

3. Belocerkovskiy O. M. *Metod krupnykh chastits v gazovoy dinamike* [Large particles method in gas dynamics]. Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1982. 392 p.
4. Anderl D., Bogner S., Rauh C., Rude U., Delgado A. Free surface lattice Boltzmann with enhanced bubble model. *Computers and Mathematics with Applications*. 2014, vol. 67, no. 2, pp. 331–339.
6. Coupance E. *Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. Mass conserving boundary conditions for moving walls*. – Trondheim, Norwegian University of Science and Technology. Department of Energy and Process Engineering, 2010. 39 p.
7. Grazyna K. The numerical solution of the transient heat conduction problem using the lattice Boltzmann method. *Scientific Research of the Institute of Mathematic and Computer Science*. 2006, no. 11, pp. 23–30.
8. Kupershtokh A. L. Triokhmernoe modelirovanie dvukhphaznykh system tipa zhudkost'-par metodom reshotochnykh uravneniy Boltz'mana na GPU [Three dimensional modeling of the two phase fluid-steam systems with the lattice Boltzmann method on GPU]. *Vychislitel'nye metody i programirovanie* [Numerical methods and programming]. 2012, no. 13, pp. 130–138.
9. Sucop M. *Lattice Boltzmann Modeling. An Introduction for Geoscientists and Engineers*. Miami, Springer, 2006. 171 p.
10. Rettinger C. *Fluid Flow Simulation using the Lattice Boltzmann Method with multiple relaxation times*. Erlanger : Friedrich-Alexander-University of Erlanger-Nurnberg, 2013. 38 p.
11. Wolf-Gladrow D. *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models – An Introduction*. Bremerhaven, Alfred Wegener Institute for Polar and Marine, 2005. 273 p.
12. Succi S. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press, 2001. 288 p.
13. Liapin I. I. *Vvedenie v teoriyu kineticheskikh uravneniy* [Introduction to the theory of kinetic equations]. Ekaterinburg, UGTU-UPI Publ., 2003. 205 p.
14. Mussa M. Numerical Simulation of Lid-Driven Cavity Flow Using the Lattice Boltzmann Method. *Applied Mathematics*. 2008, vol. 13, pp. 236–240.
15. He X. Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier – Stokes Equation. *Journal of statistical physics*. 1997, vol. 88, pp. 927–944.
16. Skordos P. Initial and Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. *Physical review E*. 1993, no. 48(6), pp. 4823–4842.
17. Paskonov B. M., Poleszhaev V. I., Chudov L. A. *Chislenoe modelirovanie protsesov teplo i masoobmena* [Numerical modeling of the heat and mass transfer processes]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 288 p.

Надійшла (received) 18.03.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Остапенко Артем Олексійович (Остапенко Артём Алексеевич, Ostapenko Artem Alekseevich)** – асистент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь; тел.: (098) 176-98-24; e-mail: ostapt5@gmail.com.

**Буланчук Галина Григорівна (Буланчук Галина Григорьевна, Bulanchuk Galina Grigorievna)** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь; тел.: (098) 201-83-08; e-mail: ggbulan7@gmail.com.

УДК 519.6, 539.3

**Б. Е. ПАНЧЕНКО**

#### **О ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА И С НЕОПРЕДЕЛЯЕМЫМ ИНДЕКСОМ С УЧЕТОМ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ СЛАУ**

Путем сведения к двум разным типам систем сингулярных интегральных уравнений (СИУ) численно исследуется краевая задача математической физики для бесконечной упругой изотропной области, содержащей неподвижное включение с поперечным сечением произвольной формы, находящееся под воздействием плоских гармонических стационарных волн. Задача решается с использованием систем СИУ 1-го и 2-го рода (но с неопределяемым индексом). С использованием кластерных высокоточных вычислительных схем исследуется зависимость числа обусловленности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) от волнового числа. Наряду с исследовательскими задачами, разработанные методы и алгоритмы могут использоваться для подготовки специалистов в области «дата майнинга».

**Ключевые слова:** сингулярные интегральные уравнения, индекс уравнения, число обусловленности СЛАУ, численный эксперимент, дифракция плоских волн, неподвижное включение (защемленное отверстие).

**Б. Є. ПАНЧЕНКО**

#### **ПРО ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ ТА З НЕВИЗНАЧАЄМИМ ІНДЕКСОМ З УРАХІВАННЯМ ЧИСЛА ОБУМОВЛЕНОСТІ СЛАУ**

Шляхом зведення до двох різних типів систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) проведено чисельне дослідження крайової задачі математичної фізики для нескінченного пружного ізотропного середовища, що містить нерухоме включення з поперечним перерізом довільної форми, яке знаходиться під впливом плоских гармонічних стаціонарних хвиль. Задачу розв'язано з використанням систем СІР 1-го та 2-го роду (але з невизначасим індексом). Завдяки кластерним високоточним обчисленням досліджено залежність числа обумовленості СЛАУ від хвильового числа. Окрім дослідницьких задач, розроблені методи і алгоритми можуть використовуватися для підготовки фахівців в галузі «дата майнінга».

**Ключові слова:** сингулярні інтегральні рівняння, індекс рівняння, число обумовленості СЛАУ, чисельний експеримент, дифракція плоских хвиль, нерухоме включення (затиснений отвір).

© Б. Е. Панченко, 2019

B. E. PANCHENKO

## ON THE NUMERICAL INVESTIGATION OF SYSTEMS OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND AND WITH AN INDEFINABLE INDEX WITH REGARD TO THE SLAE CONDITION NUMBER

The numerical investigation of boundary-value problems of mathematical physics for an elastic isotropic medium that contains a rigid inclusion with an arbitrary contour and under the influence of plane harmonic stationary waves is carried out by reducing systems of singular integral equations (SIE) to two different types. The problem is solved by using systems of SIE of the 1st and 2nd kind (with an indefinable index). Cluster high-precision computational schemes are used to investigate the dependence of the condition number of a system of linear algebraic equations (SLAE) on the wavenumber. Alongside the research problems, the developed methods and algorithms can be used for training qualified professionals in the field of «data mining».

**Key words:** singular integral equations, equation index, SLAE condition number, numerical experiment, diffraction of plane waves, rigid inclusion (clamped cavity).

**Введение.** Современное состояние вычислительной техники позволяет проводить высокоточную верификацию математических моделей. Например, при решении краевых задач математической физики [1 – 8] или иных технологических проблем [9] синтезируются модели, позволяющие с той или иной степенью точности численно исследовать необходимые характеристики. Применение аналитико-численных решений, таких, как метод сингулярных интегральных уравнений (СИУ), многократно использованный разными авторами [10 – 12], позволяет прогнозировать устойчивый результат. Тем не менее, решение каждой конкретной краевой задачи требует всестороннего численного исследования полученных характеристик и особенно – показателей самой модели, ее обусловленности и устойчивости [13, 14]. Могут возникать ситуации, когда получаемые системы СИУ не обладают приемлемыми свойствами [15]. Например, СИУ 1-го рода или даже с неопределяемым индексом [12], которые изучены мало.

**Постановка задачи.** Рассмотрим в неограниченной изотропной среде бесконечный вдоль оси  $OZ$  неподвижный цилиндр [15, 16], поперечное сечение которого ограничено замкнутым контуром  $L$  типа Ляпунова. В качестве внешнего воздействия на неоднородность будем рассматривать набегающую из бесконечности монохроматическую волну расширения – сжатия ( $P$  – случай):

$$U_0 = 0; V_0 = \operatorname{Re}\{\tau e^{-i\gamma_1 y - i\omega t}\}; \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}; c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (1)$$

или волну сдвига ( $SV$  – случай):

$$U_0 = \operatorname{Re}\{\tau e^{-i\gamma_2 y - i\omega t}\}; V_0 = 0; \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}; c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2)$$

Здесь  $\tau$  – амплитуда падающей волны,  $c_1, c_2$  – скорости продольной и поперечной волн,  $\omega$  – частота колебаний,  $t$  – время,  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ляме,  $\rho$  – плотность среды,  $i$  – мнимая единица ( $i^2 = -1$ ).

При взаимодействии волны с неоднородностью возникают отраженные волны двух типов (продольные и поперечные), причем другие типы волн не образуются. Пусть  $u = \operatorname{Re}\{\tau e^{-i\omega t} U_1(x, y)\}$  и  $v = \operatorname{Re}\{\tau e^{-i\omega t} V_1(x, y)\}$  – смещения отраженного поля. Тогда общее поле амплитуд перемещений соответствует сумме:

$$U = U_0 + U_1, \quad V = V_0 + V_1. \quad (3)$$

Предполагается, что поперечное сечение отражателя описывается гладкой замкнутой кривой  $L$ , в точках которой удовлетворяются граничные условия. В случае неподвижного включения (отверстия с защемленным контуром) они имеют вид [2, 3]:

$$U|_L = V|_L = 0. \quad (4)$$

В случае установившихся волновых колебаний изотропной среды (зависимость от времени выражается множителем  $e^{-i\omega t}$ ) амплитудные значения отраженных волн перемещений удовлетворяют соотношениям:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 U = 0; \quad \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 V = 0. \quad (5)$$

Амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений  $U$  и  $V$  формулами:

$$\begin{aligned} \tau_x + \tau_y &= 2(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial(U + iV)}{\partial z} + \frac{\partial(U - iV)}{\partial \bar{z}} \right); \quad \tau_y - \tau_x + 2i\tau_{xy} = -4\mu \frac{\partial(U - iV)}{\partial z}; \\ \tau_y - \tau_x - 2i\tau_{xy} &= -4\mu \frac{\partial(U + iV)}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Следуя методике решения краевых задач, впервые примененной для описанной постановки в [17], построим систему СИУ 1-го рода. Пусть  $L$  – некоторая кривая в поперечном сечении цилиндра. Обозначим через  $S_1$  и  $S_2$  амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений на  $L$ . Тогда в произвольной точке кривой  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$  эти напряжения выражаются через компоненты тензора амплитуд напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_x + \tau_y)e^{i\varphi_0} + (\tau_y - \tau_x - 2i\tau_{xy})e^{-i\varphi_0}; \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_x + \tau_y)e^{-i\varphi_0} + (\tau_y - \tau_x + 2i\tau_{xy})e^{i\varphi_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varphi_0$  – угол положительной касательной к  $L$  в точке  $\zeta_0 \in L$  с осью  $OX$ .

На границе тела представляют интерес распределения компонент тензора амплитуд напряжений  $\tau_{s_0}$ ,  $\tau_{n_0}$ ,  $\tau_{n_0s_0}$ , которые будем находить по формулам:

$$\tau_{n_0} = S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0; \quad \tau_{n_0s_0} = S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0; \quad \tau_{s_0} = (\tau_x + \tau_y) - \tau_{n_0}. \quad (8)$$

Будем строить интегральные представления амплитуд перемещений  $U_1$  и  $V_1$  так, чтобы они автоматически удовлетворяли уравнениям движения (5) и условиям излучения на бесконечности, то есть, чтобы они представляли собой расходящиеся волны. Следуя [17], представим  $U_1$  и  $V_1$  в виде потенциалов типа простого слоя:

$$\begin{aligned} U_1(x, y) &= \int_L \{f_1(s)G_{11}(s, s_0) + f_2G_{12}(s, s_0)\} ds; \quad V_1(x, y) = \int_L \{f_1(s)G_{21}(s, s_0) + f_2G_{22}(s, s_0)\} ds; \\ z &= x + iy; \quad \zeta = \xi + i\eta \in L. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  – неизвестные функции,  $G_{mn}$  – компоненты матрицы Грина ( $m, n = 1, 2$ ), удовлетворяющие соотношениям [17]:

$$\begin{aligned} G_{11} + iG_{21} &= d \left( \frac{k}{4} \Phi_{20} - c \Phi_{00} \right); \quad G_{11} - iG_{21} = \frac{d}{4} e^{-2i\alpha} \Phi_{22}; \\ G_{12} + iG_{22} &= \frac{d}{4} e^{2i\alpha} \Phi_{22}; \quad G_{12} - iG_{22} = d \left( \frac{k}{4} \Phi_{20} - c \Phi_{00} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$d = \frac{i}{4\mu(1-\nu)}; \quad k = 3 - 4\nu; \quad c = \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \gamma_2^2; \quad z - \zeta = r e^{i\alpha}; \quad \Phi_{kj} = \frac{\gamma_1^k H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^k H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2},$$

здесь  $H_j^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля 1-го рода  $j$ -го порядка.

Анализ формул (10) показывает, что функции  $G_{11} - iG_{21}$  и  $G_{12} + iG_{22}$  непрерывны в нуле, а функции  $G_{11} + iG_{21}$  и  $G_{12} - iG_{22}$  обладают логарифмической особенностью:

$$G_{11} + iG_{21} = G_{12} - iG_{22} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi} \ln r + \dots$$

По этой причине подстановка представлений (9) в граничные условия (4) сводит краевую задачу к системе двух СИУ с логарифмическими ядрами, численная реализация которых затруднительна.

С целью получения системы СИУ с ядром типа Коши [10 – 12] представления (9) дифференцировались по дуговой координате  $s_0$ . Имеем

$$\left. \frac{d(U + iV)}{ds_0} \right|_L = \left. \frac{d(U - iV)}{ds_0} \right|_L = 0; \quad \left. \frac{dW}{ds_0} \right|_L = \left( \frac{\partial W}{\partial z} e^{-i\varphi_0} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}; \quad \bar{z} = x - iy. \quad (11)$$

Вычисление необходимых для (11) производных дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (G_{11} + iG_{21}) &= -\frac{d}{8} (k\Phi_{31} - 4c\Phi_{11}) e^{-i\alpha}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_{11} - iG_{21}) = \frac{d}{8} \Phi_{31} e^{-i\alpha}; \\ \frac{\partial}{\partial z} (G_{12} + iG_{22}) &= \frac{d}{8} \Phi_{31} e^{i\alpha}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_{12} - iG_{22}) = -\frac{d}{8} (k\Phi_{31} - 4c\Phi_{11}) e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

Можно показать, что ядро  $\Phi_{11}$ , определенное в (10), является непрерывным, а ядро  $\Phi_{31}$  – сингулярно ( $\Phi_{31} = \frac{2i}{\pi r} + F_{31}$ , где  $F_{31}$  – непрерывно).

Подставляя (12) в граничные условия (11), приходим к системе СИУ 1-го рода [15, 17]:

$$\int_L f_1(s)B_{11}(s, s_0) + f_2B_{12}(s, s_0) ds = N_1(s_0); \quad \int_L f_1(s)B_{21}(s, s_0) + f_2B_{22}(s, s_0) ds = N_2(s_0); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= -d \left[ \frac{k}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha)}{r_0} + \left( \frac{k}{4} F_{31} - c\Phi_{11} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha) \right]; \\ B_{12} &= d \left[ \frac{1}{4\pi i} \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i(2\alpha - \varphi_0)}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} + \frac{1}{8} \left( F_{31} e^{i(\varphi_0 + \alpha)} - F_{33} e^{i(3\alpha - \varphi_0)} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$B_{21} = d \left[ \frac{1}{4\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha-\varphi_0)}}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{8} (F_{31}e^{-i(\varphi_0+\alpha)} - F_{33}e^{-i(3\alpha-\varphi_0)}) \right];$$

$$B_{22} = -d \left[ \frac{k}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha)}{r_0} + \left( \frac{k}{4} F_{31} - c\Phi_{11} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha) \right];$$

$$\Phi_{31} = \frac{2i}{\pi r_0} + F_{31}; \quad \Phi_{33} = \frac{2i}{\pi r_0} + F_{33}; \quad \zeta_0 - \zeta = re^{i\alpha}; \quad e^{i\varphi_0} = \frac{d\zeta_0}{ds_0};$$

$$N_1(s_0) = -N_2(s_0) = -\gamma_1 \tau e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0 \quad \text{в } P\text{-случае};$$

$$N_1(s_0) = N_2(s_0) = i\gamma_2 \tau e^{-i\gamma_2 \eta_0} \sin \varphi_0 \quad \text{в } SV\text{-случае}.$$

Переменные  $d, k, c$  и  $\Phi_{kj}$  заданы выше.

Необходимые дополнительные условия для разрешимости сингулярных интегральных уравнений 1-го рода (13) вытекают из равенства нулю смещений на  $L$  в некоторой фиксированной точке  $s_*$  или из равенства нулю средних смещений на  $L$  [10, 11]. В последнем случае имеем ( $l$  – длина контура  $L$ )

$$\frac{1}{l} \iint_{LL} \{f_1(s)L_{11}(s, s_0) + f_2L_{12}(s, s_0)\} ds ds_0 = A_1; \quad \frac{1}{l} \iint_{LL} \{f_1(s)L_{21}(s, s_0) + f_2L_{22}(s, s_0)\} ds ds_0 = A_2; \quad (14)$$

$$L_{11} = G_{11} + iG_{21}; \quad L_{12} = G_{12} + iG_{22}; \quad L_{21} = G_{11} - iG_{21}; \quad L_{22} = G_{12} - iG_{22};$$

$$A_1 = -A_2 = -\frac{1}{l} \int_L \tau i e^{-i\gamma_1 \eta_0} ds_0 \quad \text{в } P\text{-случае};$$

$$A_1 = A_2 = -\frac{1}{l} \int_L \tau i e^{-i\gamma_2 \eta_0} ds_0 \quad \text{в } SV\text{-случае}.$$

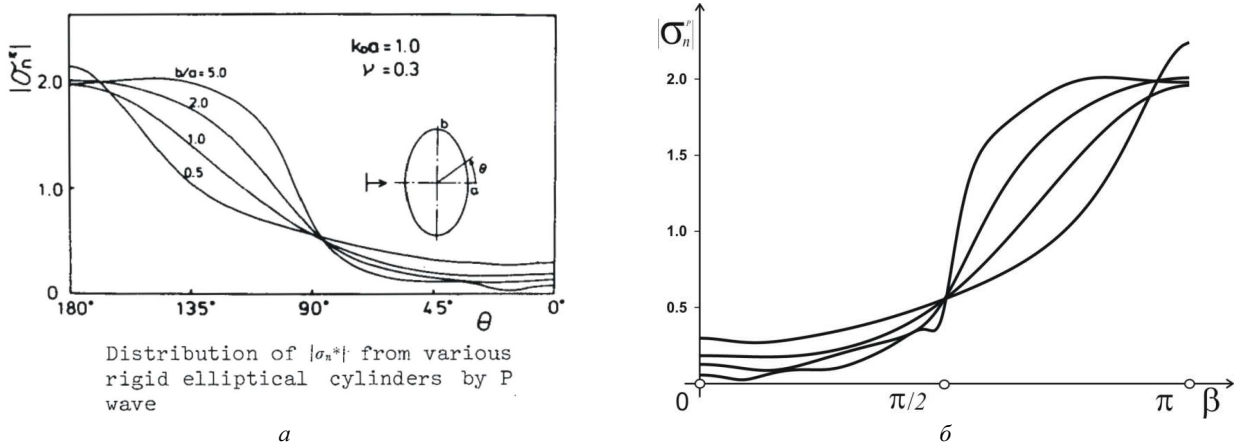


Рис. 1 – Сравнение результатов:  $a$  – цитата из работы [3];  $b$  – результаты численной реализации системы СИУ-1.

В работе [15] применялось дополнительное условие как в одной точке контура [10, 11], так и интегральное. Результаты получены стабильные, но разные. Этот факт отличается от выводов работ [10, 11]. Данный результат говорит не о точности вычислительной схемы, а о том, что разные типы дополнительного условия определяют разные математические модели, соответствующие разным задачам.

**Исследование достоверности модели.** Для численной реализации алгоритма в настоящей работе использован метод, теоретически обоснованный в работах [10, 11] и основанный на приближении плотностей интегральных уравнений тригонометрическими многочленами и в последующем вычислении интегралов с непрерывными и сингулярными ядрами.

Для исследования достоверности полученной модели рассматривалось пространство, содержащее цилиндрическое неподвижное включение эллиптического поперечного сечения, аналогичное описанному в работе [3]:

$$\xi = a \cos \beta; \quad \eta = b \sin \beta; \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (15)$$

На контуре включения проводилось вычисление напряжений как в [3]:

$$\sigma_n = |\tau_{n_0}| / P; \quad \sigma_{ns} = |\tau_{n_0 s_0}| / P,$$

где компоненты тензора амплитуд напряжений  $\tau_{n_0}, \tau_{n_0 s_0}$  находились по формулам (8),  $P$  – максимальное значение напряжения в падающей волне, равно  $\gamma_1 \tau (\lambda + 2\mu)$  в случае излучения  $P$ -волны (1) и  $\gamma_2 \tau \mu$  – в случае излучения  $SV$ -волны (2).

На рис. 1 приведены графики распределения амплитудных значений напряжения  $|\sigma_n|$  вдоль контура единичной неоднородности, находящейся под воздействием гармонической  $P$  – волны. Рис. 1, *a* цитирован из [3] вместе с подписью. А графики, приведенные на рис. 1, *б* получены описанной моделью с использованием системы СИУ 1-го рода. Для иллюстрации достоверности графики приведены в зеркальном виде.

На рис. 2 приведены графики распределения амплитудных значений напряжения  $|\tau_{ns}|$  вдоль контура неоднородности, находящейся под воздействием гармонической  $SV$  – волны. Рис. 2, *a* цитирован из [3] вместе с подписью. Графики, приведенные на рис. 2, *б* получены в работе.

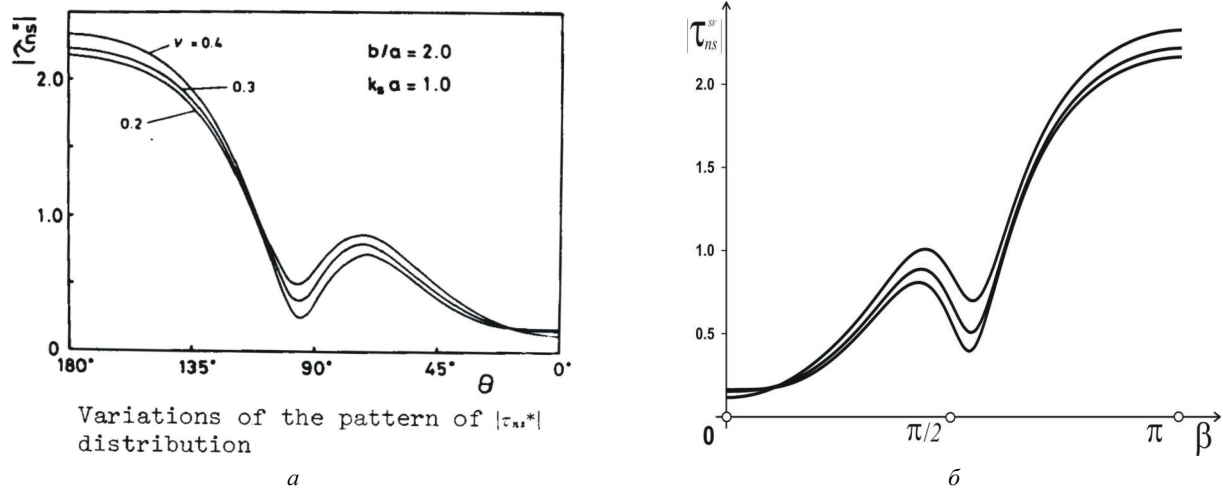


Рис. 2 – Сравнение результатов  
*a* – цитата из работы [3]; *б* – результаты численной реализации системы СИУ-1.

На рис. 3 приведены графики распределения амплитудных значений соответствующий контурных напряжения  $|\tau_{ns}|$  для  $P$  – волны и  $|\sigma_n|$  для  $SV$  – волны, которые получены в настоящей работе и дополняют коллекцию графиков работы [3]. Тут кривые 1, 2 и 3 рис. 3, *a* соответствуют значениям параметра  $\nu = 0.2; 0.3; 0.4$  при  $b/a = 2$  и  $\gamma_1 a = 1$ . А кривые 1, 2, 3 и 4 рис. 3, *б* соответствуют значениям параметра  $b/a = 5; 2; 1; 0.5$  при  $\nu = 0.3$  и  $\gamma_2 a = 1.0$ .

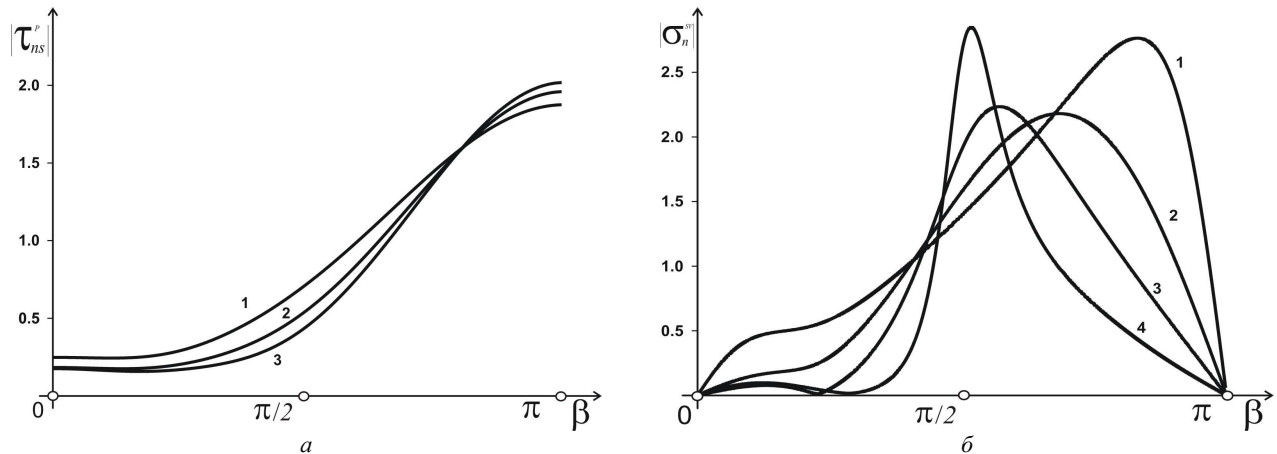


Рис. 3 – Контурные напряжения, полученные в настоящей работе: *a* – кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям параметра  $\nu = 0.2; 0.3; 0.4$  при  $b/a = 2$  и  $\gamma_1 a = 1$ ; *б* – кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям параметра  $b/a = 5; 2; 1; 0.5$  при  $\nu = 0.3$  и  $\gamma_2 a = 1.0$ .

Однако, при дальнейшем исследовании полученной модели в соответствии с вычислительной схемой, предложенной в [15, 16], обнаружено разрушение решения. После 9-го знака после запятой сходимость результата отсутствует. При этом, начиная с размерности  $N = 1500$  число обусловленности матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) колеблется между 8-м и 11-м порядком, что и объясняет разрушение. При этом, как указано выше, отсутствует критерий однозначного выбора типа дополнительного условия. Начиная со второго знака после запятой и до 9-го знака решения устойчивы, но различны.

Вычисления проводились с использованием кластера Института кибернетики НАН Украины имени акаде-  
 Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 8 (1333) 2019.

мика В. М. Глушкова СКІТ-3 и библиотек МРІ, поддерживающих работу приложения в распараллеленном режиме. При использовании 51 узла время вычислений искомым характеристик СЛАУ размерности  $N = 30000$  составляет около 3 часов.

**Верификация решения.** В [15] для верификации полученных результатов решение поставленной задачи сводилось к иному типу уравнений – к системе СИУ 2-го рода. Для получения уравнений применен метод разрешающих функций, описанный в [18].

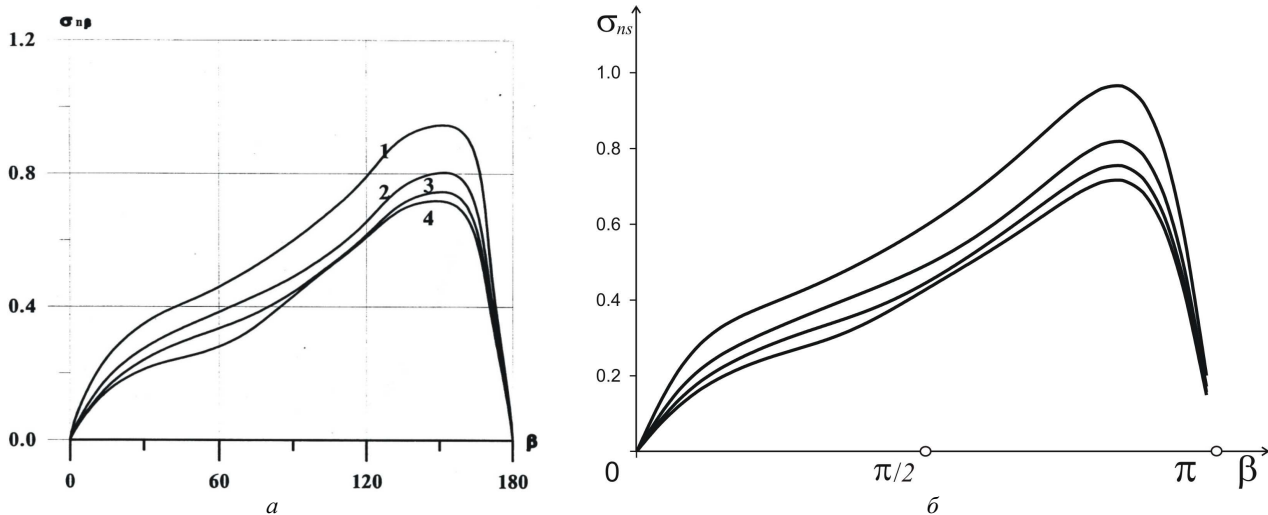


Рис. 4 – Сравнение результатов: а – цитата из работы [19]; б – результаты численной реализации системы СИУ-2.

В виде потенциалов типа простого слоя выберем функции, которые автоматически удовлетворяют соответствующим уравнениям Гельмгольца:

$$\Phi(z) = \int_L P_1(\zeta) H_0^{(1)}(\gamma_p r) ds; \quad \Psi(z) = \int_L P_2(\zeta) H_0^{(1)}(\gamma_s r) ds. \quad (16)$$

Тогда в соответствии с подходом [18] искомые перемещения могут быть выражены следующими формулами:

$$U = \partial_1 \Phi(z) + \partial_2 \Psi(z); \quad V = \partial_2 \Phi(z) - \partial_1 \Psi(z),$$

где обозначены операторы  $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ,  $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ .

Имеем итоговые дифференциальные представления в виде:

$$U = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\Phi(z) + i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\Psi(z); \quad V = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\Phi(z) - \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\Psi(z). \quad (17)$$

Тогда интегральные представления для компонент перемещений будут иметь вид:

$$\begin{aligned} U + iV &= 2 \int_L P_p^p(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma_p r) ds - 2i \int_L P_s^p(\zeta) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma_s r) ds; \\ U - iV &= 2 \int_L P_p^p(\zeta) \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_p r) ds + 2i \int_L P_s^p(\zeta) \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_s r) ds. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя известные [15 – 19] формулы для производных от функций Ханкеля

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r),$$

после выделения особенности  $H_1^{(1)}(\gamma r) = \frac{2}{i\pi\gamma r} + H_1^*(\gamma r)$  и перехода на контур с применением формул Сохоцкого – Племеля [10 – 12], получаем завершающий вид системы СИУ 2-го рода. Тут  $\phi_0$  – угол положительной нормали к  $L$  в точке  $\zeta_0 \in L$  с осью  $OX$ ,  $re^{i\alpha} = \zeta - \zeta_0$  и  $ds = -ie^{-i\phi} d\zeta = ie^{i\phi} d\bar{\zeta}$ . Иные переменные аналогичны переменным вышеописанной модели СИУ 1-го рода.

$$\begin{aligned} -2if_1(\zeta)e^{i\phi_0} - 2f_2(\zeta)e^{i\phi_0} - \gamma_1 \int_L f_1(\zeta)e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_1 r) ds + i\gamma_2 \int_L f_2(\zeta)e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_2 r) ds &= U_0 + iV_0; \\ -2if_1(\zeta)e^{-i\phi_0} + 2f_2(\zeta)e^{-i\phi_0} - \gamma_1 \int_L f_1(\zeta)e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_1 r) ds - i\gamma_2 \int_L f_2(\zeta)e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma_2 r) ds &= U_0 - iV_0. \end{aligned} \quad (19)$$



Очевидно, что для получения решения в напряжениях искомые плотности удовлетворяли интегро-дифференциальные представления, что существенно повысило потребность в объеме вычислительных ресурсов для достижения необходимой точности вычислительного эксперимента. Результат проверки достоверности этой модели приведен на следующих рисунках.

На рис. 4 и 5 приведены графики распределения амплитудных значений указанных на рисунках напряжений  $|\sigma_{ns}|$  и  $|\sigma_n|$  вдоль контура неоднородности, находящейся под воздействием гармонической Р или SV-волны соответственно. Рис. 4, а и 5, а цитирован из [19]. Графики, приведенные на рис. 4, б и 5, б получены в работе.

Как и в [19], на рис. 4 кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям  $\gamma_1 a = 0.4, 0.7, 1.0, 1.3$ , при  $b/a = 2$  и  $\nu = 0.3$ . А на рис. 5 кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям параметра  $\nu = 0.2, 0.3$  и  $0.4$  при  $b/a = 2$  и  $\gamma_2 a = 1$ .

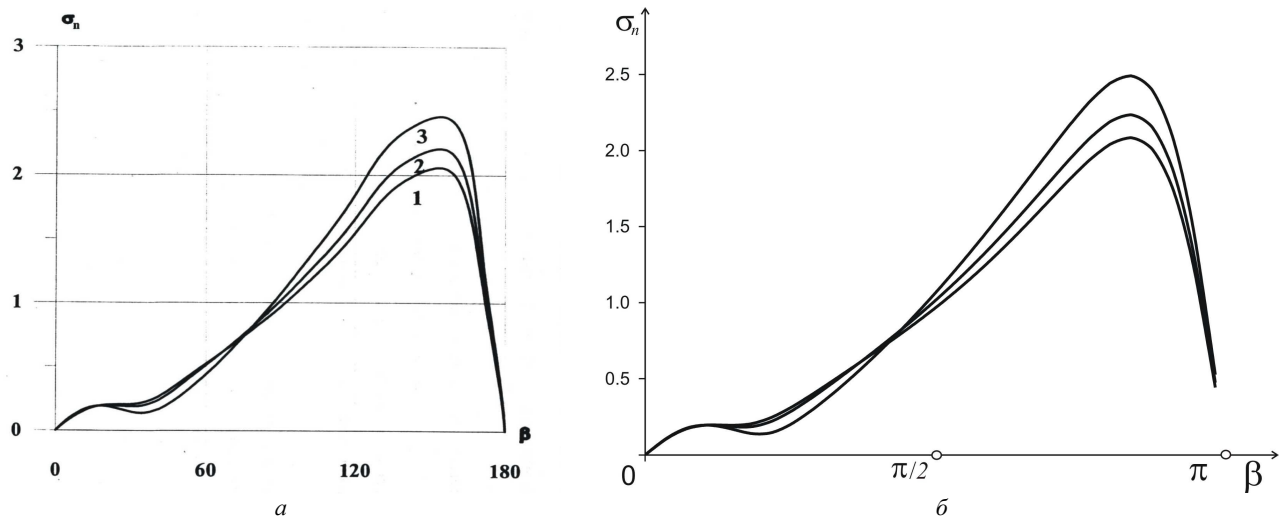


Рис. 5 – Сравнение результатов: а – цитата из работы [19]; б – результаты численной реализации системы СИУ-2.

Сравнение значений искомых величин (перемещений и контурных напряжений) двух приведенных моделей показало совпадение значений перемещений (в области вблизи неоднородности) до 7-го знака после запятой, а напряжений – до 4-го знака после запятой. При этом система СИУ 1-го рода обуславливалась с использованием интегрального дополнительного условия.

Однако повышение точности вычислений и для данной модели оказалось невозможным. Анализ полученной системы СИУ 2-го рода показал, что суммы коэффициентов характеристической системы [12] равны нулю, что не позволяет определить ее индекс.

Для определения индекса системы СИУ 2-го рода имеем выражение [12]

$$\chi = \frac{1}{2\pi i} [\ln \det(\frac{D}{S})]_L = \frac{1}{2\pi i} [\arg \frac{\det(A-B)}{\det(A+B)}]_L,$$

где матрицы сумм и разностей  $S = A+B$  и  $D = A-B$  определяются из характеристической системы уравнений

$$[12] K_0 f = A(\zeta_0)P(\zeta_0) + \frac{B(\zeta_0)}{\pi i} \int \frac{P(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

Для любого из уравнений системы (19) имеем  $K_0 f = -iP_1(\zeta)e^{i\phi_0} + \frac{i}{\pi i} \int_L P_1(\zeta) \frac{e^{i\phi} d\zeta}{\zeta - \zeta_0}$ . Тогда очевидно, что

$S_{1,2} = -ie^{i\phi_0} + ie^{i\phi_0}$ . Таким образом, данная система не может быть отнесена к «нормальному» типу [12] – ее индекс неопределим. Можно предположить, что этот факт является одной из причин того, что при дальнейшем повышении точности вычислений решение также разрушается.

Число обусловленности СЛАУ системы (19) (для плотностей в перемещениях), начиная с размерности  $N = 1500$ , также имеет 11-й порядок. Но при этом еще и все определители СЛАУ для всех исследуемых параметров близки к нулю, что дает возможность получать лишь неустойчивые решения. Для системы СИУ 1-го рода это исключено наличием дополнительного условия.

Таким образом, для высокоточной верификации модели данная система СИУ 2-го рода неприемлема. Но важно то, что это решение позволило однозначно выбрать тип дополнительного условия.

**Исследование числа обусловленности.** Для проведения численного исследования числа обусловленности СЛАУ для модели СИУ 1-го рода (с интегральным дополнительным условием) использовалась вычислительная схема [15, 16]. Анализ значительного объема литературных источников позволяет заключить, что исследования числа обусловленности СЛАУ, получаемой в процессе численной реализации систем СИУ, практически не проводились. В [20] (одной из немногочисленных работ на эту тему) предложен метод прогнозирования числа обу-

словленности систем СИУ. Однако система СИУ 1-го рода тут не рассмотрена. Экспериментальные исследования могут заполнить этот пробел.

На рис. 6, *a* приведена зависимость числа обусловленности  $C_P$  матрицы СЛАУ от волнового числа  $\chi_1 a$  для  $P$ -волны, взаимодействующей с включением эллиптической формы, где  $a/b = 5/1$ . Видно, что на исследуемом отрезке изменения  $\chi_1 a = \{0; 8\}$  число обусловленности  $C_P$  является осциллирующей функцией, число резких изменений которой растет с ростом волнового числа. Причем, существует некоторое волновое число ( $\chi_1 a = 1,9699172$ ), при котором модель теряет обусловленность лавинообразно – вплоть до числа  $C_P = 10^{+11} - 10^{+12}$ . На графике форма пика показана отдельно.

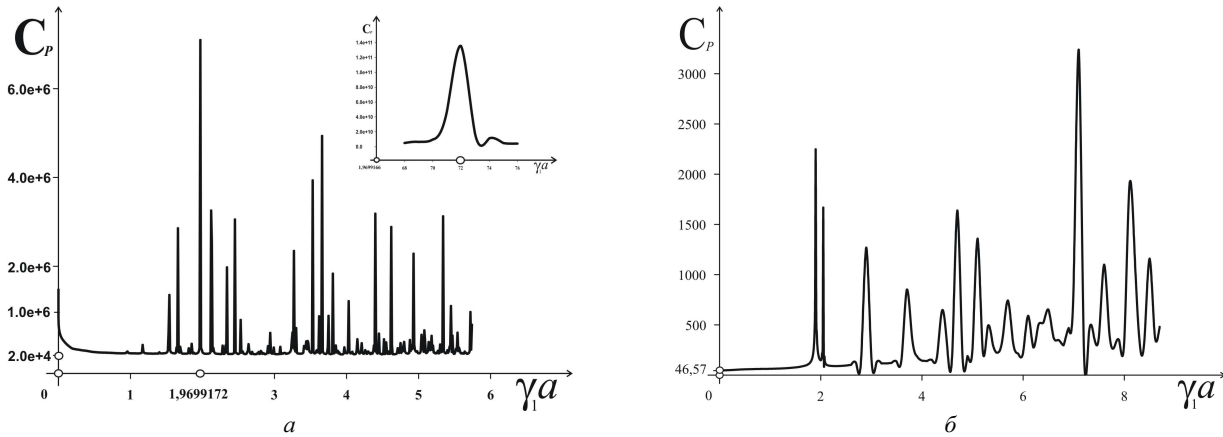


Рис. 6 – Зависимость числа обусловленности СЛАУ от волнового числа: *a* – зависимость  $C_P$  матрицы СЛАУ от волнового числа  $\chi_1 a$  для  $P$ -волны, взаимодействующей с включением эллиптической формы, где  $a/b = 5/1$ ; *b* – зависимость  $C_P$  матрицы СЛАУ от волнового числа  $\chi_1 a$  для  $P$ -волны, взаимодействующей с круговым отверстием со свободным от сил контуром [16].

Для сравнения на рис. 6, *b* приведена зависимость числа обусловленности  $C_P$  матрицы СЛАУ от волнового числа  $\chi_1 a$  для  $P$ -волны, взаимодействующей с круговым отверстием со свободным от сил контуром [16]. Данная зависимость совпадает с важным выводом работы [1] о хорошей вычислительной устойчивости моделей для значений волновых чисел, близких к нулю, и о заметном ухудшении устойчивости для волнового числа  $\chi_1 a > 2$ .

Как видно из графиков, характер соответствующих зависимостей для модели о взаимодействии  $P$ -волны с неподвижным включением полностью противоположен зависимости для отверстия со свободным контуром. При этом значение числа обусловленности на исследуемом интервале  $\chi_1 a$  для свободного отверстия не является критичным, чего нельзя сказать о модели дифракции на неподвижном включении.

Результаты исследований соответствующих функций для  $SV$ -волн имеют схожие свойства. Поэтому тут не приводятся.

**Выводы.** Известно [21], что задачи, приводящие к математическим моделям с плохой обусловленностью, рассматриваются как некорректно поставленные. В [22] рассмотрена ситуация потери *сплошности модели*. В исследованной задаче также обнаружены неизвестные ранее эффекты потери обусловленности при определенном значении волнового числа. Возникает естественная гипотеза о потере сплошности модели для постановки рассмотренной тут задачи.

Как видно, результаты исследований дифракции плоских волн на отверстии, свободном от сил, принципиально отличаются от аналогичных результатов для *дифракции плоских волн* на отверстии, контур которого заземлен (неподвижном включении). Вероятно, причина в том, что возбуждающая нагрузка, передаваемая из бесконечности на контур отражателя, и краевые условия, сформулированы для перемещений, что в предельном статическом случае лишено смысла – контур заземлен.

Несмотря на то, что теоретически исследование СИУ с неопределяемым индексом не представляется возможным [12], численные эксперименты показали, что такие модели «могут работать» и потому имеют смысл – они являются приемлемым дополнением, верифицирующим иные способы решения.

Для задачи дифракции упругих волн на гладких препятствиях кластерные (параллельные) алгоритмы позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики исследуемых полей. Это важно, так как позволяет получать величины максимумов контурных напряжений (а также координаты локации этих максимумов) с повышенной точностью.

Описанная методика расширенного численного исследования краевых задач математической физики позволяет проводить высокоточный аудит самих моделей. Кластерные вычисления с использованием библиотек безошибочной арифметики позволяют исследовать вопрос о реальной поточечной сходимости применяемых ме-



тодов. Из сравнения, например, числа обусловленности СЛАУ изложенных тут дифракционных задач следует, что фактическая поточечная сходимость теоретически хорошо изученных решений показывает неожиданные свойства. Тенденция роста числа обусловленности СЛАУ для систем СИУ 1-го рода, моделирующей дифракционную задачу на отражателе с заземленным контуром, может оказаться критичной, когда на 17-м или 20-м знаке после запятой баланс между машинной точностью, числом обусловленности СЛАУ и дальнейшим приростом точности будет исчерпан.

В таком «расширенном» понимании даже известные и исследованные краевые задачи математической физики приобретают новую ценность – это эффективный полигон для подготовки профессионалов в области численной обработки данных.

#### Список литературы

1. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. – К. : Наукова думка, 2012. – 204 с.
2. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – К. : Наукова думка, 1978. – 307 с.
3. Shibahara M., Tateno S., Kuroyanagi O. Diffraction of Steady Stress Waves by Arbitrary Shaped Discontinuities in Elastic Medium // Bulletin of JSME. – 1980. – Vol. 23. – № 178. – pp. 493 – 500. DOI: 10.1299/jsme1958.23.493.
4. Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. – Philadelphia: SIAM. 2013. – 271 p. DOI: 10.1137/1.9781611973167.
5. Jain D. L., Kanwal R. P. Scattering of elastic waves by circular cylindrical flaws and inclusions // J. Appl. Phys. – 1979. V. 50. – No. 6. – pp. 4067 – 4109. DOI: 10.1063/1.326489.
6. Bostrom A. Scattering by a smooth elastic obstacle // J. Acoust. Soc. Amer. – 1980. – V. 67, issue 6. – P. 1904 – 1913. DOI: 10.1121/1.384455.
7. Mow C. C., Pao Y.-H. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. – New York, Rand-report, 1971. – 681 p.
8. Pao Y.-H. Elastic Waves in Solids. // Applied Mechanics. – 1983. – № 50. – pp. 1152 – 1164. DOI: 10.1115/1.3167197.
9. Aleksander M. B., Balaban S. M., Karpinski M., Rajba S. A., Chyzh V. M. Information Security Environment in Wireless Sensor Networks. – Ternopil : Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University. – 2016. – 224 p. – ISBN: 978-966-305-054-6.
10. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М. : ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
11. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К. : Наук. думка, 1984. – 344 с.
12. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, 3-е изд. – М. : Наука, 1968. – 513 с.
13. Химич А. Н., Молчанов И. Н., Попов А. В. Численное программное обеспечение интеллектуального MIMD – компьютера «Инпарком». – К. : Наукова думка, 2007. – 220с.
14. Химич А. Н., Молчанов И. Н., Попов А. В., Чистякова Т. В., Яковлев М. Ф. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. – К. : Наукова думка, 2008. – 247 с.
15. Панченко Б. Е., Ковалев Ю. Д., Сайко И. Н. О численном исследовании систем сингулярных интегральных уравнений первого рода и с неопределяемым индексом // Труды 5й Международной конференции НРС-УА.– Киев, 2018. – С. 111 – 114.
16. Панченко Б. Е., Сайко И. Н. Высокоточные максимальные напряжения в задаче о взаимодействии упругих волн с системой цилиндрических полостей в условиях плоской деформации // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 5. – С. 139 – 148.
17. Панченко Б. Е. Решение двумерных задач дифракции упругих волн на цилиндрических неоднородностях : дисс. на соиск. к.ф.-м.н. – Сумы, 1996. – 125 с.
18. Фильшинский Л. А. Периодические решения теории упругости для цилиндра в R3 // Теорет. и прикл. механика. – Харьков : Основа, 1990. – Вып. 21. – С. 13 – 20.
19. Назаренко А. М., Ложкин А. М., Панченко Б. Е. Дифракция волн плоской деформации на жестком цилиндрическом включении произвольного поперечного сечения // Донецьк : Вісник ДонНУ. Сер. А : Природничі науки. – 2006. – №1. – С. 143 – 147.
20. Шешко М. А., Шуляев Д. С., Расолько Г. А., Мастяница В. С. К вопросу обусловленности матрицы линейной алгебраической системы, возникающей при аппроксимации сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши // Дифференц. Уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 9. – С. 1278 – 1285.
21. Калиткин Н. Н. Численные методы. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
22. Селезов И. Т. Развитие и приложение метода Коши – Пуассона в эластодинамике слоя и уравнение Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – 2018. – № 3. – С. 106 – 115.

#### References (transliterated)

1. Selezov I. T., Krivonos Y. G. *Metematische metody v zadachakh rasprostraneniya i difraktsii voln* [Mathematical methods in problems of wave propagation and diffraction]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2012. 204 p.
2. Guz' A. N., Kubenko V. D., Cherevko M. A. *Difraktsiya uprugikh voln* [Diffraction of elastic waves]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1978. 307 p.
3. Shibahara M., Tateno S., Kuroyanagi O. Diffraction of Steady Stress Waves by Arbitrary Shaped Discontinuities in Elastic Medium. *Bulletin of the JSME*. 1980, vol. 23, no. 178, pp. 493–500 DOI: 10.1299/jsme1958.23.493.
4. Colton D., Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. 271 p. DOI: 10.1137/1.9781611973167.
5. Jain D. L., Kanwal R. P. Scattering of elastic waves by circular cylindrical flaws and inclusions. *J. Appl. Phys.* 1979, vol. 50, no. 6, pp. 4067–4109. DOI: 10.1063/1.326489.
6. Bostrom A. Scattering by a smooth elastic obstacle. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980, v. 67, issue 6, pp. 1904–1913. DOI: 10.1121/1.384455.
7. Mow C. C., Pao Y.-H. *The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration*. New York, Rand-report, 1971. 681 p.
8. Pao Y.-H. Elastic Waves in Solids. *J. Applied Mechanics*. 1983, vol. 50, pp. 1152–1164. DOI: 10.1115/1.3167197.
9. Aleksander M. B., Balaban S. M., Karpinski M., Rajba S. A., Chyzh V. M. *Information Security Environment in Wireless Sensor Networks*. Ternopil, Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University. 2016. 224 p. ISBN: 978-966-305-054-6.
10. Lifanov I. K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyy eksperiment* [The method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, TOO Yanus Publ., 1995. 520 p.
11. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Nazarchuk Z. T. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy v dvumernykh zadachakh difraktsii* [The method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1984. 344 p.
12. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya 3-e izd.* [Singular integral equations. 3d ed.]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 513 p.
13. Khimich A. N., Molchanov I. N., Popov A. V. *Chislennoe programnoe obespechenie intelektual'nogo MIMD-kompyutera "Inparkom"* [Numerical software of intellectual Inparkom MIMD computer]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2007. 220 p.
14. Khimich A. N., Molchanov I. N., Popov A. V., Chistyakova T. V., Yakovlev M. F. *Parallelnyye algoritmy resheniya zadach vychislitel'noy matematiki* [Parallel algorithms for solving problems of computational mathematics]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2008. 247 p.
15. Panchenko B. E., Kovalev Y. D., Sayko I. N. O chislennom issledovanii system singulyarnykh integral'nykh uravneniy pervogo roda i s neopre-

- delyaemykh indeksom [On a numerical study of systems of singular integral equations of the first kind and with an undeterminable index]. *Trudu 5y Megdunarodnoy konferentsii HPC-UA* [Proceedings of the 5-th International Conference HPC-UA]. Kyiv, 2018. pp. 111–114.
16. Panchenko B. E., Sayko I. N. Vysokotochnyye maksimal'nyye napryazheniya v zadache o vzaimodeystvii uprugikh voln s sistemoy tsylindricheskikh polostey v usloviyakh ploskoy deformatsii [High-precision maximum stresses in the problem of the interaction of elastic waves with a system of cylindrical cavities under plane strain conditions]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2015, vol. 5, pp. 139–148.
  17. Panchenko B. E. *Reshenie dvumernykh zadach difraktsii uprugikh voln na tsylindricheskikh neodnorodnostyakh: diss. na soiskan. k.f.-m.n.* [Solving two-dimensional problems of diffraction of elastic waves on cylindrical heterogeneities. Thesis of the Candidate of Physical and Mathematical Science dissertation]. Sumy, 1996. 125 p.
  18. Fil'shtinskiy L. A. Periodicheskie resheniya teorii uprugosti dlya tsylindra v R<sup>3</sup> [Periodic solutions of the theory of elasticity for a cylinder in R<sup>3</sup>]. *Teoretich. i prikl. Mekhanika* [Theoretical and applied mechanics]. Kharkov, Osнова Publ., 1990, vol. 21, pp. 13–20.
  19. Nazarenko A. M., Lozhkin A. M., Panchenko B. E. Difraktsiya voln ploskoy deformatsii na zhestkom tsylindricheskom vkluchenii proizvol'nogo poperechnogo secheniya [Diffraction of plane strain waves on a rigid cylindrical inclusion of an arbitrary cross section]. *Donets'k : Visnyk DonNU. Ser. A : Pryrodnychi nauky* [Donetsk : Bulletin of the Donetsk National University. Series A : Natural science]. 2006, no. 1, pp. 143–147.
  20. Sheshko M. A., Shulyaev D. S., Rasolko G. A., Mastyanitsa V. S. K voprosu obuslovlennosti matritsy lineynoy algebraicheskoy sistemy, vozni-kayushey pri aproksimatsii singulyarnogo integral'nogo uravneniya s yadrom Koshi [On the question of the conditionality of the matrix of a linear algebraic system arising from the approximation of a singular integral equation with a Cauchy kernel]. *Diferenc. Uravneniya* [Differential equations]. 1999, vol. 35, no. 9, pp. 1278–1285.
  21. Kalitkin N. N. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Sankt – P'eterburg, BHV-Peterburg Publ., 2011. 592 p.
  22. Selezov I. T. Razvitiye i prilozhenie metoda Koshi – Puassona v elastodinamike sloya i uravnenie Timoshenko [Development and application of the Cauchy-Poisson method in elastodynamics of a layer and Timoshenko's equation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2018, no. 3, pp. 106–115.

Поступила (received) 16.04.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Панченко Борис Євгенійович (Панченко Борис Евгеньевич, Panchenko Borys Evgenijovich)** – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор, Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова, м. Одеса, Інститут кібернетики НАН України ім. В.М. Глушкова, старший науковий співробітник, м. Київ; тел.: (067) 449-39-70; e-mail: pr-bob@ukr.net.

УДК 517.968

**Т. С. ПОЛЯНСКАЯ**

### ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

На основе метода дискретных особенностей построена дискретная математическая модель гиперсингулярного интегрального уравнения на стандартном интервале  $(-1, 1)$  и на системе интервалов. Доказана однозначная разрешимость дискретной модели и дана оценка скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению гиперсингулярного интегрального уравнения при некоторых предположениях гладкости.

**Ключевые слова:** гиперсингулярное интегральное уравнение, метод дискретных особенностей.

**Т. С. ПОЛЯНСЬКА**

### ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОДНОГО ГІПЕРСИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

На основі методу дискретних особливостей побудована дискретна математична модель гіперсингулярного інтегрального рівняння на стандартному інтервалі  $(-1, 1)$  і на системі інтервалів. Доведено однозначна розв'язність дискретної моделі і дана оцінка швидкості збіжності рішення дискретної задачі до точного рішення гіперсингулярного інтегрального рівняння при деяких припущеннях гладкості.

**Ключові слова:** гіперсингулярне інтегральне рівняння, метод дискретних особливостей.

**Т. S. POLYANSKAYA**

### DISCRETE MATHEMATICAL MODEL OF A HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION

A discrete mathematical model of a hypersingular integral equation on the standard interval  $(-1, 1)$  and on a system of intervals is constructed based on the method of discrete singularities. The unique solvability of the model is proved and the convergence rate of the solution of the discrete problem to the exact solution of the hypersingular integral equation is estimated under some smoothness assumptions.

**Key words:** hypersingular integral equation, method of discrete singularities.

**Введение.** На базе гиперсингулярного интегрального уравнения (ГСИУ):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{(x_0 - x)^2} \sqrt{1 - x^2} dx + \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{x_0 - x} \sqrt{1 - x^2} dx + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|x_0 - x| u(x) \sqrt{1 - x^2} dx +$$