


# Modellierung elektrischer und magnetischer Felder von Energieversorgungsleitungen über realem Grund mittels des verallgemeinerten Spiegelprinzips

Prof. Dr. Frank Gronwald, TU Hamburg-Harburg, Institut für Theoretische Elektrotechnik, 21079 Hamburg, Germany, [gronwald@tuhh.de](mailto:gronwald@tuhh.de)  
Dipl.-Ing. Jörg Plambeck, TÜV Nord CERT GmbH, EMV Services, 21079 Hamburg, Germany, [jplambeck@tuev-nord.de](mailto:jplambeck@tuev-nord.de)  
Dr.-Ing. Thomas Weber, TÜV Nord CERT GmbH, EMV Services, 21079 Hamburg, Germany, [tweber@tuev-nord.de](mailto:tweber@tuev-nord.de)

View metadata, citation and similar papers at [core.ac.uk](https://core.ac.uk)

brought to you by  CORE

provided by Institutionen

Bei der Auslegung von Energieversorgungsleitungen sind zum Schutz der Bevölkerung Grenzwerte bezüglich der von den Leitungen hervorgerufenen niederfrequenten elektrischen und magnetischen Felder zu berücksichtigen [1, 2]. Zur Modellierung und Berechnung dieser Felder genügen üblicherweise quasistationäre und elektrostatische Methoden [3]: Bei bekannten Strömen und bekannter Leitergeometrie folgen die magnetischen Felder aus dem Ampèreschen Gesetz. Die elektrischen Felder ergeben sich bei vorgegebenen Leiterspannungen aus dem Invertieren einer Kapazitätsmatrix. Im konkreten Anwendungsfall tritt jedoch das Problem auf, dass bestimmte Eingabeparameter, und hier sind in erster Linie Materialparameter des Bodens zu nennen, gar nicht genau bekannt sind. Um den Einfluss dieser Unsicherheit abzuschätzen, kann das verallgemeinerte Spiegelprinzip angewendet werden [4]. Im Vergleich zum üblichen Spiegelprinzip, welches eine ideal leitfähige Spiegelebene voraussetzt, erlaubt das verallgemeinerte Spiegelprinzip auf Basis der Sommerfeld-Integrale die Miteinbeziehung einer endlich leitfähigen Erde. Weiterhin kann der Durchhang der Leitungen durch analytische Abschätzungen berücksichtigt werden [5]. Als Resultat lassen sich auch mit elementaren Formeln die von Energieversorgungsleitungen ausgehenden magnetischen und elektrischen Felder berechnen und entsprechende Standortanalysen durchführen.

## 2 Berechnungsvorschriften für gerade Leiter über idealem Grund

### 2.1 Berechnung der magnetischen Felder

Im für Energieversorgungsleitungen vorliegenden quasi-stationären Fall lassen sich die magnetischen Felder elementar aus vorgegebenen Strömen berechnen. Dies kann auf Grundlage des Ampèreschen Gesetzes

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

oder des Gesetzes von Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

erfolgen. Wird speziell ein konzentrierter quasi-stationärer Strom  $I$  betrachtet, der entlang eines langen linienförmigen und geraden Leiters fließt, so folgt aus diesen Beziehungen, dass das magnetische Feld konzentrische Kreise um diesen Leiter ausbildet. Die Beträge der magnetischen Felder ergeben sich dabei zu

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \quad \text{bzw.} \quad H = \frac{I}{2\pi r}$$

wobei  $r$  den Abstand zwischen Leiter und Feldpunkt bezeichnet.

Werden die Felder von mehreren Leitern berücksichtigt, so addieren sich nach dem Superpositionsprinzip die einzelnen Feldbeiträge auf. Diese Addition hat vektoriell und unter Berücksichtigung der verschiedenen Phasenlagen zu erfolgen. Sind beispielsweise  $N$  Leiter innerhalb kartesischer Koordinaten in  $z$ -Richtung ausgerichtet sowie in Höhe  $y_k$  und an weiterer Position  $x_k$  befindlich, dann berechnen sich die magnetischen Feldkomponenten nach Biot-Savart gemäß

$$\underline{B}_x(x, y) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^N I_k \frac{y - y_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}, \quad \underline{B}_y(x, y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^N I_k \frac{x - x_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$$

mit den Phasen  $I_k$  für den Strom in Leiter  $k$ . Der Betrag des gesamten magnetischen Feldes folgt dann aus

$$B = \sqrt{|\underline{B}_x|^2 + |\underline{B}_y|^2}.$$

## 2.2 Berechnung der elektrischen Felder

Die Berechnung der elektrischen Felder um Hochspannungsleitungen kann ebenfalls mit quasi-statischen Methoden erfolgen. Die Grundlage bildet das Gaußsche Gesetz

$$\oint_{\partial V} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV,$$

welches die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  mit der elektrischen Ladungsdichte  $\rho$  verknüpft. Bei Hochspannungsleitungen sind nun die Ladungsverteilungen zunächst unbekannt. Bekannt sind aber die Spannungen  $U$  der einzelnen Leitungen in Bezug

auf die Erde. Aus den Spannungen können dann in einem ersten Schritt die Linienladungen  $\lambda$  auf den einzelnen Leitern berechnet werden. Für einen ideal leitfähigen Boden ergibt sich beispielsweise die Bestimmungsformel

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h}{R}\right),$$

mit  $R$  dem Radius des betrachteten Linienleiters, aus dem mit bekannter Spannung  $U$  die Linienladung  $\lambda$  berechnet werden kann. In einem zweiten Schritt folgt die elektrische Feldstärke aus dem Ausdruck

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

mit dem Verbindungsvektor  $\vec{r}$  zwischen Feldpunkt und Leiterposition.

Im üblichen Falle mehrerer Leiter muss deren gegenseitiger Einfluss aufeinander mitberücksichtigt werden. Dies kann mit Hilfe einer Kopplungsmatrix  $P_{ik}$  erfolgen, welche die bekannten Spannungen mit den unbekanntem Ladungsverteilungen verknüpft und deren Einträge sich sofort aus der Geometrie der betrachteten Anordnung ergeben [3]. Die *a priori* unbekanntem Linienladungen folgen dann aus der Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^N P_{ik} \lambda_k = U_i .$$

Wiederum sind bei der Addition der einzelnen Beiträge für die gesamte elektrische Feldstärke die vektoriellen Richtungen und Phasenlagen zu berücksichtigen.

### 3 Berücksichtigung von Durchhang und realem Grund

#### 3.1 Kettenlinien und Berücksichtigung von Durchhang

Reale Hochspannungsleitungen stellen keine ideal geraden Leiter dar, sondern verfügen in der Regel über einen gewissen Durchhang. Die Leitungen nehmen dann die aus der Mathematik bekannte Form einer *Kettenlinie* an, die auch unter dem Namen *Seilkurve* bekannt ist [3]. Die Berechnung der magnetischen Felder kann dann weiterhin nach Biot-Savart erfolgen, doch ist in dem Fall die Richtungsänderung des Stromflusses entlang der Leitungen zu berücksichtigen und es muss über die gesamte Leitung integriert werden. Die Integranden sind aber von elementarer Form und können etwa [5] entnommen werden. Dort ist für typische Konfigurationen gezeigt, dass der Durchhang keinen drastischen Einfluss auf die Ergebnisse der Feldberechnung hat und bis zu einige 10% betragen kann. Auf Basis der Kettenlinie ist in [6] zudem exemplarisch berechnet, dass für *worst case* Betrachtungen an der Stelle des maximalen Durchhangs zur magnetischen und

elektrischen Feldberechnung die durchhängenden Leiter durch gerade Leiter ersetzt werden können, die sich dann in Höhe des maximalen Durchhangs zu befinden haben. Die Differenz zwischen einer genauen, durch Integration entlang der Kettenlinie gewonnenen Lösung und der vereinfachten Berechnung auf Grundlage gerader Leiter erweist sich in dem Fall als vernachlässigbar [6].

### 3.2 Verallgemeinertes Spiegelprinzip und Berücksichtigung von realem Grund

Bei der Berechnung der von Hochspannungsleitungen ausgehenden magnetischen und elektrischen Felder ist weiterhin der Einfluss des Erdbodens zu berücksichtigen. Dieser Einfluss wird von der Leitfähigkeit des Bodens bestimmt. Auf der Basis elektromagnetischer Feldtheorie ist in klassischen Arbeiten gezeigt worden, dass Bodeneffekte durch Spiegelströme modelliert werden können, d.h., ein leitfähiger Boden kann durch äquivalente Spiegelströme ersetzt werden. Die entsprechenden theoretischen Überlegungen sind in [Ban79] zu finden und zusammengefasst. In Bild 3-1 ist die entsprechende Konstruktion der Spiegelströme illustriert.

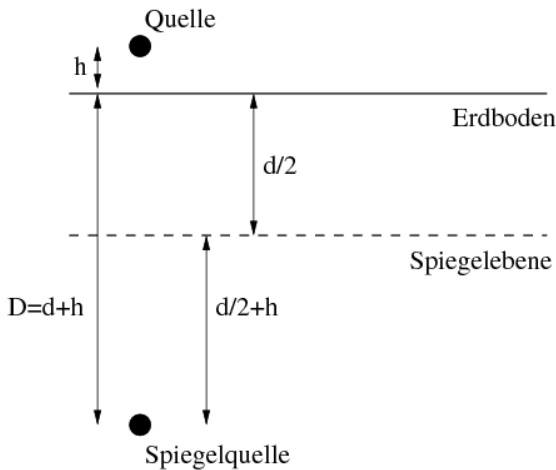


Bild 3-1: Illustration des Spiegelprinzips für einen endlich leitfähigen Boden.

Es wird dabei eine Spiegelebene in einer Tiefe  $d/2$  unter dem Erdboden positioniert. Ist ein stromführender Leiter in einer Höhe  $h$  über dem Erdboden befindlich, so ist der zugehörige Spiegelstrom unterhalb des Erdbodens in einer Tiefe

$$D = d + h$$

zu platzieren. Für die Distanz  $d$  gilt

$$d = \delta(1 + j)$$

mit der Skintiefe  $\delta$  des Erdbodens,

$$\delta = \sqrt{2 / \omega \mu_0 \sigma} .$$

Die Distanz  $d$  ist komplexwertig, was neben der reinen Propagation eine Dämpfung der magnetischen und elektrischen Felder durch den Erdboden bedeutet. Es können nun drei verschiedene Bereiche von Leitfähigkeiten diskutiert werden:

- nicht leitfähiger Boden,  $\sigma \rightarrow 0$ : In diesem Fall streben die Skintiefe  $\delta$  und damit der Abstand  $d$  gegen sehr hohe Werte,  $\delta, d \rightarrow \infty$ . Die Spiegelströme werden somit in einen unendlich entfernten Abstand verschoben und ihr Einfluss verschwindet. Damit hat der nicht leitfähige Boden keinen Einfluss auf die Feldberechnung oberhalb des Bodens.
- sehr gut leitfähiger Boden,  $\sigma \rightarrow \infty$ : In diesem Fall streben die Skintiefe  $\delta$  und damit der Abstand  $d$  gegen sehr kleine Werte,  $\delta, d \rightarrow 0$ . Die Spiegelströme sind daher in einem Abstand  $D=h$  unterhalb der Spiegelebene zu positionieren, wobei sich die Spiegelebene selber auf Höhe des tatsächlichen Erdbodens befindet. Dies entspricht dem üblichen Spiegelprinzip.
- üblich leitfähige Böden: In der Literatur werden übliche Bodenleitfähigkeiten im Bereich  $10^{-1} \text{ S/m} < \sigma < 10^{-3} \text{ S/m}$  angegeben [5]. Für die Skintiefe resultieren für eine Frequenz von 50 Hz dann Werte im Bereich  $159 \text{ m} < \delta < 1590 \text{ m}$ . Die Spiegelströme werden also vergleichsweise weit unterhalb des Bodens verschoben, so dass ihr Einfluss auf die Umgebung der Leitungen im Vergleich zu den oberhalb des Bodens befindlichen Strömen oftmals nur sehr gering ist.

#### 4 Vergleich zwischen Berechnungen und Messungen

Im Zusammenhang mit Standortanalysen wurden an verschiedenen Orten in Nordrhein-Westfalen Messungen von magnetischen und elektrischen Feldern in der Umgebung von Energieversorgungsleitungen durchgeführt. Die erhaltenen Messwerte wurden mit berechneten Werten verglichen, die mit Hilfe der in den beiden vorigen Abschnitten aufgeführten Berechnungsformeln erhalten wurden. Diese Formeln lassen sich recht einfach in einer Programmierumgebung, wie etwa MATLAB, implementieren.

Die folgenden Ergebnisse beziehen sich auf eine Messumgebung, in der sich eine 380 kV Leitungskonfiguration mit drei aktiven Leitern und eine 110 kV Leitungskonfiguration mit zweimal drei aktiven Leitern befinden. Alle Leiter verlaufen zueinander parallel. Der Konturplot in Bild 4-1 verdeutlicht den Querschnitt dieser Umgebung.

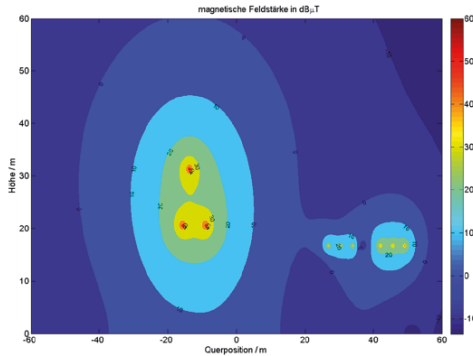


Bild 4-1: Konturplot der magnetischen Feldstärke für die betrachtete Leitungsumgebung, hier unter Berücksichtigung eines ideal leitfähigen Bodens. In der Mitte des Plots sind die drei aktiven Leiter der 380 kV Konfiguration als rote Punkte zu erkennen. In der rechten Hälfte des Bildes sind zweimal drei Leiter erkennbar, die zu einer 110 kV Konfiguration gehören.

Zur Berechnung der magnetischen Felder ist die Kenntnis über die Leiterströme erforderlich. Diese wurden vom Betreiber der Energieversorgungsleitungen für den Zeitpunkt der Messung bereitgestellt. Allerdings waren die absoluten Phasenlagen nicht bekannt, so dass die Phasenrelation zwischen der 380 kV und 110 kV Konfiguration nicht festgestellt werden konnte. Bei der Berechnung der magnetischen Felder wurde davon ausgegangen, dass die jeweiligen u-, v-, und w-Phasen der Konfigurationen keinen Phasenunterschied voneinander aufweisen. Aus Bild 4-2 ist ersichtlich, dass damit die Berechnungsergebnisse etwas über den Messergebnissen liegen.

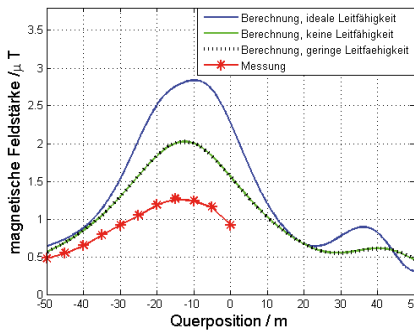


Bild 4-2: Berechnung und Messung der magnetischen Feldstärke. Die Messung begann unterhalb der 380 kV Konfiguration und wurde über eine Distanz von 50 m in einer Höhe von 1 m fortgesetzt. Die Berechnungskurven für eine verschwindende Leitfähigkeit des Bodens und eine geringe Leitfähigkeit von  $\sigma = 10^{-1} \text{ S/m}$  sind praktisch identisch.

Zur Berechnung der elektrischen Felder sind neben der Geometrie der Leitungsanordnung die Angaben über die Spannungen zu verwenden. Betragsmäßig sind diese mit 380 kV bzw. 110 kV bekannt, doch auch in diesem Fall ist dies nicht für die Phasenrelationen zwischen der 380 kV und 110 kV Konfiguration der Fall. Daher wird auch hier davon ausgegangen, dass die jeweiligen u-, v-, und w-Phasen keinen Phasenunterschied voneinander aufweisen. Ein Vergleich zwischen damit erhaltenen Berechnungsergebnissen und Messresultaten ist in Bild 4-3 gezeigt. Dort nicht enthalten ist eine Kurve für den Fall einer verschwindenden Leitfähigkeit, da sich dann die Spiegelebene in einer unendlichen Entfernung zu den Leitern befindet und sich dadurch auch der Bezugspunkt der Spannung in eine unendliche Entfernung verschiebt.

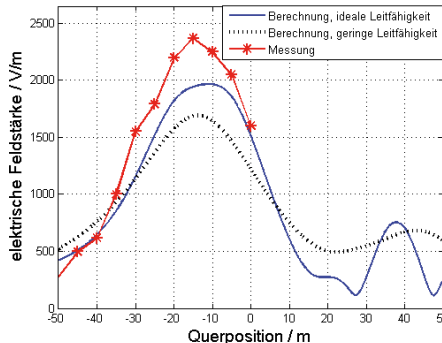


Bild 4-3: Berechnung und Messung der elektrischen Feldstärke. Die Messung begann unterhalb der 380 kV Konfiguration und wurde über eine Distanz von 50 m in einer Höhe von 1 m. fortgesetzt. Als geringe Bodenleitfähigkeit wurde der Wert  $\sigma = 10^{-1}$  S/m verwendet.

## 5 Zusammenfassung

Werden die bekannten Zusammenhänge zur Berechnung niederfrequenter elektrischer und magnetischer Felder um das verallgemeinerte Spiegelprinzip erweitert, so lassen sich die Einflüsse der praktisch immer vorhandenen Unsicherheiten in Bezug auf die benötigten Bodenparameter modellieren und quantifizieren. Auch der Durchhang der Leitungen kann mit analytischen Formeln miteinbezogen werden. Sowohl Bodenleitfähigkeit als auch Durchhang haben keinen drastischen Einfluss auf die magnetischen und elektrischen Feldverteilungen. Dies ist wichtig, da für Standortanalysen oftmals Grenzwerte lediglich in ihrer Größenordnung abgeschätzt werden müssen. Dahingehend zeigt der hier vorgestellte Vergleich zwischen berechneten Feldwerten und Messungen akzeptable Übereinstimmungen auf und führt zur Erkenntnis, dass sich für typische Standardfälle auch ohne den Einsatz von komplexer Software die für Standortanalysen erforderlichen Feldwerte ausreichend genau berechnen lassen.

## 6 Literatur

- [1] Sechszwanzigste Verordnung zur Durchführung des Bundes-Immissionsschutzgesetzes, "Verordnung über elektromagnetische Felder in der Fassung der Bekanntmachung vom 14. August 2013 (BGBl. I S. 3266)".
- [2] International Telecommunication Union: „Evaluation techniques and working procedures for compliance with exposure limits of network operator personnel to power frequency electromagnetic fields“, Recommendation ITU-T K.90 (May 2012).
- [3] P. Denzel: „Grundlagen der Übertragung elektrischer Energie“, (Springer, Berlin, 1966).
- [4] P.R. Bannister: „Summary of Image Theory Expressions for the Quasi-Static Fields of Antennas at or Above the Earth's Surface“, Proceedings of the IEEE, vol. 67, no. 7, (July 1979), pp. 1001-1008.
- [5] A.Z. El Dein: "Magnetic-Field Calculation under EHV Transmission Lines for More Realistic Cases", IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 24, no. 4, (October 2009), pp. 2214-2222.
- [6] K. Dezelak, G. Stumberger and F. Jakl: "Emissions of electromagnetic fields caused by sagged overhead power lines", Electrical Review, ISSN 0033-2097, 3/2011, pp. 29-32.