Brocardove figure trokuta

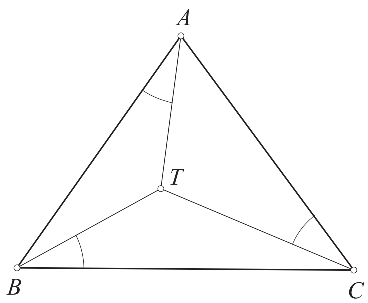
Zdenka Kolar-Begović[1], *Goran Knez*[2]

Zaista je očaravajuće koliko je tako jednostavan lik, kao što je trokut, neiscrpan u svojim svojstvima. Koliko još svojstava, kojih nismo svjesni, može imati?

August Leopold Crelle

Upravo ove riječi njemačkog matematičara A. L. Crellea govore o vrijednosti proučavanja i velikom broju još neotkrivenih svojstava trokuta. Neka od njih su i rezultati vezani uz proučavanje Brocardovih figura trokuta, što je tema ovog članka.

Brocardove točke i Brocardov kut trokuta



Slika 1.

Promatrajmo trokut ABC i točku T unutar njega. Spojimo ju s vrhovima trokuta i promatramo kutove koje dužine $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ i $\overline{TC}$ zatvaraju sa stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Dobiveni kutovi su općenito različiti (slika 1). Možemo lako dobiti da su dva od ta tri kuta jednaka, ali nije odmah jasno postoji li točka za koju su sva tri spomenuta kuta jednaka.

Dokazat ćemo da postoji jedinstvena točka s tim svojstvom. Međutim, može se dokazati da postoji i jedinstvena točka T' za koju spojnice $\overline{T'A}$, $\overline{T'B}$ i $\overline{T'C}$ zatvaraju sa stranicama $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ i $\overline{CB}$ jednake kutove.

Problem određivanja takvih točaka, riješio je 1875. godine francuski vojni časnik koji se bavio matematikom, Henri Brocard (1845.–1922.) pa se stoga i nazivaju Brocardovim točkama.

Prema nekim izvorima ove točke otkrio je još 1816. godine njemački matematičar August Leopolde Crelle (1780.–1855.). Nakon njegova otkrića, točke su u jednom kratkom periodu privukle pozornost eminentnih matematičara onog vremena, ali kasnije je taj interes nestao. Međutim, nakon Brocardovog ponovnog otkrića 1875. godine pojavio se veliki broj radova na tu temu. Među najpoznatijim matematičarima tog doba koji su se bavili ovom tematikom, osim Brocarda, su Lemoine, Neuberg, Mc Cay, Tucker i Schoute. Neki od autora navode kako bi povijesno bila opravdana upotreba termina Crelle-Brocardove točke, dok većina suvremenih referenci koristi termin Brocardove točke.

Dokažimo najprije tvrdnju koja će nam omogućiti dokaz postojanja točaka koje zadovoljavaju navedena svojstva.

[1] Izvanredna profesorica na Odjelu za matematiku i Fakultetu za odgojne i obrazovne znanosti Sveučilišta u Osijeku; e-pošta: zkolar@mathos.hr

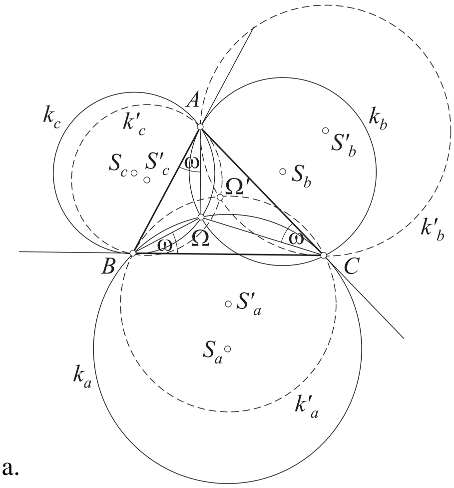
[2] Diplomirani matematičar na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku; e-pošta: goran.knez@skole.hr

Teorem 1. *Za dani trokut ABC dane su tri kružnice: k_a koja prolazi točkom B i dira stranicu $\overline{AC}$ u točki C, k_b koja prolazi točkom C i dira stranicu $\overline{AB}$ u točki A, k_c koja prolazi točkom A i dira stranicu $\overline{BC}$ u točki B (slika 2). Kružnice k_a, k_b i k_c sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Kružnice k_a i k_c osim zajedničke točke B imaju još jednu zajedničku točku trokuta ABC, označimo je s Ω. Kako je BC tangenta kružnice k_c, $\sphericalangle A\Omega B = 180^\circ - \beta$ i analogno $\sphericalangle B\Omega C = 180^\circ - \gamma$. Odavde imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle A\Omega C &= 360^\circ - (180^\circ - \beta) - (180^\circ - \gamma)\\ &= \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha,\end{aligned}$$

gdje su α, β i γ unutrašnji kutovi trokuta ABC, odakle slijedi da točka Ω pripada luku kružnice k_b unutar trokuta ABC, što daje tvrdnju teorema. □



Slika 2.

Na sličan način se dokazuje sljedeća tvrdnja.

Teorem 2. *Za dani trokut ABC dane su tri kružnice: k'_a koja prolazi vrhom C i dira stranicu $\overline{AB}$ u vrhu B, k'_b koja prolazi točkom A i dira stranicu $\overline{BC}$ u točki C, k'_c koja prolazi točkom B i dira stranicu $\overline{AC}$ u točki A. Kružnice k'_a, k'_b i k'_c sijeku se u jednoj točki, Ω' (slika 2).*

Dokažimo sada važno svojstvo točaka Ω i Ω'.

Teorem 3. *Neka su Ω i Ω' točke iz teorema 1 i 2. Tada vrijede tvrdnje:*

i) $\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA$ i točka Ω je jedina točka s tim svojstvom.

ii) $\sphericalangle \Omega' AC = \sphericalangle \Omega' CB = \sphericalangle \Omega' BA$ i točka Ω' je jedina točka s tim svojstvom (slika 2).

Dokaz. i) $\sphericalangle \Omega AB$ je jednak polovini središnjega kuta kružnice k_c nad tetivom $\overline{\Omega B}$, jer je BC tangenta kružnice k_c taj središnji kut iznosi $2\sphericalangle \Omega BC$ odakle je $\sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega AB$. Analogno se dokaže $\sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA$.

Ako je Ω_1 točka za koju vrijedi $\sphericalangle \Omega_1 AB = \sphericalangle \Omega_1 BC$ tada će kružnica na kojoj leže točke Ω_1, A, B dirati BC u točki B, odakle slijedi da Ω_1 leži na k_c. Slično, iz uvjeta $\sphericalangle \Omega_1 BC = \sphericalangle \Omega_1 CA$ dobivamo da točka Ω_1 leži na k_a. Dakle $\Omega_1 = \Omega$.

Slično se dokazuje tvrdnja ii). □

Definicija 1. *Za dani trokut ABC točku Ω za koju vrijedi*

$$\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA$$

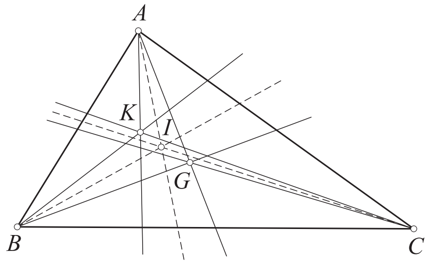
zovemo prvom ili pozitivnom Brocardovom točkom trokuta ABC, a točku Ω' za koju vrijedi

$$\sphericalangle \Omega' AC = \sphericalangle \Omega' CB = \sphericalangle \Omega' BA$$

zovemo drugom ili negativnom Brocardovom točkom trokuta ABC.

Prije navođenja svojstava Brocardovih točaka prisjetimo se pojma izogonalnih pravaca i izogonalno konjugiranih točaka.

Definicija 2. *Par pravaca koji prolaze vrhom kuta i sa simetralom tog kuta čine sukladne kutove naziva se izogonalama tog kuta.*



Slika 3.

Može se dokazati da ako se tri pravca položena vrhovima danog trokuta ABC sijeku u jednoj točki T_1, tada se i njihove izogonale također sijeku u nekoj točki, označimo je s T_2.

Točke T_1 i T_2 zovemo *izogonalno konjugiranim točkama* ili kraće, izogonalnim točkama trokuta ABC.

Izogonalno konjugirana točka središtu upisane kružnice trokuta je sama ta točka, izogonalno konjugirana točka ortocentra trokuta je središte opisane kružnice trokuta, a izogonalno konjugirana točka težišta se zove simedijani centar trokuta (slika 3).

Vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 4. *Brocardove točke Ω i Ω' su izogonalno konjugirane točke.*

Dokaz. Neka je Ω_1 izogonalno konjugirana točka Brocardovoj točki Ω. Tada vrijedi

$$\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega_1 AC, \qquad \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega_1 BA, \qquad \sphericalangle \Omega CA = \sphericalangle \Omega_1 CB$$

i zbog

$$\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA$$

dobivamo

$$\sphericalangle \Omega_1 AC = \sphericalangle \Omega_1 BA = \sphericalangle \Omega_1 CB,$$

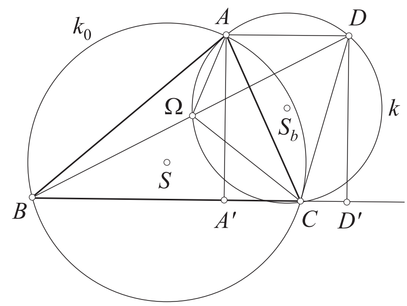
odakle je $\Omega_1 = \Omega'$ što je i trebalo dokazati. □

Definicija 3. *$\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega' AC$ zove se Brocardov kut trokuta ABC i označava s ω.*

Navedimo još jedan način konstrukcije prve Brocardove točke. Konstruiramo kružnicu k_b i kroz točku A paralelu s BC. Označimo drugo sjecište te paralele i kružnice k_b s D. Tada BD siječe kružnicu k_b u točki Ω, a $\sphericalangle DBC$ je Brocardov kut trokuta ABC (slika 4). Naime, vrijedi

$$\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega CA = \sphericalangle \Omega DA = \sphericalangle \Omega BC.$$

Slična je konstrukcija druge Brocardove točke.



Slika 4.

Promotrimo li trokute ACD, ACB dobivamo $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB$ odakle dobivamo $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABC$, pa je pravac CD tangenta opisane kružnice trokuta ABC. Stoga se točka D može dobiti kao sjecište paralele s BC kroz A i tangente na opisanu kružnicu trokuta ABC kroz točku C. Dakle, Brocardov kut trokuta može se dobiti bez pomoćnih kružnica, a Brocardovu točku možemo dobiti ako dva puta napravimo ovu konstrukciju.

Ako su A' i D' nožišta okomica iz A i D na BC. Tada vrijedi jednakost

$$\frac{|BD'|}{|DD'|} = \frac{|BA'|}{|D'D|} + \frac{|A'C|}{|D'D|} + \frac{|CD'|}{|D'D|} = \frac{|CD'|}{|D'D|} + \frac{|BA'|}{|AA'|} + \frac{|A'C|}{|AA'|}.$$

Iz ove jednakosti direktno slijedi naredna tvrdnja.

Teorem 5. *Dan je trokut ABC i njegovi unutarnji kutovi α, β i γ. Tada vrijedi*

$$\operatorname{ctg}\omega = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \tag{1}$$

gdje je ω Brocardov kut trokuta ABC.

Prethodna tvrdnja govori na koji način možemo odrediti mjeru Brocardovog kuta poznavajući mjere unutrašnjih kutova trokuta. Identitet (1) bi mogao poslužiti kao osnovni definicijski identitet za Brocardov kut jer određuje ω zbog nejednakosti

$$0 < \omega < \min\{\alpha, \beta, \gamma\} < \frac{1}{2}\pi.$$

Nejednakosti za Brocardov kut

U ovom poglavlju ćemo dokazati niz zanimljivih nejednakosti koje vrijede za Brocardov kut trokuta.

Teorem 6. *Za Brocardov kut ω trokuta ABC vrijedi nejednakost*

$$\omega \leqslant \frac{\pi}{6}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan.

Dokaz. Dokažimo najprije jednakost koja povezuje Brocardov kut trokuta i površinu trokuta. Površina P trokuta ABC je jednaka

$$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha, \tag{2}$$

a prema kosinusovom poučku

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{3}$$

Posljedica prethodnih dviju jednakosti je formula

$$4P\operatorname{ctg}\alpha = -a^2 + b^2 + c^2, \tag{4}$$

Slične formule, zbog simetrije, vrijede za $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$. Primjenom jednakosti (1) dobivamo formulu

$$4P\operatorname{ctg}\omega = a^2 + b^2 + c^2.$$

Dokažimo sada nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}. \tag{5}$$

Jednakosti (2) i (3) daju

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4P\sqrt{3} = 2b^2 + 2c^2 - 4bc\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \geq 2(b-c)^2$$

što dokazuje (5). Štoviše, jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ i $b = c$, tj., ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan. (4) i (5) impliciraju nejednakost $\operatorname{ctg}\omega \geq \sqrt{3}$ odnosno traženu nejednakost $\omega \leq \dfrac{\pi}{6}$. $\square$

Poopćenje prethodnog teorema su dali ruski matematičari N. A. Dmitriev i E. B. Dynkin.

Teorem 7. *Neka je P točka unutar konveksnog n-terokuta $A_1A_2\ldots A_n$ i označimo $A_{n+1}=A_1$. Tada je*

$$\min_{k=1}^{n} \sphericalangle PA_kA_{k+1} \leqslant \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je n-terokut $A_1A_2\ldots A_n$ pravilan, a P njegovo središte.

Dokaz njihove tvrdnje može se naći u [1]. Za $n=3$, tvrdnja povlači da Brocardov kut trokuta može imati najveću vrijednost $\frac{\pi}{6}$, a jednakost vrijedi u slučaju da je trokut jednakostraničan. Štoviše, ako postoji Brocardova točka konveksnog n-terokuta tj., točka za koju su kutovi PA_kA_{k+1} jednaki, Brocardov kut može imati naveću vrijednost $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$, pri čemu jednakost vrijedi u slučaju pravilnog n-terokuta. Postoje n-terokuti koji nemaju Brocardovu točku.

Teorem 8. *Brocardov kut ω zadovoljava nejednakost*

$$\omega^3 \leqslant (\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega). \tag{6}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Razmotrimo funkciju $f:\langle 0,\pi\rangle \to \mathbf{R}$, $f(x)=\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)=\ln x-\ln\sin x$.

Prva i druga derivacija funkcije f dane su sa $f'(x)=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x$ i $f''(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$. Za $0<x<\pi$ vrijedi $f'(x)>0$ i $f''(x)>0$. Dakle, funkcija f je rastuća na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$. Štoviše konveksna je na navedenom intervalu, tj. vrijedi:

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant \lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n),\quad x_i\in\langle 0,\pi\rangle,\quad \lambda_i\geqslant 0,\quad i=1,\ldots n,$$
$$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= f\left(\frac{\omega+(\alpha-\omega)+\omega+(\beta-\omega)+\omega+(\gamma-\omega)}{6}\right)\\ &\leq \frac{1}{6}(f(\omega)+f(\alpha-\omega)+f(\omega)+f(\beta-\omega)+f(\omega)+f(\gamma-\omega)). \end{aligned}$$

Imamo

$$\ln\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{1}{6}\left(3\ln\frac{\omega}{\sin\omega}+\ln\frac{\alpha-\omega}{\sin(\alpha-\omega)}+\ln\frac{\beta-\omega}{\sin(\beta-\omega)}+\ln\frac{\gamma-\omega}{\sin(\gamma-\omega)}\right).$$

Prema poučku o sinusima za trokute $AB\Omega$, $BC\Omega$, $CA\Omega$ vrijedi

$$\frac{|A\Omega|}{|B\Omega|}=\frac{\sin(\beta-\omega)}{\sin\omega},\quad \frac{|B\Omega|}{|C\Omega|}=\frac{\sin(\gamma-\omega)}{\sin\omega},\quad \frac{|C\Omega|}{|A\Omega|}=\frac{\sin(\alpha-\omega)}{\sin\omega}.$$

Pomnožimo li gornje tri jednakosti dobivamo

$$\sin(\alpha-\omega)\sin(\beta-\omega)\sin(\gamma-\omega)=\sin^3\omega.$$

Koristeći prethodnu jednakost, i činjenicu da je $\frac{x}{\sin x}$ rastuća funkcija na inetrvalu $\left\langle 0,\frac{\pi}{6}\right]$ te nejednakost $\omega\leq\frac{\pi}{6}$ dobivamo

$$\left(\frac{\omega}{\sin\omega}\right)^6 \leq \left(\frac{\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)^6 \leq \frac{\omega^3(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{\sin^3\omega\sin(\alpha-\omega)\sin(\beta-\omega)\sin(\gamma-\omega)}$$

odakle dobivamo traženu nejednakost. $\square$

Teorem 9. *Brocardov kut* ω *zadovoljava nejednakost* $8\omega^3 \leqslant \alpha\beta\gamma$. *Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.*

Dokaz. Iz (6) dobivamo

$$64\omega^6 \leqslant 4\omega(\alpha-\omega)4\omega(\beta-\omega)4\omega(\gamma-\omega).$$

Jer je $4\omega(\alpha-\omega) \leq \alpha^2$ ekvivalentno $(\alpha-2\omega)^2 \geq 0$ odakle slijedi tražena nejednakost. $\square$

P. Yff je 1963. godine pretpostavio da vrijedi nejednakost iz prethodnog teorema. Iako je nejednakost zaintrigirala mnoge matematičare, prošlo je više od deset godina prije pojavljivanja prvog dokaza ove nejednakosti. Osnovni razlog zašto je ona posebno interesantna je njezin neobičan oblik. Naime, potpuno je neobično da u izrazu u kojem se susreću kutovi trokuta nema funkcija sinus, kosinus ili tangens.

Brocardova kružnica

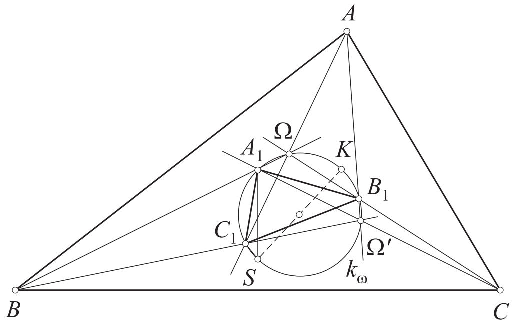
U ovom poglavlju ćemo definirati još jedan važan pojam vezan uz Brocardove točke trokuta. Označimo sjecište pravaca $A\Omega$ i $B\Omega'$ s C_1 i analogno sjecišta pravaca $B\Omega$ i $C\Omega'$, te $C\Omega$ i $A\Omega'$ s A_1, odnosno B_1 (slika 5). Točke A_1, B_1 i C_1 su vrhovi trokuta koji smo mogli definirati i na ovaj način.

Definicija 4. *Neka su* A_1, B_1 *i* C_1 *vrhovi jednakokračnih trokuta konstruiranih nad stranicama danog trokuta* ABC *kao osnovicama, u unutrašnjosti danog trokuta, a s kutom uz bazu jednakom Brocardovom kutu. Trokut* $A_1B_1C_1$ *zovemo prvim Brocardovim trokutom trokuta* ABC.

Definicija 5. *Kružnicu* k_ω *opisanu prvom Brocardovom trokutu trokuta* ABC *zovemo Brocardovom kružnicom trokuta* ABC *(slika 5).*

Dokažimo sada sljedeću tvrdnju.

Teorem 10. *Brocardove točke trokuta leže na njegovoj Brocardovoj kružnici.*



Slika 5.

Dokaz. Kako za trokut $AB\Omega$ vrijedi $\sphericalangle A\Omega B = 180° - \beta$, vanjski kut trokuta $AB\Omega$ dobivamo

$$\sphericalangle A_1\Omega C_1 = \beta. \tag{7}$$

Na isti način, promatranjem trokuta $BC\Omega'$ dobivamo

$$\sphericalangle A_1\Omega' C_1 = \beta. \tag{8}$$

Vrijedi i

$$\sphericalangle A_1 S C_1 = \beta \tag{9}$$

jer su krakovi tog kuta okomiti na BC i AB. Kutove (7), (8) i (9) možemo promatrati kao obodne kutove iste kružnice nad tetivom $\overline{A_1C_1}$. Prema tome, točke A_1, C_1, Ω, Ω' i S leže na jednoj kružnici, označimo je k_ω (slika 5).

Slično dobijemo $\sphericalangle B_1\Omega C_1 = \alpha$, $\sphericalangle B_1\Omega' C_1 = 180^\circ - \alpha$ i $\sphericalangle B_1SC_1 = 180^\circ - \alpha$ odakle slijedi da točke B_1, C_1, Ω, Ω' i S leže na jednoj kružnici, označimo je $k_{\omega'}$. Međutim, točke C_1, Ω, Ω' i S zajedničke su objema kružnicama k_ω i $k_{\omega'}$, pa se one podudaraju.

$\square$

Sljedeća tvrdnja povezuje trokut ABC i njegov prvi Brocardov trokut.

Teorem 11. *Dani trokut ABC i prvi Brocardov trokut $A_1B_1C_1$ su slični.*

Dokaz. Iz dokaza prethodnog teorema slijedi da su $\sphericalangle A_1\Omega' C_1$ i $\sphericalangle A_1B_1C_1$ obodni kutovi kružnice k_ω nad tetivom $\overline{A_1C_1}$ pa imamo

$$\sphericalangle A_1\Omega' C_1 = \beta = \sphericalangle A_1B_1C_1.$$

Slično dobivamo

$$\sphericalangle B_1\Omega C_1 = \alpha = \sphericalangle B_1A_1C_1,$$

odakle slijedi tvrdnja teorema. $\square$

Dokazali smo da vrhovi prvog Brocardovog trokuta, Brocardove točke i središte trokutu opisane kružnice leže na Brocardovoj kružnici. Može se dokazati da Brocardova točka prolazi i simedijanim centrom K trokuta, štoviše $\overline{SK}$ je njezin promjer, gdje je S središte trokutu opisane kružnice (slika 5). Kako spomenutih sedam točaka leži na Brocardovoj kružnici često se ona u literaturi susreće i pod imenom kružnica sedam točaka.

Može se definirati još jedan trokut čiji vrhovi leže na Brocardovoj kružnici, a to je drugi Brocardov trokut, onaj čiji su vrhovi sjecišta medijana i Brocardove kružnice danog trokuta. Taj trokut je također zanimljiv po svojim svojstvima. Niz značajnih svojstava Brocardove kružnice, prvog i drugog Brocardovog trokuta može se naći u [3], [4] i [5].

Literatura

[1] A. Besenyei, *The Brocard Angle and a Geometrical Gem from Dmitriev and Dynkin*, The American Mathematical Monthly, 122 (2015), 495–499.

[2] L. Guggenbuhl, *Henri Brocard and the geometry of the triangle*, Math. Gazette, 80 (1996), 241–243.

[3] R. Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. America, 1995.

[4] N. Altshiller-Court, *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publication, 2007.

[5] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[6] R. J. Stroeker, H. J. T. Hoogland, *Brocardian geometry revisited or some remarkable inequalities*, Nieuw Arch. Wisk. 2 (1984), 281–310.