto, faremos uma breve retrospectiva sobre o tema, sem a intenção de estarmos abordando essa questão durante toda sua cronologia, na busca de seu elemento epistemológico.

Vamos começar????!!!

Na Antiguidade, Platão considerava que o “aprender brincando” era mais importante e deveria tomar o lugar da violência e da repressão, além de ressaltar que a Matemática deveria ser estudada de modo atrativo como, por exemplo, com a utilização de jogos. (ALMEIDA, 1987).

Egípcios, romanos e maias utilizavam os jogos com o objetivo levar os mais jovens a aprender valores, conhecimentos, normas e padrões culturais com a experiência dos adultos. (ALMEIDA, 1987).

Percebemos que, nesta fase histórica, os jogos ocupavam uma posição de transmissão de conhecimentos culturais na sociedade, com objetivos educacionais, sendo estimulados por muitos povos.

Para muitas pessoas, inclusive para a Igreja, o jogo era visto como algo imoral, profano, delituoso, não se admitindo sua prática e julgando-se, com severidade, principalmente, os jogos que envolviam dinheiro, configurando-se a prática do comércio. (DUFLO, 1999). Acreditavam que os jogadores causavam danos a si próprios, a suas famílias e às pessoas com quem se relacionavam, com consequências repreensíveis socialmente como, por exemplo, empobrecer e desonrar suas famílias, blasfemar, arruinarem-se. Dada a repreensão da Igreja, o interesse pelos jogos foi perdendo importância, dando lugar a uma educação rígida e disciplinadora imposta pelo Império Romano. (DUFLO, 1999). Percebemos que havia a abordagem da dimensão político-econômica e religiosa envolvida.

Com a fundação da Companhia de Jesus, por Ignácio de Loyola, em 1540, compreendeu-se o valor dos jogos para o ensino e se procurou introduzi-los oficialmente por meio da *Ratio Studiorum*[1], tendo sido os jesuítas os primeiros a recolocarem os jogos na prática educativa. Ainda no século XVI, surgiram os jogos educativos que visavam à aquisição de conhecimentos por meio de ações didáticas. (ALVES, 2001). No entanto, os jogos continuavam a ser considerados uma atividade secundária e sem significado para muitas pessoas, o que fez com que muitos estudiosos não procurassem estudá-los cientificamente.

Nos dias atuais, muitos pesquisadores e educadores têm destinado suas atenções à utilização de jogos no ensino de Matemática. (BRENELLI, 1996; GRANDO, 2000, 2004; MARCO, 2004; dentre outros). Passamos, então, a analisar o que nos dizem as pesquisas em Educação Matemática sobre esse assunto.

4.3. Jogo na Educação Matemática

> A variedade de fenômenos considerados como jogo mostra a complexidade da tarefa de defini-lo.
>
> Tizuko M. Kishimoto

Já parou para pensar o que a palavra **jogo** significa para você??

Respostas como brincadeira, competição, diversão, fantasia, desafio, estratégias, raciocínio, real / irreal, regras, observação, aprendizagem, atenção, cooperação, criatividade, objetivos, situação-problema, desencadeador / fixador de conteúdos (matemáticos) devem ter surgido.

1 A *Ratio atque institutio studiorum Societatis Jesu* é um documento que reelaborou as considerações pedagógicas contidas nas Constituições da Companhia de Jesus, representando “as bases de um programa formativo de caráter católico que se estende a todos os colégios jesuítas do mundo”. (CAMBI, 1999, p.261).

Se buscarmos na literatura, encontraremos que a palavra jogo, do latim *joco*, significa, etimologicamente, gracejo e zombaria, sendo empregada no lugar de *ludus*, que representa brinquedo, jogo, divertimento e passatempo. (GRANDO, 1995).

Grando (1995), citando Huizinga, afirma que

> a palavra e a noção de jogo foram sendo construídas nas diversas civilizações, não definidas por um pensamento lógico ou científico, mas na 'linguagem criadora', isto é, em inúmeras línguas diferenciadas. Neste sentido, não se poderia esperar que cada uma das diferentes línguas encontrasse uma mesma palavra e ideia para exprimir a mesma noção de jogo. (p.31).

No contexto da Educação Matemática, encontramos pesquisas que se referem ao jogo como um gerador de situação-problema e desencadeador da aprendizagem do aluno. (GRANDO, 1995, 2000). Nessa perspectiva, encontramos a pesquisa de Moura (1992), que aborda o jogo como um problema em movimento, pois solicita do jogador a elaboração de procedimentos pessoais eficazes na resolução de uma situação-problema de jogo. Esse autor define jogo pedagógico "como aquele adotado <u>intencionalmente</u> de modo a permitir tanto o desenvolvimento de um conceito matemático novo como a aplicação de outro já dominado pela criança". (p.53). (grifo nosso).

Outras pesquisas importantes no contexto da Educação Matemática são as de Lanner de Moura (1995), que enfoca o aspecto social da criança e sua dinâmica de interatividade de significados entre os jogadores; Brenelli (1996), que pontua que o jogo pode permitir a construção e reconstrução de certas noções lógicas e aritméticas; Grando (1995 e 2000), que analisa as possibilidades metodológicas do jogo na construção de procedimentos matemáticos e relações numérica e algébrica por alunos do Ensino Fundamental; Marco (1998), que explora as possibilidades metodológicas do jogo na sistematização do conceito de equivalência de fração; e Marco (2004), que analisa as potencialidades do jogo computacional como ambiente possibilitador de produção e resolução de problemas.

4.4. Jogo e seu papel pedagógico no ensino de matemática

> O jogo é um bom laboratório para repetir ensaios e buscar novos caminhos.
>
> Gairin apud Fernando Corbalán

Vamos, a partir de agora, refletir um pouco sobre o papel pedagógico do jogo no ensino de matemática?

Pesquisas na área apontam que, ao se trabalhar com jogos no contexto de ensino e aprendizagem, é importante que o professor esteja atento a propor a seus alunos um trabalho de exploração e/ou fixação de conceitos matemáticos. A produção de problemas e a elaboração de estratégias de resolução de problema pelos alunos, com a mediação do professor, também precisam ser consideradas.

O professor, por meio de intervenções, pode questionar o aluno sobre suas jogadas e estratégias, tornando o “jogar” um ambiente de aprendizagem e (re)criação conceitual e não apenas de reprodução mecânica do conceito abordado, como pode ocorrer na resolução de uma lista de exercícios denominados problemas.

Uma vez que o professor planeja a exploração do jogo, esse deixa de ser desinteressado para o aluno, porque visa à elaboração de processos de análise de possibilidades e tomada de decisão: habilidades necessárias para o trabalho com resolução de problema, tanto no âmbito escolar como no contexto social no qual todos estamos inseridos.

Para Moura (1992), jogo e resolução de problema são abordados como produtores de conhecimento e possibilitadores da aquisição de conhecimentos matemáticos. Para essa elaboração, o aluno é “forçado” a criar processos pessoais para que possa jogar e resolver os problemas que inesperadamente irão surgir, elaborando, assim, novos pensamentos e conhecimentos, deixando de seguir sempre a mesma “receita”.

Desse modo, o jogo, na Educação Matemática,

> passa a ter o caráter de material de ensino quando considerado promotor de aprendizagem. A criança, colocada diante de situações lúdicas, apreende a estrutura lógica da brincadeira e, deste modo, apreende também a estrutura matemática presente. (MOURA, 1996, p.80).

Além disso, ao se propor a análise do jogo pelo sujeito, este é levado a refletir sobre as estratégias (intuitivas ou lógicas) que utilizou durante as jogadas e a avaliá-las; fato que terá consequências na habilidade de resolução de problema. Tal reflexão ocorre sem que o sujeito tenha consciência, pois analisar os processos de pensamento seguidos é exigência do próprio jogo, o que o leva a detectar as jogadas erradas realizadas, compreender as variáveis envolvidas na ação e buscar alternativas para solucioná-las a tempo de ganhar a partida e produzir conhecimento.

Nessa perspectiva, a análise do erro e do acerto pelo aluno se dá de maneira dinâmica e efetiva, proporcionando a reflexão e a (re)criação de conceitos matemáticos que estão sendo discutidos; o professor tem condições de analisar e compreender o desenvolvimento do raciocínio do aluno e de dinamizar a relação ensino e aprendizagem, por meio de questionamentos sobre as jogadas realizadas pelos jogadores.

4.5. O papel do professor na utilização de jogos no ensino de matemática

Um dos principais objetivos da educação, atualmente, é procurar personalizar o ensino respeitando as diferenças de ritmos de aprendizagem de cada aluno, seguindo as mudanças sociais, culturais e tecnológicas e tornando o ensino de Matemática mais divertido, motivador e desafiador, necessariamente aliado à construção e formalização dos conceitos relacionados à disciplina em questão. O jogo é um dos recursos metodológicos que apresenta esse caráter lúdico e desafiador.

Ao jogar, a criança representa elementos da literatura infantil, como ser um príncipe, papai, cavaleiro, bruxo, médico..... Essa representação lúdica é vivida intensamente e lhe dá prazer ou desprazer. Apesar do intenso envolvimento, a criança não perde a noção da realidade em que vive. Nesse processo, a imaginação se faz presente.

No ensino de Matemática, um trabalho com jogos representa uma atividade lúdica que, quando intencionalmente utilizada pelo professor, além de propiciar o *“aprender brincando”*, como dizia Platão, deve ter o objetivo de desenvolver linguagem matemática, trabalhar estratégias de resolução de problemas e também desenvolver raciocínio lógico.

Pela resolução de problemas, a criança pode vivenciar a alegria e o prazer de vencer obstáculos por meio de investigações, ou seja, por meio do "fazer matemática". E uma possibilidade para este "fazer matemática" é mediante a exploração de jogos com a intervenção adequada do professor, que deve desafiar o aluno a elaborar estratégias, testá-las e confirmá-las ou reformulá-las, percorrendo o caminho da problematização, visando a vencer o jogo, isto é, resolvendo o problema.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN´s, 1998, p.46), do Ministério de Educação e Cultura (MEC), em relação à inserção de jogos no ensino de Matemática, pontuam que esses

> constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações.

Apesar de os PCN´s orientarem para a utilização de jogos no ensino de Matemática, não orientam em relação a como deve ser encaminhado o trabalho pedagógico, após "o jogo pelo jogo". Fica a sensação de que o jogo, por si mesmo, estará trabalhando análises, desencadeamentos ou formalizações de conceitos matemáticos, ou ainda, estratégias de resolução de problemas.

Os jogos têm suas vantagens no ensino da Matemática, desde que o professor tenha objetivos claros do que pretende atingir com a atividade proposta. Não concordamos com o fato de que o jogo, propiciando simulação de problemas, exija soluções imediatas, como defendem os PCN´s. Entendemos que as situações vivenciadas durante a partida levam o jogador a planejar as próximas jogadas para que tenha um melhor aproveitamento. Gostaríamos de lembrar que isso só ocorrerá se houver intervenções realizadas por parte do professor.

Com o objetivo de evidenciar algumas das discussões que processamos sobre o trabalho pedagógico com o jogo e a resolução de problemas, apresentamos como exemplo o jogo Matix.

4.6. O jogo Matix no ensino de matemática

> Seria desejável que se tivesse um curso inteiro de jogos, tratados matematicamente.
>
> Leibniz

Esse item contém um exemplo de utilização do jogo Matix, sendo composto por atividades que envolvem problematizações que convidam os professores a vivenciarem e, também, a desenvolverem em sala de aula. Nosso objetivo é proporcionar aos professores o repensar sobre o papel dos jogos no ensino de Matemática.

O jogo aqui apresentado tem por objetivo levar o professor a refletir sobre o desencadeamento do trabalho com estratégias de antecipação de jogadas e reflexão sobre as mesmas, em uma dimensão cognitiva. Em uma dimensão matemática, permite a exploração do cálculo mental, operacionalidade dos números positivos e negativos, especificamente a adição e a subtração, análise combinatória e análise de possibilidades.

4.6.1 Descrição do jogo: material para confecção e regras

Matix[2] (figura 34) é um jogo de regras, criado na Alemanha, e pode ser jogado por duas ou mais pessoas, possibilitando a essas planejar "armadilhas" para seu adversário, prevendo suas próximas jogadas e impedindo-os de ganhar o jogo, além de obrigar a planejar as próprias jogadas e também a prevê-las. (MARCO, 2004).

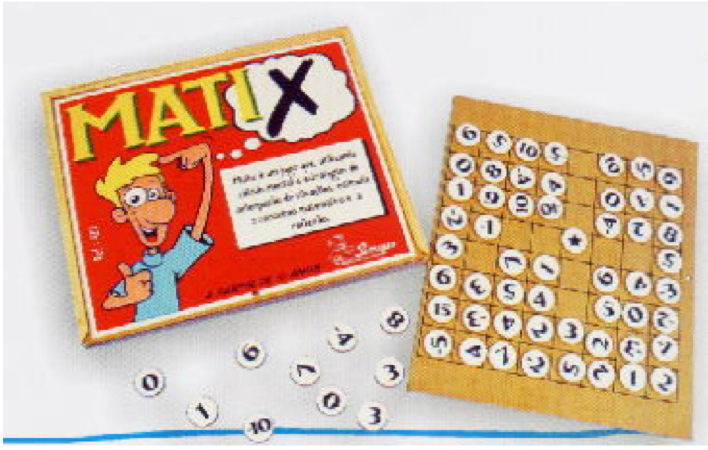


Figura 34 - Jogo Matix e suas peças

É indicado para crianças a partir de 11 anos de idade. No entanto, já o utilizamos com crianças de 4º e 5º anos[3], com idades entre 9 e 10 anos, e pudemos constatar a realização das operações, adição e subtração de números inteiros, intuitivamente, isto é, sem o uso de algoritmos de contagem e de cálculo, mas com a aplicação de uma propriedade importante dos números inteiros: a *soma de dois números opostos é nula*. Essa observação pode ser verificada com expressões de alunos como, por exemplo, "menos quatro com quatro dá zero, não precisa contar". Na exploração desse jogo, com essa faixa etária, pode-se desencadear o processo de compreensão da operacionalidade dos números inteiros – adição e subtração – e sua representação.

Esse jogo se compõe por um tabuleiro quadriculado 8 x 8 e peças com os valores de zero a cinco (cinco peças de cada); com valor seis (seis peças); com valores de sete a dez (três peças de cada); uma peça de valor quinze; valores de menos um a menos cinco (três peças de cada); duas peças com valor menos dez e uma estrela.

O jogo tem por objetivo retirar as peças uma a uma do tabuleiro e fazer o maior número de pontos, somando todas as peças de valor positivo e subtraindo as de valor negativo. Para conseguir isso, o jogador deve seguir as seguintes regras:

1. As peças são colocadas aleatoriamente no tabuleiro, com os números para cima (figura 35).

2. Os jogadores jogam alternadamente.

3. O primeiro jogador escolhe se quer jogar no sentido vertical ou horizontal do tabuleiro e retira qualquer peça do jogo. Cada peça retirada é substituída pela estrela.

Figura 35 - Peças dispostas aleatoriamente pelo tabuleiro

2 Jogo produzido e distribuído pela Simque brinquedos pedagógicos (www.simque.com.br).

3 Encontramos também a pesquisa de Grando e Marco (2006) que utilizaram esse jogo com crianças de 7 anos (2º ano do Ensino Fundamental).

4. O próximo jogador retira, no sentido diferente do adversário, a partir da estrela, uma das duas peças mais próximas.

5. O jogo termina quando acabarem todas as peças do tabuleiro ou quando o jogador não tiver mais nenhuma peça para retirar em sua linha ou coluna onde a estrela se encontra.

Atividade 10

1. Produza/Construa o jogo Matix e convide alguém (pai, mãe, namorado(a), filho(a), vizinho(a), sobrinho(a)) para jogar com você.

2. Jogue com seu convidado e anote tudo que você for percebendo de importante durante suas jogadas.

Problematização para o professor e para o aluno

Algumas questões surgidas, no momento das jogadas, podem ser as que sugerimos a seguir.

1. Tente descobrir com seu convidado qual estratégia poderia ser feita para ganhar o jogo e anote-as.

2. Quais jogadas você não faria mais? Por quê?

Atividade 16 - Fórum de Discussões

1. De posse de suas anotações, acompanhe a discussão, no *Fórum de Discussões*, sobre as questões sugeridas e que são frequentes nas jogadas dos alunos. Se não as percebeu, jogue novamente e procure estar atento às situações.

Um dos problemas que costumam ocorrer é o de as crianças não se lembrarem de todas as regras num primeiro momento como, por exemplo, questionarem ao professor como é que se marcam os pontos.

O professor deve estar atento às jogadas das crianças para verificar se todas as regras estão sendo lembradas e obedecidas. Para isso, lembramos a necessidade de o professor ter jogado várias vezes, antes de levar o material para a sala de aula, pois somente assim poderá fazer intervenções adequadas nas jogadas das crianças, garantindo melhor aproveitamento na utilização do material em relação à aprendizagem.

Após os jogadores determinarem o vencedor, o professor pode propor algumas situações-problemas para os alunos resolverem[4].

4.7. Como propor um jogo em sala de aula?

Você já parou para se perguntar como propor um jogo para ensinar matemática a seus futuros alunos?

Com o intuito de auxiliá-los na proposição de jogos a seus alunos, estamos sugerindo que estudem e reflitam sobre a intervenção pedagógica que pode ser feita, tendo por base os "momentos de jogo", definidos por Grando (2000, 2004), e o enfoque de resolução de problemas no sentido abordado por Marco (2004). Segundo

4 Sobre esse assunto discutiremos mais à frente.

Grando (2000), esses momentos de jogo são: 1) Familiarização com o material do jogo; 2) Reconhecimento das regras; 3) O "Jogo pelo jogo": jogar para garantir regras; 4) Intervenção pedagógica verbal; 5) Registro do jogo; 6) Intervenção escrita; 7) Jogar com "competência".

Para que haja um melhor entendimento desses "momentos de jogo", passamos a descrevê-los, segundo Grando e Marco (2006):

1) Familiarização com o material do jogo

Nesse primeiro momento, os sujeitos entram em contato com o material do jogo, identificando objetos conhecidos, como: dados, peões, peças, tabuleiros e outros, e experimentam o material por meio de simulações de possíveis jogadas. Nessa fase, é comum o estabelecimento de analogias com os jogos já conhecidos.

Caso o jogo seja proposto a alunos que ainda não tiveram contato com números negativos (-3, -10 etc.), podem surgir dúvidas quanto à representação das peças que os contém. No entanto, logo que iniciam as simulações de jogadas, tendem a perceber que as peças –3, por exemplo, representam uma quantidade que deve ser subtraída.

2) Reconhecimento das regras

O reconhecimento das regras do jogo pelos alunos pode ser realizado de várias formas: explicadas pelo orientador da ação, lidas, ou identificadas através da realização de várias partidas-modelo, quando o orientador da ação pode jogar várias partidas seguidas com um dos sujeitos, que aprendeu previamente o jogo, enquanto os sujeitos restantes tentam perceber as regularidades nas jogadas e identificam as regras do jogo.

No caso do Matix, os sujeitos podem entrar em contato com as regras, a partir da explicação do jogo pelo orientador. Não é necessário que seja determinado um momento exato para o cálculo do número de pontos, podendo os alunos ficarem livres para esse cálculo ao final do jogo, ou durante a realização das jogadas.

3) O "Jogo pelo jogo": jogar para garantir regras

Esse é o momento do jogo pelo jogo, do jogo espontâneo simplesmente, em que se possibilita aos alunos jogar para garantir a compreensão das regras. Nesse momento, são exploradas as noções matemáticas contidas no jogo e o importante é a apropriação das regras pelos sujeitos.

No jogo Matix, os sujeitos tendem a demonstrar rapidamente a compreensão das regras. Inicialmente, procuram retirar sempre as peças de maior valor, sem se preocupar em antecipar jogadas e perceber que nem sempre retirar a peça de maior valor representa a melhor jogada. É importante que o aluno perceba que se deve evitar que o adversário retire uma peça de maior valor.

4) Intervenção pedagógica verbal

Depois dos três momentos anteriores, os sujeitos passam a jogar contando com a intervenção verbal do orientador da ação.

Esse momento caracteriza-se por questionamentos e observações que o professor efetua, a fim de provocar os alunos para a realização das análises de suas jogadas (previsão de jogo, análise de possíveis jogadas a serem realizadas, constatação de "jogadas erradas" executadas anteriormente, cálculo do número de pontos etc.). O professor precisa atentar para os procedimentos criados pelos alunos na resolução dos problemas de jogo, buscando relacionar esse processo à conceitualização matemática.

No decorrer do jogo, a partir dos questionamentos levantados pelo professor, é importante que os alunos percebam que existem várias maneiras de se obter maior número de pontos, inclusive criando «armadilhas» para o adversário. Tais questionamentos têm o objetivo de levar os alunos a se iniciarem no processo de análise e antecipação de jogadas, que propicia o levantamento de hipóteses, a correção de “jogadas erradas” por meio da análise da situação. (KALMYKOVA, 1977).

> Parafraseando Macedo (1997), antecipar significa “retirar mentalmente” peças do tabuleiro para decidir qual a melhor peça a ser capturada e garantir um número significativo de pontos, evitando deixar que o adversário, na jogada seguinte, retire do tabuleiro uma peça com alto valor. (GRANDO e MARCO, 2006, p108).

O professor poderá notar também que, a antecipação de jogadas, fará parte do momento de distribuição das peças pelo tabuleiro, a partir da segunda rodada, sendo elemento integrante das estratégias de resolução de problemas criadas pelos alunos, que procuram estudar as posições, para que uma linha ou coluna não fiquem com números “grandes”, facilitando o ganho de pontos pelos jogadores.

Na contagem de pontos realizada no Matix, é importante que o orientador incentive os alunos a refletir sobre a melhor forma de realização dos cálculos.

Grando e Marco (2006, p.109) relatam que, na experiência realizada com alunos de 12 anos, perceberam que, inicialmente, os cálculos

> foram realizados mentalmente, peça por peça, respeitando a indicação do sinal positivo e negativo, para a adição e subtração, respectivamente. Durante a realização dos cálculos, muitos alunos se perdiam e resolviam, então, registrar os cálculos intermediários. Nesse momento, a professora interveio com os seguintes questionamentos: Como vocês realizaram os cálculos? Não seria possível realizar de um jeito mais fácil? A intervenção da professora foi no sentido de incentivá-los a buscar uma nova estratégia de cálculo dos pontos. A estratégia mais adotada foi a de agrupamento, na qual os alunos agrupavam as peças de 10 em 10 e, depois, subtraíam as peças negativas. Somente alguns alunos optaram pela anulação de peças opostas (Ex: 10 e –10) e isolaram tais peças, definindo-as por zero. Essas estratégias foram socializadas no grupo e os alunos puderam apropriar-se delas para a realização dos cálculos.

5) Registro do jogo

É um momento que pode acontecer, dependendo da natureza do jogo que é trabalhado e dos objetivos do registro. A anotação dos pontos, ou mesmo dos procedimentos e cálculos utilizados, pode ser considerada uma forma de sistematização e formalização, por meio de uma linguagem própria que, no nosso caso, seria a linguagem matemática. É importante que o professor procure estabelecer estratégias de intervenção que gerem a necessidade do registro escrito do jogo — um importante instrumento de que pode dispor o sujeito, para a análise de jogadas “erradas” (jogadas que poderiam ser melhores) e construção de estratégias —, a fim de que não seja apenas uma exigência, sem sentido para a situação de jogo.

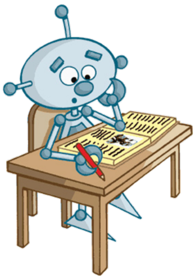
No caso do Matix, os registros podem surgir por solicitação do professor ou até mesmo dos alunos. Estes podem questionar se não existe uma forma de saber quem está vencendo o jogo, durante as jogadas, e não somente no final. Os alunos podem realizar anotações parciais, a cada peça que retiram.

Grando e Marco (2006, p.109) registram que, pela experiência que tiveram com alunos de 12 anos, a necessidade do registro surgiu quando

> a primeira peça a ser retirada do tabuleiro, por um aluno, era uma peça negativa: - 6. O

sujeito questionou: “Eu tenho que tirar 6, mas de quanto, se não tenho nada ainda?” (...). Durante as discussões, algumas propostas surgiram: de que o sujeito retirasse sempre uma peça positiva antes; de que as peças negativas seriam desprezadas no início do jogo; de que se considerasse positiva a primeira peça; ou de que a peça fosse guardada até que uma peça positiva fosse retirada e depois se realizasse o registro. Entretanto, um aluno propôs o seguinte raciocínio: “Ele fica devendo esses pontos, como a gente fica devendo na cantina e depois paga. É só escrever que tá devendo.” Esta proposta foi socializada. A maioria dos sujeitos apropriou-se do raciocínio e passou a trabalhar com a linguagem do ganhar e perder pontos. A Matemática utilizada pelos alunos, neste momento, foi intuitiva, ou seja, utilizaram a propriedade do cancelamento nas operações com números positivos e negativos intuitivamente. O registro, dessa forma, torna-se um importante aliado na definição de estratégias de melhor jogada. Os sujeitos, no momento do registro, passaram a transpor para a linguagem matemática as noções de números positivos e negativos, representando um momento de construção dessa linguagem e desencadeando o trabalho de desenvolvimento do conceito de número inteiro.

6) Intervenção escrita



Trata-se da problematização de situações de jogo. Os alunos resolvem situações-problema de jogo, elaboradas pelo professor, ou mesmo propostas por outros alunos. A resolução do problema de jogo propicia uma análise mais específica sobre o jogo: os problemas abordam diferentes aspectos do jogo que podem não ter ocorrido durante as partidas. Além disso, trata-se de um momento em que os limites e as possibilidades do jogo são resgatados pelo professor, direcionando para os conceitos matemáticos a serem intencionalmente trabalhados (aprendizagem matemática). O registro do jogo também está presente, nesse momento.

Com o Matix, as situações-problema buscam garantir a realização de atividades que contemplam o conceito de operações de adição e subtração com números inteiros. Dessa forma, para alunos que ainda não se apropriaram do raciocínio e da linguagem de “ganhos e perdas”, na situação-problema escrita, essa noção pode ser trabalhada.

Nas situações de jogo escritas sobre o Matix, os sujeitos podem manipular a linguagem matemática de representação de números inteiros, apropriar-se das noções intrínsecas ao conceito de números inteiros e raciocinarem “fora do objeto e da situação de jogo” (abstração).

Para os sujeitos, as situações-problema escritas representam um aperfeiçoamento nas suas formas de jogar, o que significa uma melhora do seu desempenho a fim de vencer o jogo. A título de exemplo, descrevemos algumas:

1. O Jogador A conseguiu as seguintes peças: 4 , -2 , 0 , 2 , -2. Quantos pontos ele fez? Registre a sua conta.[5]

2. O jogador A está com 23 pontos. O jogador B está com as seguintes peças: 8 , -4 , 15 , 6, -2 , -3 e –5. Quantos pontos faltam para o jogador B retirar do tabuleiro para empatar o jogo?[6]

3. Em cada jogada, poderíamos dizer que a melhor jogada é sempre tirar o maior número? Por quê? Dê um exemplo.[7]

4. Um jogo está na seguinte situação:

-4	-3	15	5
		-2	-2
		-10	-4
-3		3	3
-2			5
5	0	*	3

a) O próximo jogador (A) retira, na horizontal (→), qual a melhor jogada? Por quê?

b) Jogando da melhor maneira possível, quantos pontos o jogador A vai fazer a mais que o jogador B, nas próximas 3 jogadas de cada jogador?

5. Em uma jogada, o jogador tem 2 possibilidades de peças para retirar. E com 2 jogadas, quantas possibilidades diferentes ele tem de peças para retirar? E com 3 jogadas?

Nesse momento do jogo, o professor pode ainda solicitar que os alunos produzam situações-problema e troquem com seus colegas para que seja feita a resolução. As situações que seguem foram produzidas por alunos de 12 anos.

5 Situação encontrada em Grando e Marco (2006).
6 Situação encontrada em Grando e Marco (2006).
7 Situação encontrada em Grando e Marco (2006).

1. Como você deve montar as estratégias do jogo para que você fique com o maior número de pontos positivos e seu adversário o maior número de pontos negativos?

2. Maria está jogando contra Rafael e até agora tem as seguintes peças: 10, 10, 15, - 10 e 5. E Rafael tem essas peças: - 1, 5, 2, 3 e 10. Até agora, quem está ganhando o jogo?

3. As peças encontram-se dispostas no tabuleiro da forma como mostra o desenho abaixo:

						3
				0		2
			-10	*	-4	
-5	-4			-1		
	-3				-4	-2

Sabendo que o jogador **A** movimenta as peças, na vertical, e o **B**, na horizontal, qual deve ser a melhor jogada de **A**, de maneira a impedir que **B** faça muitos pontos? Justifique sua resposta.

7) Jogar com "competência"

Esse momento representa o retorno à situação de jogo, considerando todos os aspectos anteriormente analisados (intervenções). É importante que o aluno retorne à ação do jogo para que possa executar muitas das estratégias definidas e analisadas durante a resolução do problema. Afinal, de que adianta ao indivíduo analisar o jogo sem tentar aplicar suas "conclusões" (estratégias), para tentar vencer seus adversários? Optou-se por denominar esse momento "jogar com competência", considerando que o aluno, ao jogar e refletir sobre suas jogadas e jogadas possíveis, adquire certa "competência" naquele jogo, ou seja, o jogo passa a ser considerado sob vários aspectos e pontos de vista que, inicialmente, poderiam não estar sendo considerados.

No Matix, pode observar-se a apropriação de várias estratégias para a realização das ações no jogo. Nesse processo de pensamento, os alunos precisam analisar as peças que podem ser por eles retiradas, fazem previsões e antecipam jogadas, procurando elaborar estratégias, mediante análise de possibilidades, para escolher a melhor peça a ser retirada do tabuleiro.

Por meio das intervenções que sugerimos que se realize, o jogo Matix pode possibilitar aos sujeitos a vivência das noções presentes no conceito de números inteiros (caráter nocional do jogo), apropriação da linguagem e aplicação destas noções às novas situações de jogo (caráter conceitual do jogo).

Algumas regras não são compreendidas facilmente pelos alunos e vários procedimentos demoram a se tornarem habituais. É o caso da retirada das peças de maior valor, pois é comum o aluno, ao analisar entre duas peças, retirar a de maior valor, possibilitando ao adversário outra peça de maior valor ainda. Nesse momento, é importante que o professor esteja atento para orientar o aluno a analisar qual será a jogada mais interessante para si próprio naquele momento, como ficará a jogada para o seu adversário e, também, qual a possibilidade de o jogo voltar para si com bons valores a serem retirados.

É necessário que o professor intervenha muitas vezes para modificar a atitude do aluno em querer retirar sempre a peça de maior valor, pois nem sempre esta será a mais interessante para a sua jogada. Essa

intervenção pode ser feita a partir de questionamentos à criança sobre seus procedimentos e os resultados obtidos, propondo comparações, reflexões e conclusões entre as situações que vão ocorrendo.

Muitos alunos acabam concluindo que não é sempre vantagem retirar as peças de maior valor em uma determinada jogada, o que poderia, também, indicar a proximidade do término da partida. Se o prolongamento do jogo for interessante para o jogador, este pode retirar determinada peça, que dará continuidade ao jogo, ou retirar a peça, que determinará o final da partida. Esse planejamento exige grande flexibilidade de pensamento para considerar várias possibilidades ao mesmo tempo e sequenciar as ações necessárias.

No início do jogo, os alunos não conseguem planejar, antecipar jogadas. Eles apenas aproveitam as circunstâncias ocorridas ao acaso e só aos poucos começam a antecipar e a planejar. Acostumados a agir impulsivamente, demoram a sentir a necessidade de refletir antes de qualquer ação. É justamente nisso que consiste uma das vantagens desse jogo: provocar a necessidade de pensar para agir, ou melhor, de analisar a distribuição das peças pelo tabuleiro para escolher a melhor possibilidade de ação.

Essa dificuldade também é destacada na ocasião da resolução de problemas, a qual entendemos como uma situação desafiadora que não apresenta uma solução imediata e única; uma situação que necessita de conhecimentos diversos - matemáticos ou não - e o estabelecimento, por parte do aluno, de relações entre eles, além de reflexões e investigações, constituindo-se em um movimento de criação de processos próprios de resolução, podendo, nesse movimento, ampliar seus conhecimentos e criar novos conceitos. Muitas vezes, numa resolução de problemas, a criança não consegue identificar, interpretar, analisar, relacionar variáveis, coordenar diversas informações e até mesmo tomar uma decisão para a efetiva solução da situação.

Despreocupadas com o que ocorre do outro lado do tabuleiro e não procurando antecipar o que pode acontecer, inicialmente, as crianças são constantemente surpreendidas pelas estratégias do adversário. Com o tempo, acabam sentindo a necessidade de observar os indícios do jogo e as estratégias dos adversários para poderem melhor planejar as próprias ações.

Como todo jogo de estratégia, o Matix pode propiciar o levantamento e a análise das possibilidades de uma determinada situação e o planejamento de sequências de ações. Esse planejamento é constantemente ampliado, de acordo com o desenvolvimento das possibilidades de os participantes tomarem consciência das jogadas feitas e de seus resultados, lembrando as situações e estratégias de partidas anteriores, para comparar com a situação e as possibilidades atuais. Lembramos que o planejamento de ações também é importante na resolução de problemas, pois se a situação não for convenientemente analisada, o problema pode não ser solucionado.

Após algumas peças retiradas, percebe-se que alguns jogadores hesitam entre duas ou mais peças possíveis de serem retiradas. Ao necessitarem decidir qual a peça que deve sair do tabuleiro, para não favorecer a jogada seguinte do adversário, enfrentam um momento de hesitação concomitante ao processo de análise.

Após essas discussões, pode-se deixar as crianças jogarem novamente, pois elas deverão demonstrar melhores reflexões durante as jogadas e, também, para que não se perca a ludicidade do jogar.

Atividade 17

1. Elabore 3 (três) situações-problema utilizando o jogo Matix e poste para que todos seus colegas de turma possam vê-las e cometá-las.

SUGESTÃO:

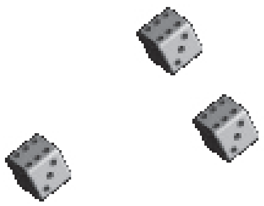
Futuramente, quando estiver atuando em sala de aula você poderá:

1. Propor o jogo Matix em sua sala de aula. Lembre-se de estar atento às jogadas de seus alunos e fazer as intervenções necessárias.

2. Levar as situações-problema criadas por você para a sala de aula e pedir aos alunos que as resolvam.

3. Solicitar que os seus alunos criem novas situações-problema, tendo como referência as regras do jogo Matix.

PARA SABER MAIS...



Jogo e resolução de problemas no ensino de Matemática

Aliar jogos à resolução de problemas, no contexto do ensino da Matemática, proporciona um ambiente de aprendizagem, no qual há a exploração dos conceitos mediante a estrutura matemática subjacente ao jogo e que pode ser vivenciada pelo aluno. Este pode questionar e ousar propor soluções aos problemas encontrados num clima de investigação, em que a construção de estratégias e de conhecimentos matemáticos estão em evidência.

Moura (1992) afirma que tanto o jogo quanto o problema podem ser vistos, no processo educacional, como *introdutores* ou *desencadeadores* de conceitos ou, como *verificadores/aplicadores* de conceitos já desenvolvidos e formalizados, além de estabelecer uma relação entre jogo e problema ao afirmar que

> ... o jogo tem fortes componentes da resolução de problemas na medida em que jogar envolve uma atitude psicológica do sujeito que, ao se predispor para isso, coloca em movimento estruturas do pensamento que lhe permitem participar do jogo. (...) O jogo, no sentido psicológico, desestrutura o sujeito que parte em busca de estratégias que o levem a participar dele. Podemos definir jogo como um problema em movimento. Problema que envolve a atitude pessoal de querer jogar tal qual o resolvedor de problema que só os tem quando estes lhes exigem busca de instrumentos novos de pensamento. (p.53).

No sentido abordado por Moura (1992), o jogo é desencadeador de desafios, desestruturando o indivíduo e possibilitando a este desenvolver a postura de analisar situações e criar estratégias próprias de resolução de problemas, ao possibilitar o desenvolvimento de habilidades como análise de possibilidades, tomada de decisão, trabalho em grupo, saber ganhar e saber perder.

A intervenção pedagógica nos jogos matemáticos

Deve ficar claro que não é o jogo que trabalha a Matemática, mas, sim, a intervenção pedagógica que se faz nele. A mediação e orientação do professor junto aos procedimentos dos alunos, ao jogar, questionando sobre suas jogadas e estratégias se fazem necessárias, para que o jogar se torne um ambiente de aprendizagem e (re)criação conceitual e não apenas de reprodução mecânica do conceito. Assim, o jogo deixa de ser desinteressante para o aluno, porque visa à elaboração de procedimentos e tomada de decisão: habilidades necessárias para o trabalho com resolução de problemas, tanto no âmbito escolar como no contexto social no qual todos estamos inseridos.

Analisando o jogo

Ao se propor a análise do jogo pelo aluno, este é levado a refletir sobre as estratégias que utilizou durante as jogadas e a avaliá-las; fato que terá consequências na habilidade de resolução de problemas. Essa reflexão ocorre de forma espontânea por parte do aluno, pois analisar as estratégias elaboradas é exigência do próprio jogo, o que o leva a detectar as jogadas erradas realizadas e buscar alternativas para solucioná-las a tempo de ganhar a partida e produzir conhecimento.

A análise do erro e do acerto pelo aluno, em situações de jogo, se dá de maneira dinâmica e efetiva, proporcionando a reflexão e a (re)criação de conceitos matemáticos que estão sendo discutidos; o professor tem condições de analisar e compreender o desenvolvimento do raciocínio do aluno e de dinamizar a relação ensino e aprendizagem por meio de questionamentos sobre as jogadas realizadas pelos jogadores.

O professor e a utilização de jogos

Acreditamos que, ao propor um jogo a seus alunos, o professor deve tê-lo jogado anteriormente para que conheça o jogo selecionado, conseguindo criar e registrar as próprias estratégias de jogo para que possa realizar intervenções pedagógicas adequadas, no momento da aplicação em sala de aula.

Além disso, o professor deve estar consciente de que situações imprevistas poderão ocorrer em sala de aula, estando atento para poder aproveitá-las da melhor maneira possível, explorando novas possibilidades do jogo com seus alunos, antes não imaginadas, contribuindo para a construção da autonomia, criticidade, criatividade, responsabilidade e cooperação entre os participantes.

O jogo e a forma de pensar que ele propicia, mediante a intervenção pedagógica do professor, podem tornar o estudo de Matemática mais prazeroso, aproximando-se da Matemática, via desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, de investigação e permitindo trabalhar os conteúdos culturais inerentes ao próprio jogo, através de uma linguagem universalmente aceita: a linguagem matemática.

Assim, quando se visa a propor atividades que promovem a aquisição de conhecimento, qualquer jogo pode ser utilizado. A questão não está no material, mas **no modo como ele é explorado**. Isso significa que independente do jogo, a ação de jogar por nós valorizada deve estar comprometida e coordenada tanto com as ações já realizadas, como com as que serão futuramente executadas, correspondendo a um conjunto de ações intencionais e integradas no sistema como um todo.

Leituras Complementares

Caros alunos, para que vocês possam aperfeiçoar um pouco mais o conhecimento até aqui construído, deixamos a indicação de algumas leituras.

ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino de matemática**: uma prática possível. Campinas, SP: Papirus, 2001.

BRENELLI, R. P. **O jogo como espaço para pensar**: a construção de noções lógicas e aritméticas. Campinas: Papirus, 1996.

CHATEAU, J. **O jogo e a criança**. Tradução Guido de Almeida. São Paulo: Summus Editorial, 1987.

FREIRE, J. B. **O jogo**: entre o riso e o choro. Campinas, SP: Autores Associados, 2002.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese de Doutorado. Campinas, SP. Faculdade de Educação, UNICAMP, 2000.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**: o jogo como elemento da cultura. 4. ed. Tradução João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 2000.

KISHIMOTO, T. M. (org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 1996.

LANNER DE MOURA, A. R. **A criança e a medida pré -escolar**. Tese de Doutorado. Campinas, SP, Faculdade de Educação, UNICAMP, 1995.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **4 cores, senha e dominó**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997.

_______________. **Aprender com jogos e situações problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

MARCO, F. F. **Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004. 141p. Disponível em: <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000316327>.

MOURA, M. O. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 1996.

______________. **A construção do signo numérico em situação de ensino**. Tese de Doutorado. São Paulo, SP, Faculdade de Educação, USP, 1992.

OSHIMA, I. S.; PAVANELLO, M. R. **O laboratório de ensino de matemática e a aprendizagem da geometria**. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_isabel_satico_oshima.pdf>.

ZAIA, L. L. **Kalah**: análise do jogo e suas possibilidades na intervenção psicopedagógica. Disponível em: <http://www.psicopedagogia.com.br/artigos/artigo.asp?entrID=274, 07/06/2003>.

Para final de conversa ...

Que bom que você chegou ao final de mais uma etapa. Essa chegada é fruto de sua vontade, dedicação e persistência. Sabemos que não foi fácil essa caminhada.

Ao cursar esta disciplina, você teve um contato mais aprofundado com uma possível proposta de trabalho com o Laboratório de Ensino de Matemática. Além disso, revisou conteúdos, teve experiências com formas diferentes de abordar alguns conceitos conhecidos e adquiriu novos conhecimentos, que serão importantes para você continuar os estudos em Matemática. Além disso, procuramos proporcionar a você formas diferentes para atuar em atividades relacionadas com o ensino de Matemática.

Queremos destacar que nosso objetivo, ao longo desses 60 dias, não foi esgotar o tema abordado, o que seria uma tarefa impossível, mas apontar caminhos que você pode percorrer em momentos posteriores, seja nesta licenciatura – como trabalho de conclusão de curso, por exemplo – ou em outros estudos que você possa realizar na área de Matemática ou Educação Matemática.

Esperamos que esse texto tenha sido agradável e proveitoso para você, assim como nos sentimos ao escrevê-lo.

Desejamos sucesso em seus estudos. Estamos muito felizes por termos percorrido com você esse caminho.

Cordialmente,

Os autores.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, L. M. *Geometria euclidiana plana*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 222 p. (Coleção Professor de Matemática).

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais*: ensino médio: ciência da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília, 1999.

BERTONI, Nilza Eigenheer; GASPAR, Maria Terezinha Jesus. Laboratório de ensino de matemática da Universidade de Brasília: uma trajetória de pesquisa em educação matemática, apoio à formação do professor e interação com a comunidade. In: LORENZATO, Sérgio. (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de professores).

BOYER, C. *História da Matemática*. Trad. Elza S. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRENELLI, R. P. *O jogo como espaço para pensar*: a construção de noções lógicas e aritméticas. Campinas: Papirus, 1996.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. 3 ed. Lisboa: Gradiva, 2000.

CARRAHER, T. N. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

COURA, Flávia C. Figueiredo. Ensino de matemática via resolução de problemas. São João del-Rei, MG: UFSJ, 2009. Apostila do curso de Pós-graduação "lato sensu" em Matemática.

D´AMBRÓSIO, U. Algumas reflexões sobre resolução de problemas. In: Seminário em Resolução de Problemas, I, 2008, Rio Claro. Trabalhos apresentados. Rio Claro: UNESP, 2008. Disponível em http://www.rc.unesp.br/serp/apresentacoes/reflexoes_sobre_rp_ubiratan_dambrosio.pdf. Acesso em: 15 ago. 2009.

DO CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. v.01. 610 p.

FIORENTINI, Dario & MIORIM, Maria Ângela. (Orgs.) *Por trás da porta, que Matemática acontece?* Campinas: Editora Gráfica FE/UNICAMP – CEMPEM, 2001.

________. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. In: *Boletim* SBEM-SP, Ano 4 - nº 7, 1990.

GRANDO, Regina Célia; MARCO, Fabiana Fiorezi de. O movimento da resolução de problemas em situações com jogo na produção do conhecimento matemático. In: MENDES, J. R., GRANDO, R. C. (orgs.). *Múltiplos olhares*: matemática e produção de conhecimento. São Paulo: Musa Editora, 2007.

GRANDO, Regina Célia. *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. São Paulo: Paulus, 2004.

GRANDO, Regina Célia. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática). Campinas, SP. Faculdade de Educação, UNICAMP, 2000.

KALMYKOVA, Z. I. Pressupostos psicológicos para uma melhor aprendizagem da resolução de problemas aritméticos. In: LURIA, LEONTIEV, VIGOTSKY et al. *Psicologia e pedagogia*: investigações experimentais sobre problemas didáticos específicos. Tradução Maria Flor Marques Simões. Editorial Estampa, Lisboa, 1977.

IMENES, Luis Márcio. M. *A numeração indo-arábica*. São Paulo: Scipione, 2001. 48p.

LOPES, Jairo Araújo; ARAÚJO, Elisabeth A. O laboratório de ensino de matemática: implicações na formação de professores. In: *Zetetiké* — Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, SP, v.15, n.27, p.57-69, 2007.

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de professores).

________. Laboratório de Ensino de Matemática. In: Anais do I Encontro Paulista de Educação Matemática – I EPEM, Campinas, SP, 1989, p.149-151.

MACHADO, Rosa Maria. *Minicurso: Explorando o Geoplano*. http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf, acesso em 11/06/2010.

MARCO, Fabiana Fiorezi de. *Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004. 141p. Disponível em: http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000316327.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. *A construção do signo numérico em situação de ensino*. Tese (Doutorado em Educação). São Paulo, SP, Faculdade de Educação, USP, 1992.

MOURA, Anna Regina Lanner de; MARCO, Fabiana Fiorezi de; SOUSA, Maria do Carmo de;. PALMA, Rute Cristina Domingos de. (Orgs.). *Matemática: Resolver problemas* - o lado lúdico do ensino da Matemática: Brasília: MEC. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação a Distância. Universidade Federal do Pará. 41p. (Coleção: PRÓ-LETRAMENTO, Fascículo 8), 2005.

OLIVEIRA, Durcilene Luiza de. *Uma Experiência com o tangram no estudo de geometria plana na 5ª série do ensino fundamental*. Monografia (Tabalho de Conclusão de Curso de Graduação). São João del-Rey, MG. UFSJ/DEMAT, 2007.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciências, 1945.

_________. O ensino por meio de problemas. *Revista do professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 7, 2 sem. 1985.

TURRIONI, Ana Maria Silveira; PEREZ, Geraldo. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, Sérgio (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de professores).

VIEIRA, F. B. P; RODRIGUES, L. B.; AGUSTINI, E. O Teorema Isoperimétrico e o problema da cerca. *FAMAT em revista*. Uberlândia: UFU. n. 4, abril de 2005. Disponível em http://www.famat.ufu.br/revista/revistaabril2005/artigos/ArtigoFlavianoLaisEdson.pdf. Acesso em 6 out 2008.

OUTROS SITES CONSULTADOS

http://educar.sc.usp.br/matematica/l2t3.htm, Acesso em 09/04/2010.

http://www.educacaopublica.rj.gov.br/oficinas/matematica/abaco/02.html. Acesso em 28 05 2009.

http://www.escolanet.com.br/teleduc/arquivos/11/leituras/184/EAD_Matematica_material_semana2.doc . Acesso em 28 05 2009.

http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.asp?token=C38B91C2-E5ED-403C-AEDF-E790E6423854&usr=pub&ID_OBJETO=23967&ID_PAI=23967&AREA=AREA&P=T&id_projeto=27[1]

1 Site do Centro de referência virtual do professor da SEEMG. Trata-se de um site inserido no Portal da Educação da Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais.