UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

CUADERNO DE EJERCICIOS

MICROECONOMÍA I
“La microeconomía desde la perspectiva de las Relaciones Económicas Internacionales”

JUVENAL ROJAS MERCED

TOLUCA MÉX., SEPTIEMBRE DE 2018

INDICE

PRESENTACIÓN

El orden económico internacional muestra y exige una interrelación constante y continua, a todos los niveles, entre los agentes económicos a través del mercado, enfrentándose en dicho proceso a una diversidad de situaciones que requieren del análisis de los diferentes elementos que lo conforman. Los agentes económicos involucrados presentan un rasgo común, un comportamiento maximizador a partir de una serie de restricciones que envuelven individualmente su respectiva toma de decisiones.

A fin de poder realizar dicho análisis y contribuir a la toma de decisiones se debe no solo conocer, comprender y utilizar los conceptos y principios que se relacionan con la teoría microeconómica, la cual se encuentra integrada por una serie de hipótesis y/o supuestos con los cuales se pretende explicar aspectos de la realidad económica, sino el poder resolver cualquier problema de orden microeconómico, ya sea equilibrio parcial o general, en la toma de decisiones bajo certeza o incertidumbre.

El Programa de Estudios Microeconomía I, es parte trascendente del Programa de la licenciatura en Relaciones Económicas Internacionales, el cual se imparte en la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma del Estado de México.

La microeconomía es la parte de la economía que estudia el comportamiento económico de agentes económicos en forma individual, analizando la toma de decisiones en busca de cumplir sus objetivos, la satisfacción de sus necesidades. Los elementos básicos en los que se centra el análisis microeconómico son los bienes, los precios, los mercados y los agentes económicos, consumidor y productor.

La microeconomía tiene varias ramas de estudio o análisis, las más importantes son: la teoría del consumidor, la del productor, la del equilibrio general, además del bienestar, los fallos del mercado y la economía de la información.

La importancia del análisis de la Microeconomía radica en que los agentes económicos en la toma de decisiones se enfrentan al riesgo y la incertidumbre en un horizonte futuro. Para reducirla se recurre a la proposición de modelos matemáticos que desarrollen los supuestos sobre el comportamiento de los agentes económicos, tratando de establecer una previsión de los fenómenos, y con ello anticiparse a lo que sucederá. Es claro que las conclusiones a la que se llegue usando dichos modelos sólo será válida, en la medida en la que se cumplan los supuestos, hecho que no siempre ocurre.

En la licenciatura en Relaciones Económicas Internacionales el Análisis y estudio de la Microeconomía cobra relevancia, toda vez que está enfocada al apoyo en la toma de decisiones.

Dado lo anterior, la unidad de aprendizaje Microeconomía I, tiene como propósito que el alumno comprenda la importancia del análisis microeconómico para explicar y describir la realidad. En particular se orientará a la comprensión y análisis de situaciones de maximización o minimización según sea el caso.

El propósito de este cuaderno de ejercicios es proporcionar un material didáctico práctico que se adapte a las diversas necesidades de los estudiantes de microeconomía. Lo anterior como consecuencia de que en la actualidad existe una gran escasez de manuales y libros que incluyan ejercicios o problemas resueltos. La experiencia docente indica que los conocimientos y contenidos teóricos se asimilan mucho mejor si su estudio va acompañado de ejercicios prácticos.

La selección de los diversos ejercicios y/o problemas corresponden con el contenido de la asignatura de microeconomía I impartida en la licenciatura en Relaciones Económicas Internacionales, buscando en todo momento el facilitar la comprensión tanto teórica como práctica de los contenidos de cada una de las unidades que constituyen el programa correspondiente, para de esta forma, el discente cuente con los elementos necesarios para dar solución a problemas que se presenten.

Por su contenido puede servir de complemento de cualquiera de los manuales o libros utilizados como bibliografía dentro del curso. El cual en particular se adoptara el texto de Gravelle y Rees (Microeconomía, Pearson Prentice Hall).

El cuaderno presenta una serie de ejercicios que se resuelven utilizando tanto instrumental analítico como gráfico. El nivel de formalización matemática corresponde con el del alumno que conoce y maneja, con cierta facilidad, las técnicas básicas de optimización, tratando en todo momento realizar la explicación en forma detallada, lo cual busca facilitar el seguimiento del alumno.

Lo anterior debido a que se considera que la resolución de ejercicios constituye una parte sumamente importante en enseñanza del análisis microeconómico.

EJERCICIO DEMOSTRATIVO

La forma en cómo se propone se vaya desarrollando o resolviendo los ejercicios y/o problemas es de tal que se vaya desarrollando, sino paso por paso, sin los pasos necesarios buscando con ello se facilite la comprensión por parte del alumno.

Así, se recomienda sea de la siguiente forma:

Una empresa monopolista enfrenta la demanda siguiente:

$$P = -3/100Q + 10$$

Para satisfacer la demanda tiene la opción de producir en sus dos fábricas o comprar la producción en el extranjero. Los costos marginales de producción en las dos fábricas son: $CMg_1 = 1/10Q + 4$ y $CMg_2 = 1/20Q + 6$.

El monopolista sabe que puede abastecerse en el extranjero. Podría importar cantidades suficientes para el mercado a un precio fijo de compra de $P = 6.5$. ¿Cuál será en ese caso el precio de venta del monopolista si desea maximizar sus utilidades?

Consideremos la posibilidad de comprar el producto en lugar de fabricarlo. Si el precio es fijo e igual a 6.5, este valor representa a la vez el costo marginal (CMg) y el costo variable medio ($CVMe$) de la empresa.

Apliquemos la regla de maximización de beneficios.

$$IMg = CMg$$

$$-\frac{3}{50}Q + 10 = 6.5$$

$$Q = 58.33$$

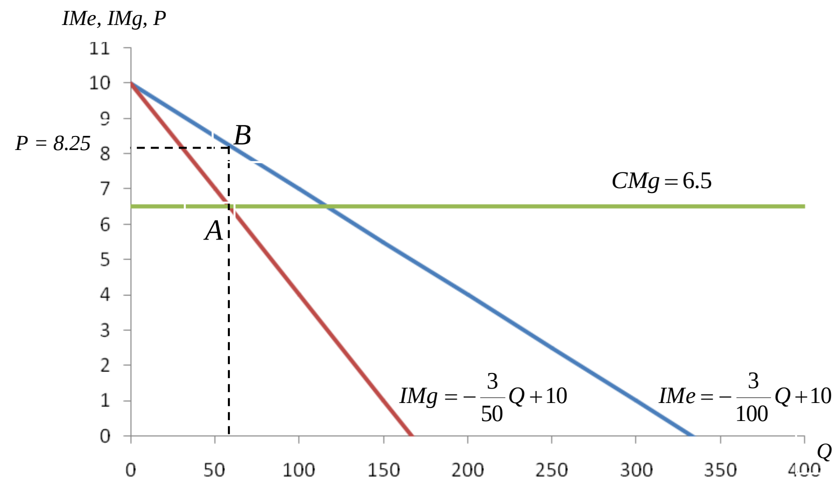
Podemos calcular el precio de venta si reportamos este valor en la función de demanda:

$$P = -\frac{3}{100}(58.33) + 10 \rightarrow P = 8.25$$

En este caso su margen de utilidad será

$$X = \frac{P - CVMe}{CVMe} = \frac{8.25 - 6.50}{6.50} = 27\%$$

$$X = 27\%$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

UNIDAD I. Introducción a la microeconomía

1. La tabla muestra las estimaciones de las elasticidades del precio, cruzada e ingreso para artículos seleccionados en EEUU Y EL Reino Unido.

Precio de la elasticidad de la demanda		Elasticidad de la demanda cruzada		Tasa de la elasticidad de la demanda	
Artículo	Tipo de demanda	Artículo	Tipo de Artículo	Artículo	Tipo de Artículo
Carne	0.92	Carne, Puerco	0.28	Mantequilla	0.42
Papas	0.31	Mantequilla/ Margarina	0.67	Margarina	-0.20
Azúcar	0.31	Queso, mantequilla	-0.61	Carne	0.35
Electricidad	1.20	Azúcar, frutas	-0.28	Electricidad	0.20
Comidas en restaurante	2.27	Electricidad gas	0.20	Comidas en restaurante	1.48

a) A partir de las elasticidades de los precios (e), indique si la demanda es elástica o inelástica; a partir de las elasticidades cruzadas (e_{xy}) si los artículos son sustitutos o complementarios; y con base a la elasticidad del ingreso (e_I) si el artículo es un bien de lujo, un bien básico o un bien inferior.

b) Indique el cambio de la cantidad comprada de cada artículo, si el precio de este o el ingreso del consumidor aumentaran en un 10%.

2. Un consumidor percibe los siguientes niveles de utilidad total por el consumo de los bienes A y B por unidad de tiempo:

Q	UT_A	UT_B
0	0	0
1	16	9
2	30	17
3	42	24
4	52	30
5	60	35
6	66	39

Además se sabe que el precio del bien A es $2 y el precio de B es $1. El ingreso del consumidor es $10. ¿Cuánto debe comprar de cada bien el consumidor con el fin de maximizar su satisfacción total?

3. Con base en el ejercicio anterior ¿Qué pasa si el precio de A baja a $1?

4. A cierto consumidor le gusta vestir camisas elegantes y el buen comer. Su función de utilidad asociada a esos dos bienes es del tipo $U = (X_1 + 2)(X_2 + 4)$, donde X_1 es cada camisa, y X_2 cada comida que realiza. El precio de cada camisa es de 5,000 u.m., mientras que cada comida asciende a 10,000 u.m. Si su ingreso es de 120,000 u.m. al mes. Cuál será la función de demanda de las camisas

5. Partiendo del ejercicio anterior ¿Cuál será la elasticidad de la demanda de camisas respecto al precio de las comidas?

6. Atendiendo al valor de la elasticidad ingreso de las comidas del ejercicio anterior, se puede decir que para D. Anselmo éstas son?:

a. Un bien de primera necesidad
b. Un bien de lujo
c. Un bien Giffen
d. Un bien inferior

7. ¿En cuánto disminuiría el consumo de camisas si su precio aumenta en un 10%?:

a) 10%
b) 10.7%
c) 12.3%
d) 14.6%

8. La función de utilidad de un individuo es del tipo $U = X_1 + \ln X_2$, donde X_1 representa el consumo de tazas de café, y X_2 el número de revistas que lee a la semana. Para un ingreso M, y

los precios de los bienes p_1, p_2: ¿Cuál es la elasticidad de las revistas respecto al precio de la taza de café?, ¿Cuál es la elasticidad de las tazas de café respecto a su propio precio?, ¿En cuánto aumentará el número de revistas que lea a la semana si su ingreso crece en un 20%?

9. Cierta ama de casa ama los bombones de chocolate. La receta magistral de cada bombón obliga a la combinación de 30 gr de azúcar por cada 20 gr de cacao. Si el precio de los 100 gr de azúcar es de 40 u.m., y el precio de los 100 gr de cacao de 60 u.m., y Francisco posee un ingreso de 1,440 u.m. ¿En cuánto aumentará el consumo de cacao si el ingreso aumenta en un 10%?, ¿Cuál es la elasticidad del cacao respecto al precio del azúcar?

10. Suponga un individuo que posee un ingreso $M = 100$ y los precios de los bienes $p_1 = 4$ y $p_2 = 2$. Si el gobierno decide gravar con un impuesto ad-valorem del 25% en el bien X_1, ¿Cuál será la máxima cantidad que se pueda consumir de este bien?

UNIDAD II. TEORÍA DEL CONSUMIDOR

1. Partiendo de la función indirecta de utilidad

$$V = \frac{8M^3}{27P_X P_Y^2}$$

Obtener

a. Las funciones de demanda ordinaria,
b. La ecuación de gasto
c. Las demandas compensadas.

2. Partiendo de la función indirecta de utilidad $e^u = \frac{M^2}{4P_1P_2}$, mostrar que se cumple

a. La identidad de Roy,
b. El Lema de Shepard
c. Las identidades en el equilibrio

3. Dada la siguiente función de utilidad

$$U = Lnx_1 + Lnx_2$$

Determinar

a. Las funciones de demanda ordinarias
b. Función de demanda compensada
c. Funciones de demanda compensadas
d. La función de gasto del consumidor
e. Las comprobaciones correspondientes.

4. Dada la siguiente Función Indirecta de Utilidad

$$v = \frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{cp_1}\right) + \frac{cM}{p_2}$$

Determinar:

a. Las funciones de demanda ordinarias
b. La función de gasto
c. Las funciones de demanda compensadas

5. Comprobar si las demandas ordinarias cumplen las restricciones impuestas por la teoría.

$$X_1 = \left(\frac{p_2}{4c\ \ p_1}\right)^2 \quad \text{y} \quad X_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_2}{4c^2 p_1}$$

6. Partiendo de las funciones de demanda compensada

$$hx_1 = \sqrt{\frac{UP_2}{2P_1}} - \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad hx_2 = \sqrt{\frac{UP_1}{2P_2}}$$

Obtener

a. La ecuación de gasto,
b. La función indirecta de utilidad, y
c. Las funciones de demanda ordinaria.

7. Se ha observado que en Madrid el incremento del precio de la gasolina en un 5% ha reducido la demanda de billetes de

transporte colectivo (metrobus) en un 1%. Para un individuo tipo las elasticidades ingreso de la gasolina y los metrobuses son respectivamente 4 y 2, y el ingreso gastada en gasolina y metrobuses es respectivamente 5 y 1%.

8. La función de utilidad de Julia es $U(x,y) = x + 2y$, donde "x" es el consumo de un bien X, & Y es el consumo de un bien Y. Su renta es de 2 euros. El precio de Y es de 2 euros. El costo por unidad de X depende de cuantas unidades consume. El gasto total de "x" unidades de X es $\sqrt{x}$. ¿Cuál es la demanda de Julia para el bien X?

9. Dada la función de utilidad $U=(X,Y)=X^{\alpha}Y^{1-\alpha}$ obtener las cantidades que minimizan el gasto.

10. Partiendo de las funciones de demanda compensada (Hicksianas) que minimizan el gasto, $h_X = X = U\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{P_Y}{P_X}\right)^{1-\alpha}$ y $h_Y = Y = U\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{P_X}{P_Y}\right]^{\alpha}$ obtener la ecuación de gasto (mínimo).

UNIDAD III. TEORÍA DE LA EMPRESA

1. Partiendo de la función de producción

$$Y = X_1^{1/2} + X_2^{1/2}$$

Obtener las funciones de demanda de los factores, la función de producción, la función de ingreso total, la función de costos y la función de beneficios

2. Partiendo de la siguiente función de beneficios:

$$\Pi(P,W_1,W_2) = \frac{P^2(W_1+W_2)}{4W_1W_2}$$

   a. Obtener las demandas de inputs
   b. Obtener la función de oferta del output
   c. Obtener las demandas condicionadas de los inputs
   d. La función de costos
   e. La función de producción

3. Partiendo de la siguiente función de beneficios

$$\Pi = \frac{200P^2}{r^{1/2}w^{1/2}}$$

Determinar las funciones de demanda de los insumos Capital (K) y Trabajo (L) y la función de oferta

4. Partiendo de los resultados del ejercicio anterior determinar las funciones de demanda condicionada de los factores, y la función de costo mínimo.

5. Partiendo de la función de costo mínimo obtenida en el ejercicio anterior, determinar la función de producción original.

6. Considere una empresa que produce el bien X a partir de la función de producción $X = L(K-L)$, donde L y K son los factores productivos, cuyos precios son $r = 100$ y $w = 44$.
   a. ¿Cuál es la expresión de la función de demanda condicionada de L?
   b. ¿Cuál es la expresión de la función de demanda condicionada de K?
   c. ¿Cuál es la expresión de la función de Costos Totales a largo plazo?

7. Una empresa fabrica relojes utilizando una función de producción de rendimientos constantes a escala $X = K^{1/2}L^{1/2}$, donde K son las piezas del reloj, y L las horas de trabajo.
   a. Si $r = 36$ y $w = 4$, ¿cuál será el costo de fabricar 120 relojes?
   b. Suponga que el precio de la hora de trabajo se incrementa hasta $w = 9$. Si la empresa no desea variar su producción

de relojes ($X = 120$). ¿Cuál será el valor del efecto sustitución sobre el trabajo (L)?

8. Cierta empresa produce tornillos con una función de costos totales a corto plazo $CT_{CP}(X) = X^3 - 5X^2 + 3X + 9$, donde X se mide en miles de tornillos.
   a. ¿Para qué nivel de producto se alcanza el Óptimo de Explotación?
   b. ¿Para qué nivel de producto se alcanza el Mínimo de Explotación?
   c. ¿Para qué nivel de producto para el que el Costo Marginal es mínimo?

9. Suponga una empresa que posee una función de costos totales a largo plazo del tipo $CT_{LP}(X) = X^3 - 6X^2 + 50X$.
   a. ¿Para qué nivel de producción se alcanzará la Dimensión Óptima?
   b. ¿Cuál será el valor del Costo Marginal a largo plazo en la Dimensión Óptima?
   c. Si la función de Costo Total a corto plazo es: $CT_{CP}(X) = X^3 - 3X^2 + 32X + CF$

donde CF representa el Costo Fijo, ¿cuál será el valor del citado Costo Fijo si la empresa produce a corto plazo también en la Dimensión Óptima?

SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

UNIDAD I.
Introducción a la Microeconomía

1. **La tabla muestra las estimaciones de las elasticidades del precio, cruzada e ingreso para artículos seleccionados en EEUU Y EL Reino Unido.**

Precio de la elasticidad de la demanda		Elasticidad de la demanda cruzada		Tasa de la elasticidad de la demanda	
Artículo	***e***	**Artículo**	***e***	**Artículo**	***e***
Carne	0.92	Carne, Puerco	0.28	Mantequilla	0.42
Papas	0.31	Mantequilla/ Margarina	0.67	Margarina	-0.20
Azúcar	0.31	Queso, mantequilla	-0.61	Carne	0.35
Electricidad	1.20	Azúcar, frutas	-0.28	Electricidad	0.20
Comidas en restaurante	2.27	Electricidad, gas	0.20	Comidas en restaurante	1.48

a. **A partir de las elasticidades de los precios (*e*), indique si la demanda es elástica o inelástica; a partir de las elasticidades cruzadas (e_{xy}) si los artículos son sustitutos o complementarios; y con base a la elasticidad del ingreso (e_I) si el artículo es un bien de lujo, un bien básico o un bien inferior.**

b. **Indique el cambio de la cantidad comprada de cada artículo, si el precio de este o el ingreso del consumidor aumentaran en un 10%.**

---

a. Indicando si la demanda es elástica o inelástica; a partir de las elasticidades cruzadas (e_{xy}) si los artículos son sustitutos o complementarios; y con base a la elasticidad del ingreso (e_I) si el artículo es un bien de lujo, un bien básico o un bien inferior.

Artículo	Tipo de demanda	Artículo	Tipo de Artículo	Artículo	Tipo de Artículo
Carne	Inelástica	Carne, Puerco	Sustituto	Mantequilla	Necesario
Papas	Inelástica	Mantequilla . Margarina	Complementario	Margarina	Inferior
Azúcar	Inelástica	Queso, mantequilla	Complementario	Carne	Necesaria
Electricidad	Elástica	Azúcar, frutas	Sustituto	Electricidad	Necesaria
Comidas en restaurante	Elástica	Electricidad gas	Sustituto	Comidas en restaurante	Lujoso

b. Indique el cambio de la cantidad comprada de cada artículo, si el precio de este o el ingreso del consumidor aumentaran en un 10%

Artículo	$\Delta\%Q_i$	Artículo	$\Delta\%Q_i$	Artículo	$\Delta\%Q_i$
Carne	9.2	Carne	2.8	Mantequilla	4.2
Papas	3.1	Mantequilla	6.7	Margarina	-2.0
Azúcar	3.1	Queso	-6.1	Carne	3.5
Electricidad	12.0	Azúcar	-2.8	Electricidad	2.0
Comidas en restaurante	22.7	Electricidad	2.0	Comidas en restaurante	14.8

2. Un consumidor percibe los siguientes niveles de utilidad total por el consumo de los bienes A y B por unidad de tiempo:

Q	UT_A	UT_B
0	0	0
1	16	9
2	30	17
3	42	24
4	52	30
5	60	35
6	66	39

Además se sabe que el precio del bien A es \$2 y el precio de B es \$1. El ingreso del consumidor es \$10. ¿Cuánto debe comprar de cada bien el consumidor con el fin de maximizar su satisfacción total?

Es necesario calcular la utilidad marginal para cada bien y la utilidad marginal por peso gastado (utilidad marginal entre el precio del bien):

Q	U_A	U_B	UMg_A	UMg_B	UMg_A / P_A	UMg_B / P_B
0	0	0	-	-	-	-
1	16	9	16	9	8	9
2	30	17	14	8	7	8
3	42	24	12	7	6	7
4	52	30	10	6	5	6
5	60	35	8	5	4	5
6	66	39	6	4	3	4

Con base en esa información el consumidor gasta su ingreso de \$10. Compra primero una unidad de B, ya que le proporciona una utilidad de 9, mayor que la utilidad de la primera unidad de A que es 8. Luego podrá comprar indiferentemente entre la primera unidad de A o la segunda de B, ya que proveen la misma satisfacción. Su ingreso le alcanza para comprar ambas unidades.

Hasta aquí lleva gastados \$4, ya que ha comprado dos unidades de B a un precio de \$1 cada una y una unidad de A cuyo precio es \$2. Así continúa gastando todo su ingreso, hasta comprar 3 unidades de A y 4 de B. En este punto gastó todo su ingreso y maximizó su satisfacción. Esto se puede comprobar verificando las dos condiciones mencionadas para maximizar la satisfacción total:

El consumidor gasto todo su ingreso: restricción presupuestaria:

$$M = P_A\, Q_A + P_B\, Q_B$$
$$\$10 = \$2\,(3) + \$1(4) = \$6 + \$4$$
$$\$10 = \$10$$

El consumidor maximiza su utilidad total: condición de equimarginalidad:

$$\frac{UMg_A}{P_A} = \frac{UMg_B}{P_B} \rightarrow \frac{12}{2} = \frac{6}{1} = 6$$

El consumidor al comprar las 3 unidades de A y las 4 unidades de B ha obtenido una satisfacción total de 72 (42 de A + 30 de B), que es la máxima satisfacción posible dados estos precios y su ingreso.

3. **Con base en el ejercicio anterior ¿Qué pasa si el precio de A baja a $1?**

Para responder a la pregunta es necesario volver a calcular la tabla anterior, pero ahora con el nuevo precio del bien A:

Q	UT_A	UT_B	UM_A	UM_B	UMg_A / P_A	UMg_B / P_B
0	0	0	-	-	-	-
1	16	9	16	9	16	9
2	30	17	14	8	14	8
3	42	24	12	7	12	7
4	52	30	10	6	10	6
5	60	35	8	5	8	5
6	66	39	6	4	6	4

Con base en esa información el consumidor gasta su ingreso de $10. Compra primero una unidad de A, ya que le proporciona una utilidad de 16, mayor que la utilidad de la primera unidad de B que es 9. Luego comprará la segunda, tercera y cuarta unidades de A, ya que cada una de ellas proporciona una satisfacción mayor que la primer unidad de B.

Después comprará la primera unidad de B, que proporciona mayor satisfacción que la quinta unidad de A. Así continúa gastando todo su ingreso, hasta comprar 6 unidades de A y 4 unidades de B. En este punto gastó todo su ingreso y maximizó su satisfacción.

Esto se puede comprobar verificando las dos condiciones mencionadas para maximizar la satisfacción total:

El consumidor gasto todo su ingreso: restricción presupuestaria:

$$M = P_A Q_A + P_B Q_B$$

$$\$10 = \$1\,(6) + \$1(4) = \$6 + \$4$$
$$\$10 = \$10$$

El consumidor maximiza su utilidad total: condición de equimarginalidad:

$$\frac{UMg_A}{P_A} = \frac{UMg_B}{P_B} \rightarrow \frac{6}{1} = \frac{6}{1} = 6$$

El consumidor al comprar las 6 unidades de A y las 4 unidades de B ha obtenido una satisfacción total de 96 (66 de A + 30 de B), que es la máxima satisfacción posible dados los nuevos precios y su ingreso.

4. **A cierto consumidor le gusta vestir camisas elegantes y el buen comer. Su función de utilidad asociada a esos dos bienes es del tipo $U = (X_1 + 2)(X_2 + 4)$, donde X_1 es cada camisa, y X_2 cada comida que realiza. El precio de cada camisa es de 5,000 u.m., mientras que cada comida asciende a 10,000 u.m. Si su ingreso es de 120,000 u.m. al mes.**
Cuál será la función de demanda de las camisas

Vamos a buscar las funciones de demanda de camisas (X_1) y de comidas (X_2), combinando la ecuación de equilibrio con la recta presupuestaria.

La *CPO* implica que:

$$\frac{\partial u / \partial X_1}{\partial u / \partial X_2} = \frac{P_1}{P_2} \quad \cdots \rightarrow \quad \frac{X_2 + 4}{X_1 + 2} = \frac{P_1}{P_2} \quad \cdots \rightarrow \quad (X_2 + 4)P_2 = (X_1 + 2)P_1$$

Sustituyendo en la recta presupuestaria:

$$M = P_1 X_1 + P_2 X_2$$

Utilizando (1) para sustituir en (2):

$$M = P_1 X_1 + [(X_1 + 2)P_1 - 4P_2] = 2P_1 X_1 + 2P_1 - 4P_2$$

La función de demanda para X_1: $X_1 = \dfrac{M - 4P_2 - 2P_1}{2P_1}$

Repitiendo el procedimiento:

$$M = [(X_2 + 4)P_2 - 2P_1] + P_2 X_2 = 2P_2 X_2 - 2P_1 + 4P_2$$

La función de demanda para X_2: $X_2 = \dfrac{M - 4P_2 + 2P_1}{2P_2}$

5. Partiendo del ejercicio anterior ¿Cuál será la elasticidad de la demanda de camisas respecto al precio de las comidas?

Primero, calculemos las cantidades demandadas para (M = 120,00; P_1 = 5,00; P_2 = 10,000)

$$X_1 = \frac{M - 4P_2 - 2P_1}{2P_1} = \frac{120{,}000 + 4(10{,}000) - 2(5{,}000)}{2(5{,}000)} = 15$$

$$X_2 = \frac{M - 4P_2 + 2P_1}{2P_2} = \frac{120{,}000 - 4(10{,}000) + 2(5{,}000)}{2(10{,}000)} = 4.5$$

Ya podemos responder a lo que se pregunta.

$$E_{X_1,P_2} = \frac{\partial X_1}{\partial P_2}\frac{P_2}{X_1} = \frac{4}{2P_1}\frac{P_2}{X_1} = \frac{4}{2(5{,}000)}\frac{10{,}000}{15} = 0.2666 \approx 0.27$$

6. Atendiendo al valor de la elasticidad ingreso de las comidas del ejercicio anterior, se puede decir que para D. Anselmo éstas son?:
a. Un bien de primera necesidad
b. <u>Un bien de lujo</u>
c. Un bien Giffen
d. Un bien inferior

Calculemos la Elasticidad-ingreso de X_2

$$E_{X_1,M} = \frac{\partial X_2}{\partial M}\frac{M}{X_2} =$$
$$= \frac{1}{2P_2}\frac{M}{X_2} =$$
$$= \frac{1}{2(10{,}000)}\frac{120{,}000}{2(10{,}000)} =$$
$$= \frac{12}{9} \succ 1$$

Por resultar positiva y superior a la unidad, un bien normal de lujo.

7. ¿En cuánto disminuiría el consumo de camisas si su precio aumenta en un 10%?
a. 10%
b. 10.7%
c. 12.3%
d. 14.6%

La expresión de la elasticidad-precio:

$$E_{X_1,P_1} = \frac{\partial X_1}{\partial P_1}\frac{P_1}{X_1} = \frac{-2M - 8P_2}{4P_1^2}\frac{P_1}{X_1} =$$
$$= \frac{-2(120{,}000) - 8(10{,}000)}{4(5{,}000)^2}\frac{5{,}000}{15} =$$
$$= 1.0666$$

Esta cifra indica el porcentaje de variación de la cantidad cuando el precio varía en un 1%. Como ha variado en un 10%, la variación relativa en la cantidad será: (-1.0666).
10% = - 10.666%

8. La función de utilidad de un individuo es del tipo $U = X_1 + \ln X_2$, donde X_1 representa el consumo de tazas de café, y X_2 el número de revistas que lee a la semana. Para un ingreso M, y los precios de los bienes p_1, p_2: ¿Cuál es la elasticidad de las revistas respecto al precio de la taza de café?, ¿Cuál es la elasticidad de las tazas de café respecto a su propio precio?, ¿En cuánto aumentará el número de revistas que lea a la semana si su ingreso crece en un 20%?

¿Cuál es la elasticidad de las revistas respecto al precio de la taza de café?

Utilizando el método habitual vamos a obtener las funciones de demanda:

$$\frac{\partial u / \partial X_1}{\partial u / \partial X_2} = \frac{P_1}{P_2} \quad \cdots \rightarrow \quad \frac{1}{1/X_2} = \frac{P_1}{P_2} \quad \cdots \rightarrow \quad X_2 = \frac{P_1}{P_2}$$

Ya tenemos la demanda de X_2 vamos a obtener la de X_1:

$$M = P_1 X_1 + P_1 \qquad \rightarrow \qquad X_1 = \frac{M - P_1}{P_1}$$

$$\varepsilon_{X_2, P_1} = \frac{\partial X_2}{\partial P_1} \frac{P_1}{X_2} = \frac{1}{P_2} \frac{P_1}{P_1 / P_2} = 1$$

¿Cuál es la elasticidad de las tazas de café respecto a su propio precio?:

Aplicando la fórmula de la elasticidad tenemos lo siguiente

$$E_{X_1, P_1} = \frac{\partial X_1}{\partial P_1} \frac{P_1}{X_1} = \frac{-M}{P_1^2} \frac{P_1}{M - P_1 / P_1} = -\frac{M}{M - P_1}$$

¿En cuánto aumentará el número de revistas que lea a la semana si su ingreso crece en un 20%?:

Cero, Obsérvese que la demanda de X_2 no depende de "M".

9. Cierta ama de casa ama los bombones de chocolate. La receta magistral de cada bombón obliga a la combinación de 30 *gr* de azúcar por cada 20 *gr* de cacao. Si el precio de los 100 *gr* de azúcar es de 40 u.m., y el precio de los 100 gr de cacao de 60 u.m., y Francisco posee un ingreso de 1,440 u.m. ¿En cuánto aumentará el consumo de cacao si el ingreso aumenta en un 10%?, ¿Cuál es la elasticidad del cacao respecto al precio del azúcar?

¿En cuánto aumentará el consumo de cacao si el ingreso aumenta en un 10%?

Vamos a determinar las demandas, tanto de azúcar (X_1), como de cacao (X_2). Los bienes se van a demandar de acuerdo con la proporción: $30X_2 = 20X_1$, lo cual combinado con la recta presupuestaria:

$$M = P_1X_1 + P_2\left(\frac{2}{3}X_1\right) = X_1\left(P_1 + \frac{2}{3}P_2\right)$$

$$X_1 = \frac{3M}{3P_1 + 2P_2}$$

Repitiendo el procedimiento para X_2:

$$M = \frac{3}{2}P_1X_1 + P_2X_2 = X_2\left(\frac{3}{2}P_1 + P_2\right)$$

$$M = P_1X_1 + P_2X_2 = P_1\left(\frac{3}{2}X_2\right) + P_2X_2 = X_2\left(\frac{3}{2}P_1 + P_2\right)$$

Finalmente $X_1 = \dfrac{2M}{3P_1 + 2P_2}$

Calculemos la elasticidad- ingreso del cacao (X_2):

$$E_{X_1,M} = \frac{\partial X_2}{\partial M}\frac{M}{X_2} = \left(\frac{2}{3P_1 + 2P_2}\right)\left(\frac{M}{2M/(3P_1 + 2P_2)}\right) = 1$$

Como la elasticidad-ingreso es unitaria, el consumo de cacao aumentará en un 10%.

¿Cuál es la elasticidad del cacao respecto al precio del azúcar?

Aplicando la fórmula de la elasticidad

$$E_{X_1,P_2} = \frac{\partial X_2}{\partial P_1}\frac{P_1}{X_2} = \frac{-6M}{(3P_1 2P_2)^2}\frac{P_1}{2M/(3P_1 + 2P_2)} =$$

$$= -\frac{3P_1}{3P_1 + 2P_2} = -\frac{1}{1 + 2P_2/3P_1} = -0.5$$

Esto es, cuando el precio del azúcar se incrementa en uno por ciento, la demanda de cacao disminuye 0.5%.

10. Suponga un individuo que posee un ingreso $M = 100$ y los precios de los bienes $p_1 = 4$ y $p_2 = 2$. Si el gobierno decide gravar con un impuesto ad-valorem del 25% en el bien X_1, ¿Cuál será la máxima cantidad que se pueda consumir de este bien?

La recta presupuestaria pasa a ser: $M = (1 + t)P_1X_1 + P_2X_2$
Introduciendo los datos: $100 = (1 + 0.25)\ 4X_1 + 2X_2$

Operando, la cantidad máxima de X_1 (hacemos $X_2 = 0$) sería:
$^{100}/_{5} = 20$

UNIDAD II.
Teoría del Consumidor

1. **Partiendo de la función indirecta de utilidad**

$$V=\frac{8M^3}{27P_XP_Y^2}$$

Obtener

a. **Las funciones de demanda ordinaria**
b. **La ecuación de gasto**
c. **Las demandas compensadas**

---

a. **Funciones de demanda ordinaria**

Para obtener las funciones de demanda ordinaria hacemos uso de la identidad de Roy, ya que esta identidad nos permite pasar de la función de utilidad indirecta a la demanda ordinaria a través de la siguiente expresión

$$X=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_X}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

Así realizando las operaciones correspondientes

$$\frac{\partial V}{\partial P_X}=-\frac{8M^3}{27P_X^2P_Y^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial M}=\frac{24M^2}{27P_XP_Y^2}$$

De esta forma:

$$X=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_X}}{\frac{\partial V}{\partial M}}=-\frac{-\frac{8M^3}{27P_X^2P_Y^2}}{\frac{24M^2}{27P_XP_Y^2}}=\frac{\left(8M^{\cancel{3}}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,\cancel{P_Y^2}\right)}{\left(24\cancel{M^2}\right)\left(\cancel{27}P_X^{\cancel{2}}\,\cancel{P_Y^2}\right)}=\frac{M}{3P_X}$$

$$Y=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_Y}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

Similarmente para Y

$$\frac{\partial V}{\partial P_Y}=-\frac{16M^3}{27P_XP_Y^3} \qquad \frac{\partial V}{\partial M}=\frac{24M^2}{27P_XP_Y^2}$$

De esta forma:

$$Y=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_Y}}{\frac{\partial V}{\partial M}}=-\frac{-\frac{16M^3}{27P_XP_Y^3}}{\frac{24M^2}{27P_XP_Y^2}}=\frac{\left(16M^{\cancel{3}}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,\cancel{P_Y^2}\right)}{\left(24\cancel{M^2}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,P_Y^{\cancel{3}}\right)}=\frac{2M}{3P_Y}$$

b. **Ecuación de gasto**

Para obtener la función de gasto mínimo, dado que en equilibrio el ingreso es igual al gasto

$$V=\frac{8M^3}{27P_XP_Y^2}\rightarrow\frac{8E^3}{27P_XP_Y^2}$$

y dado que la función indirecta de utilidad y la ecuación de gasto son inversas:

$$V=\frac{8E^3}{27P_XP_Y^2}\rightarrow 27VP_XP_Y^2=8E^3\rightarrow E=\left(\frac{27VP_XP_Y^2}{8}\right)^{1/3}$$

La cual solo simplificando $E=\frac{3}{2}\left(VP_XP_Y^2\right)^{1/3}$ Ecuación de gasto

c. **Funciones de demanda compensadas (hicksianas)**

Para ello hacemos uso del Lema de Shepard, el cual establece que derivando a la función de gasto con respecto al precio, obtendremos la demanda correspondiente

$$\frac{dE}{dP_i}=hx_i$$

Si $E=\frac{3}{2}\left(VP_XP_Y^2\right)^{1/3}$

Para el bien 1 $$\frac{dE}{dP_X}=hx=\frac{1}{2}\left(VP_Y^2\right)^{1/3}P_X^{-2/3}=\left(\frac{VP_Y^2}{8P_X^2}\right)^{1/3}=h_X$$

Para el bien 2 $$\frac{dE}{dP_Y}=h_Y=\left(VP_X\right)^{1/3}P_Y^{-1/3}=\left(\frac{VP_X}{P_Y}\right)^{1/3}=h_Y$$

2. **Partiendo de la función indirecta de utilidad $e^{u} = \frac{M^2}{4P_1P_2}$, mostrar que se cumple**

a. **La identidad de Roy,**
b. **El Lema de Shepard**
c. **Las identidades en el equilibrio**

---

a. La identidad de Roy nos permite pasar de la función de utilidad indirecta a la demanda ordinaria y está dada por.

$$X_1 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

Realizando las operaciones correspondientes

$$\frac{\partial V}{\partial P_1} = \frac{\frac{-4M^2P_2}{(4P_1P_2)^2}}{\frac{M^2}{4P_1P_2}} = -\frac{4P_2}{4P_1P_2} = -\frac{1}{P_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial M} = \frac{\frac{2M}{4P_1P_2}}{\frac{M^2}{4P_1P_2}} = \frac{2M}{M^2} = \frac{2}{M}$$

De esta forma:

$$X_1 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}} = -\frac{-\frac{1}{P_1}}{\frac{2}{M}} = \frac{M}{2P_1}$$

b. El Lema de Shepard se obtiene aplicando el teorema de la envolvente a la función de mínimo costo o de gasto, vemos que

$$\frac{dE}{dP_i} = hx_i$$

Para ello requerimos la función de gasto, la cual se obtiene con solo despejar M de la función indirecta de utilidad

$\boldsymbol{e^{u} = \frac{M^2}{4P_1P_2}}$, $\quad E = \sqrt{4e^{u}p_1p_2}$

De esta forma realizando las operaciones correspondientes

$$\frac{dE}{dP_1} = \frac{1}{2}\frac{2e^{u/2}P_2^{1/2}}{P_1^{1/2}} = \frac{e^{u/2}P_2^{1/2}}{P_1^{1/2}} = \sqrt{\frac{e^{u}P_2}{P_1}} = e^{u/2}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = hx_1$$

c. Demostrar que en el equilibrio, las funciones de demanda ordinaria y compensada son iguales

Esto se realiza a través de las identidades

$$X_i\left(P_1, P_2, M\right)\Big|_{M=E} \equiv hx_i$$

$$X_1\Big|_{M=E} = \frac{2e^{u/2}\sqrt{P_1P_2}}{2P_1} = e^{u/2}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = hx_1$$

$$hx_i\left(P_1, P_2, U\right)\Big|_{u=v} \equiv X_i$$

$$hx_1\Big|_{u=v} = \sqrt{\frac{M^2}{4P_1P_2}}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = \sqrt{\frac{M^2}{4P_1^2}} = \frac{M}{2P_1} = X_1$$

Con lo cual se establece que la función indirecta de utilidad cumple con las condiciones impuestas por la teoría.

3. **Dada la siguiente función de utilidad**

$$U = Lnx_1 + Lnx_2$$

Determinar

a. **Las funciones de demanda ordinarias**
b. **Función de demanda compensada**
c. **Funciones de demanda compensadas**
d. **La función de gasto del consumidor**
e. **Las comprobaciones correspondientes.**

---

a. Las funciones de demandas ordinarias las obtendremos a partir del problema primal: del problema de la maximización de la utilidad

$$\max \quad U = (X) = LnX_1 + LnX_2$$
$$s.a. \quad M = P_1X_1 + P_2X_2$$

Aplicamos la ley de la igualdad de las Utilidades Marginales Ponderadas o condición de primer orden (*CPO*)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial U/\partial X_1}{\partial U/\partial X_2} = \dfrac{P_1}{P_2}\cdots\rightarrow \dfrac{\frac{1}{X_1}}{\frac{1}{X_2}} = \dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{P_1}{P_2}\cdots\rightarrow P_1X_1 = P_2X_2 \\ \text{Combinando con la restricción presupuestaria } M = P_1X_1 + P_2X_2\end{array}\right\} \begin{array}{l} X_1 = \dfrac{M}{2P_1} \\ X_2 = \dfrac{M}{2P_2}\end{array}$$

b. La Función indirecta de utilidad se obtiene sustituyendo la funciones de demanda ordinaria en la función de utilidad

$$U = Ln\left(\frac{M}{2P_1}\right) + Ln\left(\frac{M}{2P_2}\right)$$

$$U = Ln\left(\frac{M^2}{4P_1P_2}\right)\cdots\rightarrow e^u = \frac{M^2}{4P_1P_2}$$

c. Las funciones de demandas compensadas se obtienen a partir del problema dual

$$Min \quad P_1X_1 + P_2X_2$$
$$s.a \quad U(X) = LnX_1 + LnX_2$$

Al cual se aplica la ley de la igualdad de las Utilidades Marginales Ponderadas o cpo

$$\frac{\partial U/\partial X_1}{\partial U/\partial X_2} = \frac{P_1}{P_2}\cdots\rightarrow P_1X_1 = P_2X_2$$

Combinando con la función de utilidad (restricción).

$$U = LnX_1 + Ln\left(X_1\frac{P_1}{P_2}\right) = LnX_1 + LnX_1 + Ln\frac{P_1}{P_2}\cdots\rightarrow 2LnX_1 = U - Ln\frac{P_1}{P_2}$$

Eliminando el logaritmo:

$$X_1^2 = \frac{e^U}{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{P_2}{P_1}e^U\cdots\rightarrow X_1 = \sqrt{\frac{P_2}{P_1}}e^{\frac{U}{2}}; \quad igualmente: \quad X_2 = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}}e^{\frac{U}{2}}$$

b. Para obtener la función de Gasto, introduciremos las funciones de demandas compensadas en la Restricción presupuestaria:

$$M = E = P_1X_1 + P_2X_2 = P_1\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}e^{\frac{U}{2}} + P_2\sqrt{\frac{P_1}{P_2}}e^{\frac{U}{2}} = 2\sqrt{P_1P_2}e^{\frac{U}{2}}$$

$$E = 2\sqrt{P_1P_2}e^{\frac{U}{2}}$$

c. Realizando las comprobaciones correspondientes

❖ Identidad de Roy

Esta identidad nos permite pasar de la función de utilidad indirecta a la demanda ordinaria a través de la expresión.

$$X_1 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

De esta forma realizando las operaciones correspondientes

$$\frac{\partial V}{\partial P_1}=\frac{\frac{-4M^2P_2}{(4P_1P_2)^2}}{\frac{M^2}{4P_1P_2}}=-\frac{4P_2}{4P_1P_2}=-\frac{1}{P_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial M}=\frac{\frac{2M}{4P_1P_2}}{\frac{M^2}{4P_1P_2}}=\frac{2M}{M^2}=\frac{2}{M}$$

De esta forma:

$$X_1=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}}=-\frac{-\frac{1}{P_1}}{\frac{2}{M}}=\frac{M}{2P_1}$$

- **Lema de Shepard**

Aplicando el teorema de la envolvente a la función de mínimo costo o de gasto, vemos que

$$\frac{dE}{dP_i}=hx_i$$

$$\frac{dE}{dP_1}=\frac{1}{2}\frac{2e^{u/2}P_2^{1/2}}{P_1^{1/2}}=\frac{e^{u/2}P_2^{1/2}}{P_1^{1/2}}=\sqrt{\frac{e^uP_2}{P_1}}=e^{u/2}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}=hx_1$$

- **En el equilibrio, las funciones de demanda ordinaria y compensada son iguales**

Esto se realiza a través de las identidades

b) $X_i\left(P_1,P_2,M\right)\big|_{M=E}\equiv hx_i$

$$X_1\big|_{M=E}=\frac{2e^{u/2}\sqrt{P_1P_2}}{2P_1}=e^{u/2}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}=hx_1$$

c) $hx_i\left(P_1,P_2,U\right)\big|_{u=v}\equiv X_i$

$$hx_1\big|_{u=v}=\sqrt{\frac{M^2}{4P_1P_2}}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}=\sqrt{\frac{M^2}{4P_1^2}}=\frac{M}{2P_1}=X_1$$

Comprobar si las demandas ordinarias cumplen las restricciones impuestas por la teoría.

- **Ley de Walras**

Verifiquemos que en equilibrio el ingreso es igual al gasto:

$$M=P_1X_1(P,M)+P_2X_2(P,M)$$

$$P_1\left(\frac{M}{2P_1}\right)+P_2\left(\frac{M}{2P_2}\right)=\frac{M}{2}+\frac{M}{2}=M \quad \text{Se cumple}$$

- **Homogeneidad de grado cero en (P,M)**

Comprobar que:

Siendo $X_i=X_i(P_1,P_2,M)$, se verifica : $X_i\lambda=X_i\left(\lambda P_1,\lambda P_2,\lambda M\right)$

Es cuestión de reemplazar precios y ingreso por un múltiplo de ellos mismos y verificar que se obtienen de nuevo las mismas funciones de demanda.

$$X_1=X_1(P_1,P_2,M)=\frac{M}{2P_1}\cdots\rightarrow X_1(\lambda P_1,\lambda P_2,\lambda M)=\frac{\lambda M}{2\lambda P_1}=\frac{M}{2P_1}$$

$$X_2=X_2(P_1,P_2,M)=\frac{M}{2P_2}\cdots\rightarrow X_2(\lambda P_1,\lambda P_2,\lambda M)=\frac{\lambda M}{2\lambda P_2}=\frac{M}{2P_2}$$

- **Agregación de Cournot**

Partiendo de la restricción presupuestaria, si la derivamos respecto de p_j obtenemos: si cae el precio del bien 1 y la cantidad demandada del bien 2 no cambia, entonces el gasto en el bien 1 debe permanecer constante: si p_1 cae en *a%*, x_1 debe aumentar en el mismo *a%* (si no, no sería cierto que se gasta todo el ingreso, lo que no sería consistente con no saciedad).

Se trata de verificar que:

a) Al variar P_1: $\varepsilon_{X_1,P_1}\cdot S_1+\varepsilon_{X_2,P_1}\cdot S_2=-S_1$, veamos

$$\varepsilon_{X_1,P_1} = \frac{\partial X_1}{\partial P_1}\frac{P_1}{X_1} = \left(-\frac{2M}{4P_1^2}\right)\frac{P_1}{M/2P_1} = -1 \quad ; \quad \varepsilon_{X_2,P_1} = 0$$

$$\varepsilon_{X_1,P_1}\cdot S_1 + \varepsilon_{X_2,P_1}\cdot S_2 = (-1)S_1 + (0)S_2 = -S_1$$

Al variar P_2: $\varepsilon_{X_1,P_2}\cdot S_1 + \varepsilon_{X_2,P_2}\cdot S_2 = -S_2$, veamos

$$\varepsilon_{X_2,P_2} = \frac{\partial X_2}{\partial P_2}\frac{P_2}{X_2} = \left(-\frac{2M}{4P_2^2}\right)\frac{P_2}{M/2P_2} = -1 \quad ; \quad \varepsilon_{X_1,P_2} = 0$$

$$\varepsilon_{X_1,P_2}\cdot S_1 + \varepsilon_{X_2,P_2}\cdot S_2 = (0)S_1 + (-1)S_2 = -S_2$$

b) $X_1 + \frac{dX_1}{dP_1}P_1 + \frac{dX_2}{dP_1}P_2 = 0 \Rightarrow$

$$X_1 - \frac{2M}{4P_1^2}P_1 + 0P_2 = X_1 - \underbrace{\frac{M}{2P_1}}_{X_1} = 0$$

$$X_2 + \frac{dX_1}{dP_2}P_1 + \frac{dX_2}{dP_2}P_2 = 0 \Rightarrow X_2 + 0P_1 - \frac{2M}{4P_2^2}P_2 = X_2 - \underbrace{\frac{M}{2P_2}}_{X_2} = 0$$

❖ **Agregación de Engel**

La suma ponderada de las elasticidades ingreso de los distintos bienes debe ser uno. Esto implica, por ejemplo, que no todos los bienes pueden ser neutros (la suma ponderada de las elasticidades sería cero). La intuición de este resultado es que si todos los bienes fueran neutros, diríamos que al aumentar el ingreso del individuo, no aumenta su consumo en ninguno de los bienes: es decir, si antes del cambio estaba gastando todo su ingreso, después del cambio le estará sobrando ingreso, lo que no es consistente con la no saciedad

Se trata de verificar que: $\varepsilon_{X_1,M}S_1 + \varepsilon_{X_2,M}S_2 = 1$

$$\varepsilon_{X_1,M} = \frac{\partial X_1}{\partial M}\frac{M}{X_1} = \left(\frac{1}{2P_1}\right)\frac{M}{M/2P_1} = 1 \quad ; \quad \varepsilon_{X_2,M} = \frac{\partial X_2}{\partial M}\frac{M}{X_2} = \left(\frac{1}{2P_2}\right)\frac{M}{M/2P_2} = 1$$

Si $S_1 = \frac{P_1X_1}{M}$ y $S_2 = \frac{P_2X_2}{M}$

$$\varepsilon_{X_1,M}S_1 + \varepsilon_{X_2,M}S_2 = 1\left(\frac{P_1X_1}{M}\right) + 1\left(\frac{P_2X_2}{M}\right) = \frac{P_1X_1 + P_2X_2}{M} = 1$$

❖ **Simetría de los efectos sustitución cruzados.**

Es decir, en las demandas compensadas los efectos cruzados son simétricos. En términos de elasticidades

Comprobar que: $S_{12} = S_{21}$

Pasemos a obtener los elementos de la matriz pedida. Sabemos que la derivada de la función de gasto con respecto a cada precio es la correspondiente demanda compensada o hicksiana.

$$E_1 = \frac{\partial E(P_1, P_2, U)}{\partial P_1} = h_{X_1}(P_1, P_2, U) \;\; ; \;\; h_{X_1} = e^{U/2}P_2^{1/2}P_1^{-1/2}$$

$$E_2 = \frac{\partial E(P_1, P_2, U)}{\partial P_2} = h_{X_2}(P_1, P_2, U) \;\; ; \;\; h_{X_2} = e^{U/2}P_1^{1/2}P_2^{-1/2}$$

Las derivadas segundas son los correspondientes efectos sustitución.

$$s_{11} = E_{11} = \frac{\partial E_1}{\partial P_1} = -\frac{1}{2}e^{U/2}P_2^{1/2}P_1^{-3/2} = -\frac{e^{U/2}P_1^{1/2}P_2^{1/2}}{2P_1^2} = -\frac{M/2}{2P_1^2} = -\frac{M}{4P_1^2} \prec 0$$

$$s_{22} = E_{22} = \frac{\partial E_2}{\partial P_2} = -\frac{1}{2}e^{U/2}P_1^{1/2}P_2^{-3/2} = -\frac{\overbrace{e^{U/2}P_1^{1/2}P_2^{1/2}}^{E/2}}{2P_2^2} = -\frac{M/2}{2P_2^2} = -\frac{M}{4P_2^2} \prec 0$$

$$s_{12}=s_{21}=\frac{\partial E_1}{\partial P_2}=\frac{\partial E_2}{\partial P_1}=\frac{1}{2}e^{U/2}P_1^{-1/2}P_2^{-1/2}=\frac{\overbrace{e^{U/2}P_1^{1/2}P_2^{1/2}}^{E/2}}{2P_1\,P_2}=-\frac{M/2}{2P_1\,P_2}=\frac{M}{4P_1\,P_2}\succ 0$$

Vamos ahora a la matriz

$$E_{11}=s_{11}=-\frac{M}{4P_1^2}\prec 0$$

$$\begin{vmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{M}{4P_1^2} & \frac{M}{4P_1P_2}\\ \frac{M}{4P_1P_2} & -\frac{M}{4P_2^2}\end{vmatrix}=0$$

Sale semidefinida negativa

4. Dada la siguiente Función Indirecta de Utilidad

$$v=\frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{cp_1}\right)+\frac{cM}{p_2}$$

Determinar:

a. Las funciones de demanda ordinarias

b. La función de gasto

c. Las funciones de demanda compensadas

a. Las funciones de demanda ordinaria las obtendremos a partir de la identidad de Roy:

$$X_1=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}}\quad \text{y} \quad X_2=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_2}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

Para X_1

$$\frac{\partial V}{\partial p_1}=\frac{-4cp_2}{\left(4cp_1\right)^2}=-\frac{p_2}{4cp_1^2}\qquad \frac{\partial V}{\partial M}=\frac{c}{P_2}$$

De esta forma:

$$X_1=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}}=-\frac{-\frac{P_2}{4cP_1^2}}{\frac{c}{P_2}}=\frac{p_2^2}{4c^2p_1^2}=\left(\frac{p_2}{4c\ \ p_1}\right)^2$$

Para X_2

$$\frac{\partial V}{\partial p_2}=\frac{1}{4cp_1}-\frac{cM}{p_2^2}=\frac{p_2^2-4c^2Mp_1}{4cp_1p_2^2}=-\frac{\left(4c^2Mp_1-p_2^2\right)}{4cp_1p_2^2}\quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial M}=\frac{c}{P_2}$$

De esta forma:

$$X_2=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_2}}{\frac{\partial V}{\partial M}}=-\frac{-\frac{\left(4c^2Mp_1-p_2^2\right)}{4cp_1p_2^2}}{\frac{c}{P_2}}=\frac{P_2\left(4c^2Mp_1-p_2^2\right)}{4c^2p_1p_2^2}=\frac{4c^2Mp_1-p_2^2}{4c^2p_1p_2}$$

$$X_2=\frac{M}{p_2}-\frac{p_2}{4c^2p_1}$$

b. La función de gasto se obtiene a partir de la FIU

$$v=\frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{cp_1}\right)+\frac{cM}{p_2}$$

Dado que en equilibrio $M = E$

$v-\frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{cp_1}\right)=\frac{cE}{p_2}$ con lo cual $E=v\frac{p_2}{c}-\frac{1}{4}\left(\frac{p_2^2}{c^2p_1}\right)$ Ecuación de Gasto

c. Para obtener las funciones de demanda compensada hacemos uso del Lema de Shepard

Aplicando el teorema de la envolvente a la función de mínimo costo o de gasto, vemos que

$$\frac{dE}{dP_i}=hx_i$$

Por lo que realizando las operaciones para cada una de las variables

$$\frac{dE}{dp_1}=\frac{4c^2p_2^2}{\left(4c^2p_1\right)^2}=\frac{p_2^2}{4c^2p_1^{\ 2}}=hx_1$$

$$\frac{dE}{dp_2}=\frac{u}{c}-\frac{p_2}{4c^2p_1}=\frac{2ucp_1-p_2}{2c^2p_1}=hx_2$$

5. Comprobar si las demandas ordinarias cumplen las restricciones impuestas por la teoría.

$$X_1=\left(\frac{p_2}{4c\ \ p_1}\right)^2 \quad \text{y} \quad X_2=\frac{M}{p_2}-\frac{p_2}{4c^2p_1}$$

- **Ley de Walras**

Verifiquemos que todo el ingreso se ocupa, o que el ingreso es igual al gasto: $M=P_1X_1(P,M)+P_2X_2(P,M)$

De esta forma sustituyendo las funciones de demanda ordinaria

$$p_1\left(\frac{p_2}{2cp_1}\right)^2+p_2\left(\frac{M}{p_2}-\frac{p_2}{4c^2p_1}\right)=\cancel{\frac{p_2^2}{4c^2p_1}}+M-\cancel{\frac{p_2^2}{4c^2p_1}}=M$$

Se cumple

- **Homogeneidad de grado cero en (P,M)**

Comprobar que:

Siendo $X_i=X_i(P_1,P_2,M)$, se verifica : $X_i\lambda=\mathrm{X_i}(\lambda P_1,\lambda P_2,\lambda M)$

Es cuestión de reemplazar precios e ingreso por un múltiplo de ellos mismos y verificar que se obtienen de nuevo las mismas funciones de demanda.

$$X_1=\left(\frac{p_2}{4c\ \ p_1}\right)^2 \rightarrow X_1(\lambda)=\left(\frac{\cancel{\lambda}p_2}{4c\ \cancel{\lambda}p_1}\right)^2\frac{\lambda M}{2\lambda P_1}=\left(\frac{p_2}{4c\ \ p_1}\right)^2$$

$$X_2=\frac{M}{p_2}-\frac{p_2}{4c^2p_1}=\frac{\cancel{\lambda}M}{\cancel{\lambda}p_2}-\frac{\cancel{\lambda}p_2}{4c^2\cancel{\lambda}p_1}=\frac{M}{p_2}-\frac{p_2}{4c^2p_1}$$

- Ley de Euler nos establece que al variar los precios y el ingreso en la misma magnitud el equilibrio no se modifica

$$\frac{dx_1}{dp_1}p_1+\frac{dx_1}{dp_2}p_2+\frac{dx_1}{dM}M=0$$

$$\frac{dx_1}{dp_1}=-\frac{p_2^2}{2c^2p_1^3}\quad;\quad\frac{dx_1}{dp_2}=\frac{p_2}{2c^2p_1^2}\quad;\quad\frac{dx_1}{dM}=0$$

$$-\frac{p_2^2}{2c^2p_1^3}p_1+\frac{p_2}{2c^2p_1^2}p_2+0M=-\frac{p_2^2}{2c^2p_1^2}+\frac{p_2^2}{2c^2p_1^2}=0$$

- **Agregación de Cournot**

Se trata de verificar que:

a) Al variar P_1: $X_1+\frac{dX_1}{dP_1}P_1+\frac{dX_2}{dP_1}P_2=0$, De esta forma

$$x_1+\frac{dx_1}{dp_1}p_1+\frac{dx_2}{dp_1}p_2=0$$

$$\frac{dx_1}{dp_1}=-\frac{8c^2p_1p_2^2}{\left(4c^2p_1^2\right)^2}=-\frac{1p_2^2}{2c^2p_1^3}$$

$$\frac{dx_1}{dp_2}=\frac{4c^2p_2}{\left(4c^2p_1\right)^2}=\frac{p_2}{4c^2p_1^2}$$

Sustituyendo en $X_1+\frac{dX_1}{dP_1}P_1+\frac{dX_2}{dP_1}P_2=0$

$$x_1-\left(\frac{p_2^2}{2c^2p_1^3}\right)p_1+\left(\frac{p_2}{4c^2p_1^2}\right)p_2=0$$

$$x_1-\left(\frac{p_2^2}{2c^2p_1^2}\right)+\left(\frac{p_2^2}{4c^2p_1^2}\right)=0=x_1-\underbrace{\left(\frac{p_2^2}{4c^2p_1^2}\right)}_{x_1}=0$$

Para el caso del bien 2

$$X_2+\frac{dX_1}{dP_2}P_1+\frac{dX_2}{dP_2}P_2=0$$

$$\frac{dx_1}{dp_2}=\frac{2p_2}{\left(2cp_1\right)^2}=\frac{p_2}{2c^2p_1^2}$$

$$\frac{dx_2}{dp_2}=-\frac{M}{p_2^2}-\frac{1}{4c^2p_1}==-\frac{M}{p_2^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2c^2p_1}\right)$$

Sustituyendo en la condición

$$x_2+\left(\frac{p_2}{2c^2p_1^2}\right)p_1+\left[-\frac{M}{p_2^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2c^2p_1}\right)\right]p_2=0$$

$$x_2+\left(\frac{p_2}{2c^2p_1}\right)+\left[-\frac{M}{p_2}-\frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{2c^2p_1}\right)\right]=0$$

$$x_2+\frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{2c^2p_1}\right)-\frac{M}{p_2}=0=x_2-\underbrace{\left[\frac{M}{p_2}-\frac{p_2}{4c^2p_1}\right]}_{x_2}=0$$

- **Agregación de Engel**

Se trata de verificar que: $\varepsilon_{X_1,M}S_1+\varepsilon_{X_2,M}S_2=1$

$$\varepsilon_{X_1,M}=\frac{dx_1}{dM}\frac{M}{x_1}=0$$

$$\varepsilon_{X_2,M}=\frac{dx_2}{dM}\frac{M}{x_2}=\frac{1}{p_2}\left(\frac{M}{\frac{4c^2Mp_1-p_2^2}{4c^2p_1p_2}}\right)=\frac{1}{\cancel{p_2}}\left(\frac{4Mc^2p_1\cancel{p_2}}{4c^2Mp_1-p_2^2}\right)=\frac{4Mc^2p_1}{4c^2Mp_1-p_2^2}$$

Si $S_2=\frac{p_2x_2}{M}$

$$\varepsilon_{X_1,M}S_1+\varepsilon_{X_2,M}S_2=0S_1+\left(\frac{4Mc^2p_1}{4c^2Mp_1-p_2^2}\right)\left(\frac{p_2x_2}{M}\right)$$

Si multiplicamos a toda la expresión por $\frac{p_2}{p_2}$ esta no se alterara

$$\left(\frac{M}{p_2}\underbrace{\frac{4c^2p_1p_2}{4c^2Mp_1-p_2^2}}_{\frac{1}{x_2}}\right)\left(\frac{p_2x_2}{M}\right)=\frac{\cancel{M}}{\cancel{p_2}}\frac{1}{\cancel{x_2}}\frac{\cancel{p_2}\cancel{x_2}}{\cancel{M}}=1$$

- **Simetría de los efectos sustitución cruzados.**

Es decir, en las demandas compensadas los efectos cruzados son simétricos. Comprobar que: $S_{12}=S_{21}$ Si las derivadas segundas son los correspondientes efectos sustitución.

$$E_{11}=\frac{dE_1}{dp_1}=-\frac{p_2^2\left(8c^2p_1\right)}{\left(4c^2p_1^2\right)^2}=-\frac{p_2^2}{2c^2p_1^3}$$

$$E_{12}=\frac{dE_1}{dp_2}=\frac{2p_2}{4c^2p_1^2}=\frac{p_2}{2c^2p_1^2}$$

$$E_{21}=\frac{dE_2}{dp_1}=\frac{p_2}{4c^2p_1^2}$$

$$E_{22}=\frac{dE_2}{dp_2}=-\frac{1}{4c^2p_1}$$

$$E=\begin{vmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{p_2^2}{2c^2p_1^3} & \frac{p_2}{2c^2p_1^2}\\ \frac{p_2}{4c^2p_1^2} & -\frac{1}{4c^2p_1}\end{vmatrix}=0$$

$$|E|=\left(-\frac{p_2^2}{2c^2p_1^3}\times-\frac{1}{4c^2p_1}\right)-\left(\frac{p_2}{4c^2p_1^2}\times\frac{p_2}{2c^2p_1^2}\right)=\frac{p_2^2}{8c^4p_1^4}-\frac{p_2^2}{8c^4p_1^4}=0$$

Sale semidefinida negativa

6. **Partiendo de las funciones de demanda compensada**

$$hx_1=\sqrt{\frac{UP_2}{2P_1}}-\frac{1}{2} \quad \textbf{y} \quad hx_2=\sqrt{\frac{UP_1}{2P_2}}$$

Obtener

a. **Ecuación de gasto**
b. **La función indirecta de utilidad, y**
c. **Las funciones de demanda ordinaria.**

---

a. Para obtener la función o ecuación de gasto, se sustituyen las funciones de demanda ordinaria en la restricción presupuestaria.

$$E=P_1hx_1+P_2hx_2=P_1\left(\sqrt{\frac{UP_2}{2P_1}}-\frac{1}{2}\right)+P_2\left(\sqrt{\frac{UP_1}{2P_2}}\right)$$

$$E=\sqrt{\frac{UP_1P_2}{2}}-\frac{P_1}{2}+\sqrt{\frac{UP_1P_2}{2}}=2\sqrt{\frac{UP_1P_2}{2}}-\frac{P_1}{2}$$

$$E=\sqrt{2UP_1P_2}-\frac{P_1}{2}=\frac{2\sqrt{2UP_1P_2}-P_1}{2}$$

$$E=\frac{\sqrt{8UP_1P_2}-P_1}{2}=\frac{\left(8UP_1P_2\right)^{1/2}-P_1}{2}$$

b. En la determinación de la Función indirecta de utilidad, dado que en equilibrio el ingreso es igual al gasto en el equilibrio

$$E=\frac{\sqrt{8UP_1P_2}-P_1}{2}\Rightarrow M=\frac{\left(8UP_1P_2\right)^{1/2}-P_1}{2}$$

y dado que la función indirecta de utilidad y la ecuación de gasto son inversas

$$V=\frac{\left(2M+P_1\right)^2}{8P_1P_2}$$

c. Las funciones de demanda ordinaria pueden obtenerse haciendo uso de la identidad de Roy

$$X=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_X}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_1}=\frac{\left(8P_1P_2\right)2\left(2M+P_1\right)-\left(2M+P_1\right)^2 8P_2}{\left(8P_1P_2\right)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_1}=\frac{\cancel{8}\,\cancel{P_2}\left(2M+P_1\right)\left[2P_1-\left(2M+P_1\right)\right]}{8^{\cancel{2}}P_1^2P_2^{\cancel{2}}}=\frac{\left(2M+P_1\right)\left(P_1-2M\right)}{8P_1^2P_2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial M}=\frac{\cancel{\left(8P_1P_2\right)}2\left(2M+P_1\right)^2}{\left(8P_1P_2\right)^{\cancel{2}}}=\frac{2\left(2M+P_1\right)^2}{8P_1P_2}$$

De esta forma:

$$X=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_X}}{\frac{\partial V}{\partial M}}=-\frac{-\frac{8M^3}{27P_X^2P_Y^2}}{\frac{24M^2}{27P_XP_Y^2}}=\frac{\left(8M^{\cancel{3}}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,\cancel{P_Y^2}\right)}{\left(24\cancel{M^2}\right)\left(\cancel{27}P_X^{\cancel{2}}\,\cancel{P_Y^2}\right)}=\frac{M}{3P_X}$$

Similarmente para X_2

$$Y=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_Y}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_Y}=-\frac{16M^3}{27P_XP_Y^3}\qquad\qquad\frac{\partial V}{\partial M}=\frac{24M^2}{27P_XP_Y^2}$$

De esta forma:

$$Y=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_Y}}{\frac{\partial V}{\partial M}}=-\frac{-\frac{16M^3}{27P_XP_Y^3}}{\frac{24M^2}{27P_XP_Y^2}}=\frac{\left(16M^{\cancel{3}}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,\cancel{P_Y^2}\right)}{\left(24\cancel{M^2}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,P_Y^{\cancel{3}}\right)}=\frac{2M}{3P_Y}$$

7. Se ha observado que en Madrid el incremento del precio de la gasolina en un 5% ha reducido la demanda de billetes de transporte colectivo (metrobus) en un 1%. Para un individuo tipo las elasticidades ingreso de la gasolina y los metrobuses son respectivamente 4 y 2, y el ingreso gastada en gasolina y metrobuses es respectivamente 5 y 1%.

Cuestión previa: Nomenclatura y preparación de la información.

	gasolina	metrobus
Elasticidad ingreso	$\varepsilon_{X_{g,M}} = 4$	$\varepsilon_{X_{m,M}} = 2$
Fracción de ingreso gastada	$S_g = 0.05$	$S_m = 0.01$

Además: $\varepsilon_{X_m,P_g} = \frac{-0.01}{0.05} = -0.2$

a. Para determinar si son la gasolina y los metrobuses sustitutos o complementarios netos y de esta forma justificar el resultado.

Teniendo en cuenta que la historia parte de la variación del precio de la gasolina plantearemos la correspondiente ecuación de SLUTSKY y la modificaremos hasta que aparezcan explícitas las elasticidades.

$$\frac{\partial X_m}{\partial P_g} = \left(\frac{\partial X_m}{\partial P_g}\right)_{\bar{U}} - X\frac{\partial X_m}{\partial M}$$

Multiplicado cada uno de los términos por la expresión: $\frac{P_g}{X_m}$

$$\frac{P_g}{X_m}\frac{\partial X_m}{\partial P_g} = \frac{P_g}{X_m}\left(\frac{\partial X_m}{\partial P_g}\right)_{\bar{U}} - X\frac{\partial X_m}{\partial M}\frac{P_g}{X_m}$$

Multiplicando el último de los términos por $^{M}/_{M}$

$$\frac{P_g}{X_m}\frac{\partial X_m}{\partial P_g} = \frac{P_g}{X_m}\left(\frac{\partial X_m}{\partial P_g}\right)_{\bar{U}} - X\frac{M}{M}\frac{\partial X_m}{\partial M}\frac{P_g}{X_m}$$

Nos queda, finalmente: $\varepsilon_{X_m,P_g} = \varepsilon^*_{X_m,P_g} - \varepsilon_{X_m,M}\cdot S_g$

Despejando:

$$\varepsilon^*_{X_m,P_g} = \varepsilon_{X_m,P_g} + \varepsilon_{X_m,M}\cdot S_g = -0.2 + (2)(0.05) = -0.1$$

por lo tanto $\left(\frac{\partial X_m}{\partial P_g}\right)_{\bar{U}} = S_{mg} \prec 0$ complementarios netos

b. ¿Cómo afectará un incremento del 1% en el precio de los metrobuses a la demanda de gasolina? Aquí nos están preguntando por el valor de ε_{X_g,P_m}

Partiendo de:

$$\varepsilon_{X_g,P_m} = \varepsilon^*_{X_g,P_m} - \varepsilon_{X_g,M}\cdot S_m$$

$$\varepsilon_{X_g,P_m} = \varepsilon^*_{X_g,P_m} - (4)(0.01) \qquad (1)$$

Previamente tenemos que encontrar el valor de $\varepsilon^*_{X_g,P_m}$.

Sabemos que:

$$\varepsilon_{X_g,P_m} = \frac{P_m}{X_g}\left(\frac{\partial X_g}{\partial P_m}\right)_{\bar{U}}$$

Por la simetría de los efectos sustitución:

$\left(\frac{\partial X_g}{\partial P_m}\right)_{\bar{U}} = \left(\frac{\partial X_m}{\partial P_g}\right)_{\bar{U}}$ sustituyendo $\varepsilon_{X_g,P_m} = \frac{P_m}{X_g}\left(\frac{\partial X_g}{\partial P_m}\right)_{\bar{U}}$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $\frac{P_g}{X_m}$

$$\varepsilon^*_{X_g,P_m} = \frac{P_m}{X_g}\left(\frac{\partial X_m}{\partial P_g}\right)_{\bar{U}}\frac{P_g}{X_m}\frac{X_m}{P_g} = \frac{P_m}{X_g}\frac{X_m}{P_g}\varepsilon^*_{X_m,P_g}$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $^{M}/_{M}$

$$\varepsilon^{*}_{X_g,P_m} = \frac{M}{M}\frac{P_m}{X_g}\frac{X_m}{P_g}\varepsilon^{*}_{X_m,P_g} = \frac{M}{P_g X_g}\frac{P_m X_m}{M}\varepsilon^{*}_{X_m,P_g} = \frac{S_m}{S_g}\varepsilon^{*}_{X_m,P_g}$$

$$\varepsilon^{*}_{X_g,P_m} = \frac{0.01}{0.05}(-0.1) = -0.02$$

sustituyendo en (1) $\varepsilon^{*}_{X_g,P_m} = (-0.02) - (4)(0.01) = -0.06$

La gasolina es complementaria bruta del metrobus.

8. La función de utilidad de Julia es $U(x,y) = x + 2y$, donde "x" es el consumo de un bien X, & Y es el consumo de un bien Y. Su renta es de 2 euros. El precio de Y es de 2 euros. El costo por unidad de X depende de cuantas unidades consume. El gasto total de "x" unidades de X es $\sqrt{x}$. ¿Cuál es la demanda de Julia para el bien X?

Podemos dibujar las curvas de indiferencia de Julia. La ecuación de una curva de indiferencia de nivel k es $U(x, y) = k$ tal que $y = \frac{kx}{2}$ y la restricción presupuestaria de Julia es tal que $M = p_x x + p_y y$

De esta forma, sustituyendo los valores correspondientes $2 = \sqrt{x} + 2y$

Despejando para y ⇔ $y = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$.

Conseguimos una solución de esquina que consiste en consumir solo x. Consumir solo el bien x nos permite alcanzar la curva de indiferencia más alta. Siempre hay que tener cuidado con las soluciones de tangencia en cuanto que uno considera sustitutivos perfectos.

9. **Dada la función de utilidad** $U=(X,Y)=X^{\alpha}Y^{1-\alpha}$ **obtener las cantidades que minimizan el gasto.**

El problema consiste en:
$$\min E = P_X X + P_Y Y$$
$$s.a.U(X,Y)=X^{\alpha}Y^{1-\alpha}$$

Para hallar las funciones de demanda compensada de *X* e *Y*, partimos de que la condición de equilibrio es $\frac{UmgX}{UmgY}=\frac{P_X}{P_Y}$

De esta forma: $\frac{\alpha Y}{(1-\alpha)X}=\frac{P_X}{P_Y}$

Despejando para Y $Y=\frac{P_X}{P_Y}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}X$

Sustituyendo este valor en la restricción,

$$U=X^{\alpha}\left[\frac{P_X}{P_Y}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}X\right]^{1-\alpha}$$

$$U=X^{\alpha}X^{1-\alpha}\left[\frac{P_X}{P_Y}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right]^{1-\alpha}$$

Aplicando leyes de los exponentes y despejando para X, obtenemos el valor óptimo

$h_X=X=U\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{P_Y}{P_X}\right)^{1-\alpha}$ Cantidad que minimiza el gasto (hicksiana)

Para obtener el valor de Y, sustituimos el valor de h_X en la ecuación $Y=\frac{P_X}{P_Y}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}X$

$$Y=\left[\frac{P_X}{P_Y}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right]U\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{P_Y}{P_X}\right)^{1-\alpha}$$

Aplicando leyes de los exponentes obtendremos

$h_Y=Y=U\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{P_X}{P_Y}\right]^{\alpha}$ Cantidad que minimiza el gasto (hicksiana)

10. Partiendo de las funciones de demanda compensada (Hicksianas) que minimizan el gasto, $h_X = X = U\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{P_Y}{P_X}\right)^{1-\alpha}$ **y** $h_Y = Y = U\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{P_X}{P_Y}\right]^{\alpha}$ **obtener la ecuación de gasto (mínimo).**

Una vez obtenidas las hicksianas o cantidades óptimas que minimizan el gasto, se sustituyen los valores correspondientes h_X *y* h_Y en la función de gasto, y de esta forma obtenemos la ecuación de gasto que nos representa el gasto mínimo a realizar al alcanzar un nivel determinado de utilidad.

$$E = P_X h_X + P_Y h_Y$$

$$E = P_X\left[U\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{P_Y}{P_X}\right)^{1-\alpha}\right] + P_Y\left[U\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{P_Y}{P_X}\right)^{1-\alpha}\right]$$

Aplicando leyes de los exponentes

$$E = UP_x^{\alpha}P_Y^{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} + UP_X^{\alpha}P_Y^{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

Factorizando los términos

$$E = UP_x^{\alpha}P_Y^{1-\alpha}\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]$$

Factorizando el término entre corchetes

$$E = UP_x^{\alpha}P_Y^{1-\alpha}\left[\frac{1}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right]$$

Por lo que el gasto total vendrá representado por:

$$E = \frac{UP_x^{\alpha}P_Y^{1-\alpha}}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}} \qquad \text{Ecuación de gasto}$$

UNIDAD III.
Teoría de la empresa

1. **Partiendo de la función de producción**

$$Y = X_1^{1/2} + X_2^{1/2}$$

Obtener las funciones de demanda de los factores, la función de producción, la función de ingreso total, la función de costos y la función de beneficios

Primero se formula la función de beneficios

$$\Pi = PX_1^{1/2} + PX_2^{1/2} - W_1X_1 - W_2X_2$$

Derivando Con respecto a las dos variables

$$\frac{d\Pi}{dX_1} = \tfrac{1}{2} PX_1^{-1/2} - W_1 = 0$$

$$\frac{d\Pi}{dX_2} = \tfrac{1}{2} PX_2^{-1/2} - W_2 = 0$$

De la primera ecuación obtenemos la función de demanda

$$\frac{P}{2X_1^{1/2}} = W_1 \cdots \rightarrow X_1^d = \frac{P^2}{4W_1^2}$$

De la segunda ecuación

$$\frac{P}{2X_2^{1/2}} = W_2 \cdots \rightarrow X_2^d = \frac{P^2}{4W_2^2}$$

Para obtener la función de producción se sustituyen las dos funciones de demanda en la función de producción original

$$Y = \frac{P}{2}\left(\frac{W_1 + W_2}{W_1W_2}\right)$$

Para obtener la función de Ingreso Total se multiplica la función de producción por el precio

La forma de obtener la función de Costo Total es sustituir las funciones de demanda en la restricción de costos

$$CT = W_1X_1 + W_2X_2$$

$$CT = W_1\left(\frac{P^2}{4W_1^2}\right) + W_2\left(\frac{P^2}{4W_2^2}\right) = \frac{P^2}{4W_1} + \frac{P^2}{4W_2}$$

$$CT = \frac{P^2}{4}\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right) = \frac{P^2}{4}\left(\frac{W_1 + W_2}{W_1W_2}\right)$$

Obteniendo la función de beneficios

$$\Pi = IT - CT = \frac{P^2}{2}\left(\frac{W_1 + W_2}{W_1W_2}\right) - \frac{P^2}{4}\left(\frac{W_1 + W_2}{W_1W_2}\right)$$

2. **Partiendo de la siguiente función de beneficios:**

$$\Pi(P,W_1,W_2)=\frac{P^2(W_1+W_2)}{4W_1W_2}$$

a. Obtener las demandas de inputs
b. Obtener la función de oferta del output
c. Obtener las demandas condicionadas de los inputs
d. La función de costos
e. La función de producción

---

a. Se trata de obtener las demandas de inputs

$$X_1^d(P,W_1,W_2) \quad ; \quad X_2^d(P,W_1,W_2)$$

Para trabajar más cómodamente, expresaremos la función de beneficios de otra manera, a saber:

$$\Pi(P,W_1,W_2)=\frac{P^2(W_1+W_2)}{4W_1W_2}=\frac{P^2}{4}\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\right)=\frac{P^2}{4W_1}+\frac{P^2}{4W_2}$$

Y ahora, aplicando el Lema de Hotelling.

$$X_1^d=-\frac{\partial\Pi(P,W_1,W_2)}{\partial W_1}=-\left[\frac{P^2}{4}\left(-\frac{1}{W_1^2}\right)\right]=\frac{P^2}{4W_1^2}$$

$$X_2^d=-\frac{\partial\Pi(P,W_1,W_2)}{\partial W_2}=-\left[\frac{P^2}{4}\left(-\frac{1}{W_2^2}\right)\right]=\frac{P^2}{4W_2^2}$$

b. Obtener la función de oferta del output , se trata de obtener la función: $Y=Y(P,W_1,W_2)$

De nuevo aplicamos el Lema de Hotelling.

$$Y=\frac{\partial\Pi(P,W_1,W_2)}{\partial P}=\frac{2P(W_1+W_2)}{4W_1W_2}=\frac{P(W_1+W_2)}{2W_1W_2}$$

c. Obtener las demandas condicionadas de los inputs, se trata de obtener las funciones:

$$X_1^C(Y,W_1,W_2) \quad ; \quad X_2^C(Y,W_1,W_2)$$

A partir de la función de oferta obtenida, despejando el precio:

$$Y=\frac{P(W_1+W_2)}{2W_1W_2}\cdots\rightarrow P=\frac{2W_1W_2}{W_1+W_2}Y$$

Y llevando este precio a las demandas obtenidas inicialmente:

$$X_1^C=\frac{P^2}{4W_1^2}=\frac{1}{4W_1^2}\left(\frac{2W_1W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2=\left(\frac{W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2$$

$$X_2^C=\frac{P^2}{4W_2^2}=\frac{1}{4W_2^2}\left(\frac{2W_1W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2=\left(\frac{W_1}{W_1+W_2}Y\right)^2$$

d. Para obtener la función de costos, se trata de obtener la función: *CT(W₁,W₂,Y)*

operando:

$$CT(W_1,W_2,Y)=W_1X_1^C+W_2X_2^C$$

$$CT(W_1,W_2,Y)=W_1\left(\frac{W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2+W_2\left(\frac{W_1}{W_1+W_2}Y\right)^2=\left[\frac{W_1W_2^2+W_2W_1^2}{(W_1+W_2)^2}\right]Y^2$$

$$CT(W_1,W_2,Y)=\left[\frac{W_1W_2^2+W_2W_1^2}{(W_1+W_2)^2}\right]Y^2=\frac{W_1W_2}{W_1+W_2}Y^2$$

e. Obtener la función de producción, le damos "la vuelta" a la función de costos

$$Y=\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{1/2}$$

La función obtenida tiene la forma de una función "indirecta" de producción, ya que la cantidad de producto depende del precio de los inputs y del costo en el que queramos incurrir.

El problema que tenemos que resolver es:

$$\min_{(W_1,W_2)}\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{1/2}$$
$$s.a.\;\; CT = W_1X_1 + W_2X_2$$

Formaremos el correspondiente lagrangiano:

$$L=\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{1/2}-\lambda\left(CT-W_1X_1+W_2X_2\right)$$

las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial W_1}=0\;\;;\;\;\frac{\partial L}{\partial W_2}=0\;\;;\;\;\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$$

Para ganar tiempo, sugerimos obviar lo anterior y resolver el sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Y/\partial W_1}{\partial Y/\partial W_2}=\dfrac{X_1}{X_2}\\ CT=W_1X_1+W_2X_2\end{cases}$$

Vamos a operar:

$$\frac{\partial Y/\partial W_1}{\partial Y/\partial W_2}=\frac{X_1}{X_2}\cdots\rightarrow\frac{\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{-1/2}}\left[\frac{W_1W_2-W_2\left(W_1+W_2\right)}{\cancel{\left(W_1+W_2\right)^2}}\cancel{CT}\right]}{\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{-1/2}}\left[\frac{W_1W_2-W_1\left(W_1+W_2\right)}{\cancel{\left(W_1+W_2\right)^2}}\cancel{CT}\right]}=\frac{W_2^2}{W_1^2}=\frac{X_1}{X_2}$$

$$\frac{W_2}{W_1}=\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{1/2}$$

Entramos con esta última relación en la segunda de las ecuaciones:

$$CT=W_1X_1+W_2X_2=W_1X_1+W_1\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{1/2}X_2=W_1\left(X_1+X_1^{1/2}X_2^{1/2}\right)$$

$$W_1=\frac{CT}{X_1+X_1^{1/2}X_2^{1/2}}$$; igualmente $$W_2=\frac{CT}{X_1+X_1^{1/2}X_2^{1/2}}$$

El último paso es llevar estos valores a la función "indirecta" de producción.

$$Y=\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{CT}{W_2}+\frac{CT}{W_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Y=\left(\frac{CT}{\dfrac{CT}{X_2+\sqrt{X_1X_2}}}+\frac{CT}{\dfrac{CT}{X_1+\sqrt{X_1X_2}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(X_2+2\sqrt{X_1X_2}+X_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Y=\left[\left(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdots\rightarrow Y=X_1^{1/2}+X_2^{1/2}$$

3. Partiendo de la siguiente función de beneficios

$$\Pi = \frac{200P^2}{r^{1/2}w^{1/2}}$$

Determinar las funciones de demanda de los insumos Capital (K) y Trabajo (L) y la función de oferta

- A través del Lema de Hotelling

$$-\frac{d\Pi}{dw} = L = -\frac{\left(-200P^2\right)\left(\frac{1}{2}r^{1/2}w^{-1/2}\right)}{\left(r^{1/2}w^{1/2}\right)^2} = \frac{100P^2}{r^{1/2}w^{3/2}} = L$$

$$-\frac{d\Pi}{dr} = K = -\frac{\left(-200P^2\right)\left(\frac{1}{2}r^{-1/2}w^{1/2}\right)}{\left(r^{1/2}w^{1/2}\right)^2} = \frac{100P^2}{r^{3/2}w^{1/2}} = K$$

- Determinar la función de oferta

A través del Lema de Hotelling

$$\frac{d\Pi}{dP} = q = 2P\left(\frac{200}{r^{1/2}w^{1/2}}\right) = \frac{400P}{r^{1/2}w^{1/2}} = q$$

4. Partiendo de los resultados del ejercicio anterior determinar las funciones de demanda condicionada de los factores, y la función de costo mínimo.

- Partiendo de la función de oferta anterior obtener las funciones de demanda condicionada de los factores Capital (K) y Trabajo (L)

Si $q = \frac{400P}{r^{1/2}w^{1/2}}$ despejamos para P $P = \frac{r^{1/2}w^{1/2}}{400}q$ y se sustituye en las funciones de demanda de los insumos Capital (K) y Trabajo (L)

Para $L = \frac{100P^2}{r^{1/2}w^{3/2}} = \frac{100}{r^{1/2}w^{3/2}}P^2$

$$L^c = \frac{100}{r^{1/2}w^{3/2}}\left(\frac{r^{1/2}w^{1/2}}{400}q\right)^2 = \frac{r^{1/2}}{1,600w^{1/2}}q^2$$

Para K $K = \frac{100P^2}{r^{3/2}w^{1/2}} = \frac{100}{r^{3/2}w^{1/2}}P^2$

$$K^c = \frac{100}{r^{3/2}w^{1/2}}\left(\frac{r^{1/2}w^{1/2}}{400}q\right)^2 = \frac{w^{1/2}}{1,600r^{1/2}}q^2$$

- Determinar la función de costo mínimo

Se obtiene sustituyendo las funciones de demanda condicionadas en la función de costo

$$CT = rK + wL = r\left(\frac{w^{1/2}}{1,600r^{1/2}}q^2\right) + w\left(\frac{r^{1/2}}{1,600w^{1/2}}q^2\right)$$

$$CT = \frac{r^{1/2}w^{1/2}}{1,600}q^2 + \frac{r^{1/2}w^{1/2}}{1,600}q^2 = \frac{2r^{1/2}w^{1/2}}{1,600}q^2$$

$$CT = \frac{r^{1/2}w^{1/2}}{800}q^2$$

5. **Partiendo de la función de costo mínimo obtenida en el ejercicio anterior, determinar la función de producción original.**

De la función de costo mínimo $CT = \frac{r^{1/2}w^{1/2}}{800}q^2$ despejamos a q

$$q = \frac{(800CT)^{1/2}}{r^{1/4}w^{1/4}}$$

Con base a esta última función se plantea el problema

$$\min \quad q = \frac{(800CT)^{1/2}}{r^{1/4}w^{1/4}}$$

$$s.a \quad CT = rK + wL$$

$$CPO \quad \frac{\frac{dq}{dw}}{\frac{dq}{dr}} = \frac{L}{K}$$

De esta forma:

$$\frac{\frac{dq}{dw}}{\frac{dq}{dr}} = \frac{-\cancel{\frac{1}{4}}\frac{(800CT)^{1/2}}{r^{1/4}w^{5/4}}}{-\cancel{\frac{1}{4}}\frac{(800CT)^{1/2}}{r^{5/4}w^{1/4}}} = \frac{\cancel{(800CT)^{1/2}}\, r^{5/4}w^{1/4}}{\cancel{(800CT)^{1/2}}\, r^{1/4}w^{5/4}} \Rightarrow \frac{r}{w} = \frac{L}{K}$$

Despejando para r

$$rK = wL \rightarrow r = w\frac{L}{K}$$

Sustituyendo en la restricción

$$CT = wL + wL = 2wL \qquad \Rightarrow \qquad w = \frac{CT}{2L}$$

Para r

$$r = \frac{CT}{2\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{K} = \frac{CT}{2K}$$

Sustituyendo el valor de w y r en la función objetivo

$$q = \frac{(800CT)^{1/2}}{r^{1/4}w^{1/4}} = \frac{(800CT)^{1/2}}{\left(\frac{CT}{2L}\right)^{1/4}\left(\frac{CT}{2K}\right)^{1/4}} = \frac{(800CT)^{1/2}}{\left(\frac{CT}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{LK}\right)^{1/4}}$$

$$q = \frac{(800CT)^{1/2}}{\left(\frac{CT}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{LK}\right)^{1/4}} = \frac{800^{1/2}\,\cancel{CT^{1/2}}\,2^{1/2}L^{1/4}K^{1/4}}{\cancel{CT^{1/2}}} = (800\times 2)^{1/2}\,L^{1/4}K^{1/4}$$

$$q = 40L^{1/4}K^{1/4}$$

Función de producción original

6. **Considere una empresa que produce el bien X a partir de la función de producción $X = L(K - L)$, donde L y K son los factores productivos, cuyos precios son $r = 100$ y $w = 44$.**

a. ¿Cuál es la expresión de la función de demanda condicionada de L?

b. ¿Cuál es la expresión de la función de demanda condicionada de K?

c. ¿Cuál es la expresión de la función de Costos Totales a largo plazo?

---

a. Expresión de la función de demanda condicionada de L?

Aplicaremos la condición de equilibrio para determinar en qué proporción han de combinarse los factores.

$$\frac{\partial X / \partial L}{\partial X / \partial K} = \frac{w}{r} \cdots \to \frac{K - 2L}{L} = \frac{44}{100}$$

de aquí que: $L = \dfrac{100}{244} K$; $K = \dfrac{244}{100} L$

Vamos a la función de producción, donde sustituyendo "K" encontraremos la demanda condicionada de "L".

$$X = L\left(\frac{244}{100} L\right) - L^2 = \frac{144}{100} L^2 = \frac{36}{25} L^2 \cdots \to L = \frac{5}{6} X^{½}$$

b. Expresión de la función de demanda condicionada de K

Teniendo en cuenta la relación entre "L" y "K"

$$\frac{100}{244} K - \frac{5}{6} X^{½} \to K = \frac{1{,}220}{600} X^{½} = \frac{61}{30} X^{½}$$

c. Expresión de la función de Costos Totales a largo plazo

Sustituyendo las funciones de demanda condicionada en la función de costos

$$CT = wL + rK = 44\left(\frac{5}{6} X^{½}\right) + 100\left(\frac{61}{30} X^{½}\right) = 240 X^{½}$$

7. **Una empresa fabrica relojes utilizando una función de producción de rendimientos constantes a escala $X = K^{1/2}L^{1/2}$, donde K son las piezas del reloj, y L las horas de trabajo.**

a. Si $r = 36$ y $w = 4$, ¿cuál será el costo de fabricar 120 relojes?

b. Suponga que el precio de la hora de trabajo se incrementa hasta $w = 9$. Si la empresa no desea variar su producción de relojes ($X = 120$). ¿Cuál será el valor del efecto sustitución sobre el trabajo (L)?

---

a. Si $r = 36$ y $w = 4$, ¿cuál será el costo de fabricar 120 relojes?

Determinaremos, en primer lugar, cuál es la proporción en que han de combinarse los factores.

$$\frac{\partial X / \partial L}{\partial X / \partial K} = \frac{w}{r} \quad \cdots\rightarrow \quad \frac{\frac{1}{2} L^{-1/2} K^{1/2}}{\frac{1}{2} K^{-1/2} L^{1/2}} = \frac{w}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{K}{L} = \frac{4}{36} \quad \rightarrow \quad L = 9K$$

Conocida esta relación, sustituyendo en la función de producción, determinaremos las demandas condicionadas de los factores

$$X = \left(\frac{L}{9}\right)^{1/2} L^{1/2} = \frac{L}{3} \cdots\rightarrow L = 3X \qquad \text{como } \; L = 9K \cdots\rightarrow K = \frac{X}{3}$$

Introduciendo las demandas condicionadas en la isocosto obtendremos la función de costos totales

$$CT = wL + rK = 4(3X) + 36\left(\frac{X}{3}\right) = 24X$$

Para $X = 120$ el $CT = 2{,}880$.

De acuerdo con las demandas condicionadas, las cantidades empleadas de los factores son: $L = 360$, $K = 40$

b. Suponiendo que el precio de la hora de trabajo se incrementa hasta $w = 9$. Si la empresa no desea variar su producción de relojes ($X = 120$). ¿Cuál será el valor del efecto sustitución sobre el trabajo (L)?

Se ha producido un encarecimiento relativo del factor trabajo, aunque la empresa quiera mantener la misma producción (ahora con un mayor costo) sustituirá a lo largo de la correspondiente isocuanta factor trabajo por factor capital.

Ahora la proporción óptima de factores será:

$$\frac{K}{L} = \frac{w'}{r} \cdots\rightarrow \frac{K}{L} = \frac{9}{36} \cdots\rightarrow L = 4K$$

Aplicando esta proporción a la iscocuanta de $X = 120$

$$120 = \left(\frac{L}{4}\right)^{1/2} L^{1/2} = \frac{1}{2} L \qquad \text{de donde } \; L = 240 \cdots\rightarrow K = 60$$

Para conseguir la misma producción, ahora utilizamos 120 unidades de trabajo menos.

8. Cierta empresa produce tornillos con una función de costos totales a corto plazo $CT_{cp}(X) = X^3 - 5X^2 + 3X + 9$, donde X se mide en miles de tornillos.

a. ¿Para qué nivel de producto se alcanza el Óptimo de Explotación?

b. **¿Para qué nivel de producto se alcanza el Mínimo de Explotación?**

c. ¿Para qué nivel de producto para el que el Costo Marginal es mínimo?

---

a. Nivel de producto se alcanza el Óptimo de Explotación

Aplicamos $CMg = CMe$

$$CMg = 3X^2 - 10X + 3 \;, \qquad CMe = X^2 - 5X + 3 + \frac{9}{X}$$

$$\text{igualando } 3X^2 - 10X + 3 = X^2 - 5X + 3 + \frac{9}{X}$$

$$\text{resolviendo: } 2X^2 - 5X - \frac{9}{X} = 0 \cdots \rightarrow X = 3$$

b. Nivel de producto se alcanza el Mínimo de Explotación

Aplicaremos $CMg = CMe$ Variable

$$CMg = 3X^2 - 10X + 3 \;, \qquad CMeV = X^2 - 5X + 3$$

$$\text{igualando } 3X^2 - 10X + 3 = X^2 - 5X + 3$$

$$\text{resolviendo: } 2X^2 - 5X = 0 \cdots \rightarrow X(2X - 5) = 0 \cdots \rightarrow X = 2.5$$

c. Nivel de producto para el que el Costo Marginal es mínimo

Calcularemos para que valor se anula la derivada del CMg.

$$CMg = 3X^2 - 10X + 3 \;, \qquad \frac{\partial CMg}{\partial X} = 6X - 10 = 0 \cdots \rightarrow X = \frac{5}{3}$$

9. **Suponga una empresa que posee una función de costos totales a largo plazo del tipo $CT_{LP}(X) = X^3 - 6X^2 + 50X$.**

a. ¿Para qué nivel de producción se alcanzará la Dimensión Óptima?

b. **¿Cuál será el valor del Costo Marginal a largo plazo en la Dimensión Óptima?**

c. **Si la función de Costo Total a corto plazo es: $CT_{cp}(X) = X^3 - 3X^2 + 32X + CF$ donde CF representa el Costo Fijo, ¿cuál será el valor del citado Costo Fijo si la empresa produce a corto plazo también en la Dimensión Óptima?**

---

a. Nivel de producción se alcanzará la Dimensión Óptima

La que corresponda a la igualdad entre el costo marginal y el costo medio.

$$CMg_{LP} = 3X^2 - 12X + 50 \;, \quad CMe_{LP} = X^2 - 6X + 50$$

igualando y resolviendo

$$3X^2 - 12X + 50 = X^2 - 6X + 50 \cdots \rightarrow X = 3$$

b. Valor del Costo Marginal a largo plazo en la Dimensión Óptima

Introducimos el valor $X = 3$ en la ecuación del Costo Marginal

$$CMg_{LP} = (X = 3) = 3(3^2) - 12(3) + 50 = 41$$

c. Si la función de Costo Total a corto plazo es: $CT_{cp}(X) = X^3 - 3X^2 + 32X + CF$ donde CF representa el Costo Fijo, ¿cuál será el valor del citado Costo Fijo si la empresa produce a corto plazo también en la Dimensión Óptima?

En primer lugar calcularemos el Costo Total a Largo Plazo para la producción correspondiente a la Dimensión Óptima (X = 3).

$$CT_{LP} = (X = 3) = (3^3) - 6(3^2) + 50(3) = 123$$

En la Dimensión Óptima coinciden los costos totales a largo y a corto, luego:

$$X^3 - 3X^2 + 32X + CF = 123 \quad , \quad \text{para } X = 3 \cdots \rightarrow CF = 27$$

10. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes. Las funciones de utilidad de los consumidores son:

$$u^1 = 4x_{11}^{1/3}x_{12}^{1/2} \quad u^2 = 3x_{21}^{1/2}x_{22}^{1/2}$$

Determinar la curva de contrato

La condición para la obtención de la curva de contrato es $TMgS^1 = TMgS^2$

De esta forma, calculando la tasa marginal de sustitución del consumidor 1

$$TMgS^1 = \frac{UMgx_{11}}{UMgx_{12}} = \frac{\frac{\partial u^1}{\partial x_{11}}}{\frac{\partial u^1}{\partial x_{12}}} = \frac{\frac{4}{3}x_{11}^{-2/3}x_{12}^{1/2}}{\frac{4}{2}x_{11}^{1/3}x_{12}^{-1/2}} = \frac{4x_{12}^{1/2}x_{12}^{1/2}}{6x_{11}^{1/3}x_{11}^{2/3}} = \frac{2x_{12}}{3x_{11}}$$

Calculamos la tasa marginal de sustitución del consumidor 2

$$TMgS^2 = \frac{UMgx_{21}}{UMgx_{22}} = \frac{\frac{\partial u^2}{\partial x_{21}}}{\frac{\partial u^2}{\partial x_{22}}} = \frac{\frac{3}{2}x_{21}^{-1/2}x_{22}^{1/2}}{\frac{3}{2}x_{21}^{1/2}x_{22}^{-1/2}} = \frac{x_{22}^{1/2}x_{22}^{1/2}}{x_{21}^{1/2}x_{21}^{1/2}} = \frac{x_{22}}{x_{21}}$$

Sustituyendo en la condición

$$TMgS^1 = TMgS^2 \quad \frac{2x_{12}}{3x_{11}} = \frac{x_{22}}{x_{21}}$$

Sabemos que:

$$x_1 = x_{11} + x_{21} \rightarrow x_{21} = x_1 - x_{11}$$

$$x_2 = x_{12} + x_{22} \rightarrow x_{22} = x_2 - x_{12}$$

Sustituyendo en la condición de la curva de contrato

$$\frac{2x_{12}}{3x_{11}} = \frac{x_{22}}{x_{21}} = \frac{x_2 - x_{12}}{x_1 - x_{11}}$$

Realizando las operaciones correspondientes

$$2x_{12}\left(x_1 - x_{11}\right) = 3x_{11}\left(x_2 - x_{12}\right)$$

$$2x_1x_{12} - 2x_{11}x_{12} = 3x_2x_{11} - 3x_{11}x_{12}$$

$$2x_1x_{12} - 2x_{11}x_{12} + 3x_{11}x_{12} = 3x_2x_{11}$$

$$x_{12}\left(2x_1 + x_{11}\right) = 3x_2x_{11}$$

$$x_{12} = \frac{3x_2x_{11}}{2x_1 + x_{11}}$$ Curva de contrato

BIBLIOGRAFÍA

1. Gravelle H. y Rees R.(2006), Microeconomía, 3ª ed. Pearson Prentice Hall, Madrid.
2. Henderson J.M y Quandt R.E. (1991), Teoría Microeconómica, Ariel, Madrid.
3. Koutzoyanis, A. (1987), Microeconomía Intermedia, Amorrortu Editores, Buenos Aires.
4. Martínez-Giralt Xavier (2009), Microeconomía Avanzada *CODE y Departament d'Economia* Universitat Autónoma de Barcelona
5. Maté García J.J. y Pérez Domínguez C. (2007), Microeconomía Avanzada, Pearson Prentice Hall, Madrid.
6. Nicholson, W., Teoría Microeconómica (2007), Thompson 9ª Ed. México.
7. Nicholson, W., Microeconomía Intermedia (2009), Thompson 9ª Ed. México.
8. R. Binger Brian. Microeconomics with calculus (1988), Harper Collins Publisher.
9. Tugores J. (2002), Microeconomía cuestiones y problemas, McGraw Hill, Madrid.
10. Varian H. (2006), Análisis Microeconómico, Antoni Bosch, 3a. ed., Madrid.
11. Villar A. (2006), Microeconomía, McGraw Hill, 1ª ed. Madrid.