

---

# Bachelorarbeit

---

Herr  
**Xiajun Zhou**

**Theoretische und praktische  
Untersuchungen zur  
Zeit- und Frequenzanalyse  
zeitkontinuierlicher und zeit-  
diskreter Systeme**

Mittweida, 2018



**Bachelorarbeit**

---

**Theoretische und praktische  
Untersuchungen zur  
Zeit- und Frequenzanalyse  
zeitkontinuierlicher und zeit-  
diskreter Systeme**

Autor:

**Herr Xiajun Zhou**

Studiengang:

**Elektro- und Informationstechnik**

Seminargruppe:

**EI16wA-BC**

Erstprüfer:

**Prof. Dr.-Ing. Alexander Lampe**

Zweitprüfer:

**Dipl.-Ing. Stephan Wnuck**

Einreichung:

**Mittweida, 30.06.2018**

Verteidigung/Bewertung:

**11.07.2018**



## **Bibliografische Beschreibung:**

Zhou, Xiajun:

Theoretische und praktische Untersuchung zur Zeit- und Frequenzanalyse zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Systeme, 129 Seiten, 99 Abbildungen, 17 Tabellen, Hochschule Mittweida (FH), Fakultät Ingenieurwissenschaften, Bachelorarbeit, 2018

## **Referat:**

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wird der Zusammenhang zwischen dem Zeitbereich und dem Frequenzbereich zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Systeme beschrieben. Anhand der untersuchten theoretischen Grundlagen der zeitdiskreten Systeme wird mithilfe der Layout-Software „Kicad“ eine Leiterplatte implementiert, die als zeitdiskretes Tiefpassfilter oder zeitdiskretes Bandpassfilter Anwendung findet.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	<b>I</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	<b>IV</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b> .....	<b>IX</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b> .....	<b>X</b>
<b>Formelverzeichnis</b> .....	<b>XI</b>
<b>Danksagung</b> .....	<b>XII</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	<b>1</b>
<b>2 Signale</b> .....	<b>3</b>
2.1 Signaldefinition.....	3
2.1.1 Zeitkontinuierliche Signale.....	3
2.1.2 Zeitdiskrete Signale.....	4
2.2 Umwandlung von zeitkontinuierlichen Signalen in zeitdiskrete Signale.....	4
2.2.1 Abtastung.....	5
2.2.2 Abtasttheorem.....	6
2.2.3 Aliasingeffekt.....	11
2.2.4 Anti-Aliasing .....	14
2.3 z-Transformation .....	14
2.3.1 Einführung in die z-Transformation.....	14
2.3.2 Aliasingeffekt bei der z-Transformation .....	16
2.3.3 Verschiebungssatz der z-Transformation .....	16
2.3.4 Stabilitätsgrenze bei der z-Transformation .....	17
<b>3 Zeitkontinuierliche Systeme</b> .....	<b>19</b>
3.1 RC-Tiefpass .....	19
3.1.1 Beschreibung des Zeitverhaltens .....	19
3.1.2 Eigenschaft eines RC-Tiefpass im Zeitbereich .....	21
3.1.3 Realistische Impulsantwort und Dachabfall .....	24
3.1.4 RC-Tiefpass im Frequenzbereich .....	27
3.2 RC-Hochpass.....	29
3.2.1 DGL und Sprungantwort im Zeitbereich.....	29
3.2.2 Eigenschaften im Zeitbereich .....	30
3.2.3 Frequenzverhalten des RC-Hochpasses .....	32

3.3	System 2. Ordnung Bandpass-Filter .....	33
3.3.1	Systemfunktion .....	34
3.3.2	Messtechnische Bestimmung der PN-Daten ( $\sigma_x$ und $w_x$ ).....	41
3.3.3	Frequenzverhalten .....	44
3.4	Aktives Allpassfilter 1. Ordnung.....	47
3.4.1	Systemfunktion und Frequenzverhalten .....	47
3.4.2	Sprungantwort des Allpassfilters .....	48
3.4.3	Anwendung des Allpassfilters .....	50
<b>4</b>	<b>Zeitdiskrete Systeme .....</b>	<b>53</b>
4.1	Zeitdiskreter Tiefpass.....	53
4.1.1	Differenzgleichung und Systemfunktion .....	53
4.1.2	Amplituden- und Phasengang des zeitdiskreten Tiefpasses.....	54
4.1.3	Zeitverhalten des zeitdiskreten Tiefpasses.....	56
4.2	Zeitdiskreter Hochpass .....	57
4.2.1	Differenzgleichung und Systemfunktion .....	58
4.2.2	Amplituden- und Phasengang des zeitdiskreten Hochpasses .....	58
4.2.3	Zeitverhalten des zeitdiskreten Hochpasses .....	59
4.3	Zeitdiskretes Bandpassfilter .....	61
4.3.1	Ermittlung der Frequenz- und Phasengang aus dem PN-Plan .....	61
4.3.2	Systemfunktion und Amplitudengang eines zeitdiskreten Bandpassfilters.....	62
4.3.3	Zeitverhalten des Zeitdiskreten Bandpass-Filters.....	64
<b>5</b>	<b>Realisierung des Versuchs .....</b>	<b>67</b>
5.1	Schaltungsentwurf und PCB-Layout.....	67
5.2	Funktionsbeschreibung .....	68
5.2.1	Takterzeugung.....	69
5.2.2	Hauptschaltung .....	75
5.2.3	Switched-Capacitor-Tiefpass-Filter .....	80
5.3	Vergleich der Abtastschaltung.....	84
5.4	Löten und Funktionstest.....	85
5.5	Bewertung der gemessenen Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz.....	88
5.5.1	Effektivwertmessung bei Abtastung mit Dirac-Impulsen .....	88
5.5.2	Zeitdiskrete Signale unter Verwendung einer Sample-and-Hold- Schaltung (S&H) .....	90
<b>6</b>	<b>Fazit .....</b>	<b>94</b>
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>95</b>

<b>Anhang A: Knotenpunktverfahren .....</b>	<b>97</b>
<b>Anhang B: Berechnung der Sprungantworten <math>a(t)</math> .....</b>	<b>99</b>
<b>Anhang C: Lötprozess .....</b>	<b>101</b>
<b>Anhang D: Messwerte.....</b>	<b>102</b>
<b>Anhang E: Schaltungsentwurf .....</b>	<b>104</b>
<b>Anhang F: Versuchsanleitung.....</b>	<b>105</b>
<b>Selbstständigkeitserklärung .....</b>	<b>117</b>

# Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Zeitkontinuierliches Signal .....	3
Abbildung 2: Zeitdiskretes Signal .....	4
Abbildung 3: Ideale Abtastung mit Dirac-impulsen .....	5
Abbildung 4: Reale Abtastung .....	6
Abbildung 5: Fourier-Transformation der periodischen Rechteckwelle .....	8
Abbildung 6: Fourier-Transformation des Rechteckimpulses .....	8
Abbildung 7: FT eines beliebigen Signals .....	9
Abbildung 8: FT der Dirac-Impulsfolge .....	10
Abbildung 9: Faltung im Frequenzbereich .....	11
Abbildung 10: Spektrum eines abgetasteten Cosinus mit $f_0 = 100\text{Hz}$ .....	12
Abbildung 11: Spektrum eines abgetasteten Cosinus mit $f_0 = 1,8\text{kHz}$ .....	13
Abbildung 12: Spektrum eines abgetasteten Cosinus mit $f_0 = 3,8\text{kHz}$ .....	13
Abbildung 13: Verschiebung in z-Transformation .....	17
Abbildung 14: Stabilitätsgrenze in der z-Ebene .....	18
Abbildung 15: RC-Tiefpass .....	19
Abbildung 16: Sprungantwort eines Tiefpasses .....	21
Abbildung 17: Sägezahn-Signal .....	22
Abbildung 18: Systemantwort auf Sägezahn-Signal am Eingang .....	23
Abbildung 19: Dirac-Impuls .....	24

Abbildung 20: Impulsantwort eines RC-Tiefpasses .....	25
Abbildung 21: Praktische realisierte Impulsfunktion.....	25
Abbildung 22: Impulsantwort in der Praxis.....	26
Abbildung 23: Praktische Sprung- und Impulsfunktion mit Maßeinheit .....	26
Abbildung 24: Bode-Diagramm eines Tiefpasses .....	27
Abbildung 25: Betrags-Frequenzgang des Betrags .....	28
Abbildung 26: RC-Hochpass .....	29
Abbildung 27: Systemantwort auf von Sägezahn-Signal am Hochpass-Eingang.....	32
Abbildung 28: Bode-Diagramm des RC-Hochpasses .....	33
Abbildung 29: Sallen-Key-Bandpass-Schaltung .....	34
Abbildung 30: Gerichtete Graphen .....	34
Abbildung 31: Netzwerke .....	35
Abbildung 32: Netzwerk für H1 .....	35
Abbildung 33: Netzwerk H1 .....	38
Abbildung 34: Zwei Teile der Netzwerke .....	38
Abbildung 35: Sprungantwort $a(t)$ des Bandpasses.....	43
Abbildung 36: Logarithmische Darstellung der Verstärkung bei $R_3 = 120\text{k}\Omega$ und $R_3 = 170\text{k}\Omega$ .....	46
Abbildung 37: Aktive Allpassfilter.....	47
Abbildung 38: Sprungantwort des Allpassfilters.....	49
Abbildung 39: Rechteckantwort Allpassfilter .....	49
Abbildung 40: Gruppen- und Phasenlaufzeit eines amplitudenmodulierten Signals.....	50
Abbildung 41: Zeitdiskreter Tiefpass .....	53

Abbildung 42: Amplitudengang des zeitdiskreten Tiefpasses .....	55
Abbildung 43: Phasengang des zeitdiskreten Tiefpasses.....	55
Abbildung 44: Sprungantwort des zeitdiskreten Tiefpasses.....	56
Abbildung 45: Impulsantwort des zeitdiskreten Tiefpasses .....	57
Abbildung 46: Struktur eines zeitdiskreten Hochpasses .....	57
Abbildung 47: Amplitudengang von zeitdiskretem Hochpass .....	59
Abbildung 48: Phasengang von zeitdiskretem Hochpass .....	59
Abbildung 49: Sprungantwort des zeitdiskreten Hochpasses .....	60
Abbildung 50: Impulsantwort des zeitdiskreten Hochpasses .....	61
Abbildung 51: PN-Plan von $H(s)$ eines zeitdiskreten Systems 1. Ordnung .....	62
Abbildung 52: Zeitdiskretes Bandpassfilter.....	63
Abbildung 53: Amplitudengang des zeitdiskreten Bandpassfilters.....	63
Abbildung 54: Sprungantwort des zeitdiskreten Bandpasses .....	65
Abbildung 55: Impulsantwort des zeitdiskreten Bandpasses .....	65
Abbildung 56: Blockdiagramm zur digitalen Signalverarbeitung .....	67
Abbildung 57: PCB-Layout der Schaltung .....	68
Abbildung 58: Abtastung und Verzögerung mit AD783.....	69
Abbildung 59: Taktschema.....	69
Abbildung 60: Schaltung für Takterzeugung.....	70
Abbildung 61: Verhältnis der Impulsdauer zu Periodendauer .....	71
Abbildung 62: Timing Diagramm der Ausgänge des 74HCT4040 (Quelle: [9] Seite 5) ..	71
Abbildung 63: 3 Frequenzen nach NAND.....	72
Abbildung 64: Spannung am Pin 8 des 74HCT30 .....	73

Abbildung 65: Wahrheitstabelle 74HCT138 (Quelle: [4] Seite 2) .....	73
Abbildung 66: Impulsdiagramm der Ausgänge des 74HCT138 .....	74
Abbildung 67: Takterzeugung.....	74
Abbildung 68: Konzept der Hauptschaltung.....	75
Abbildung 69: Hauptschaltung.....	76
Abbildung 70: Summier mit zwei Summanden .....	77
Abbildung 71: Schaltung zur Realisierung der Koeffizienten.....	78
Abbildung 72: Logiktablelle DG419 .....	79
Abbildung 73: Spektrum eines abgetasteten Signals.....	80
Abbildung 74: Äquivalenz von geschalteter Kapazität und ohmschem Widerstand .....	81
Abbildung 75: SC-Filter-Schaltung .....	82
Abbildung 76: Tiefpassfilter im Datenblatt des MAX293 .....	84
Abbildung 77: Taktschema.....	84
Abbildung 78: Praxisnahes Taktdiagramm .....	85
Abbildung 79: Gemessene Zahlenwerte des zeitdiskreten Bandpassfilters mit und ohne Spannungsteiler.....	87
Abbildung 80: Gemessene Zahlenwerte des zeitdiskreten Tiefpassfilters mit und ohne Spannungsteiler.....	88
Abbildung 81: Ideale Abtastung eines Cosinus-Signal im Zeitbereich .....	89
Abbildung 82: Spektrum von der idealen Abtastung .....	89
Abbildung 83: Spektrum des Glättungssignals .....	90
Abbildung 84: Abgetastetes Cosinus-Signal.....	91
Abbildung 85: Realistische Abtastung unter Verwendung S&H im Zeitbereich .....	91

Abbildung 86: Spektrum der realistischen Abtastung unter Verwendung S&H .....	92
Abbildung 87: Amplitudengang des zeitdiskreten Tiefpasses unter Verwendung eines S&H-Gliedes .....	93
Abbildung 88: Sallen-Key Bandpass-Schaltung mit Knotenpunkten .....	97
Abbildung 89: Der gesamte Schaltungsentwurf .....	104

# Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Bauelemente-Gleichung .....	19
Tabelle 2: Zahlenwerte der Kenngrößen des Frequenzverhaltens bei verschiedenen Widerständen.....	42
Tabelle 3: Messwerte bei Widerstand $R_3=120\text{k}\Omega$ .....	45
Tabelle 4: Messwerte bei Widerstand $R_3=170\text{k}\Omega$ .....	46
Tabelle 5: Erregung des zeitdiskreten Tiefpasses mit einer Sprungfolge.....	56
Tabelle 6: Erregung des zeitdiskreten Tiefpasses mit einer Impulsfolge.....	57
Tabelle 7: Erregung des zeitdiskreten Hochpasses mit einer Sprungfolge .....	60
Tabelle 8: Erregung des zeitdiskreten Hochpasses mit einer Impulsfolge .....	60
Tabelle 9: Erregung des zeitdiskreten Bandpasses mit einer Sprungfolge .....	64
Tabelle 10: Erregung des zeitdiskreten Bandpasses mit einer Impulsfolge .....	65
Tabelle 11: Wahrheitstabelle eines NAND.....	72
Tabelle 12: Wahrheitstabelle eines NOR.....	75
Tabelle 13: Zustandstabelle des IC 4017 .....	83
Tabelle 14: Vergleich der Parameter AD783, AD781, LF298.....	85
Tabelle 15: Gemessene Zahlenwerte mit zeitdiskretem Bandpassfilter .....	102
Tabelle 16: Gemessene Zahlenwerte mit zeitdiskretem Tiefpassfilter .....	103

# Abkürzungsverzeichnis

<b>USB</b>	<b>Universal Serial Bus</b>
<b>Uart</b>	<b>Universal Asynchronous Receiver/Transmitter</b>
<b>SWD</b>	<b>Serial Wire Debug</b>
<b>MCU</b>	<b>Microcontroller Unit</b>
<b>LCD</b>	<b>Liquid Crystal Display</b>
<b>LED</b>	<b>Light-Emitting-Diode</b>
<b>CPLSEL</b>	<b>Couple Selection</b>
<b>VSENSEL1/2</b>	<b>Sensitivity Selection 1/2</b>
<b>GNDA</b>	<b>Analog Ground</b>
<b>GNDD</b>	<b>Digital Ground</b>
<b>VCC</b>	<b>Volt Current Condenser(Power)</b>
<b>SCL</b>	<b>Serial Clock Line</b>
<b>SDA</b>	<b>Serial Data Line</b>
<b>CONN</b>	<b>Connection</b>
<b>PCB</b>	<b>Printed Circuit Board</b>
<b>THT</b>	<b>Through Hole Technology</b>
<b>SMD</b>	<b>Surface Mounted Device</b>
<b>I<sup>2</sup>C</b>	<b>Inter-Integrated Circuit</b>
<b>CMOS</b>	<b>Complementary Metal Oxide Semiconductor</b>
<b>EEPROM</b>	<b>Electrically Erasable Programmable Read-Only Memory</b>
<b>DRC</b>	<b>Design Rule Check</b>
<b>DC</b>	<b>Direct current</b>
<b>AC</b>	<b>Alternating current.</b>

# Formelverzeichnis

<b>C</b>	<b>[F]</b>	<b>Kapazität in Farad</b>
<b>F</b>	<b>[Hz]</b>	<b>Frequenz in Hertz</b>
<b>I</b>	<b>[A]</b>	<b>Strom in Ampere</b>
<b>R</b>	<b>[Ω]</b>	<b>Widerstand in Ohm</b>
<b>U</b>	<b>[V]</b>	<b>Spannung in Volt</b>

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Bachelorarbeit unterstützt und motiviert haben.

Zuerst gebührt mein Dank Dipl.-Ing. Stephan Wnuck, der meine Bachelorarbeit betreut und begutachtet hat. Er hat mich während des praktischen Teils und der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt und mir viele nützliche Ratschläge gegeben.

Ebenfalls möchte ich mich bei Dipl.-Ing. Susanne Zimmer bedanken, die meine Arbeit mehrerer Male durchgelesen und mit Geduld korrigiert hat, sodass diese Bachelorarbeit in dieser Form vorliegt.

Ein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Alexander Lampe, der als mein Erstprüfer fungiert, Sogar während seines Aufenthalts in China hat er sogar meine Fragen per Email beantwortet, was mir beim Verständnis viel geholfen hat.

Meiner Freundin Yuanxun danke ich besonders für den starken emotionalen Rückhalt über die Dauer meines gesamten Studiums.

# 1 Einleitung

Heutzutage entwickelt sich der Industriebereich sehr schnell weiter. Man strebt nach nicht nur höher Produktqualität, sondern auch immer kürzer werdenden Entwicklungszeiten. Deswegen werden stetige Verbesserungen im Produktentstehungsprozess immer erforderlich. Eine Schlüsselrolle spielt dabei die Systembeschreibung und die Systemsimulation. Systemsimulationen bieten den Ingenieuren eine anschauliche und direkte Betrachtung der Produkte, was erheblich schneller und reproduzierbar ist als der Aufbau von Musterteilen. Aus diesem Grund steigt in der Produktentwicklung der Anteil von Simulationsaufgaben an. Deshalb benötigen Ingenieure ein interdisziplinäres Systemverständnis, mit dem komplexe Systeme erfasst, beschrieben und simuliert werden können.

An der Hochschule Mittweida besteht der Unterricht in der Regel aus zwei Teilen: Theorie und Praxis im Labor. Für die praktischen Versuche der Vorlesung Signal- und Systemtheorie von Prof. Dr.-Ing Alexander Lampe sind Dipl.-Ing. Stephan Wnuck und Dipl.-Ing. Susanne Zimmer zuständig. In zwei der Praktikumsversuche werden analoge Signale an verschiedenen analogen Systeme angeschlossen, um die Auswirkung des Filter abhängig von der Frequenz auf die Amplitude und Phase der Signale zu analysieren. Dabei sind die Systeme ein analoges Tiefpassfilter, ein analoges Hochpassfilter, ein analoges Bandpassfilter oder ein analoges Allpassfilter. Innerhalb der praktischen Versuche werden nur die zeitkontinuierlichen Signale und Systeme untersucht, auch wenn die digitale Signalverarbeitung heutzutage auch eine wichtige Rolle spielt.

Die vorliegende Arbeit wird in theoretische Untersuchungen von zeitkontinuierliche und zeitdiskreten Signalen und Systemen und einen praktischen Versuch unterteilt. Der praktische Versuch befasst sich mit Entwurf, Aufbau und Erprobung eines digitalen Tiefpassfilters und Bandpassfilters.

Das Hauptziel ist aber, den Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzverhalten zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Systeme zu diskutieren und mithilfe des Abtasttheorems die digitalen Tiefpass- und Bandpassfilter in der Praxis zu untersuchen.

Des Weiteren soll die Arbeit zum Verständnis von zwei praktischen Versuchen der Vorlesung „Signal und Systemtheorie“ beitragen. Die im Rahmen dieser Bachelorarbeit erstellte Leiterplatte mit den digitalen Filtern kann als neuer, weiterer praktischer Versuch zur Vorlesung eingesetzt werden.

Die Bachelorarbeit besteht aus sechs Kapiteln.

Im **Kapitel 2** die Grundlagen verschiedener Signaltypen vorgestellt. Es wird noch erläutert, wie ein zeitkontinuierliches Signal in ein zeitdiskretes Signal umgewandelt wird sowie das Abtasttheorem. Zusätzlich wird die z-Transformation eingeführt, was in **Kapitel 4** intensiv beschrieben wird.

Anschließend wird im **Kapitel 3** auf die unterschiedlichen zeitkontinuierlichen Systeme und die Eigenschaften im Zeit- und Frequenzbereich dieser Systeme eingegangen. Darüber hinaus werden die Eigenschaften verglichen, damit der Zusammenhang zwischen ihnen abgeleitet werden kann.

Danach wird im **Kapitel 4** die verschiedenen zeitdiskreten Systeme behandelt. Genau wie im Kapitel 3 erfolgt bei den zeitdiskreten Systemen die Herleitung der Differenzgleichungen und Systemfunktionen. Zunächst geht es um die Eigenschaften im Zeit- und Frequenzbereich. Dieses Elementarwissen soll der gesamten Arbeit als Grundlage dienen.

Im **Kapitel 5** wird die Realisierung des neuen Praktikumsversuchs beschrieben. Dazu wird zuerst der Schaltungsentwurf mithilfe der ausgewählten Software implementiert. Zum besseren Verständnis dieser Schaltung erfolgt eine ausführliche Funktionsbeschreibung. Anschließend wird ein grundsätzlicher Funktionstest für die Leiterplatte erstellt. Darauf aufbauend erfolgt die Realisierung des Versuchs.

Schließlich werden im **Kapitel 6** die gewonnenen Erkenntnisse der Bachelorarbeit noch einmal zusammengefasst. Hier wird ebenfalls ein Ausblick auf zukünftige mögliche Anwendungen gegeben.

## 2 Signale

### 2.1 Signaldefinition

Ein System verknüpft einen Zusammenhang von Signalen am Systemeingang und -Ausgang. Dabei können Signale von unterschiedlicher Natur sein. Ein System ist zum Beispiel ein elektrisches Netzwerk, das durch Eingangs- und Ausgangsspannung beschrieben werden kann. Ein weiteres System ist z.B. ein Regler, der den Füllstand eines Behälters regelt. Dann haben die Signale, die die zwei unterschiedliche Systeme bearbeiten, ganz andere Eigenschaften.

Signale können über unterschiedliche Merkmale klassifiziert werden. Wie o.g. gibt es zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Signale, determinierte und zufällige Signale, zeitbegrenzte und kausale Signale usw. In dieser Arbeit wird nur die Einteilung in zeitkontinuierliche Signale und zeitdiskrete Signale beschrieben.

#### 2.1.1 Zeitkontinuierliche Signale

Bei den bisher betrachteten Signalen ist der Signalparameter zu jedem beliebigen Zeitpunkt definiert. Man spricht dann von einem zeitkontinuierlichen Signal. Abbildung 1 zeigt hierzu ein Beispiel, bei dem die kontinuierlich mit der Zeit variierenden Funktionswerte  $x(t)$  den reellen Zahlen entnommen sind, die Funktionswerte gelten also für jeden beliebigen Zeitpunkt. Derartige Signale treten normalerweise z.B. als elektrische Spannung oder Ströme auf.

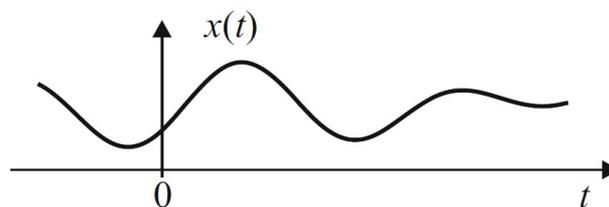


Abbildung 1: Zeitkontinuierliches Signal

Quelle: [6] Seite 1-2

## 2.1.2 Zeitdiskrete Signale

Ein zeitdiskretes Signal ist im Wesentlichen eine Folge  $x(k)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Wenn der Definitionsbereich nicht explizit auf einen Wertebereich  $k_1 < k < k_2$  eingeschränkt ist, wird davon ausgegangen, dass  $x(k)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  definiert ist. Die grafische Darstellung erfolgt dabei wie in Abbildung 2 dargestellt. Zeitdiskrete Signale sind Folgen, die aus kontinuierlichen Amplitudenwerten bestehen. Übrigens sind digitale Signale Folgen mit diskreten Amplitudenwerte.

**Definition 1.1** (zeitdiskretes Signal)

$$x[k] = \{\dots, x[-1], x[0], x[1], \dots\} \quad x[k] \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$$

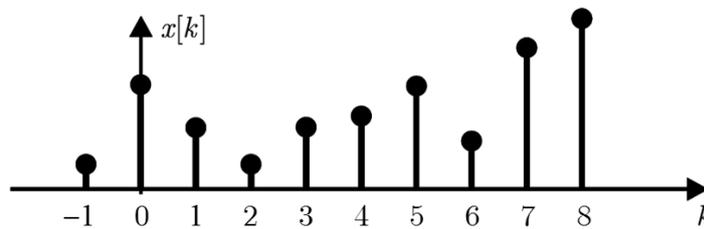


Abbildung 2: Zeitdiskretes Signal

Quelle: [6] Seite 2-4

## 2.2 Umwandlung von zeitkontinuierlichen Signalen in zeitdiskrete Signale

Im Vergleich zum zeitkontinuierlichen Signal sind die Funktionswerte bei einem zeitdiskreten Signal nur zu diskreten Zeitpunkten  $t_n$  definiert. Bei der Folge  $x[k]$  kann es sich zum Beispiel um Abtastwerte eines kontinuierlichen Signals  $x_A(t)$  handeln, die in einem zeitlichen Abstand  $T$  entnommen wurden. Nun stellt sich die Frage, wie sich das zeitkontinuierliche Signal diskretisieren lässt. Was muss man bei der Umwandlung berücksichtigen? Die Antworten auf diese Frage werden im Kapitel 2.2.1 erläutert.

## 2.2.1 Abtastung

Unter Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals  $x(t)$  versteht man die Entnahme von Signalwerten  $x(t_n)$  mithilfe eines Abtastsignals zu diskreten Zeitpunkten  $t_n$  mit  $t_n = k \cdot T_A$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Das Zeitintervall  $T$  wird als Abtastintervall bezeichnet und dessen Kehrwert  $f_A = \frac{1}{T_A}$  als Abtastfrequenz. Der Augenblickwert  $x_A(nT_A)$  ist der Abtastwert.

**Ideale Abtastung** Für eine ideale Abtastung wird das Signal exakt zum Abtastzeitpunkt  $k \cdot T_A$  ausgewertet. Hier werden Dirac-impulse als Abtastsignal eingesetzt und mathematisch betrachtet und das Signal  $x(t)$  mit den Dirac-impulsen multipliziert. In Abbildung 3 sieht man ein Beispiel.

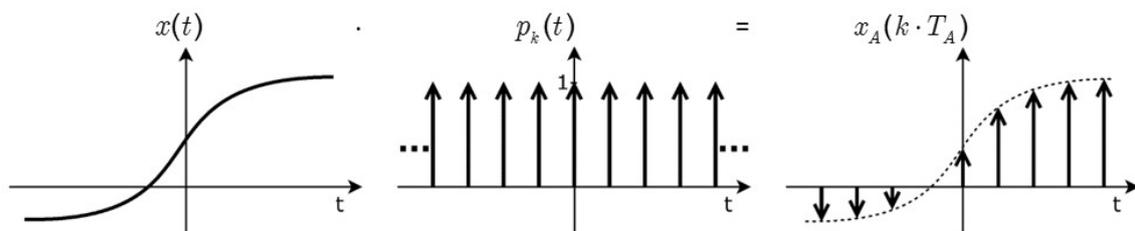


Abbildung 3: Ideale Abtastung mit Dirac-impulsen

Mathematisch lautet das abgetastete Signal  $x(k \cdot T_A)$  dann:

$$x_A(k \cdot T_A) = x(t) \cdot T_A \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_A) \quad (2.1)$$

**Reale Abtastung** Da in der Realität keine perfekten Dirac-impulse erzeugt werden können, wird das Signal  $x(t)$  in der Praxis mit einem Abtast- und Haltglied (S&H) gearbeitet. Hier wird der Dirac-impuls durch eine Rechteckfunktion mit Rechteckimpulsen der Länge  $t_0$  ersetzt. Das bedeutet, die Abtastung wird mit einer S&H Schaltung realisiert, die den Wert einer Abtastung für die Länge des Rechteckimpulses  $t_0$  konstant hält. Abbildung 4 zeigt die reale Abtastung.

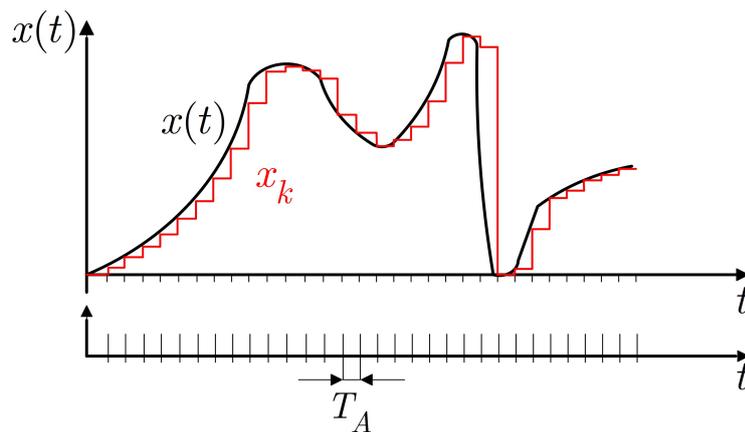


Abbildung 4: Reale Abtastung

Quelle: [4] Seite 4-14, [6] Seite 6-16

## 2.2.2 Abtasttheorem

Mithilfe der Abtastung kann ein zeitkontinuierliches Signal zu einem zeitdiskreten Signal diskretisiert werden. Da im Original-Zeitbereich zeitkontinuierliche Signal oder zeitdiskrete Signale mathematisch schwer zu analysieren sind, transformiert man die beiden Signale in den Bildbereich (Frequenzbereich).

Nach den Regeln der Fourier-Reihendarstellung wird eine beliebige periodische reelle Funktion  $x(t)$  in eine Summe von harmonischen Schwingungen zerlegt.

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_K \cos(k2\pi ft) + B_k \sin(k2\pi ft), \quad f_0 = \frac{1}{T_0}, \quad f_n = nf_0 \quad (2.2)$$

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt, \quad A_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(2\pi f_n t) dt, \quad B_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(2\pi f_n t) dt \quad (2.3)$$

Die Fourier-Transformation von periodischen Funktionen ergibt diskrete Linien im Frequenzbereich.

Beispiel für die Fourier-Transformation einer periodischen Funktion:

Die Zeitfunktion eines periodischen wiederholten Rechtecks lautet:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k2\pi ft) + B_k \sin(k2\pi ft), \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (2.4)$$

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \left[ \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} A dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} 0 dt \right] = \frac{A}{2}$$

$$A_k = \frac{2}{T_0} \left[ \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} A \cos(k2\pi f_0 t) dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} 0 \cos(k2\pi f_0 t) dt \right] = \frac{2A}{T_0} \cdot \frac{\sin(k2\pi f_0 t)}{k2\pi f_0} \Bigg|_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \quad (2.5)$$

$$A_k = \frac{A}{\pi k} \left[ \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-k \frac{\pi}{2}\right) \right] = \pm \frac{2A}{\pi k} \quad (2.6)$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \left[ \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} A \sin(k2\pi f_0 t) dt + \int_{\frac{T_0}{4}}^{\frac{3T_0}{4}} 0 \sin(k2\pi f_0 t) dt \right] = 0 \quad (2.7)$$

Die Fourier-Reihe der Rechteckfolge lautet damit:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) - \frac{2A}{3\pi} \cos\left(3 \frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{2A}{5\pi} \cos\left(5 \frac{2\pi}{T_0}t\right) + \dots \quad (2.8)$$

Aus der Korrespondenztabelle für die komplexe Exponentialschwingung erhält man

$$e^{-j2\pi f_0 t} \circ \bullet \delta(f + f_0) \quad (2.9)$$

Durch Anwendung der Eulersche Formel folgt

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} \left[ e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right] \quad (2.10)$$

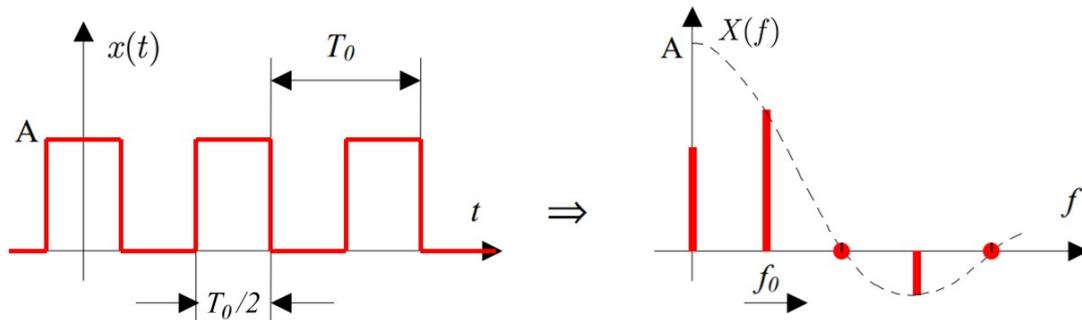
Ergibt sich die Fourier-Transformierte der Cosinus-Funktion

$$\cos(2\pi f_0 t) \circ \bullet \frac{1}{2} \left[ \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) \right] \quad (2.11)$$

Die Fourier-Reihe eines periodischen Rechtecks lautet somit:

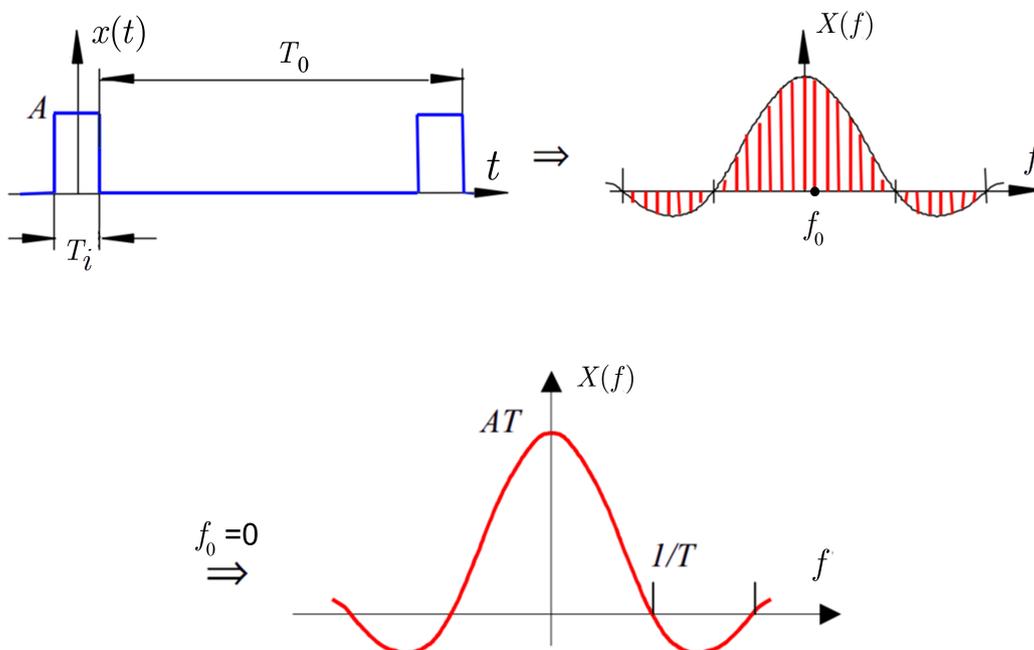
$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f)] + \frac{A}{\pi} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] - \frac{A}{3\pi} [\delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0)] + \dots \quad (2.12)$$

Die Abbildung 5 zeigt die Fourier-Transformation der periodischen Rechteckfunktion.



**Abbildung 5: Fourier-Transformation der periodischen Rechteckwelle**

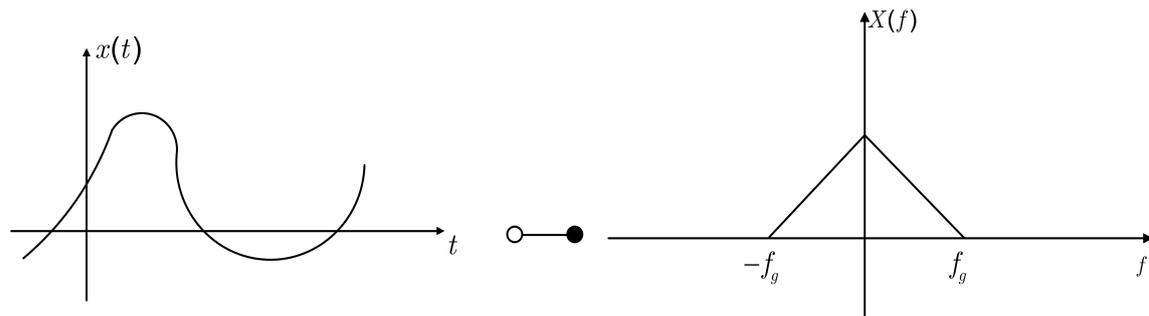
Auch aperiodische Vorgänge kann man in harmonische Schwingungen zerlegen. Dazu wird die Rechteckfunktion schrittweise zu einem einzelnen Rechteckimpuls verändert. Wenn sich die Periode  $T_0$  bis Unendlich vergrößert, wird die Grundfrequenz  $f_0$  gleich 0. Dann wird das Spektrum eine kontinuierliche Funktion (siehe Abbildung 6).



**Abbildung 6: Fourier-Transformation des Rechteckimpulses**

Die Fourier-Transformation von aperiodischen Funktionen im Zeitbereich ergibt kontinuierliche Spektren im Frequenzbereich (und umgekehrt).

Als Beispiel wird hier ein beliebiges Signal genommen und  $X(f)$  steht für das Fourier-transformierte Spektrum. Darin ist  $f_g$  Grenzfrequenz bzw. Bandbreite des Signals  $x(t)$  mit  $X(f) = 0, |f| > f_g$ .



**Abbildung 7: FT eines beliebigen Signals**

Aber die Transformation eines zeitdiskreten Signals  $x_k$  mithilfe der Fourier-Transformation ist fast unmöglich, weil ein zeitdiskretes Signal nur aus verschiedenen diskreten Werten besteht. Das abgetastete zeitdiskrete Signal  $x_k$  wird in den Frequenzbereich transformiert, indem man den Multiplikationssatz der Fourier-Transformation anwendet. Der Multiplikationssatz lautet:

$$x(t) \cdot y(t) = z(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(f) * Y(f) = Z(f) \quad (2.13)$$

Wie bei der idealen Abtastung schon erklärt, wird die Abtastung durch Multiplikation des zeitkontinuierlichen Signals mit Dirac-impulsen realisiert. Deswegen ist die Fourier-Transformierte eines abgetasteten Signals laut dem Multiplikationssatz die Faltung zwischen dem Spektrum  $X(f)$  des zeitkontinuierlichen Signals und den Dirac-impulsen im Frequenzbereich.

Für eine periodische Funktion gibt es zwei Bedingungen, mit denen man die periodische Funktion  $x(t)$  in komplexer Fourier-Reihendarstellung beschreiben kann. Die erste Bedingung ist, dass das Zeitintervall  $(0, T)$  sich in endliche viele Teilintervalle zerlegen lässt, in denen  $x(t)$  stetig und monoton ist. Zweitens: Ist bei  $t = \tau$  eine Unstetigkeitsstelle, so existieren der rechtseitige  $x(\tau+)$  und linkeseitige Grenzwert  $x(\tau-)$ , damit gilt:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{jk2\pi ft}, \quad X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-jk2\pi ft} dt \quad (2.14)$$

Die Dirac-impulse  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_A)$  genügen den beiden Bedingungen und die

komplexe Fourier-Reihe lässt sich wie folgt beschreiben:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{jn2\pi ft}, \quad (2.15)$$

$$X_k = \frac{1}{T_A} \int_{-\frac{T_A}{2}}^{\frac{T_A}{2}} \delta(t) \cdot e^{-jn2\pi ft} dt = \frac{1}{T_A} \quad (2.16)$$

Das Spektrum eines periodischen Signals kann auch direkt aus der Fourier-Reihendarstellung ermittelt werden:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{jn2\pi ft} \quad \circ \bullet \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_k \cdot \delta(f - \frac{k}{T_A}) \quad (2.17)$$

Daraus ergibt sich das Spektrum der Dirac-impulse:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \circ \bullet \quad P(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T_A}) \quad (2.18)$$

Zusammenfassend kann man sagen, dass die periodischen Dirac-impulse im Zeitbereich zu einer periodischen Impulsfolge im Frequenzbereich transformiert werden. Die grafische Darstellung erfolgt in Abbildung 8.

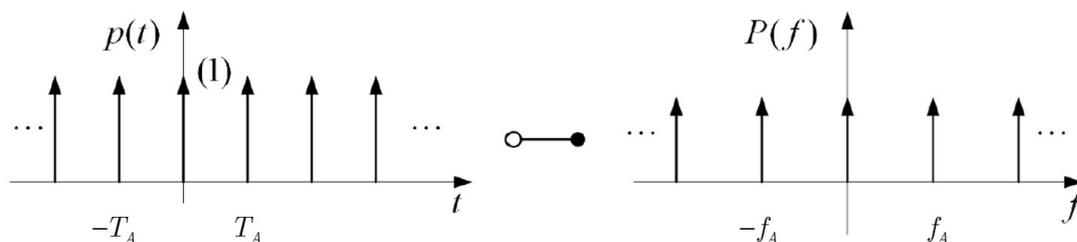
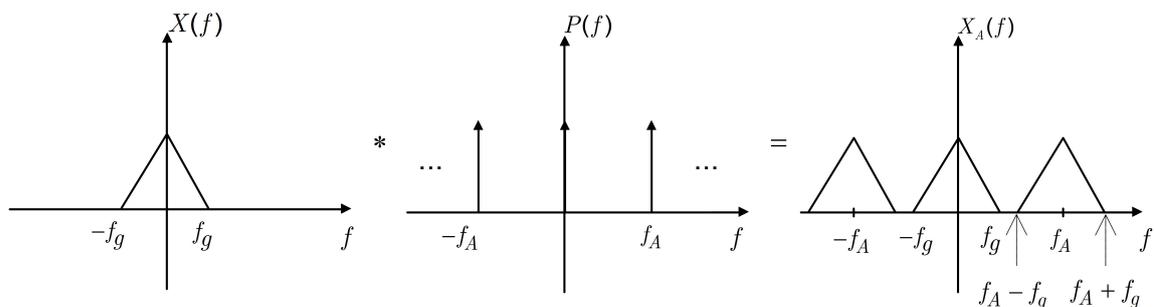


Abbildung 8: FT der Dirac-Impulsfolge

Laut Multiplikationssatz werden die periodische Impulsfolge und das transformierte Signal im Frequenzbereich gefaltet, um das Spektrum des abgetasteten Signals  $X_A(f)$  zu erhalten. Nach der Faltung der beiden Spektren sieht man in der Abbildung 9, dass das Spektrum des abgetasteten Signals die Summe der um  $k \cdot f_A$  verschobenen „Kopien“  $X(f - k \cdot f_A)$  des Spektrums  $X(f)$  des zeitkontinuierlichen Signals  $x(t)$  ist.



**Abbildung 9: Faltung im Frequenzbereich**

Man erkennt, dass dieses Spektrum eine periodische Funktion ist (Periode ist gleich der Abtastungsfrequenz  $f_A$ ). Das Spektrum im Bereich von  $-f_g$  bis  $f_g$  ist identisch mit dem Spektrum des zeitkontinuierlichen Signals  $x(t)$ . Das heißt, das Spektrum zwischen  $-f_g$  und  $f_g$  enthält die vollen und identischen Informationen wie das zeitkontinuierliche Signal. Dabei ist lediglich ein Tiefpass -Filter einzusetzen, damit die anderen spektralen-Anteile herausgefiltert werden können. Aber bevor das Filter eingesetzt wird, muss noch berücksichtigt werden, dass sich die periodisch wiederkehrenden Spektren nicht überlappen, damit das abgetastete Signal fehlerfrei rekonstruiert werden kann. Es gilt:

$$f_A - f_g \geq f_g \Rightarrow f_A \geq 2f_g \quad (2.19)$$

Diese Bedingung wird als Abtasttheorem bezeichnet.

Quelle: [11] Seite 3-7, [4] Seite 44-45

### 2.2.3 Aliasingeffekt

Im Kapitel 2.2.2 wurde gezeigt, dass es für die Abtastung eine Beschränkung  $f_A \geq 2f_g$  gibt. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, wird das Signal  $x(t)$  aus  $x_A(t)$  auf Grund der Spektralanteil-Überschneidung der periodischen Wiederholung  $X(f - kf_A)$  nicht

fehlerfrei rekonstruiert. Diese Situation wird als Aliasingeffekt bezeichnet. Im Folgenden wird der Aliasingeffekt mithilfe einiger Beispiele genau erläutert.

Hier ein Beispiel:

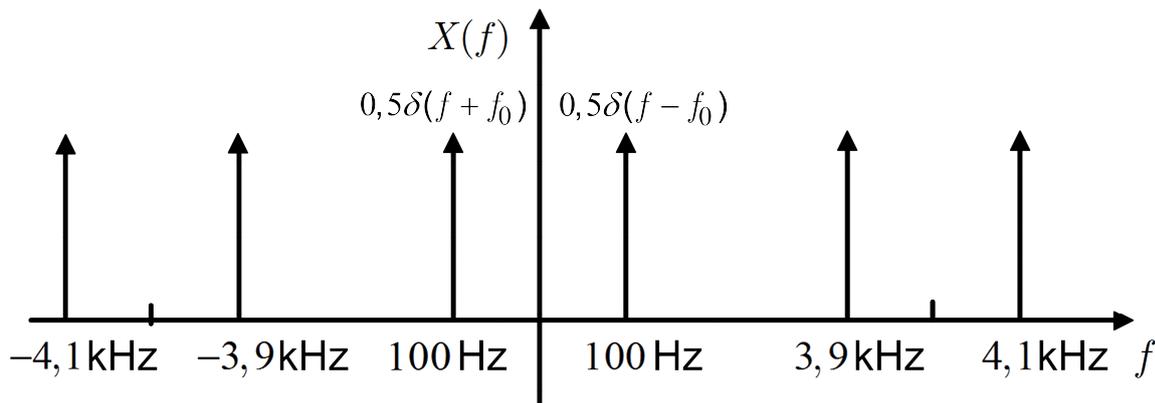
Beispielsweise liegt die Abtastungsfrequenz bei 4kHz, Eingangssignale sind drei verschiedene Cosinus-Signale, die von einem Generator geliefert werden. Mit der Gleichung (1.11) aus Kapitel 2.2.2 kann die Fourier-Transformierte ermittelt werden

1. Cosinus Signal aus Generator:  $x(t) = \cos(2\pi \cdot 100\text{Hz} \cdot t)$  mit  $f_0 = 100\text{Hz}$ , Tiefpass Grenzfrequenz  $f_g = 200\text{Hz}$ . (Bedingung  $f_A \geq 2f_g$  ist erfüllt.)

Das Spektrum des Cosinus-Signals  $\cos(2\pi \cdot 100\text{Hz} \cdot t)$  lautet:

$X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f+100\text{Hz}) + \delta(f-100\text{Hz})]$ . Das Spektrum des abgetasteten Cosinus-Signals

ist in Abbildung 10 dargestellt.

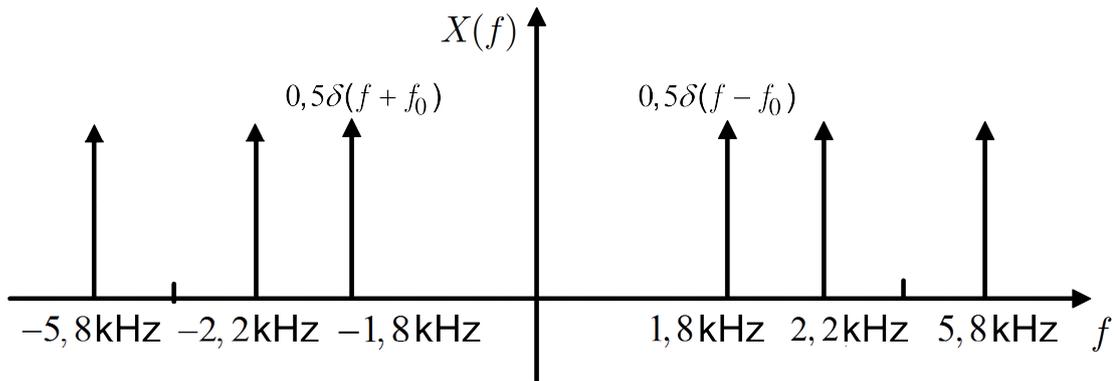


**Abbildung 10: Spektrum eines abgetasteten Cosinus mit  $f_0 = 100\text{Hz}$**

Nun wird ein Tiefpass-Filter verwendet, um das Signal herauszufiltern. Die Grenzfrequenz für das Tiefpass-Filter beträgt  $f_g = 200\text{Hz}$ . Deswegen ist die noch verbleibende positive Frequenz 100Hz, das heißt:  $f_{\text{Eingang}} = f_{\text{Ausgang}} = 100\text{Hz}$  (fehlerfrei rekonstruiert).

2. Cosinus-Signal aus Generator:  $x(t) = \cos(2\pi \cdot 1,8\text{kHz} \cdot t)$  mit  $f_0 = 1,8\text{kHz}$ , Tiefpass Grenzfrequenz  $f_g = 2\text{kHz}$ . ( $f_A \geq 2f_g$ )

Wenn die Eingangsfrequenz  $f_0 = 1,8\text{kHz}$  ist, dann sieht das Spektrum des abgetasteten Signals wie in Abbildung 11 aus:



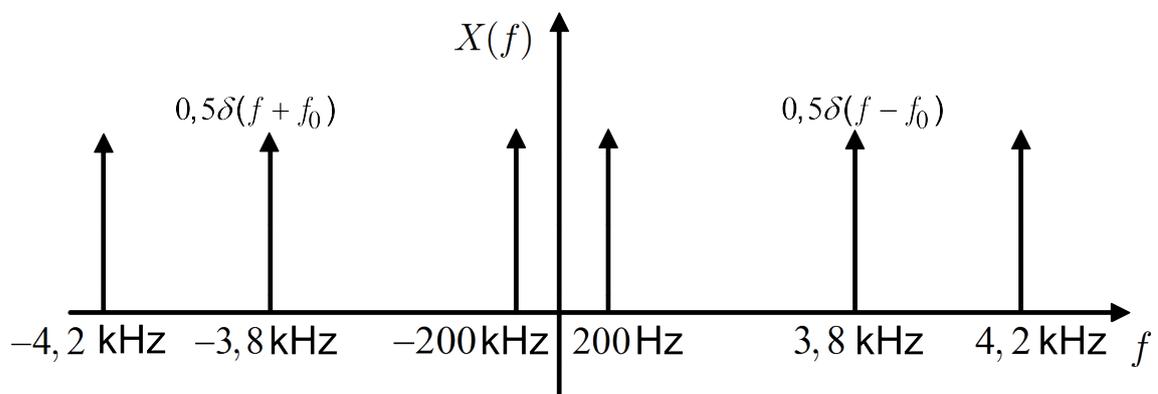
**Abbildung 11: Spektrum eines abgetasteten Cosinus mit  $f_0 = 1,8\text{kHz}$**

Nach dem Tiefpass-Filter mit  $f_g = 2\text{kHz}$  ist die Frequenz des Ausgangssignal  $1,8\text{kHz}$ .

In diesem Fall:  $f_{\text{Eingang}} = f_{\text{Ausgang}} = 1,8\text{kHz}$  (fehlerfrei rekonstruiert).

3. Cosinus-Signal aus Generator:  $x(t) = \cos(2\pi \cdot 3,8\text{kHz} \cdot t)$  mit  $f_0 = 3,8\text{kHz}$ , Tiefpass Grenzfrequenz  $f_g = 4\text{kHz}$ . ( $f_A \leq 2f_g$ )

Die grafische Darstellung des Spektrums des abgetasteten Cosinus Signal mit  $f_0 = 3,8\text{kHz}$  erfolgt in Abbildung 12.



**Abbildung 12: Spektrum eines abgetasteten Cosinus mit  $f_0 = 3,8\text{kHz}$**

Man erkennt, dass es zwei positive Frequenzen  $200\text{Hz}$  und  $3,8\text{kHz} = (4\text{kHz} - 200\text{Hz})$  unter der Grenzfrequenz des Tiefpasses gibt. In diesem Fall tritt der Aliasingeffekt auf (nicht fehlerfrei rekonstruiert).

Quelle: [7] Seite 4-8

## 2.2.4 Anti-Aliasing

Zur Vermeidung von Aliasing-Effekten gibt es verschiedene Vorgehensmöglichkeiten, z.B: Erhöhen der Abtastfrequenz, unregelmäßige Abtastabstände und Tiefpassfilterung. Diese Verfahren werden nun genauer erläutert.

### 1. Erhöhung der Abtastfrequenz

Da Aliasing ausschließlich auftritt, wenn die Abtastfrequenz kleiner als zweimal Grenzfrequenz des Eingangssignals ist, kann man einfach die Abtastfrequenz erhöhen, damit diese Bedingung des Abtasttheorems erfüllt ist.

### 2. Tiefpassfilter

Tiefpassfilter sind Filter, die Signalanteile mit Frequenzen oberhalb einer gewissen Frequenz stark abschwächen, während sie Anteile mit niedriger Frequenz annähernd ungeändert passieren lassen. Hierdurch wird also das Eingangssignal in einem bestimmten Grenzfrequenzbereich gefiltert, was die Erfüllung des Abtasttheorems bei der eigentlichen Abtastung vereinfacht.

Quelle: [7] Seite 8-10

## 2.3 z-Transformation

### 2.3.1 Einführung in die z-Transformation

Wenn man einen dynamischen Vorgang, die Übertragungsfunktion eines Netzwerks oder die Stabilität eines Systems analysieren will, kommt normalerweise die Laplace-Transformation zum Einsatz. Die Laplace-Transformierte und die inverse Laplace-Transformierte werden damit folgendermaßen definiert.

**Definition** (Laplace-Transformierte und inverse Laplace-Transformierte)

$$LT: X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$$
$$LT^{-1}: x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds \quad (2.20)$$

Dabei muss der Integrationsweg von  $s$  im Konvergenzbereich liegen.

Die Laplace-Korrespondenz von  $x(t)$  wird gekennzeichnet als:

$$x(t) \circ \bullet X(s) \quad (2.21)$$

Die mathematische Beschreibung des abgetasteten Signals lautet:

Die Laplace-Transformation des abgetasteten Signals ist:

$$\begin{aligned} X_A(s) &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] \cdot \delta(t - k \cdot T_A) \cdot e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot \int_0^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_A) \cdot e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot e^{-s \cdot k \cdot T_A} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Mit dieser Gleichung kann die zeitdiskrete Laplace-Transformation der Folge  $x[n]$  definiert werden:

**Definition** (zeitdiskrete Laplace-Transformation)

$$X(s) = \sum_0^{\infty} x[k] \cdot e^{-s \cdot k \cdot T_A} \quad (T_A \text{ ist die Abtastperiode}) \quad (2.23)$$

Dann wird folgendes gemacht, um diese Formel zu vereinfachen:

$$e^{-s \cdot k \cdot T_A} = \frac{1}{e^{s \cdot k \cdot T_A}} = \frac{1}{(e^{s \cdot T_A})^k} = \left(\frac{1}{e^{s \cdot T_A}}\right)^k \Rightarrow \frac{1}{z^k} = z^{-k} \quad (2.24)$$

Das heißt:  $e^{s \cdot T_A}$  wird durch  $z$  ersetzt, diesen Vorgang nennt man z-Transformation.

**Definition** (z-Transformation)

$$X(z) = \sum_0^{\infty} x[k] \cdot z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.25)$$

Die z-Transformierte von  $x[k]$  wird gekennzeichnet als:

$$x[k] \circ \bullet X(z) \quad (2.26)$$

Zusammenfassung:

Die **Laplace-Transformation** ist ein mathematisches Verfahren der Systemtheorie zur Behandlung und Berechnung von kontinuierlichen Signalen und linearen zeitinvarianten dynamischen Systemen.

Die **z-Transformation** ist ein mathematisches Verfahren der Systemtheorie zur Behandlung und Berechnung von kontinuierlich abgetasteten Signalen und linearen zeitinvarianten zeitdiskreten dynamischen Systemen. Ein zeitdiskretes dynamisches System wird durch Differenzgleichungen oder die Z-Transformierte beschrieben.

Quelle: [4] Seite 325-326, Seite 334 und Seite 347.

### 2.3.2 Aliasingeffekt bei der z-Transformation

Es muss noch beachtet werden, dass  $s$  bei der Laplace-Transformation im Frequenzbereich normalerweise mit  $s = \sigma + jw$ ,  $\sigma = 0$  ersetzt wird ( $w = 2\pi f$ ). Bei der z-Transformation ergibt sich dann:  $z = e^{sT_A} \rightarrow e^{jwT_A}$ . Zur Vereinfachung wird  $wT_A = \Omega$  eingeführt. Die Z-Transformierte der Systemfunktion lautet damit folgendermaßen:

$$H(z) = H(j\Omega) = |H| \cdot e^{j\varphi} \quad (2.27)$$

Bei der z-Transformation gibt es als Vereinfachung:  $\Omega = wT_A$ ,  $T_A$  ist die Abtastperiode und wird als  $T_A = \frac{1}{f_A}$  ( $f_A$  ist die Abtastfrequenz). Dann ergibt sich:

$\Omega = wT_A = w \frac{1}{f_A}$ . Unter Berücksichtigung des Abtasttheorems ergibt sich somit:

$\Omega_{\max} = w_{\max} \cdot T_A = 2\pi f_{\max} \frac{1}{f_A} = 2\pi \frac{f_A}{2} \cdot \frac{1}{f_A} = \pi$ . Das bedeutet, um Aliasingeffekte

zu vermeiden, darf in der Praxis  $\Omega$  nur im Bereich zwischen 0 und  $\pi$  liegen.

### 2.3.3 Verschiebungssatz der z-Transformation

Der Verschiebungssatz der z-Transformation lautet:

$$\begin{aligned}
 x(t) &\circ\text{---}\bullet X(s) \\
 x(t \pm t_0) &\circ\text{---}\bullet X(s) \cdot e^{\pm s \cdot t_0}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

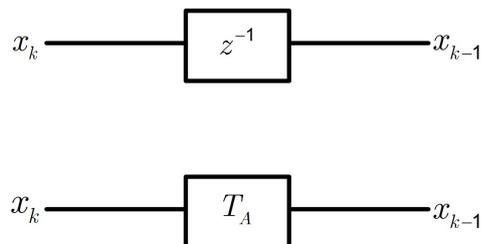
Für  $t_0 = T_A$  folgt:

$$x(t \pm T_A) \circ\text{---}\bullet X(s) \cdot e^{\pm s \cdot T_A}
 \tag{2.29}$$

Für zeitdiskrete Signale bedeutet  $x(t \pm T_A)$  eine Verzögerung/zeitliche Verschiebung um eine Periodendauer  $T_A$  von  $x(t)$ . Im diesen Fall lautet der Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned}
 x_k &\circ\text{---}\bullet X(z) \\
 x_{k \pm 1} = x(t \pm T_A) &\circ\text{---}\bullet X(z) \cdot z^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Der Verschiebungssatz der z-Transformation verdeutlicht, dass die Z-Transformierte von  $x_{k-1}$  die Multiplikation von  $X(Z)$  und  $z^{-1}$  ist. Wie bereits erwähnt ist  $x_{k-1}$  zeitlich eine Abtastperiode später als  $x_k$ . Wenn man in der z-Transformation  $x_{k-1}$  beschreiben will, kann man entweder  $z^{-1}$  oder  $T_A$  verwenden.



**Abbildung 13: Verschiebung in z-Transformation**

Quelle: [4] Seite 357

### 2.3.4 Stabilitätsgrenze bei der z-Transformation

Ein LTI-System 2.Ordnung ist nur stabil, wenn die Realteile der Polstelle in der Systemfunktion  $H(s)$  negativ sind, d.h. im Pol- und Nullstellen-Diagramm eines zeitkontinuierlichen Systems ist die Stabilitätsgrenze  $\text{Re}\{s\} < 0$ . Im Kapitel 2.3.1 wurde definiert, dass

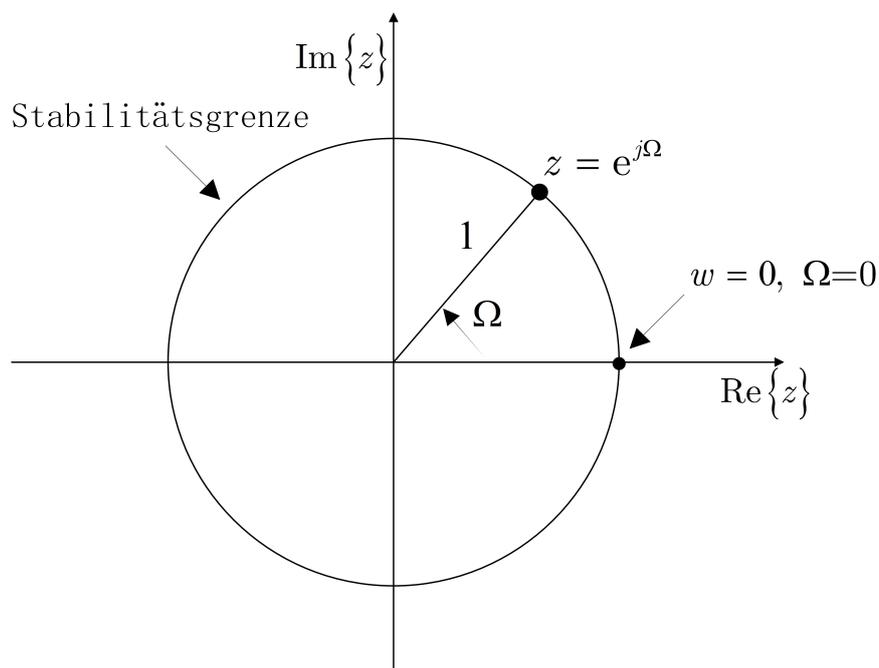
$e^{s \cdot T_A}$  bei der Laplace-Transformation  $z$  in der z-Transformation ersetzt. Deswegen gilt auch:

$$(z = e^{s \cdot T_A}) < (e^{0 \cdot T_A} = 1) \rightarrow z < 1 \quad (2.31)$$

Gleichzeitig wird noch eine Abkürzung in der z-Transformation eingeführt. Die Abkürzung lautet:  $w \cdot T_A = \Omega$ . Wenn man diese Abkürzung in  $z = e^{s \cdot T_A}$  eingesetzt, dann ergibt sich in der komplexen Schreibweise:

$$z = e^{jwT_A} = e^{j\Omega} = \cos \Omega + j \sin \Omega \quad (2.32)$$

Mit dieser Gleichung kann man sofort erkennen, dass  $z$  mit wachsendem  $\Omega$  einen Einheitskreis bildet und die Stabilitätsbedingung ist  $z < 1$ . Die Abbildung 14 stellt den Zusammenhang grafisch dar.



**Abbildung 14: Stabilitätsgrenze in der z-Ebene**

Quelle: [4] Seite 351 und 356.

### 3 Zeitkontinuierliche Systeme

In diesem Kapitel werden einige zeitkontinuierliche Systeme mit Beispielen vorgestellt, z.B. RC-Tiefpass- und Bandpassfilter. Zu jedem Beispiel werden als erstens das Zeitverhalten und danach das Frequenzverhalten erklärt. Zum Schluss wird der Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzverhalten erläutert.

#### 3.1 RC-Tiefpass

Ein Tiefpass ist eine Schaltung, die tiefe Frequenzen unverändert überträgt und bei hohen Frequenzen eine Abschwächung und Phasen-Nacheilung bewirkt. Abbildung 15 zeigt die einfachste Schaltung eines RC-Tiefpasses.

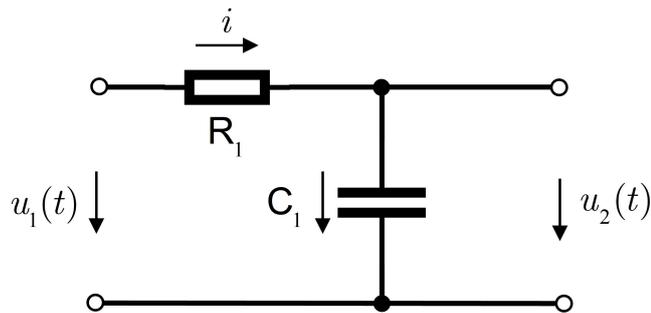


Abbildung 15: RC-Tiefpass

##### 3.1.1 Beschreibung des Zeitverhaltens

Die Beschreibung elektrischer Systeme erfolgt unter anderem über mathematische Gleichungen für die beteiligten passiven Bauelemente. Tabelle 1 stellt die Bauelemente-Gleichung für Widerstand, Kapazität und Induktivität zusammen.

Bauelemente	Bauelement-Gleichung	
Widerstand	$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R}$
Kapazität	$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(\tau) d\tau$	$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}$
Induktivität	$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$

Tabelle 1: Bauelemente-Gleichung

Mithilfe der Knotenregel ergibt sich:

$$\frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_1} - i(t) = 0 \quad (3.1)$$

In der Tabelle steht die mathematische Beschreibung der Kapazität. Mit

$$i_C = i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \frac{du_2(t)}{dt} \text{ folgt daraus die Differentialgleichung:}$$

$$u_1(t) = u_2(t) + R_1 \cdot C \cdot \frac{du_2(t)}{dt} \quad (3.2)$$

Mit der Zeitkonstanten  $\tau = R_1 \cdot C$  folgt:

$$u_1(t) = u_2(t) + \tau \cdot \dot{u}_2(t) \quad (3.3)$$

Mit der DGL kann die Sprungantwort des RC-Tiefpass berechnet werden. Die Lösung besteht aus einem homogenen und einem inhomogenen Teil. Um den homogenen Teil zu erhalten, muss  $u_1(t)$  gleich null gesetzt werden.

$$u_2(t) + R_1 \cdot C \cdot \frac{du_2(t)}{dt} = 0 \quad (3.4)$$

Mit dem allgemeinen Ansatz  $u_2(t) = A \cdot e^{\lambda t}$  erhält man die homogene Lösung der DGL:

$$\begin{aligned} A \cdot e^{\lambda t} + \tau \cdot A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} &= 0 \\ \Rightarrow (\tau \cdot \lambda + 1) \cdot A \cdot e^{\lambda t} &= 0 \\ \Rightarrow \tau \cdot \lambda + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= -\frac{1}{\tau} \\ \Rightarrow u_2(t) &= A \cdot e^{-\frac{1}{\tau} t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Eine partikuläre Lösung der DGL erhält man für  $t \rightarrow \infty$ , denn dann fließt in den Kondensator kein Strom mehr ( $i = 0$ ), d.h. der Kondensator ist vollständig aufgeladen  $u_R = 0 \rightarrow u_1(t) = u_2(t)$ .

Damit hat man die allgemeine Lösung:

$$u_2(t) = u_1 + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.6)$$

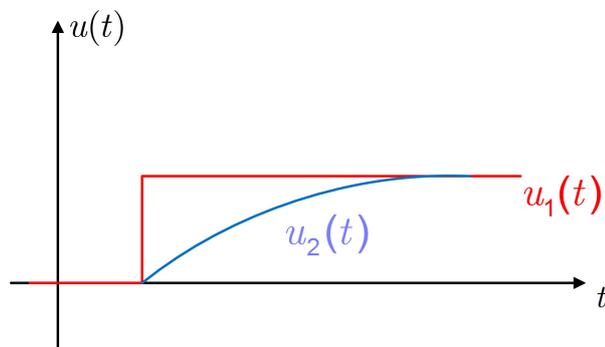
Für  $t = t_0$ , d.h. der Kondensator ist noch nicht geladen ( $u_C = u_2 = 0$ ), erhält man somit:

$$\begin{aligned} u_2(t_0) = 0 &= u_1 + A \cdot e^{-\frac{t_0}{\tau}} \\ \Rightarrow A &= -u_1 \cdot e^{\frac{t_0}{\tau}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Damit lautet die gesamte Lösung der DGL:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_1 - u_1 \cdot e^{\frac{t_0}{\tau}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = u_1(1 - e^{-\frac{t_0-t}{\tau}}) \\ u_2(t) &= u_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die grafische Beschreibung der Sprungantwort erfolgt in Abbildung 16.



**Abbildung 16: Sprungantwort eines Tiefpasses**

Quelle: [3] Kapitel Zeitkontinuierliches Signal, [5] Kapitel RC Sprungantwort

### 3.1.2 Eigenschaft eines RC-Tiefpass im Zeitbereich

Wie im Kapitel 3.1.1 schon erwähnt lautet die DGL eines RC-Tiefpasses:

$$u_1(t) = u_2(t) + R_1 \cdot C \cdot \frac{du_2(t)}{dt} \quad (3.9)$$

Wenn man die Systemfunktion eines Netzwerkes herleiten will, kommt normalerweise die Laplace-Transformation zum Einsatz. Mithilfe der Laplace-Transformation wird die DGL des RC-Tiefpasses in den Bildbereich transformiert.

$$\begin{aligned} U_2(s) + R \cdot C \cdot s \cdot U_2(s) &= U_1(s) \\ U_2(s) \cdot (1 + R \cdot C \cdot s) &= U_1(s) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Deshalb lautet die Systemfunktion des RC-Tiefpass:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{s \cdot C}}{R + \frac{1}{s \cdot C}} = \frac{1}{1 + s \cdot C \cdot R} = \frac{1}{1 + s \cdot \tau} \quad (3.11)$$

Um die Eigenschaften des RC-Tiefpasses zu untersuchen, wird ein Sägezahn-Signal als Eingangsspannung  $u_1(t)$  angenommen. Ein Sägezahn-Signal ist ein periodisches Signal mit der Periode  $2t_i$ . Die mathematische Beschreibung des Sägezahn-Signals mit  $t_i = 50\mu\text{s}$  ist:

$$u_1(t) = \frac{2V}{100\mu\text{s}} t, \quad -t_i \leq t \leq t_i \quad (3.12)$$

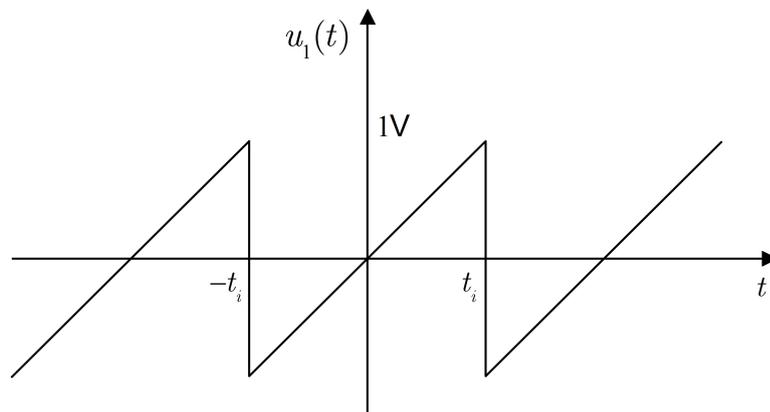


Abbildung 17: Sägezahn-Signal

Laut Korrespondenztabelle ist die Laplace-Transformierte  $U_1(s) = \frac{2V}{100\mu\text{s}} \cdot \frac{1}{s^2}$ . Um die

Berechnung zu vereinfachen, wird  $\frac{2V}{100\mu\text{s}}$  als  $k$  bezeichnet. Nun kann man  $U_2(s)$

mit Hilfe der Übertragungsfunktion berechnen:

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot H(s) = \frac{k}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau} = \frac{k}{s^2(1 + s \cdot \tau)} \quad (3.13)$$

Bei der Laplace-Transformation wird  $s = j2\pi f$  gesetzt. Bei hohen Frequenzen kann man 1 im Nenner vernachlässigen, d.h. bei hohen Frequenzen in RC-Tiefpass lautet das Ausgangssignal im Bildbereich:

$$U_2(s) = \frac{1}{s^3 \cdot \tau} \quad (3.14)$$

Die Laplace-Korrespondenz von  $t^2$  lautet:

$$\frac{1}{2} t^2 \circ \bullet \frac{1}{s^3} \quad (3.15)$$

Mithilfe der Korrespondenz wird das Ausgangssignal im Zeitbereich ermittelt:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{1}{2} t^2 \cdot \frac{k}{\tau} = \frac{2V}{100\mu s} \cdot \frac{1}{20K\Omega \cdot 10nF} \cdot t^2 = \frac{2V}{100\mu s} \cdot \frac{1}{20K \frac{V}{A} \cdot 10n \frac{A \cdot s}{V}} \cdot t^2 \\ &= \frac{2V}{100\mu s} \cdot \frac{1}{200\mu s} \cdot \frac{1}{2} t^2 = 50s^{-2} \cdot 10^6 \cdot t^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bei  $t_i = 50\mu s$  ist der Wert des Ausgangssignals  $u_2(t_i = 50\mu s) = 0.125V = 125mV$ .

Abbildung 18 zeigt die grafische Darstellung.

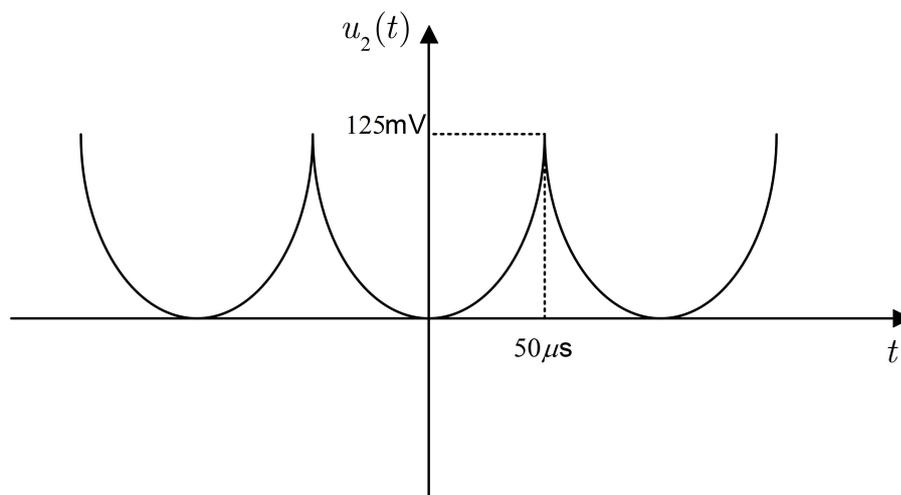


Abbildung 18: Systemantwort auf Sägezahn-Signal am Eingang

Am Beispiel mit einem Eingangs-Sägezahn-Signal sieht man, dass eine Gerade  $y = kt$  bei hohen Frequenzen durch das zeitkontinuierliche RC-Tiefpass-System in eine Parabel  $y = t^2$  umgewandelt wird. In der Mathematik wird diese „Umwandlung“ als Integration bezeichnet. Zusammenfassend kann man sagen, dass ein RC-Tiefpass im Zeitverhalten für hohen Frequenzen wie ein Integrator funktioniert.

### 3.1.3 Realistische Impulsantwort und Dachabfall

Die Impulsfunktion besteht aus einem Nadelimpuls  $\delta(t)$  mit der Fläche 1, den man als Dirac-Impuls bezeichnet. Die Definition des Dirac-Impulses ist:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für sonst} \end{cases}, \quad \int \delta(t) dt = 1 \quad (3.17)$$

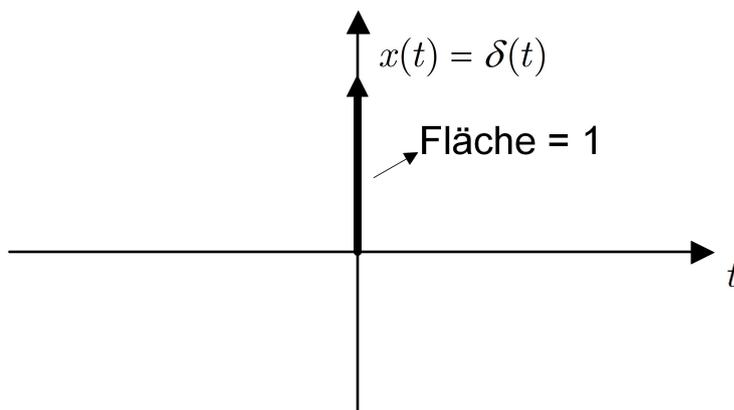
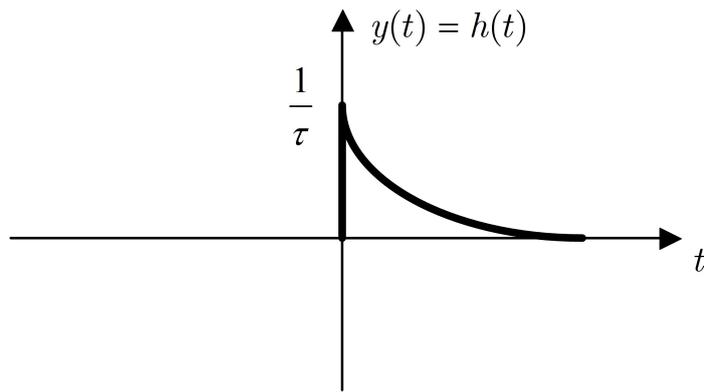


Abbildung 19: Dirac-Impuls

Die Antwort eines LTI Systems auf Erregung mit der Impulsfunktion  $\delta(t)$  ist die Impulsantwort  $h(t)$ . Die Berechnung der Impulsantwort beim RC-Tiefpass System ist:

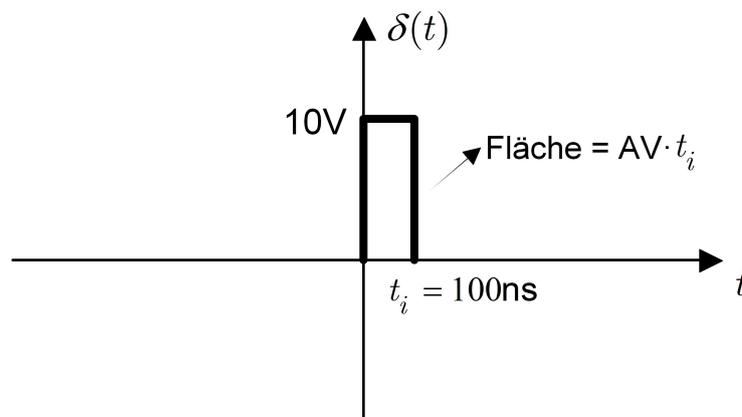
$$y(t) = x(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t) = LT^{-1}(H(s)) = LT^{-1}\left(\frac{1}{1+s \cdot \tau}\right) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot s(t) \quad (3.18)$$



**Abbildung 20: Impulsantwort eines RC-Tiefpasses**

Die Erzeugung einer Impulsfunktion, deren Amplitude unendlich ist, ist unmöglich. In diesem Fall wird der Dirac-Impuls durch eine Rechteckfunktion mit sehr kurzer Impulsdauer ersetzt, damit man die Impulsantwort simulieren kann. Eine praktische Annäherung an  $\delta(t)$  wäre z.B.:

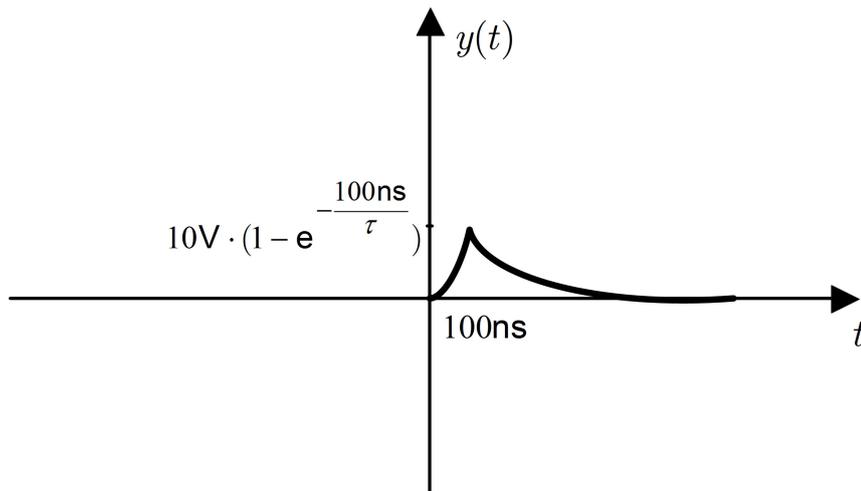
$$x(t) = 10\text{V} \cdot (s(t) - s(t - 100\text{ns})) \quad (3.19)$$



**Abbildung 21: Praktische realisierte Impulsfunktion**

Die „realistische“ Impulsantwort ist eigentlich eine Subtraktion von um  $t_i$  zeitverschobene zwei Sprungantworten. Die Sprungantwort  $a(t)$  ist die Antwort eines LTI Systems auf Erregung mit der Sprungfunktion  $s(t)$ .

$$y(t) = 10\text{V} \cdot (a(t) - a(t - 100\text{ns})) = 10\text{V} \cdot \left( \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot s(t) - \left( 1 - e^{-\frac{t-100\text{ns}}{\tau}} \right) \cdot s(t - 100\text{ns}) \right) \quad (3.20)$$



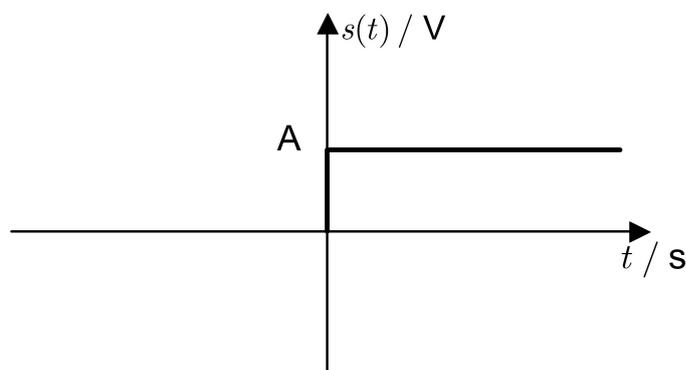
**Abbildung 22: Impulsantwort in der Praxis**

Aber die Impulszeit 100ns ist so kurz, dass das System auf die Sprungfunktion gar nicht reagieren kann. Deshalb ist die oben geschriebene Impulsantwort nicht korrekt. (Abbildung 22)

In der Theorie wird bei Sprungfunktion und Sprungantwort keine Maßeinheit angegeben. Die Impulsfunktion hat theoretisch immer eine Fläche 1. Für die Impulsantwort  $h(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot s(t)$  ist die Maßeinheit  $\frac{1}{\frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V}} = \frac{1}{s}$ .

Im Gegensatz dazu muss in der Praxis eine Spannung für die Sprung- und Impulsfunktion angenommen werden. In der Praxis sehen die Sprung- und Impulsfunktion so aus:

$$s(t) = A \cdot s(t), \quad \delta(t) = A \cdot t_i \cdot \delta(t) \quad (3.21)$$



**Abbildung 23: Praktische Sprung- und Impulsfunktion mit Maßeinheit**

### 3.1.4 RC-Tiefpass im Frequenzbereich

Die Systemfunktion des RC-Tiefpasses (siehe Abbildung 15) lautet:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{s \cdot C}}{R + \frac{1}{s \cdot C}} = \frac{1}{1 + s \cdot C \cdot R} = \frac{1}{1 + s \cdot \tau} \quad (3.22)$$

In komplexer Schreibweise schreibt man:

$$H(s) = H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot e^{j \cdot (-\arctan(\omega RC))} \quad (3.23)$$

Durch Zerlegung gemäß  $H(s) = |H| \cdot e^{j\Phi}$  erhält man den Frequenzgang des Betrags und der Phasenverschiebung:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \varphi = -\arctan \omega RC \quad (3.24)$$

$$A(\omega) / \text{dB} = 20 \log \left( \frac{1}{|H(j\omega)|} \right) = 20 \log \left( \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \right), \quad \varphi = -\arctan \omega RC \quad (3.25)$$

Die beide Kurvenverläufe sind in Abbildung 24 dargestellt.

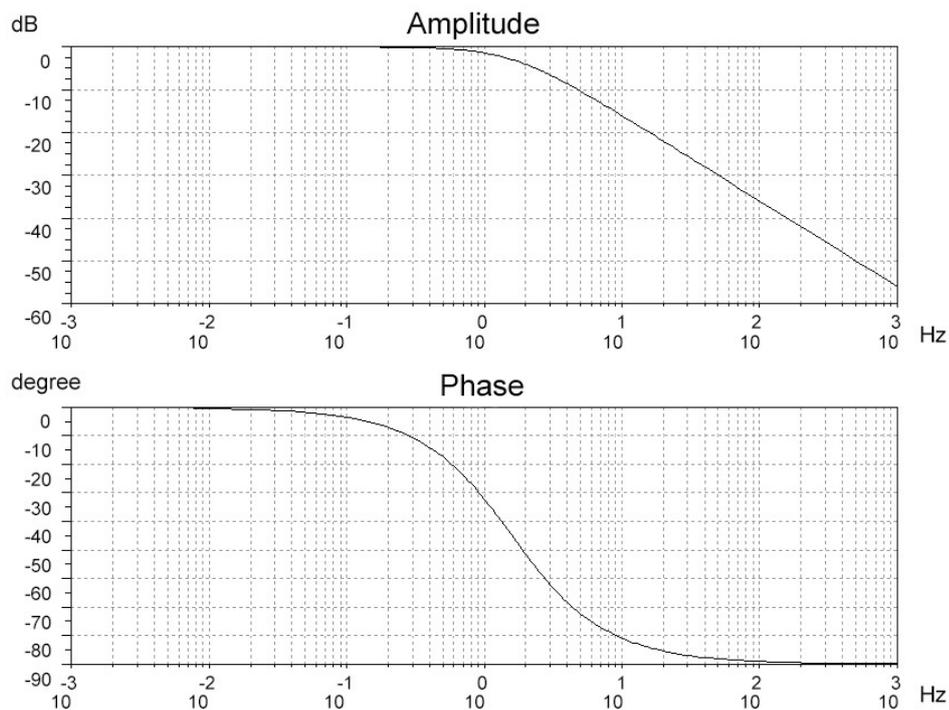


Abbildung 24: Bode-Diagramm eines Tiefpasses

Zur Berechnung der 3 dB-Grenzfrequenz setzt man den Frequenzgang des Betrags gleich  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.26)$$

Dann lautet die Grenzfrequenz  $f_g$ :

$$f_g = \frac{1}{2\pi} \omega_g = \frac{1}{2\pi RC} \quad (3.27)$$

Die Phasenverschiebung beträgt bei dieser Frequenz nach dem Frequenzgang  $\varphi = -45^\circ$ . Zusammenfassend kann man sagen:

1. Bei tiefen Frequenzen  $f \ll f_g$  ist  $|H(j\omega)| = 1 = 0\text{dB}$
2. Bei hohen Frequenzen  $f \gg f_g$  gilt  $|H(j\omega)| = \frac{1}{\omega RC}$ , d.h. die Verstärkung ist umgekehrt proportional zur Frequenz. Bei einer Verzehnfachung der Frequenz verringert sich die Verstärkung demnach um den Faktor 10, d.h. sie nimmt mit 20dB pro Dekade bzw. 6dB pro Oktave ab. Die grafische Darstellung erfolgt in Abbildung 25.

3. Bei  $f = f_g$  ist  $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3\text{dB}$

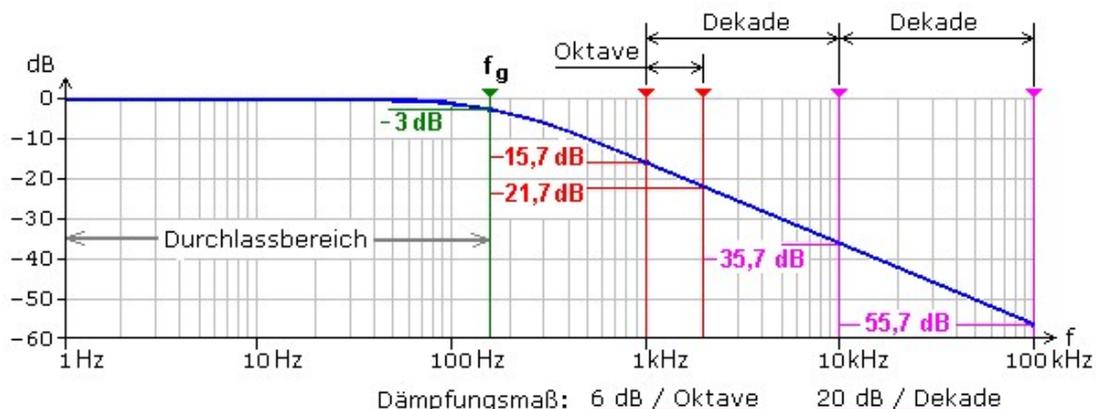


Abbildung 25: Betrags-Frequenzgang des Betrags

## 3.2 RC-Hochpass

Ein Hochpass ist eine Schaltung, die hohe Frequenz unverändert überträgt und bei tiefen Frequenzen eine Abschwächung und Phasenvoreilung bewirkt. Die einfachste Schaltung eines RC-Hochpasses zeigt Abbildung 26.

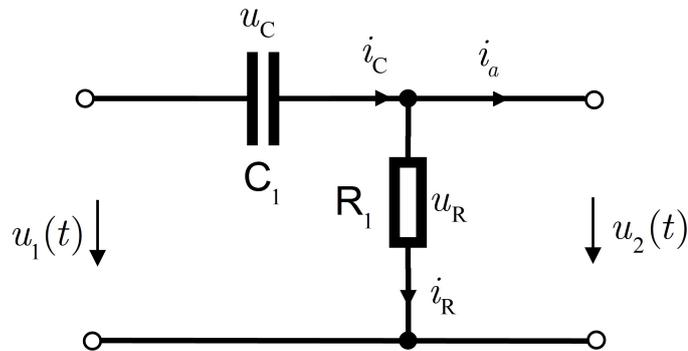


Abbildung 26: RC-Hochpass

### 3.2.1 DGL und Sprungantwort im Zeitbereich

Die Maschengleichung des RC-Hochpasses liefert:  $u_1(t) = u_2(t) + u_C(t)$ . Für den Kondensator gilt:  $u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$ . Mit  $i_R(t) = \frac{u_2(t)}{R}$  und  $i_R(t) = i_C(t)$  entsteht die Gleichung:

$$u_1(t) = \frac{1}{C} \int \frac{u_2(t)}{R} dt + u_2(t) = \frac{1}{RC} \int u_2(t) dt + u_2(t) \quad (3.28)$$

Mit  $\tau = RC$  und differenzieren ergibt sich die DGL zu:

$$u_2(t) + \tau \cdot \dot{u}_2(t) = \tau \cdot \dot{u}_1(t) \quad (3.29)$$

Die Lösung der Sprungantwort des RC-Hochpasses im Zeitbereich besteht aus einer homogenen und einer speziellen Lösung. Für die homogene Lösung wird die rechte Seite der DGL, die sogenannte Sprungfunktion, zu 0 gesetzt.

$$u_2(t) + \tau \cdot \dot{u}_2(t) = 0 \quad (3.30)$$

Nun wird ein exponentieller Ansatz  $u_{2\text{homogen}}(t) = K \cdot e^{-\lambda t}$ ,  $K$ : Konstant in diese Gleichung eingesetzt, und man erhält:  $\lambda = \frac{1}{\tau}$ .

$$u_{2\text{homogen}}(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad K: \text{Konstante}, \tau = RC \quad (3.31)$$

Die spezielle Lösung wird aus einem speziellen Systemzustand gewonnen, in dem  $t \rightarrow \infty$  geht und der Kondensator im RC-Hochpass völlig aufgeladen ist, d.h. der Strom und die Spannung am Widerstand sind alle zu 0 gesetzt. Deswegen lautet in diesem Zustand die spezielle Lösung:

$$u_{2\text{speziell}}(t) = u_2(t \rightarrow \infty) = u_R(t \rightarrow \infty) = 0V \quad (3.32)$$

Die Konstante  $K$  der homogenen Lösung berechnet sich aus einer Anfangsbedingung, z.B. wenn die Zeit  $t = 0$  ist, beginnt sich der Kondensator aufzuladen, deswegen ist die Spannung am Kondensator bei  $t = 0$  gleich  $U_0$ . Mit dem „Wert“ der Sprungfunktion gleich  $U_0$  hat man:

$$u_2(t = 0) = K e^0 = U_0 \Rightarrow K = U_0 \quad (3.33)$$

Zusammengefasst lautet die Sprungantwort des RC-Hochpasses:

$$u_2(t) = u_{2\text{homogen}}(t) + u_{2\text{speziell}}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.34)$$

Quelle: [1] Seite 14-17

### 3.2.2 Eigenschaften im Zeitbereich

Die DGL des RC-Hochpasses lautet:

$$u_2(t) + \tau \cdot \dot{u}_2(t) = \tau \cdot \dot{u}_1(t) \quad (3.35)$$

Mit der Laplace-Transformation wird die DGL in den Frequenzbereich transformiert:

$$U_2(s) + \tau s U_2(s) = \tau s U_1(s) \quad (3.36)$$

Die Systemfunktion des RC-Hochpasses lautet:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\tau s}{1 + \tau s} \quad (3.37)$$

Um die Eigenschaften des RC-Hochpasses im Zeitbereich zu untersuchen, wird ein Testsignal als Eingangssignal in das Hochpass-System gegeben. Beim Hochpass wird wie beim Tiefpass ein Sägezahn-Signal genommen, die mathematische Gleichung des periodischen Säge-Signals ist:

$$u_1(t) = \frac{2V}{100\mu s} t, \quad -t_i \leq t \leq t_i \quad (3.38)$$

Die grafische Beschreibung sieht man wieder in der Abbildung 16. Laut Korrespondenz der Laplace-Transformation ist  $U_1(s) = \frac{2V}{100\mu s} \cdot \frac{1}{s^2}$ . Um die Berechnung zu

vereinfachen, wird  $\frac{2V}{100\mu s}$  als  $k$  bezeichnet. Nun kann man  $U_2(s)$  mit der Systemfunktion herleiten:

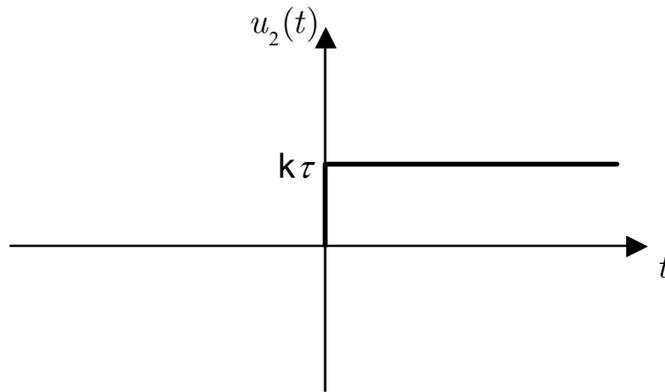
$$U_2(s) = U_1(s) \cdot H(s) = \frac{k}{s^2} \cdot \frac{s \cdot \tau}{1 + s \cdot \tau} = \frac{k \cdot \tau}{s(1 + s \cdot \tau)} = \frac{k}{s\left(\frac{1}{\tau} + s\right)} \quad (3.39)$$

Bei der Laplace-Transformation wird  $s$  durch  $jw$  ersetzt. In der RC-Hochpass-Schaltung ist die Zeitkonstante  $\tau$  hundert Mikrosekunde. Das bedeutet, der Kehrwert von der Zeitkonstante ist so groß, dass man  $s$  bei Niederfrequenz einfach vernachlässigen kann. Nach der Vernachlässigung sieht  $U_2(s)$  so aus:

$$U_2(s) = \frac{k}{\frac{1}{\tau} + s} = \frac{k\tau}{s} \quad (3.40)$$

In der Laplace-Transformation entspricht  $\frac{1}{s}$  im Frequenzbereich der Sprungfunktion  $s(t)$  im Zeitbereich. Laut dieser Korrespondenz ist das Ausgangssignal im Zeitbereich:

$$u_2(t) = k\tau \cdot s(t) \quad (3.41)$$



**Abbildung 27: Systemantwort auf von Sägezahn-Signal am Hochpass-Eingang**

Das Beispiel mit einem Sägezahn-Signal am RC-Hochpass-Eingang hat schon verdeutlicht, dass eine niederfrequente lineare Funktion beim RC-Hochpass eine konstante Funktion am Ausgang zur Folge hat. In der Mathematik wird das als Differentiation beschrieben. Zusammenfassend kann man sagen, dass ein RC-Hochpass-System bei tiefen Frequenz als Differenzier-Glied fungiert.

### 3.2.3 Frequenzverhalten des RC-Hochpasses

Der Frequenzgang der Verstärkung und der Phasenverschiebung wird wieder aus der komplexen Schreibweise über die Systemfunktion hergeleitet:

$$H(j\omega) = \frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega} = \frac{1}{\frac{1}{\tau j\omega} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}} \cdot e^{j \arctan \frac{1}{\omega\tau}} \quad (3.42)$$

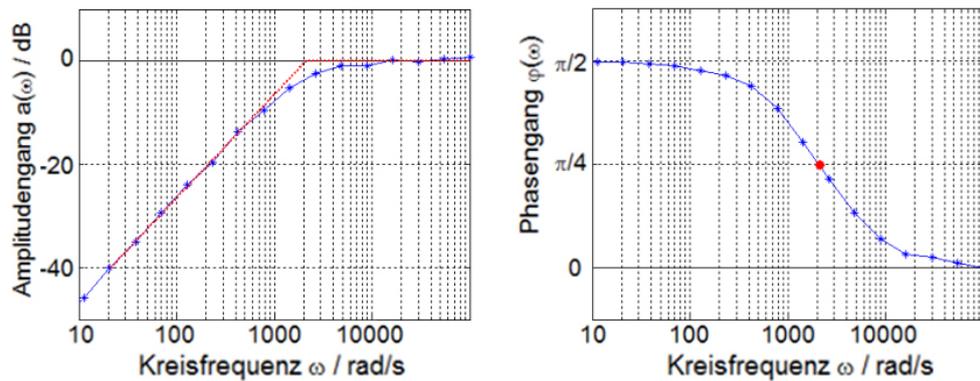
Daraus ergibt sich der Amplituden- und Phasengang im Frequenzbereich:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}}, \quad \varphi = \arctan \frac{1}{\omega\tau} \quad (3.43)$$

$$A(\omega) / \text{dB} = 20 \log \left( \frac{1}{|H(j\omega)|} \right) = 20 \log \left( \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} \right), \quad \varphi = \arctan \frac{1}{\omega\tau} \quad (3.44)$$

Die beiden Frequenzverläufe sind in Abbildung 28 dargestellt. Für die Grenzfrequenz gilt genau wie beim Tiefpass.

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC} \quad (3.45)$$



**Abbildung 28: Bode-Diagramm des RC-Hochpasses**

Aus Abbildung 28 ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

1. Bei hohen Frequenzen  $f \gg f_g$  ist  $|H(j\omega)| = 1 = 0\text{dB}$
2. Bei tiefen Frequenzen  $f \ll f_g$  gilt  $|H(j\omega)| = \omega RC$ , d.h. die Verstärkung ist umgekehrt proportional zur Frequenz. Die Steigerung beträgt laut Amplitudengang in Abbildung 28 also +20dB pro Dekade bzw. +6dB pro Oktave
3. Bei  $f = f_g$  ist wie beim Tiefpass  $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3\text{dB}$

Quelle: [1] Seite 14-17

### 3.3 System 2. Ordnung Bandpass-Filter

Als Bandpass-Filter wird ein System bezeichnet, welches nur Signale in einem bestimmten Frequenzband passieren lässt. Andere Signale, deren Frequenzen entweder oberhalb oder unterhalb des beschränkten Frequenzbereiches sind, werden gesperrt und abgeschwächt. In diesem Abschnitt wird ein System 2.Ordnung, ein Bandpass-Filter in Form einer Sallen-Key-Schaltung (Abbildung 29) eingeführt, um die Eigenschaften eines Bandpasses zu analysieren.

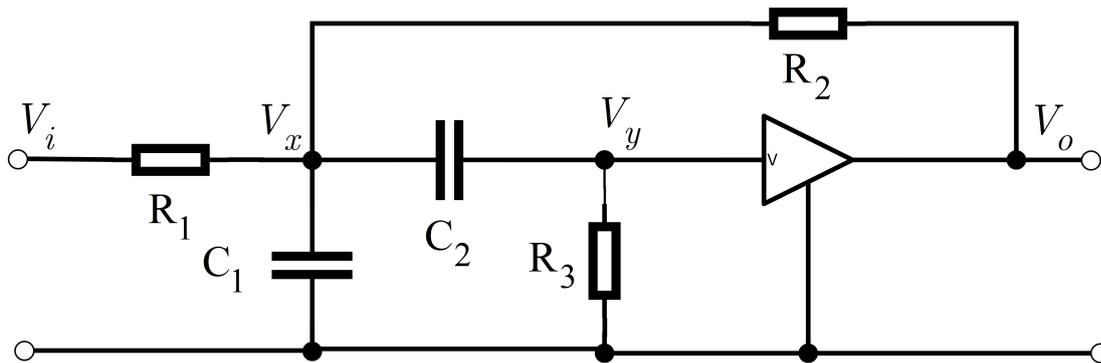


Abbildung 29: Sallen-Key-Bandpass-Schaltung

### 3.3.1 Systemfunktion

Die Sallen-Key-Schaltung aus Abbildung 29 kann man mit einer DGL nicht einfach beschreiben. Um die Systemfunktion der Sallen-Key-Schaltung zu erhalten, werden 3 Methoden vorgestellt.

#### 1. Gerichtete Graphen

Beim gerichteten Graphen wird die ganze Schaltung unter Zuhilfenahme von Knoten und Linien vereinfacht, siehe Abbildung 30.

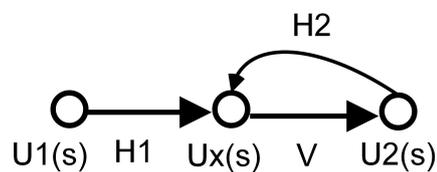


Abbildung 30: Gerichtete Graphen

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 U_2(s) &= v \cdot [U_1(s) \cdot H_1 + H_2(s) \cdot H_2] \\
 U_2(s) \cdot (1 - v \cdot H_2) &= U_1(s) \cdot H_1 \cdot v
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{H_1 \cdot v}{1 - v \cdot H_2}$$

$$U_x(s) = H_1 \cdot U_1(s) + H_2 \cdot U_2(s)$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{wenn } U_1(s) = 0 & \text{wenn } U_2(s) = 0 \\
 U_x(s) = H_2 \cdot U_2(s) & U_x(s) = H_1 \cdot U_1(s)
 \end{array} \tag{3.47}$$

$$\begin{array}{ll}
 H_2 = \frac{U_x(s)}{U_2(s)} (U_1(s) = 0) & H_1 = \frac{U_x(s)}{U_1(s)} (U_2(s) = 0)
 \end{array}$$

Netzwerk für  $H_1$  ;

Netzwerk für  $H_2$  ;

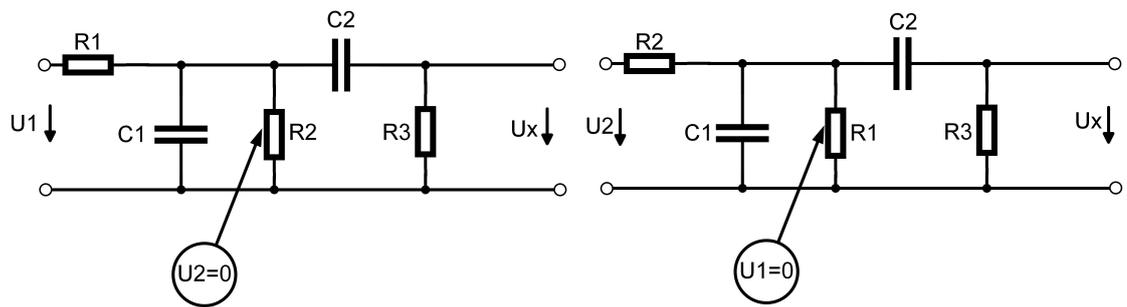


Abbildung 31: Netzwerke

In der Abbildung 31 kann man sehen, dass die Netzwerke von  $H_1(s)$  und  $H_2(s)$  die gleiche Struktur haben. Nur  $R_1$  und  $R_2$  sind umgekehrt ( $R_1 \leftrightarrow R_2$ ), d.h. wenn die eine Systemfunktion bestimmt wird, erhält man die andere ebenfalls durch Vertauschen.

Bestimmung von  $H_1(s)$  :

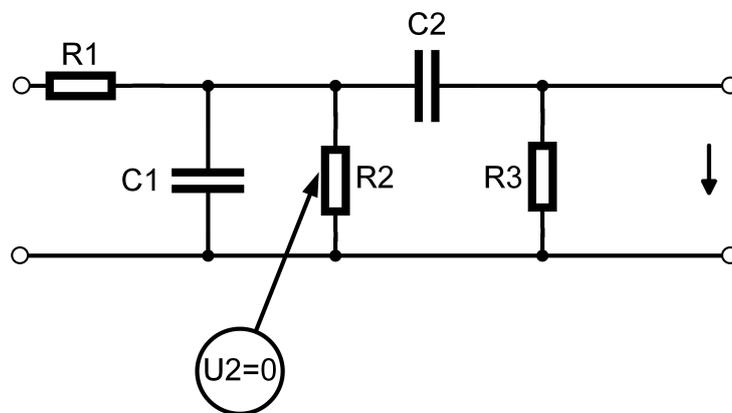


Abbildung 32: Netzwerk für H1

$$\begin{aligned}
H_1(s) &= \frac{U_x}{U_m} \cdot \frac{U_m}{U_1} \\
&= \frac{R_3}{R_3 + \frac{1}{sC_2}} \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_1}}{R_2 + \frac{1}{sC_1}} \cdot (R_3 + \frac{1}{sC_2})}{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_1}}{R_2 + \frac{1}{sC_1}} + (R_3 + \frac{1}{sC_2})} \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_1}}{R_2 + \frac{1}{sC_1}} \cdot (R_3 + \frac{1}{sC_2})}{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_1}}{R_2 + \frac{1}{sC_1}} + (R_3 + \frac{1}{sC_2})}}
\end{aligned}
\tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
H_1(s) &= R_3 \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_1}}{R_2 + \frac{1}{sC_1}}}{R_1 \cdot \left( \frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_1}}{R_2 + \frac{1}{sC_1}} + (R_3 + \frac{1}{sC_2}) \right) + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_1}}{R_2 + \frac{1}{sC_1}} \cdot (R_3 + \frac{1}{sC_2})}
\end{aligned}
\tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
H_1(s) &= \frac{R_2 \cdot R_3 \cdot \frac{1}{sC_1}}{R_1 \cdot R_2 \cdot \frac{1}{sC_1} + (R_1 \cdot R_3 + \frac{R_1}{sC_2}) \cdot (R_2 + \frac{1}{sC_1}) + R_2 \cdot \frac{1}{sC_1} \cdot (R_3 + \frac{1}{sC_2})}
\end{aligned}
\tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
H_1(s) &= \frac{R_2 \cdot R_3 \cdot C_2 \cdot s}{R_1 \cdot R_2 \cdot sC_2 + (R_1 \cdot R_3 \cdot sC_2 + R_1) \cdot (R_2 \cdot sC_1 + 1) + R_2 \cdot (R_3 \cdot sC_2 + 1)}
\end{aligned}
\tag{3.51}$$

Zur Vereinfachung:

$$s \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 + s \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 + R_1 + s^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 + s \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + s \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot C_2 + R_2 = Z \quad (3.52)$$

$$H_1(s) = \frac{s \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot C_2}{Z} \quad (3.53)$$

Wie bereits erwähnt, kann man sofort die Systemfunktion von  $H_2(s)$  herleiten:

$$H_2(s) = \frac{s \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot C_2}{Z} \quad (3.54)$$

## 2. Matrix-Parameter

Mit Matrix-Parametern kann man Folgendes formulieren:

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot I_2 \\ I_1 &= A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot I_2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Die 4 Ketten-Parameter:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{U_1}{U_2} (I_2 = 0), A_{12} = \frac{U_1}{I_2} (U_2 = 0) \\ A_{21} &= \frac{I_1}{U_2} (I_2 = 0), A_{22} = \frac{I_1}{I_2} (U_2 = 0) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Im Verfahren 1 wurde schon erklärt, dass die Sallen-Key-Schaltung aus 2 Netzwerken besteht. Die Netzwerke von  $H_1(s)$  und  $H_2(s)$  haben die gleiche Struktur, nur  $R_1$  und  $R_2$  werden vertauscht. ( $R_1 \leftrightarrow R_2$ )

Netzwerk  $H_1(s)$ :

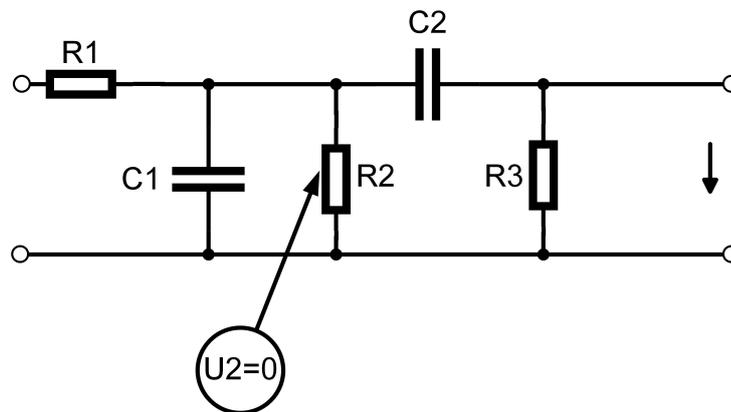


Abbildung 33: Netzwerk H1

Bei diesem Verfahren wird das Netzwerk  $H_1(s)$  in zwei Teile zerlegt.

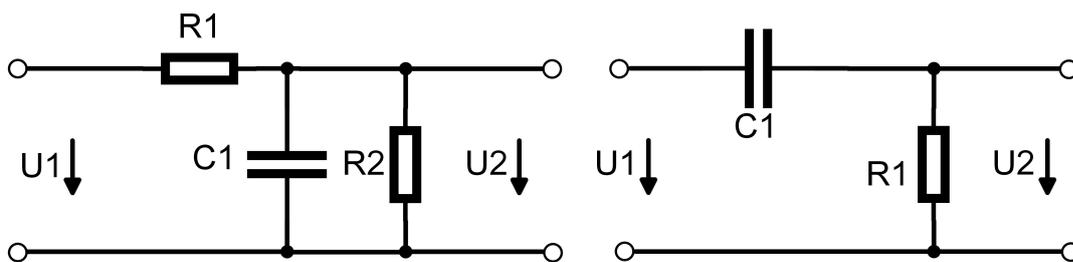


Abbildung 34: Zwei Teile der Netzwerke

Aus den beiden Graphen kann man die Ketten-Parameter der zwei Teilen ermitteln.

$$A_{11}(I) = \frac{U_1}{U_2} (I_2 = 0) = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{s \cdot C_1}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{s \cdot C_1}}{R_2 + \frac{1}{s \cdot C_1}}} \quad (3.57)$$

$$= \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot \frac{1}{s \cdot C_1} + R_2 \cdot \frac{1}{s \cdot C_1}}{R_2 \cdot \frac{1}{s \cdot C_1}} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot s \cdot C_1 + R_1 + R_2}{R_2} \quad (3.58)$$

$$A_{12(\text{I})} = \frac{U_1}{I_2}(U_2 = 0) = R_1 \quad (3.59)$$

$$A_{21(\text{I})} = \frac{I_1}{U_2}(I_2 = 0) = \frac{1}{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{s \cdot C_1}}{R_2 + \frac{1}{s \cdot C_1}}} = \frac{R_2 + \frac{1}{s \cdot C_1}}{R_2 \cdot \frac{1}{s \cdot C_1}} = \frac{1 + s \cdot C_1 \cdot R_2}{R_2} \quad (3.60)$$

$$A_{22(\text{I})} = \frac{I_1}{I_2}(U_2 = 0) = 1 \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} A_{11(\text{II})} &= \frac{U_1}{U_2}(I_2 = 0) = \frac{R_3 + \frac{1}{s \cdot C_2}}{R_3} = \frac{1 + s \cdot C_2 \cdot R_3}{s \cdot C_2 \cdot R_3}, \\ A_{12(\text{II})} &= \frac{U_1}{I_2}(U_2 = 0) = \frac{1}{s \cdot C_2} \\ A_{21(\text{II})} &= \frac{I_1}{U_2}(I_2 = 0) = \frac{1}{R_3}, \\ A_{22(\text{II})} &= \frac{I_1}{I_2}(U_2 = 0) = 1 \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} A_{(\text{I})} &= \begin{pmatrix} \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot s \cdot C_1 + R_1 + R_2}{R_2} & R_1 \\ \frac{1 + s \cdot C_1 \cdot R_2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \\ A_{(\text{II})} &= \begin{pmatrix} \frac{1 + s \cdot C_2 \cdot R_3}{s \cdot C_2 \cdot R_3} & \frac{1}{s \cdot C_2} \\ \frac{1}{R_3} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Deswegen

$$A_{\text{gesamt}} = A_{(\text{I})} \cdot A_{(\text{II})} = \begin{pmatrix} \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot s \cdot C_1 + R_1 + R_2}{R_2} & R_1 \\ \frac{1 + s \cdot C_1 \cdot R_2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1 + s \cdot C_2 \cdot R_3}{s \cdot C_2 \cdot R_3} & \frac{1}{s \cdot C_2} \\ \frac{1}{R_3} & 1 \end{pmatrix}$$

(3.64)

$$A_{11\text{gesamt}} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot s \cdot C_1 + R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{1 + s \cdot C_2 \cdot R_3}{s \cdot C_2 \cdot R_3} + \frac{R_1}{R_3}$$

$$\begin{aligned} A_{11\text{gesamt}} \\ &= \frac{Z}{s \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot C_2} \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$H_1(s) = \frac{1}{A_{11\text{gesamt}}} \quad \text{weil } A_{11\text{gesamt}} = \frac{U_{1\text{gesamt}}}{U_{2\text{gesamt}}} (I_2 = 0) \text{ ist.} \quad (3.66)$$

$$\text{Und } H_1(s) = \frac{U_{2\text{gesamt}}}{U_{1\text{gesamt}}} \quad (3.67)$$

$$H_1(s) = \frac{s \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot C_2}{Z} \quad (3.68)$$

$$H_2(s) = \frac{s \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot C_2}{Z} \quad (3.69)$$

$$\text{Systemfunktion } H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{H_1 \cdot v}{1 - v \cdot H_2} \quad (3.70)$$

$$H(s) = \frac{v \cdot \frac{s \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot R_3}{Z}}{1 - v \cdot \frac{s \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_3}{Z}} = \frac{v \cdot s \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot R_3}{Z - v \cdot s \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_3} \quad (3.71)$$

$$H(s) = \frac{v}{R_1 \cdot C_1}$$

$$\frac{s}{s^2 + s \left( \frac{1}{C_1 \cdot R_3} + \frac{1}{C_1 \cdot R_2} + \frac{1}{C_1 \cdot R_1} + \frac{1}{C_2 \cdot R_3} + \frac{v}{C_1 \cdot R_2} \right) + \frac{R_1 + R_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}} \quad (3.72)$$

$$\text{Zur Vereinfachung: } \frac{v}{R_1 \cdot C_1} = k \quad (3.73)$$

$$\frac{1}{C_1 \cdot R_3} + \frac{1}{C_1 \cdot R_2} + \frac{1}{C_1 \cdot R_1} + \frac{1}{C_2 \cdot R_3} + \frac{v}{C_1 \cdot R_2} = a_1 \quad (3.74)$$

$$\frac{R_1 + R_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3} = a_0 \quad (3.75)$$

Zusammenfassung für die Systemfunktion:

$$H(s) = k \cdot \frac{s}{s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \quad \text{mit} \quad (3.76)$$

$$k = \frac{v}{R_1 \cdot C_1}, \quad (3.77)$$

$$a_1 = \frac{1}{C_1 \cdot R_3} + \frac{1}{C_1 \cdot R_2} + \frac{1}{C_1 \cdot R_1} + \frac{1}{C_2 \cdot R_3} + \frac{v}{C_1 \cdot R_2}, \quad (3.78)$$

$$a_0 = \frac{R_1 + R_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3} \quad (3.79)$$

### 3. Knotenpunkt-Verfahren

Das Knotenpunkte-Verfahren wurde schon in der Praxismodul-Arbeit erläutert und die genauen Berechnungen werden deshalb nur im Anhang dargestellt.

#### 3.3.2 Messtechnische Bestimmung der PN-Daten ( $\sigma_x$ und $w_x$ )

Für die Sallen-Key-Schaltung wird angenommen:

$v = +3.1$ ,  $R_1 = R_2 = R = 100\text{k}\Omega$ ,  $C = 1.5\text{nF}$ ,  $R_3 = 33.1\text{k}\Omega$ ,  $33.3\text{k}\Omega$ ,  $50\text{k}\Omega$ ,  $120\text{k}\Omega$ ,  $170\text{k}\Omega$ ,  $183\text{k}\Omega$

Durch Umformung der Systemfunktion können die Extremwerte ermittelt werden.

$$H(s) = k \cdot \frac{1}{s + a_1 + \frac{a_0}{s}} \xrightarrow{s=j \cdot w} H(jw) = k \cdot \frac{1}{a_1 + j \cdot \left(w - \frac{a_0}{w}\right)} \quad (3.80)$$

Bei der Frequenz, bei der  $\left(w - \frac{a_0}{w}\right) = 0$  ist, wird  $|H(jw)|$  maximal und

$\arg(H(jw)) = 0$ . Das ist bei  $f_{MAX} = \frac{\sqrt{a_0}}{2 \cdot \pi}$  der Fall. Im Maximum ist dann

$|H(jw)| = \frac{k}{a_1}$ . Somit können alle Zahlenwerte für alle Widerstände ausgerechnet

werden und in Tabelle 2 werden alle berechneten Zahlenwerte aufgelistet.

$R_3 / \Omega$	33,1k	33,3k	50k	120k	170k
$\sigma_x / \text{Hz}$	-14,64k/ 18,02k	-16,3k	-9,66k	-1,88k	-0,254k
$w_x / \text{Hz}$	-	-	9,18k	8,39k	7,23k
$ H_{MAX}  = \frac{k}{a_1}$	0,627	0,633	1,07	5,47	40,53
$f_{MAX} = \frac{\sqrt{a_0}}{2\pi} / \text{Hz}$	2,6k	2,59k	2,12k	1,37k	1,15k
$a(t)_{1.MAX}$	0,462	0,465	0,69	1,77	2,7
bei $t / \text{ms}$	0,0609	0,061	0,083	0,16	0,212

**Tabelle 2: Zahlenwerte der Kenngrößen des Frequenzverhaltens bei verschiedenen Widerständen**

Für die Stabilität der Sallen-Key-Bandpass-Schaltung gibt es bei der Sprungantwort für diese Schaltung verschiedene Fälle. Die genaue Berechnung der Sprungantworten  $a(t)$  wird schon in der Praxisarbeit vorgestellt (siehe Anhang). Für  $R_3 > 33,3\text{k}\Omega$  ergeben sich zwei einfache konjugiert komplexe Pole (der Oszillationsfall). Im PN-Diagramm  $s_x = \sigma_x + j\omega_x$  liegen die zwei Polstellen in der linken Hälfte der s-Ebene. Die Sprungantwort  $a(t)$  für diesen Fall ist:

$$a(t) = \frac{k}{w_x} \cdot e^{\sigma_x t} \cdot \sin(w_x t) \quad (\text{Abbildung 35}). \quad (3.81)$$

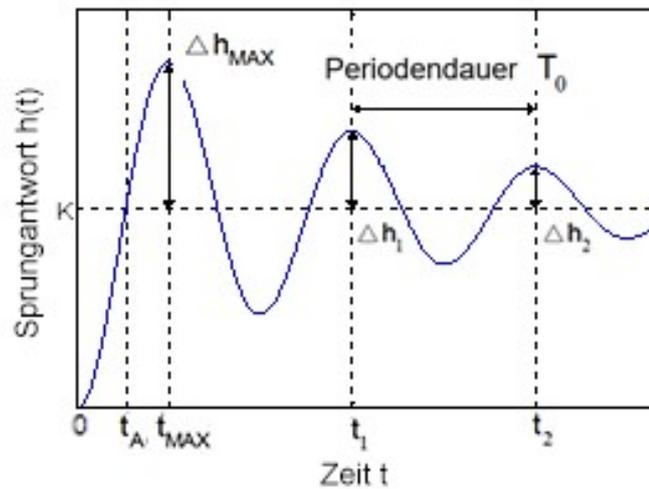


Abbildung 35: Sprungantwort  $a(t)$  des Bandpasses

Um die PN-Daten ( $\sigma_x$  und  $w_x$ ) zu bestimmen, werden zwei Spannungswerte  $u_1$  und  $u_2$  mit entsprechenden Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  mit der Cursorfunktion im Oszilloskop in jeweils einem lokalen Maximum ermittelt. Zu diesen zwei Zeitpunkten ist der Sinus gleich 1, deswegen ergibt sich:

$$a(t_1) = \frac{k}{w_x} \cdot e^{\sigma_x \cdot t_1} = u_1 \quad (3.82)$$

$$a(t_2) = \frac{k}{w_x} \cdot e^{\sigma_x \cdot t_2} = u_2 \quad (3.83)$$

$$\frac{a_1(t)}{a_2(t)} \frac{u_1}{u_2} = e^{\sigma_x(t_1 - t_2)} \rightarrow \sigma_x = \frac{\ln \frac{u_1}{u_2}}{t_1 - t_2} \quad (3.84)$$

$$\omega_x = 2\pi \cdot f_x \rightarrow f_x = \frac{1}{T_x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \rightarrow \omega_x = 2\pi \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \quad (3.85)$$

$$\text{und } k = \frac{u_1 \cdot w_x}{e^{\sigma_x t_1}} = \frac{u_2 \cdot w_x}{e^{\sigma_x t_2}} \quad (3.86)$$

Quelle: [15] Seite 1-3

### 3.3.3 Frequenzverhalten

Der Betrag und die Phasenverschiebung der Sallen-Key-Schaltung wird mit der Systemfunktion in komplexer Schreibweise beschrieben:

$$H(j\omega) = k \cdot \frac{1}{a_1 + j \cdot \left(\omega - \frac{a_0}{\omega}\right)} = \frac{k}{\sqrt{a_1^2 + \left(\omega - \frac{a_0}{\omega}\right)^2}} \cdot e^{-\arctan \frac{\omega - \frac{a_0}{\omega}}{a_1}} \quad (3.87)$$

Daraus ergibt sich Amplitudengang und Phasengang:

$$|H(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{a_1^2 + \left(\omega - \frac{a_0}{\omega}\right)^2}}, \quad \varphi = -\arctan \frac{\omega - \frac{a_0}{\omega}}{a_1} \quad (3.88)$$

Bei  $f \rightarrow 0$  ist der Amplitudengang  $|H(j\omega)| = 0$  und Phasengang  $\varphi = +90^\circ$ .

Bei  $f \rightarrow \infty$  ist der Amplitudengang  $|H(j\omega)| = 0$  und Phasengang  $\varphi = -90^\circ$ .

Bei  $f = f_{\max} = \frac{\sqrt{a_0}}{2\pi}$  hat der Amplitudengang den maximale Wert

$$|H(j\omega)|_{\max} = \frac{k}{a_1} \text{ und der Phasengang } \varphi = 0^\circ.$$

Grenzfrequenz ist diejenige Frequenz, bei der die Übertragungsfunktion gegenüber

dem Maximalwert  $|H(j\omega)|_{\max}$  auf einen Wert  $\frac{|H(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}a_1}$  abgefallen ist.

Dies entspricht einem Abfall um 3dB.

$$|H(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{a_1^2 + \left(\omega - \frac{a_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{k}{a_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega - \frac{a_0}{\omega}}{a_1}\right)^2}} = \frac{k}{\sqrt{2}a_1} \quad (3.89)$$

$$\rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\omega - \frac{a_0}{\omega}}{a_1}\right)^2} = \sqrt{2} \rightarrow \left(\frac{\omega - \frac{a_0}{\omega}}{a_1}\right)^2 = 1$$

Für die Ermittlung der Grenzfrequenz der Bandpass-Schaltung sind nur die positiven Grenzfrequenzen relevant:

$$\left( \frac{w - \frac{a_0}{w}}{a_1} \right)^2 = 1 \rightarrow w^2 - a_1 w \pm a_0 = 0 \rightarrow f^2 - \frac{a_1}{2\pi} f \pm \frac{a_0}{4\pi^2} = 0 \quad (3.90)$$

Mit Umformung der Gleichung

$$(f - f_{g1})(f - f_{g2}) = 0 \rightarrow f_{g1} \cdot f_{g2} = \pm \frac{a_0}{4\pi^2} \quad (3.91)$$

Mit  $a_0 \geq 0$  gilt:

$$f_{g1} \cdot f_{g2} = \frac{a_0}{4\pi^2} = f_{\max}^2 \quad (3.92)$$

Die untere und obere Grenzfrequenzen liegen geometrisch symmetrisch zur Maximum Frequenz  $f_{\max}$ .

Die Zahlenwerte für Verstärkung und Phasenverschiebung bei den Widerständen  $R_3 = 120\text{k}\Omega$  und  $170\text{k}\Omega$  wurden praktisch gemessen. Tabelle 3 und 4 zeigen die Messwerte.

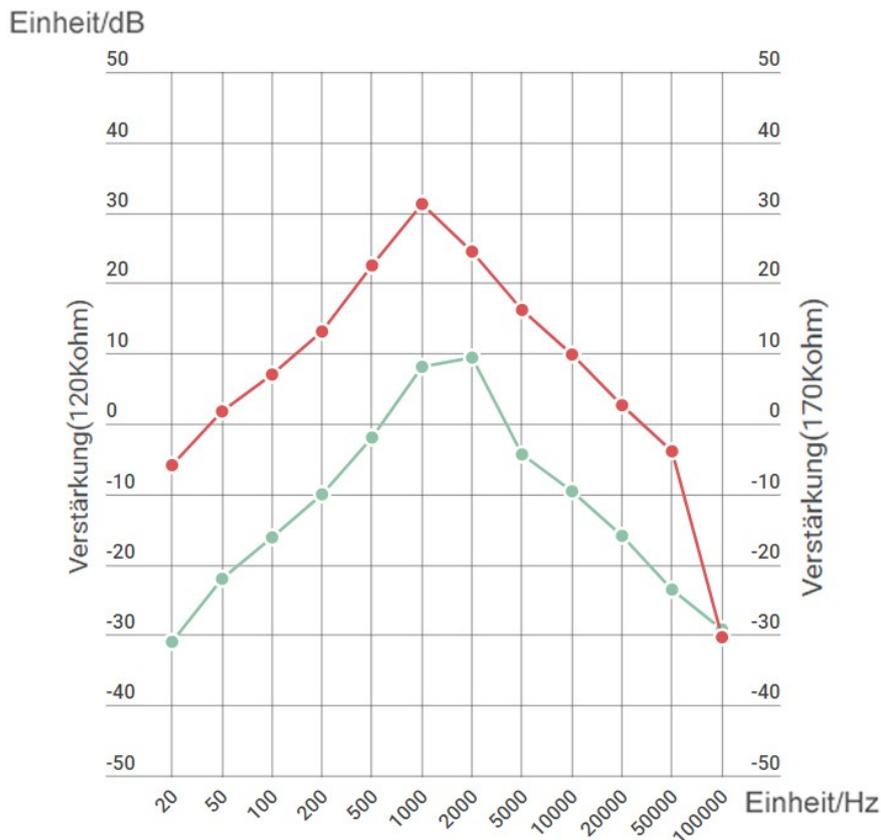
$f / \text{Hz}$	$ H  / \text{mV}$	$20 \log  H  / \text{dB}$	$\varphi / ^\circ$
20	3,1	-30,9	90
50	7,7	-22,09	88
100	15,4	-16,24	87
200	31,12	-10,139	86
500	85,38	-1,938	83
1000	254	8,09	62
2000	293	9,37	-60
5000	70,32	-4,43	-83
10000	33,2	-9,577	-84
20000	16,4	-15,9	-86
50000	6,67	-23,517	-88
100000	3,45	-29,243	-90

**Tabelle 3: Messwerte bei Widerstand  $R_3=120\text{k}\Omega$**

$f / \text{Hz}$	$ H  / \text{mV}$	$20 \log  H  / \text{dB}$	$\varphi / ^\circ$
20	48,6	-6,26	90
50	121	1,655	88
100	242	7,67	87
200	495,7	13,89	86
500	1484	22,42	83
1000	3600	31,12	62
2000	1683	24,5	-60
5000	649,14	16,244	-83
10000	313,07	9,91	-84
20000	134,39	2,542	-86
50000	63,67	-4,013	-88
100000	3,54	-30,45	-90

**Tabelle 4: Messwerte bei Widerstand  $R_3=170\text{k}\Omega$**

Abbildung 36 zeigt die logarithmische Darstellung der Verstärkung in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Flankensteilheit bei  $R_3 = 120\text{k}\Omega$  und  $170\text{k}\Omega$  beträgt jeweils 20dB pro Dekade.



**Abbildung 36: Logarithmische Darstellung der Verstärkung bei  $R_3 = 120\text{k}\Omega$  und  $R_3 = 170\text{k}\Omega$**

### 3.4 Aktives Allpassfilter 1. Ordnung

Bei einem Allpassfilter liegt der Amplitudengang unabhängig von der Frequenzänderung bei einem konstanten Wert, während sich die Phasenverschiebung mit der Frequenz verändert. In diesem Abschnitt wird ein aktives Allpassfilter 1. Ordnung (Abbildung 37) diskutiert.

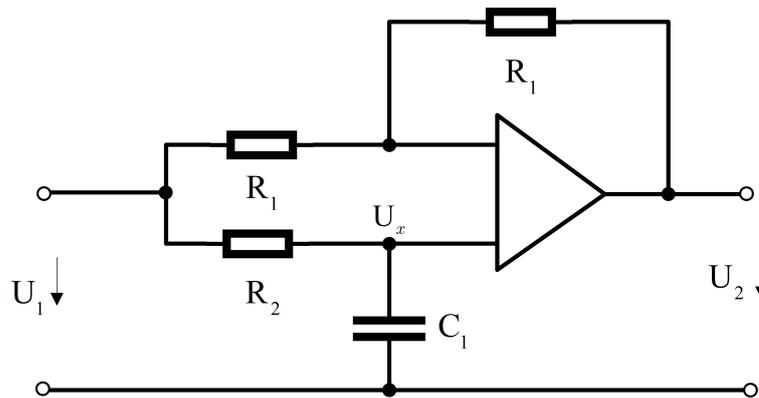


Abbildung 37: Aktive Allpassfilter

#### 3.4.1 Systemfunktion und Frequenzverhalten

Um die Systemfunktion des Allpasses zu untersuchen, werden zwei Maschengleichungen aufgestellt.

$$\frac{U_2 - U_x}{R_1} = \frac{U_x - U_1}{R_1} \rightarrow U_x = \frac{U_1 + U_2}{2} \quad (3.93)$$

$$\frac{-U_x}{\frac{1}{Cs}} = \frac{U_x - U_1}{R} \rightarrow U_1 = (1 + RCs)U_x \quad (3.94)$$

Mit den zwei Maschengleichungen wird die Systemfunktion hergeleitet:

$$\frac{U_2}{U_1} = H(s) = \frac{1 - sRC}{1 + sRC} \quad (3.95)$$

In komplexer Schreibweise hat man den Amplitudengang und die Phasenverschiebung:

$$H(j\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2} \cdot e^{-\arctan(\omega RC)}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2} \cdot e^{\arctan(\omega RC)}} = 1 \cdot e^{-2\arctan(\omega RC)} \quad (3.96)$$

$$|H(j\omega)| = 1, \quad \varphi = -2\arctan(\omega RC) \quad (3.97)$$

Bei  $f \rightarrow 0$  ist der Amplitudengang  $|H(j\omega)| = 1$  und Phasengang  $\varphi = 0^\circ$ . Bei niedrigen Frequenzen ist die Ein- und Ausgangsspannung identisch.

Bei  $f \rightarrow \infty$  ist der Amplitudengang  $|H(j\omega)| = 1$  und Phasengang  $\varphi = -180^\circ$ , bei hohen Frequenzen  $U_1 = -U_2$ .

Bei  $f \rightarrow \frac{1}{RC}$  ist der Amplitudengang  $|H(j\omega)| = 1$  und die Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgang beträgt  $\varphi = -90^\circ$ .

### 3.4.2 Sprungantwort des Allpassfilters

Die Transformierte einer Sprungfunktion  $s(t)$  lautet  $\frac{1}{s}$ , somit folgt:

$$U_2 = \frac{1}{s} \cdot H(s) = \frac{1 - sRC}{s(1 + sRC)} \quad (3.98)$$

Mithilfe der Rücktransformation mit dem Residuen-Kalkül kann man die zugehörige Zeitfunktion berechnen:

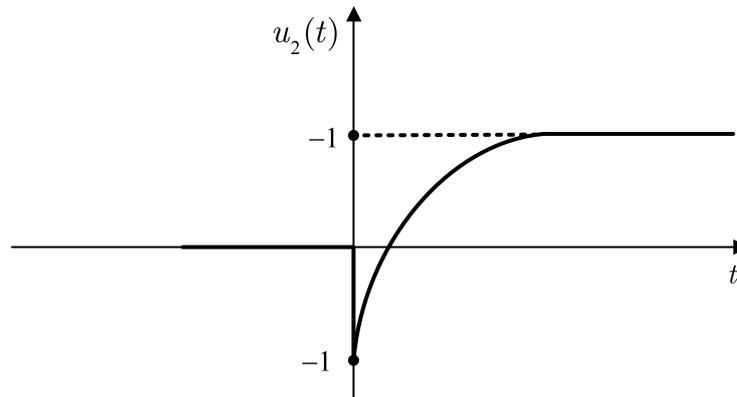
Nach Umformung erhält man:

$$U_2(s) = \frac{\frac{1}{RC} - s}{s(\frac{1}{RC} + s)} \quad (3.99)$$

Mithilfe der Korrespondenztabelle folgt:

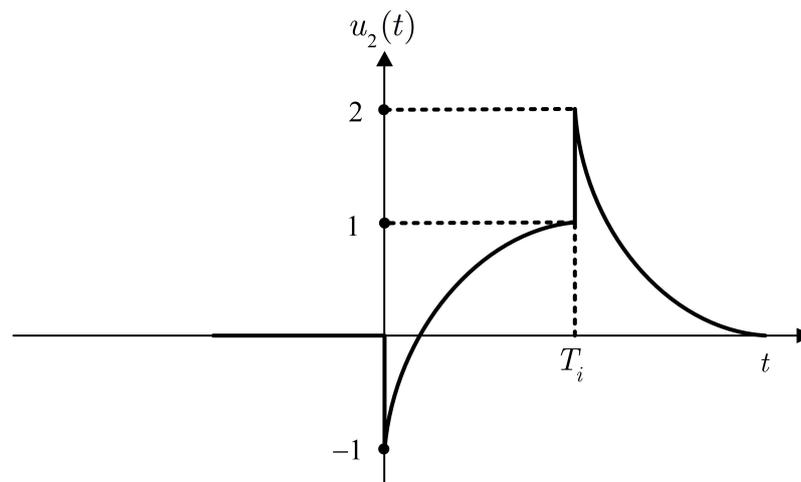
$$u_2(t) = (1 - 2e^{-\frac{1}{RC}t}) \cdot s(t) \quad (3.100)$$

Abbildung 38 zeigt die grafische Darstellung der Sprungantwort des Allpassfilters.



**Abbildung 38: Sprungantwort des Allpassfilters**

Wenn nun ein Rechtecksignal mit  $f = 10\text{Hz}$  als Eingangssignal angelegt wird, lautet die Rechteckantwort:  $u_2(t) = a(t) - a(t - T_i)$ . Abbildung 39 stellt die Rechteckantwort dar.



**Abbildung 39: Rechteckantwort Allpassfilter**

Die Sprungantwort verdeutlicht, dass die Dauer des Anstiegs und Abfalls der Sprungantwort von RC abhängig ist, d.h. mit einem großen RC steigt die Sprungantwort schneller an. Wenn die Impulsdauer  $T_i$  des Rechtecks  $f = 10\text{Hz}$  sehr kurz und  $\tau = RC$  der Allpass-Schaltung sehr groß ist, wird die Sprungantwort ähnlich wie ein Dreieck aussehen, bei einer sehr hohen Frequenz, z.B.  $f = 10\text{kHz}$ , ist das Ausgangssignal  $u_2 = -u_1$  (wegen der Phasenverschiebung  $-180^\circ$ ).

### 3.4.3 Anwendung des Allpassfilters

Die Phasenverschiebung  $\varphi(t)$ , die ein harmonisches Signal  $x(t) = \cos(2\pi ft)$  bei Durchgang durch ein System erfährt, kann man auch als Verzögerung bezeichnen:

$$\cos(2\pi ft + \varphi) = \cos\left(2\pi f\left(t + \frac{\varphi}{2\pi f}\right)\right) = \cos\left(2\pi f\left[t - \tau_p(f)\right]\right) \quad (3.101)$$

Diese frequenzabhängige Zeitverschiebung wird als Phasenlaufzeit beschrieben.

$$\tau_p(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varphi}{f} \quad (3.102)$$

Die meisten Signale bestehen aus mehreren Harmonischen. In diesem Fall tritt die Gruppenlaufzeit (engl: Delay) auf, die wie folgt definiert ist:

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{df} \quad (3.103)$$

Die Gruppen- und Phasenlaufzeit spielt z.B. eine wichtige Rolle bei der Signalmodulation, in der ein Signal mit einer Trägerschwingung moduliert wird. Die Abbildung 40 zeigt ein trägermoduliertes Signal nach dem Durchlauf durch ein System. In der Abbildung 40 sieht man, dass die informationstragende Einhüllende mit der Gruppenlaufzeit  $\tau_g$  verzögert wird, während die Trägerschwingung mit der Phasenlaufzeit verzögert wird.

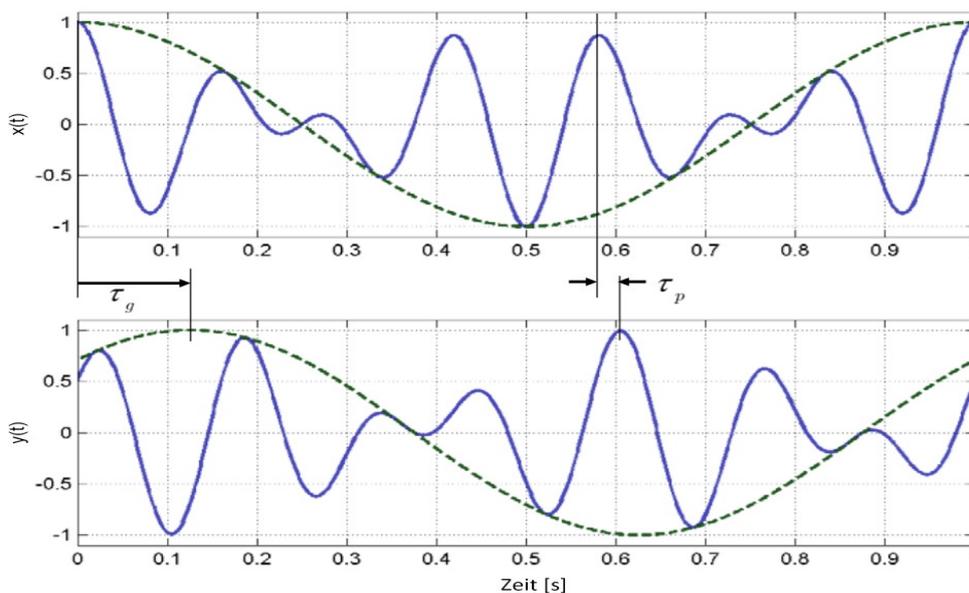


Abbildung 40: Gruppen- und Phasenlaufzeit eines amplitudenmodulierten Signals

Ein besonderer Fall gilt für die lineare Phasenverschiebung  $\varphi = -2\pi f \cdot k$ , dabei ist  $k$  eine Konstante. In diesem Fall stimmen die Phasen- und Gruppenlaufzeit überein, das bedeutet, dass die Phasenlaufzeit gleich der Gruppenlaufzeit für alle Frequenzen ist und alle Signalanteile sind um die gleiche Laufzeit verzögert sind.

$$\tau_p = \frac{-2\pi f \cdot k}{-2\pi f} = k = t_g = \frac{d(-2\pi f \cdot k)}{-2\pi \cdot df} \quad (3.107)$$

Quelle: [4] Seite 281- 284



## 4 Zeitdiskrete Systeme

Im Industriebereich werden immer mehr analoge Signale mit digitalen Systemen wie z.B. Computer oder Mikrocontroller erfasst und verarbeitet. Der wichtigste Grund dafür ist die kostengünstige Umwandlung von analogen Signalen in digitale Signale, die unter Verwendung von Mikrocontrollern oder hochintegrierten Schaltungen realisiert werden können. In Kapitel 4 werden im Vergleich zum Kapitel 3 verschiedene zeitdiskrete Systeme vorgestellt. Zu jedem digitalen System werden zuerst die Differenzgleichung und die Systemfunktion berechnet. Danach werden Frequenz- und Zeitverhalten diskutiert. Kapitel 4 liefert auch die theoretischen Grundlagen für die praktische Realisierung der digitalen Systeme.

### 4.1 Zeitdiskreter Tiefpass

Zeitdiskrete Tiefpassfilter haben die gleichen Eigenschaften wie zeitkontinuierliches Tiefpassfilter, d.h. zeitdiskrete Tiefpassfilter weisen eine Systemfunktion auf, die niederfrequente Anteile durchlässt und hochfrequente Anteile sperrt. Abbildung 41 stellt ein einfaches zeitdiskretes Tiefpassfilter dar.

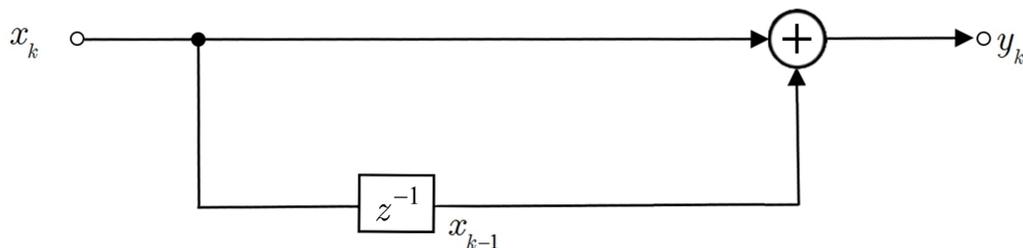


Abbildung 41: Zeitdiskreter Tiefpass

#### 4.1.1 Differenzgleichung und Systemfunktion

Aus der Abbildung 41 kann die Differenzgleichung abgelesen werden:

$$y_k = x_{k-1} + x_k \quad (4.1)$$

Laut Korrespondenztabelle und Verschiebungssatz der z-Transformation ergibt sich:

$$Y(z) = X(z) + X(z) \cdot \frac{1}{z} \quad (4.2)$$

$$Y(z) = X(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) \quad (4.3)$$

Somit lautet die Systemfunktion:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{z} \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 Amplituden- und Phasengang des zeitdiskreten Tiefpasses

Im Abschnitt 2.3 wurde bereits erwähnt, dass es 2 Vereinfachungen bei der z-Transformation gibt.

$$z = e^{p \cdot T_A}, \quad w \cdot T_A = \Omega \quad (4.5)$$

Wie beim zeitkontinuierlichen Tiefpass wird in der Systemfunktion  $jw$  durch  $s$  ersetzt, um den Amplituden- und Phasengang zu untersuchen.

$$z = e^{jw \cdot T_A} = e^{j\Omega} \quad (4.6)$$

$$H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} + 1}{e^{j\Omega}} = \left(e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right) \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} = 2 \left| \cos \frac{\Omega}{2} \right| \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} = |H| \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} \quad (4.7)$$

Amplituden- und Phasengang des gegebenen Tiefpasses lauten somit::

$$\left|H(\Omega)\right| = 2 \left| \cos \frac{\Omega}{2} \right|, \quad \varphi(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} \quad (4.8)$$

Bevor man die Amplituden- und Phasengang zeichnet, muss noch eine Beschränkung beachtet werden. Im Abschnitt Aliasingeffekt wurde schon erwähnt, dass die Abtastfrequenz  $f_A$  mindestens zweimal größer als die Systemfrequenz  $f$  sein muss ( $f < \frac{f_A}{2}$ ), um Aliasingeffekte zu vermeiden.

$$\text{Mit } \Omega = w \cdot T_A = \frac{2\pi f}{f_A}, \text{ mit } f < \frac{f_A}{2} \quad (4.9)$$

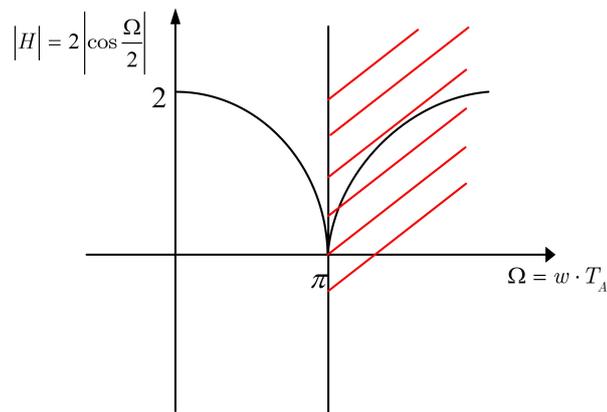
folgt  $\Omega < \pi$ .

Bei  $\Omega \geq \pi$  ändert sich der Phasengang. Die Systemfunktion lautet:

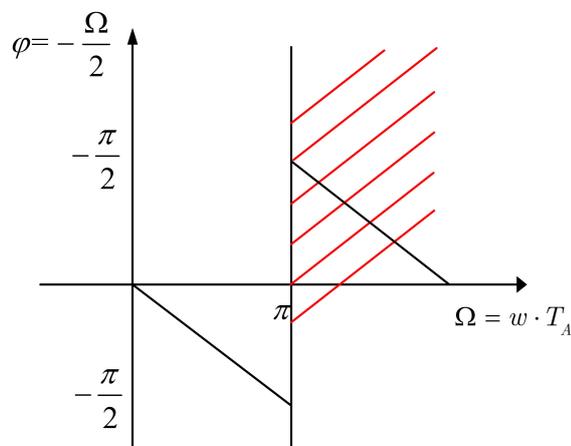
$$H(\Omega) = -2 \cos \frac{\Omega}{2} \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} \rightarrow H(\Omega) = 2 \cos \frac{\Omega}{2} \cdot e^{j\pi} \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} = 2 \cos \frac{\Omega}{2} \cdot e^{j\left(\pi - \frac{\Omega}{2}\right)} \quad (4.10)$$

Deswegen ist bei  $\Omega \geq \pi$  der Phasengang  $\varphi = \pi - \frac{\Omega}{2}$ .

Mit diesen Beschränkungen sehen Amplituden- und Phasengang wie in Abbildung 42 und 43 aus.



**Abbildung 42: Amplitudengang des zeitdiskreten Tiefpasses**



**Abbildung 43: Phasengang des zeitdiskreten Tiefpasses**

### 4.1.3 Zeitverhalten des zeitdiskreten Tiefpasses

#### 1. Sprungantwort des zeitdiskreten Tiefpass-Filters

Die Systemfunktion des zeitdiskreten Tiefpass-Filters mit der Differenzgleichung lautet:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{z} \quad (4.11)$$

Die Erregung des Systems mit einer Sprungfolge  $\{s_k\} = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$  hat am Ausgang eine

Folge  $\{a_k\}$  zur Folge (siehe Tabelle 5)

$k$	$\{x_k\} = \{s_k\}$	$\{x_{k-1}\}$	$\{a_k\} = \{y_k\} = \{x_k\} + \{x_{k-1}\}$
-2	0	0	0
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	1	1	2
2	1	1	2
3	1	1	2
4	1	1	2

Tabelle 5: Erregung des zeitdiskreten Tiefpasses mit einer Sprungfolge

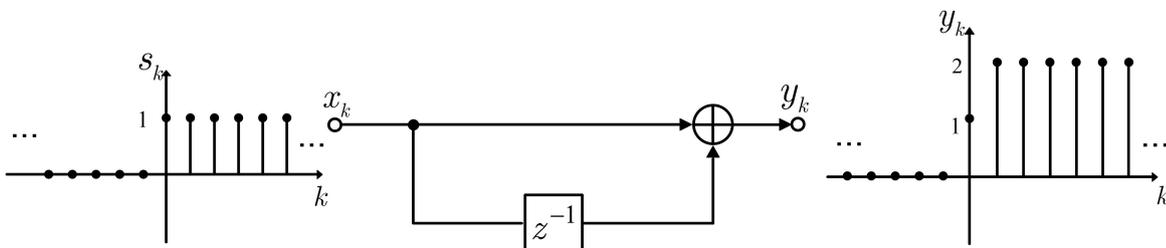


Abbildung 44: Sprungantwort des zeitdiskreten Tiefpasses

#### 2. Impulsantwort des zeitdiskreten Tiefpass-Filters

Die Impulsantwort  $h_k$  des zeitdiskreten Tiefpass-Filters, dessen Differenzgleichung gegeben ist, kann man numerisch ermitteln durch Erregung des Systems mit der Impulsfolge  $\{\delta_k\}$ .

Die Impulsfolge lautet:  $\{\delta_k\} = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ 1 & k = 0 \end{cases}$ .

Die Systemfunktion der zeitdiskreten Tiefpass-Filter lautet:  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z+1}$ . Die Impulsantwort des Tiefpasses mit Differenzgleichung  $y_k = x_k + x_{k-1}$  berechnet sich durch Auswertung der Differenzgleichung mit  $\{y_k\} = \{h_k\}$  und  $\{x_k\} = \{\delta_k\}$ .

$k$	$\{x_k\} = \{\delta_k\}$	$\{x_{k-1}\}$	$\{h_k\} = \{y_k\} = \{x_k\} + \{x_{k-1}\}$
-2	0	0	0
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0

Tabelle 6: Erregung des zeitdiskreten Tiefpasses mit einer Impulsfolge

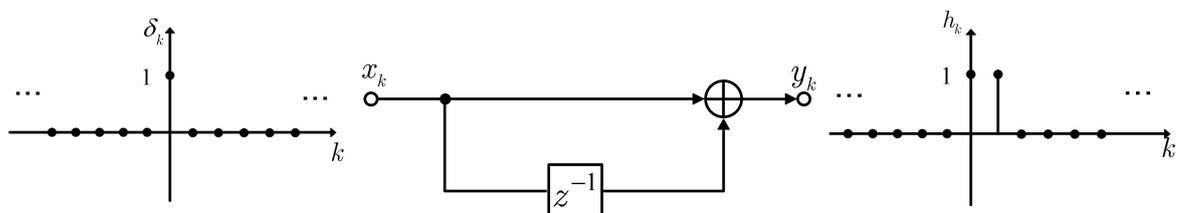


Abbildung 45: Impulsantwort des zeitdiskreten Tiefpasses

## 4.2 Zeitdiskreter Hochpass

Mit einem zeitdiskreten Tiefpass sieht die Differenzgleichung eines einfachen zeitdiskreten Hochpasses fast gleich aus. Abbildung 46 zeigt den einfachsten zeitdiskreten Hochpass.



Abbildung 46: Struktur eines zeitdiskreten Hochpasses

## 4.2.1 Differenzgleichung und Systemfunktion

Aus der Abbildung 46 kann man sofort die Differenzgleichung ablesen:

$$y_k = x_k - x_{k-1} \quad (4.12)$$

Mit der z-Transformation wird die Differenzgleichung umgeformt und in den Bildbereich transformiert:

$$Y(z) = X(z) - X(z) \cdot \frac{1}{z} \quad (4.13)$$
$$Y(z) = X(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

Nun ergibt sich die Systemfunktion zu:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{z} \quad (4.14)$$

## 4.2.2 Amplituden- und Phasengang des zeitdiskreten Hochpasses

In komplexer Schreibweise lautet die Systemfunktion:

$$z = e^{jw \cdot T_A} = e^{j\Omega} \quad (4.15)$$

$$H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} - 1}{e^{j\Omega}} = (e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}) \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} = \left| 2j \cdot \sin \frac{\Omega}{2} \right| \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} = |H| \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} \quad (4.16)$$

Damit lauten sind die Amplituden- und Phasengang:

$$|H| = \left| 2j \cdot \sin \frac{\Omega}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{\Omega}{2} \right|, \quad \varphi = -\frac{\Omega}{2} \quad (4.17)$$

Genau wie beim zeitdiskreten Tiefpass gibt es zwecks Aliasingeffekt die Beschränkung  $\Omega < \pi$  für den Amplitudengang. Bei  $\Omega \geq 2\pi$  ist die Sinus-Funktion negativ, deswegen ergibt sich die Systemfunktion bei  $\Omega \geq 2\pi$ :

$$H(\Omega) = -2j \cdot \sin \frac{\Omega}{2} \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} = 2 \cdot \sin \frac{\Omega}{2} \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot e^{j\pi} = 2 \cdot \sin \frac{\Omega}{2} \cdot e^{j\left(\pi - \frac{\Omega}{2}\right)} \quad (4.18)$$

Die grafische Darstellung von Amplituden- und Phasengang erfolgt in Abbildung 47 und 48.

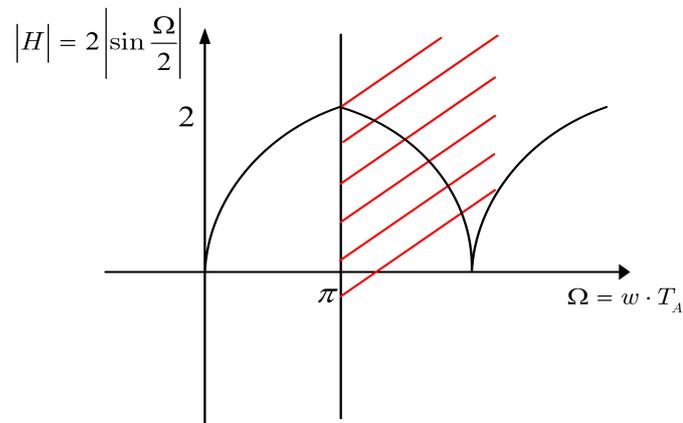


Abbildung 47: Amplitudengang von zeitdiskretem Hochpass

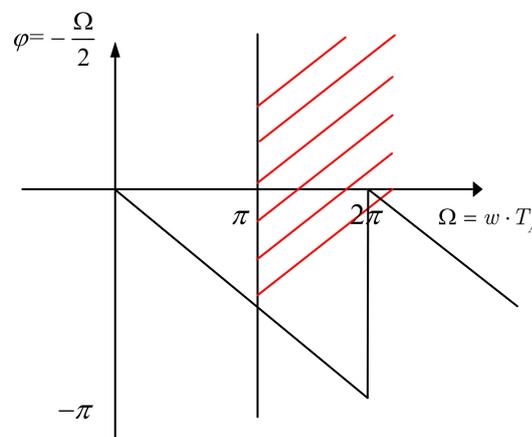


Abbildung 48: Phasengang von zeitdiskretem Hochpass

### 4.2.3 Zeitverhalten des zeitdiskreten Hochpasses

1. Sprungantwort des zeitdiskreten Hochpass-Filters

Die Systemfunktion des zeitdiskreten Hochpass-Filters lautet:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{z} \quad (4.19)$$

Bei Erregung mit einer Sprungfolge  $\{s_k\} = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$  lautet die Ausgangsfolge  $\{a_k\}$  wie

in Tabelle 7 dargestellt.

$k$	$\{x_k\} = \{s_k\}$	$\{x_{k-1}\}$	$\{a_k\} = \{y_k\} = \{x_k\} - \{x_{k-1}\}$
-2	0	0	0
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	1	1	0
2	1	1	0
3	1	1	0
4	1	1	0

Tabelle 7: Erregung des zeitdiskreten Hochpasses mit einer Sprungfolge

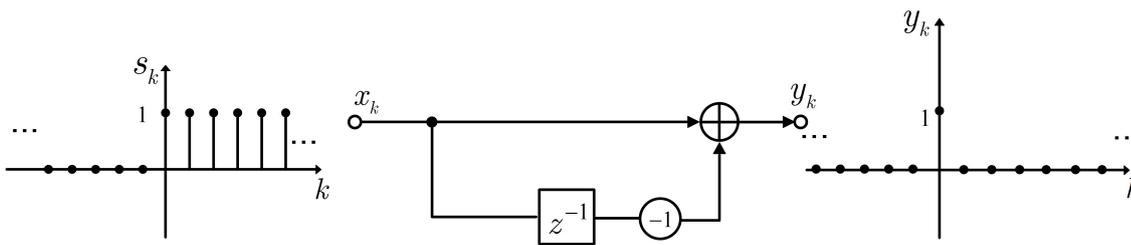


Abbildung 49: Sprungantwort des zeitdiskreten Hochpasses

## 2. Impulsantwort des zeitdiskreten Tiefpass-Filters

Die Impulsantwort  $\{h_k\}$  des zeitdiskreten Tiefpass-Filters, dessen Differenzgleichung gegeben ist, kann man numerisch ermitteln durch Erregung des Systems mit der Impulsfolge  $\{\delta_k\}$ .

Die Impulsfolge lautet:  $\{\delta_k\} = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ 1 & k = 0 \end{cases}$

Die Systemfunktion des zeitdiskreten Tiefpass-Filters lautet:  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{z}$ . Die

Impulsantwort des Tiefpasses mit der Differenzgleichung  $y_k = x_k + x_{k-1}$  berechnet sich durch Auswertung der Differenzgleichung mit  $\{y_k\} = \{h_k\}$  und  $\{x_k\} = \{\delta_k\}$ .

$\{k\}$	$\{x_k\} = \{\delta_k\}$	$\{x_{k-1}\}$	$\{h_k\} = \{y_k\} = \{x_k\} - \{x_{k-1}\}$
-2	0	0	0
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	-1
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0

Tabelle 8: Erregung des zeitdiskreten Hochpasses mit einer Impulsfolge

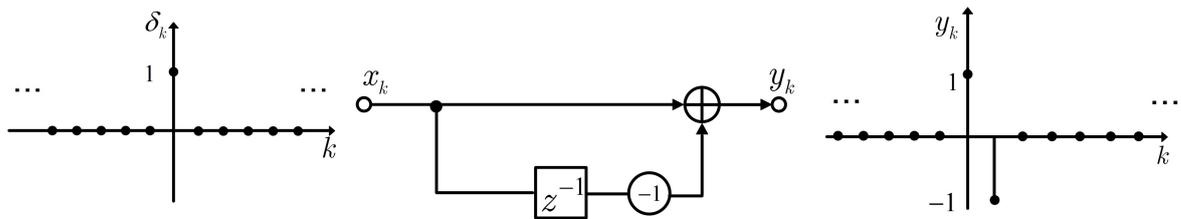


Abbildung 50: Impulsantwort des zeitdiskreten Hochpasses

### 4.3 Zeitdiskretes Bandpassfilter

Bevor auf das zeitdiskrete Bandpassfilter eingegangen wird, wird die Ermittlung der Amplituden- und Phasengang mithilfe des Pol-Nullstellen-Plans in der z-Ebene vorgestellt.

#### 4.3.1 Ermittlung der Frequenz- und Phasengang aus dem PN-Plan

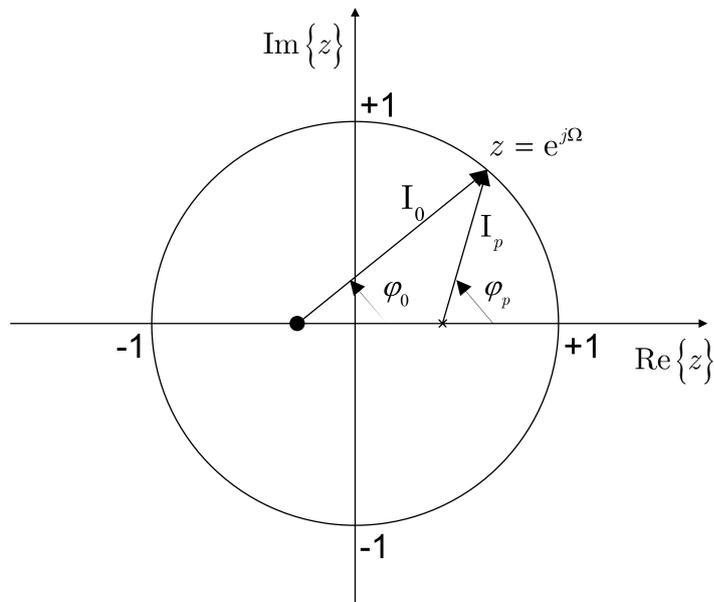
Für  $z = e^{j\Omega}$  erhält man aus der Systemfunktion  $H(s)$  den Amplituden- und Phasengang  $H(j\Omega) = |H(j\Omega)| \cdot e^{j\varphi(\Omega)}$ . Mit einem grafischen Verfahren lassen sich Amplituden- und Phasengang aus dem PN-Plan gewinnen. Als Beispiele werden nachfolgend Systeme 1. Ordnung und System 2. Ordnung erläutert.

Für ein System 1. Ordnung wird angenommen, dass die Systemfunktion lautet:

$$H(s) = k \cdot \frac{z - z_0}{z - z_p}, \quad k = \text{Konstante} \quad (4.20)$$

Im PN-Plan der Z-Ebene werden die Polstelle  $z_p$  und Nullstelle  $z_0$  jeweils mit Punkt markiert.  $I_0$  und  $I_p$  steht jeweils für den Abstand zu einer beliebigen Stelle auf dem Einheitskreis ( $z = e^{j\Omega}$ ),  $\varphi_0$  und  $\varphi_p$  bedeuten die Phasenwinkel dazwischen. Die grafische Darstellung erfolgt in Abbildung 51. Mit dem grafischem Verfahren ergibt sich:

$$\text{Amplitudengang: } |H(s)| = \frac{I_0}{I_p}, \quad \text{Phasengang: } \varphi(\Omega) = \varphi_0 - \varphi_p$$



**Abbildung 51: PN-Plan von  $H(z)$  eines zeitdiskreten Systems 1. Ordnung**

Gleiches gilt für ein System 2. Ordnung. Mit den Nullstellen  $z_{01}$  und  $z_{02}$  sowie den Polstellen  $z_{p1}$  und  $z_{p2}$  erhält man die Gleichung für den Amplituden- und Phasengang.

$$\text{Amplitudengang: } |H(z)| = \frac{I_{01} \cdot I_{02}}{I_{p1} \cdot I_{p2}}, \quad \text{Phasengang: } \varphi(\Omega) = \varphi_{01} + \varphi_{02} - \varphi_{p1} - \varphi_{p2}$$

### 4.3.2 Systemfunktion und Amplitudengang eines zeitdiskreten Bandpassfilters

Eine Eigenschaft eines zeitdiskreten Bandpassfilters ist, dass das Bandpassfilter nur Signale in einem bestimmten Frequenzband passieren lässt. Andere Signale, deren Frequenzen entweder oberhalb oder unterhalb des beschränkten Frequenzbereiches liegen, werden gesperrt oder abgeschwächt.

Nach dem grafischen Verfahren zur Ermittlung des Frequenzgangs kann man den Frequenzgang mithilfe der Abstände der Null- und Polstellen zum Einheitskreis (Lage ist  $z = e^{j\Omega}$ ) durch  $\Omega$  bestimmt. Um die Eigenschaft eines Bandpasses zu erfüllen werden folgende Polstellen angenommen:

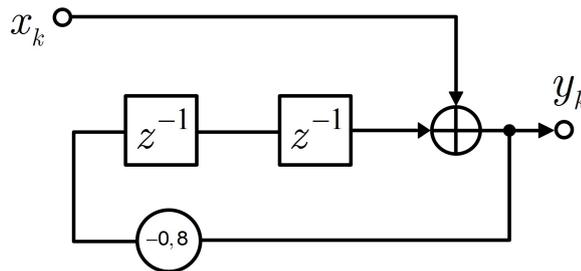
$$z_{01} = z_{02} = (0, 0), \quad \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0 \quad (4.21)$$

$$z_{p1} = z_{p1} = (\pm j\sqrt{0,8}, 0), \quad \varphi_{p1} = \varphi_{p1} = \pm \frac{\pi}{2} \quad (4.22)$$

Mit den Null- und Polstellen kann man die Systemfunktion beschreiben.

$$H(s) = \frac{z^2}{(z - j\sqrt{0,8}) \cdot (z + j\sqrt{0,8})} = \frac{z^2}{z^2 + 0,8} \quad (4.23)$$

Mit der Systemfunktion kann man auch Systemstruktur zeichnen.

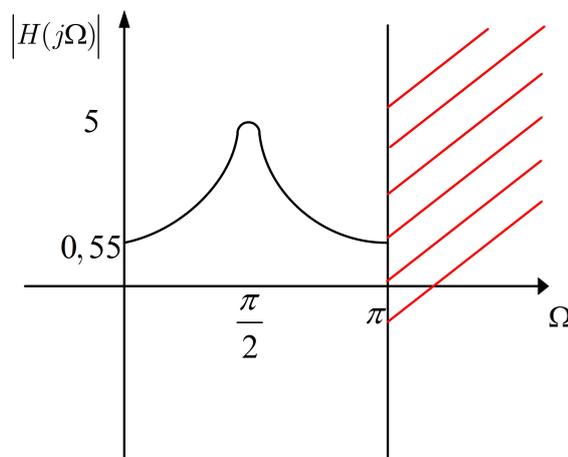


**Abbildung 52: Das zeitdiskrete Bandpassfilter**

In komplexer Schreibweise lautet die Systemfunktion:

$$H(j\Omega) = \frac{e^{j2\Omega}}{e^{j2\Omega} + 0,8} \quad (4.24)$$

$$A(j\Omega) = \frac{1}{H(j\Omega)} = \frac{e^{j2\Omega} + 0,8}{e^{j2\Omega}} = 1 + 0,8 \cdot e^{-j2\Omega} \quad (4.25)$$



**Abbildung 53: Amplitudengang des zeitdiskreten Bandpassfilters**

Der Phasengang wird in dieser Arbeit nicht diskutiert.

### 4.3.3 Zeitverhalten des Zeitdiskreten Bandpass-Filters

#### 1. Sprungantwort des zeitdiskreten Bandpass-Filters

Die Systemfunktion des zeitdiskreten Bandpass-Filters lautet:  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{z^2 + 0.8}$ .

Die Sprungantwort des Bandpasses mit der Differenzgleichung  $y_k = x_k - 0.8x_{k-2}$  berechnet sich durch Auswertung der DGL mit  $\{y_k\} = \{a_k\}$  und  $\{x_k\} = \{s_k\}$ . Das zeitdiskrete Bandpass-Filter mit der DGL  $y_k = x_k - 0.8y_{k-2}$  (mit  $\{y_k\} = 0 \quad k < 0$ ) liefert bei Erregung mit einer Sprungfolge  $\{x_k\} = \{s_k\}$  hat folgende Werte der Ausgangsfolge  $\{y_k\}$ :

$k$	$\{x_k\} = \{s_k\}$	$y_{k-2}$	$\{a_k\} = \{y_k\} = \{x_k\} - \{0.8y_{k-2}\}$
-2	0	0	0
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	1	0	1
2	1	1	0,2
3	1	1	0,2
4	1	0,2	0,84
5	1	0,2	0,84
6	1	0,84	0,328
7	1	0,84	0,328
8	1	0,328	0,737
9	1	0,328	0,737
10	1	0,737	0,41
11	1	0,737	0,41
12	1	0,41	0,672
13	1	0,41	0,672
14	1	0,672	0,462
15	1	0,672	0,462

**Tabelle 9: Erregung des zeitdiskreten Bandpasses mit einer Sprungfolge**

In der Tabelle wird die Sprungantwort des zeitdiskreten Bandpass-Filters bis  $k = 15$  aufgelistet. Der Endwert der Sprungantwort kann auch berechnet werden. Die Sprungantwort bei  $k$  gegen unendlich repräsentiert eine Frequenz  $f = 0\text{Hz}$ . Bei  $f = 0\text{Hz}$  ist  $z = 1$ , weil

$$e^{s \cdot K \cdot T_A} = e^{j\omega \cdot K \cdot T_A} = e^{j2\pi f \cdot K \cdot T_A} \quad . \text{ Für } z = 1 \text{ ist dann } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{z^2 + 0.8} = 0.555 .$$

Das heißt: der Endwert der Sprungantwort des zeitdiskreten Bandpass-Filters ist 0.555.

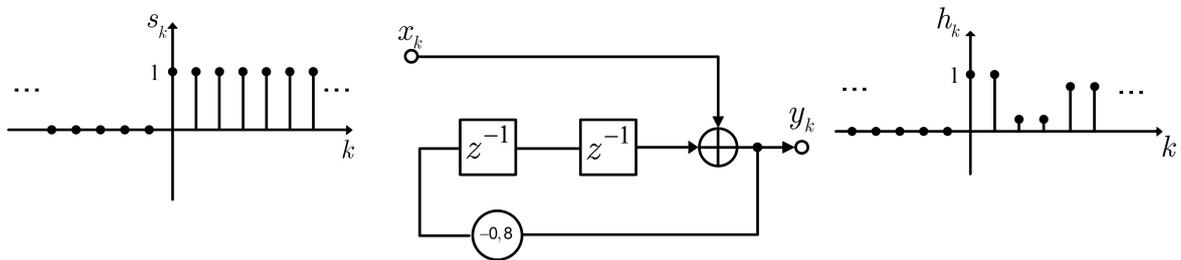


Abbildung 54: Sprungantwort des zeitdiskreten Bandpasses

## 2. Impulsantwort des zeitdiskreten Bandpass-Filters

Das zeitdiskrete Bandpass-Filter  $y_k = x_k - 0.8y_{k-2}$  mit  $y_k = 0$   $k < 0$ , bei Erregung mit einer Impulsfolge  $\{x_k\} = \{\delta_k\}$ :

$k$	$\{x_k\} = \{\delta_k\}$	$\{y_{k-2}\} = \{h_{k-2}\}$	$\{h_k\} = \{y_k\} = \{x_k\} - \{0.8y_{k-2}\}$
-2	0	0	0
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0
2	0	1	-0,8
3	0	0	0
4	0	-0,8	$0,8^2 = 0,64$
5	0	0	0
6	0	0,64	$(-0,8)^3 = -0,512$
7	0	0	0

Tabelle 10: Erregung des zeitdiskreten Bandpasses mit einer Impulsfolge

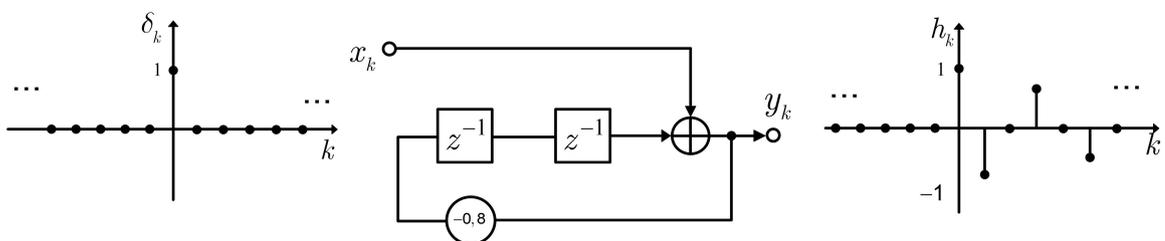


Abbildung 55: Impulsantwort des zeitdiskreten Bandpasses



## 5 Realisierung des Versuchs

Normalerweise sieht der Aufbau eines Systems zur digitalen Signalverarbeitung wie in der Abbildung 56 aus. Bei der Beschreibung eines Abtastvorgangs zeigt sich, dass das abzutastende Signal zunächst durch einen Tiefpass begrenzt werden muss. Nach der anschließenden Abtastung liegen zeitdiskrete Signale vor, mit denen eine digitale Signalverarbeitung durchgeführt wird. Am Ende werden die zeitdiskreten abgetasteten Signalwerte über einen Tiefpass zu einem analogen Signal rekonstruiert.

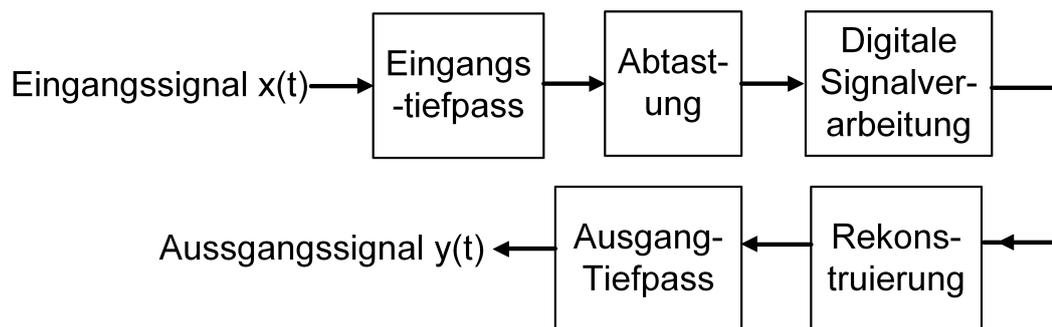


Abbildung 56: Blockdiagramm zur digitalen Signalverarbeitung

Quelle: [3] Teil: Zeitdiskrete Systeme

### 5.1 Schaltungsentwurf und PCB-Layout

In dieser Arbeit besteht der Versuch im Wesentlichen aus einem zeitdiskreten Tiefpass- und Bandpassfilter. Nach dem in der Abbildung 56 dargestellten Blockdiagramm wird ein neuer Schaltungsentwurf realisiert. Für den Schaltungsentwurf und das PCB-Layout kamen verschiedene Programme in Betracht, auf Grund der kostenlosen Verfügbarkeit und der vorher schon gewonnenen Erkenntnisse wurde in dieser Arbeit die Software „Kicad“ gewählt. Alle Arbeitsschritte werden im Anhang „PCB-Layout“ vorgestellt (der gesamte Schaltungsentwurf ist im Anhang F dargestellt).

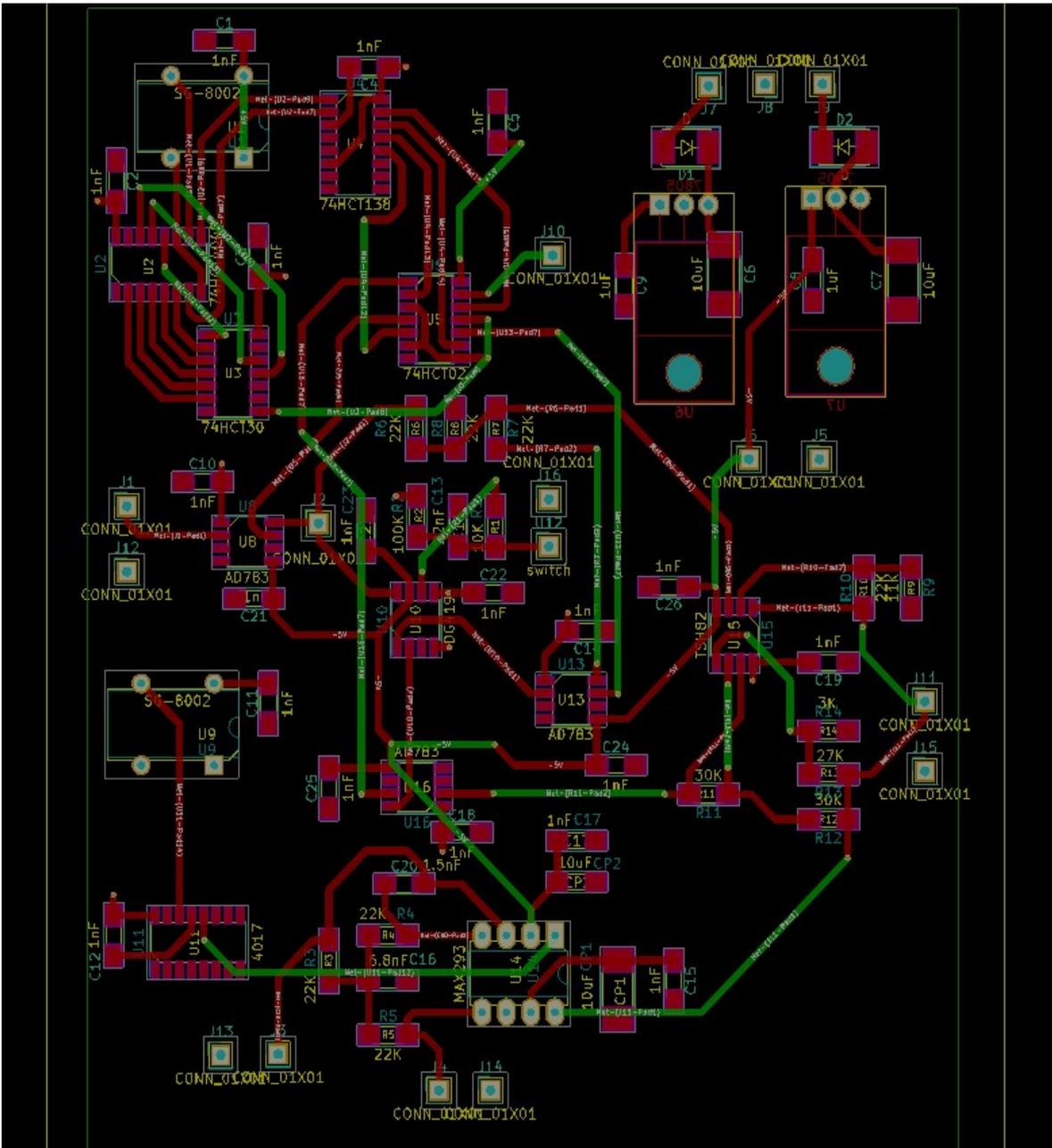


Abbildung 57: PCB-Layout der Schaltung

## 5.2 Funktionsbeschreibung

Die neu entworfene Schaltung, die als zeitdiskretes Tiefpass- oder Bandpassfilter arbeiten kann, besteht im Wesentlichen aus 3 Teilen. Die 3 Teile sind jeweils: Takterzeugung, Hauptschaltung und Glättungsfilter.

## 5.2.1 Takterzeugung

In der Takterzeugung wurden keine speziellen Speicherbauelemente verwendet, sondern der Abtaster und die Verzögerungsglieder wurden in gleicher Weise mit je einer Sample & Hold-Schaltung realisiert. In der vorliegenden Schaltung wurde die Abtastung mit dem IC AD783 realisiert. Die Verzögerung um  $T_A$  ergibt sich aus der Taktung des IC AD783 mit den unterschiedlichen Impulsfolgen  $I_1, I_2$  und  $I_3$ . Dabei wird die sehr kurze Impulsdauer  $t_i$  vernachlässigt. Das heißt:  $I_1, I_2$  und  $I_3$  werden als Eingänge des IC AD783 betrachtet, um das entsprechende zeitdiskrete Signal zu verzögern, z.B. liefert  $x_k$  mit  $I_2$  am Ausgang  $x_{k-1}$ . Die unterschiedlichen Impulsfolgen  $I_1, I_2$  und  $I_3$ , die als verzögerte zeitdiskrete Signale dienen, werden in der Abbildung 59 dargestellt.

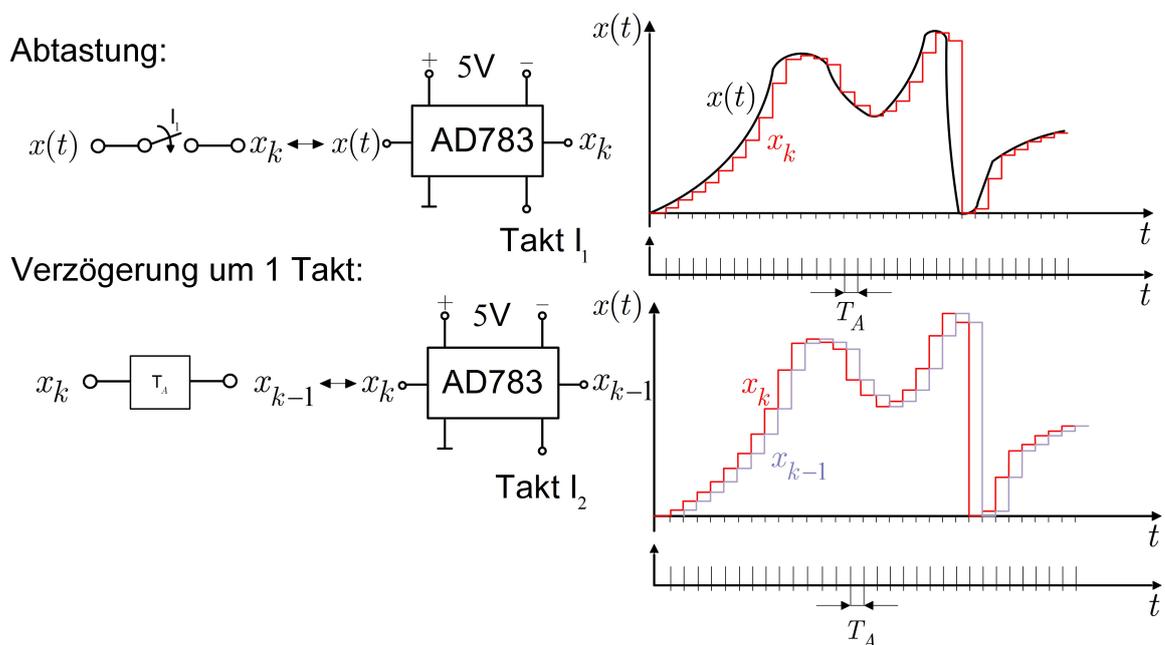


Abbildung 58: Abtastung und Verzögerung mit AD783

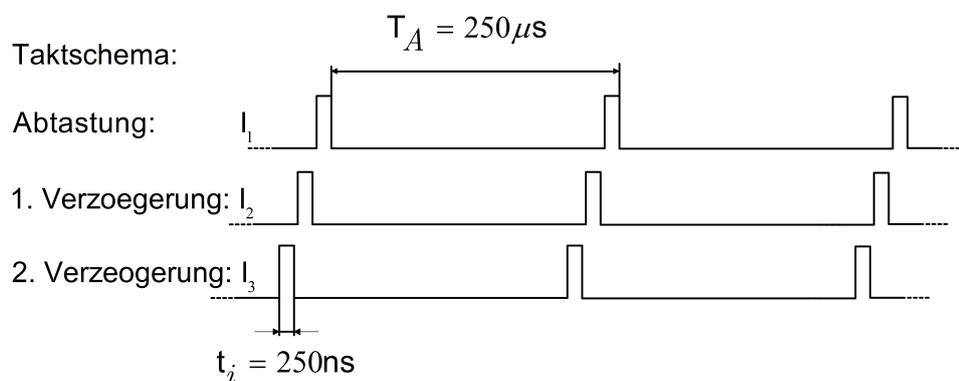


Abbildung 59: Taktschema

Um die unterschiedlichen Impulsfolgen zu erzeugen, muss eine Schaltung und eine Leiterplatte entworfen und aufgebaut werden. In Abbildung 60 ist der fertige Schaltungs-Entwurf, der mit Hilfe der Layout-Software „Kicad“ entstand, zu sehen.

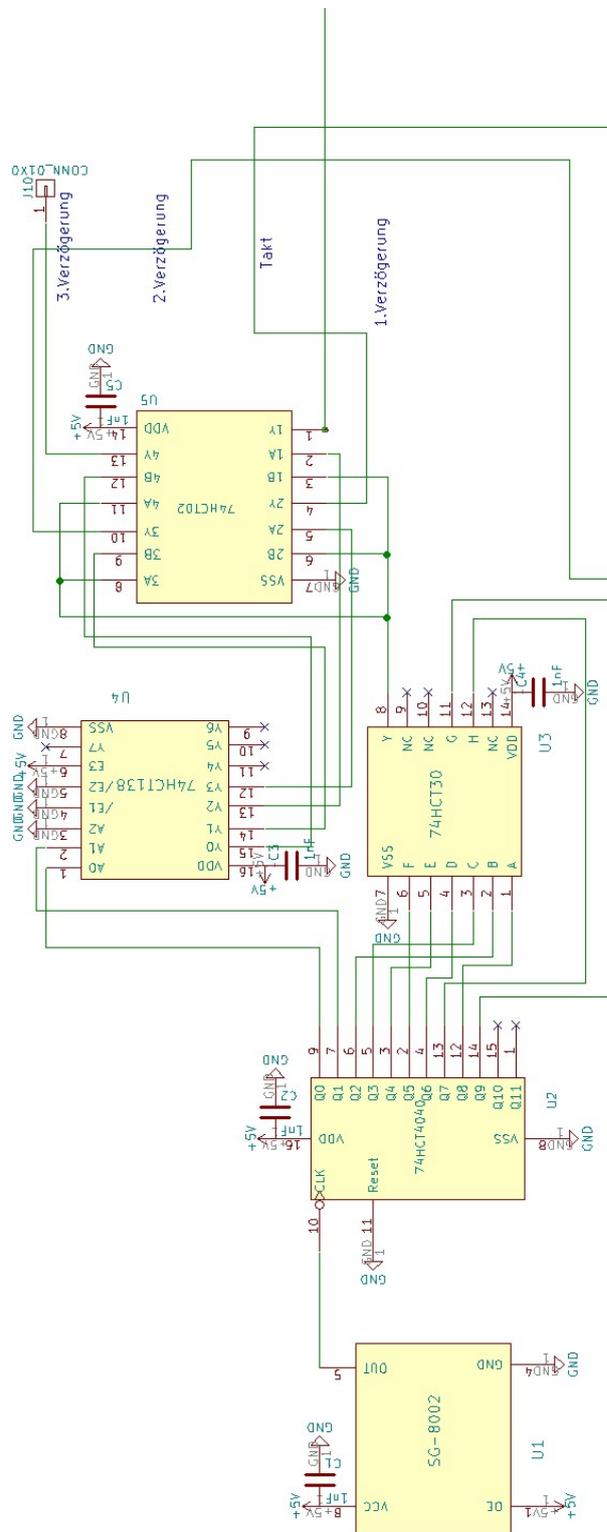
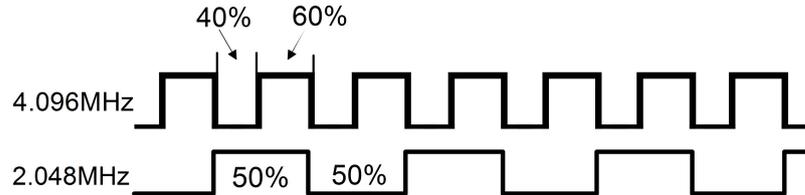


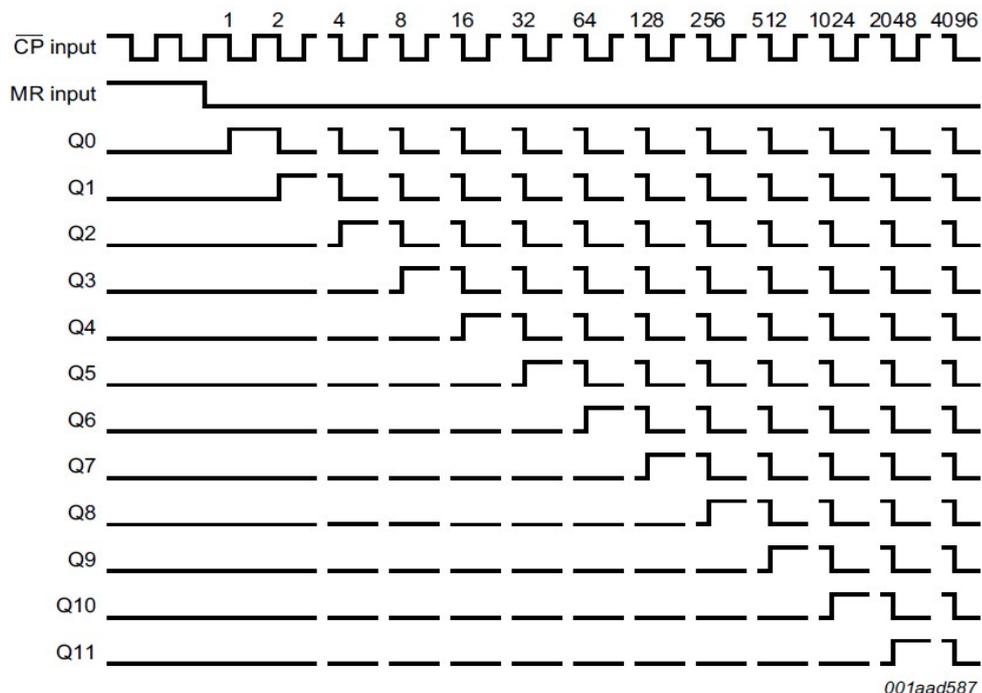
Abbildung 60: Schaltung für Takterzeugung

Links befindet sich in der Schaltung der Quarzoszillator SG-8002, der 4,096MHz ausgeben kann, aber das Verhältnis der Impulsdauer zur Periodendauer beträgt nicht genau 50% sondern zwischen 40% bis 60%. Der Pin 5 des Quarzoszillators SG-8002 wird mit dem Pin 10 des 12-Bit-Binärzähler 74HCT4040 verbunden. Im Datenblatt des 12-Bit-Binärzählers 74HCT4040 steht, dass der 74HCT4040 nur bei abfallender Flanke reagiert, deswegen liegt das Verhältnis Impulsdauer zu Periodendauer bei allen Ausgangssignalen bei genau 50%



**Abbildung 61: Verhältnis der Impulsdauer zu Periodendauer**

Im Datenblatt des 12-Bit-Binärzähler 74HCT4040 ist u.a. das Timing Diagramm enthalten, in welchem der Zusammenhang zwischen allen Ausgängen dargestellt ist. In der Abbildung 62 ist zu sehen, dass die Frequenz des Ausgangs Q0 nur die Hälfte der Eingangsfrequenz beträgt. Die anderen Ausgangsfrequenzen werden in gleicher Weise mit gleichem Teiler-Verhältnis 2 realisiert, deshalb liegen die Frequenzen von Q0 bis Q11 bei 2,048Mhz, 1,024MHz, 512kHz, 256kHz, 128kHz, 64kHz, 32kHz, 16kHz, 8kHz, 4kHz, 2kHz und 1kHz. Die Ausgangsfrequenzen von Q10 und Q11 sind nicht von Interesse, weil die Frequenz der Impulsfolgen  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  4kHz ist.



001aad587

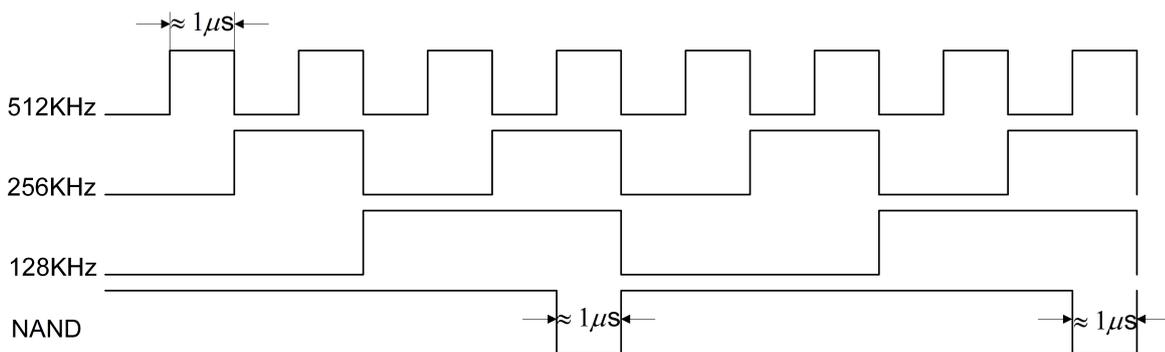
**Abbildung 62: Timing Diagramm der Ausgänge des 74HCT4040 (Quelle: [9] Seite 5)**

Die Ausgänge von Q2 bis Q9 werden in beliebiger Reihenfolge an die acht Eingänge des 74HCT30 angeschlossen. Warum die Reihenfolge beliebig ist, ergibt sich aus dem Grund, dass der IC 74HCT30 ein 8-Eingänge-NAND ist. Das bedeutet, alle acht Eingangssignale haben beim IC 74HCT30 die logische Verknüpfung „NICHT UND“. Ein NAND-Gatter gibt am Ausgang genau dann „0“ aus, wenn alle Eingänge „1“ sind. In allen anderen Fällen, d. h., wenn mindestens ein Eingang „0“ ist, wird eine „1“ ausgegeben, deshalb spielt die Anschluss-Reihenfolge der Eingänge keine große Rolle.

A	B	Y= A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**Tabelle 11: Wahrheitstabelle eines NAND**

Das Impulsdiagramm dazu ist in Abbildung 63 dargestellt.



**Abbildung 63: 3 Frequenzen nach NAND**

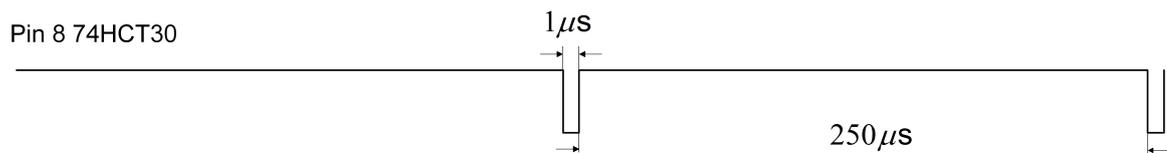
In der Abbildung 63 sind stellvertretend nur 3 Eingängen (512kHz, 216kHz und 128kHz) dargestellt. Es ergeben sich daraus folgende Schlussfolgerungen:

1. Die Pulsbreite wird von der höchsten Frequenz 512kHz bestimmt. (genauer

$$t_i = \frac{1}{2 \cdot 512\text{kHz}} \approx 1\text{us} )$$

2. Die Periodendauer hängt von der niedrigsten Frequenz ab. In diesem Fall ist die niedrigste Frequenz 128kHz.

Ausgangssignal am Pin 8 des IC 74HCT30 sieht deshalb folgendermaßen so aus:



**Abbildung 64: Spannung am Pin 8 des 74HCT30**

Die kleinste Impulsbreite 250ns wird von der höchsten Frequenz 512KHz bestimmt, die größte Periodendauer 250us von der niedrigsten Frequenz 4kHz.

Wie bereits erwähnt, liegen bei Q0 und Q1 des 74HCT4040 2MHz und 1 MHz an. Die Ausgänge des IC 74HCT4040 Q0 und Q1 werden direkt jeweils mit den Adress-Eingängen A0 und A1 (Pin 1 und Pin 2) des IC 74HCT138 verbunden.

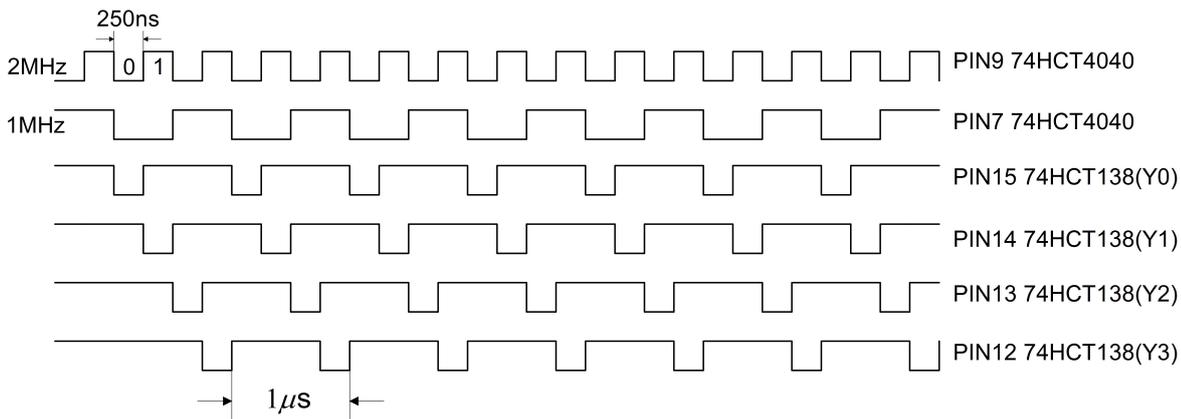
TRUTH TABLE 'HC138, 'HCT138

INPUTS						OUTPUTS							
ENABLE			ADDRESS										
E3	E2	E1	A2	A1	A0	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
X	X	H	X	X	X	H	H	H	H	H	H	H	H
L	X	X	X	X	X	H	H	H	H	H	H	H	H
X	H	X	X	X	X	H	H	H	H	H	H	H	H
H	L	L	L	L	L	L	H	H	H	H	H	H	H
H	L	L	L	L	H	H	L	H	H	H	H	H	H
H	L	L	L	H	L	H	H	L	H	H	H	H	H
H	L	L	L	H	H	H	H	H	L	H	H	H	H
H	L	L	H	L	L	H	H	H	H	L	H	H	H
H	L	L	H	L	H	H	H	H	H	H	L	H	H
H	L	L	H	H	L	H	H	H	H	H	H	L	H
H	L	L	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	L

H = High Voltage Level. L = Low Voltage Level. X = Don't Care

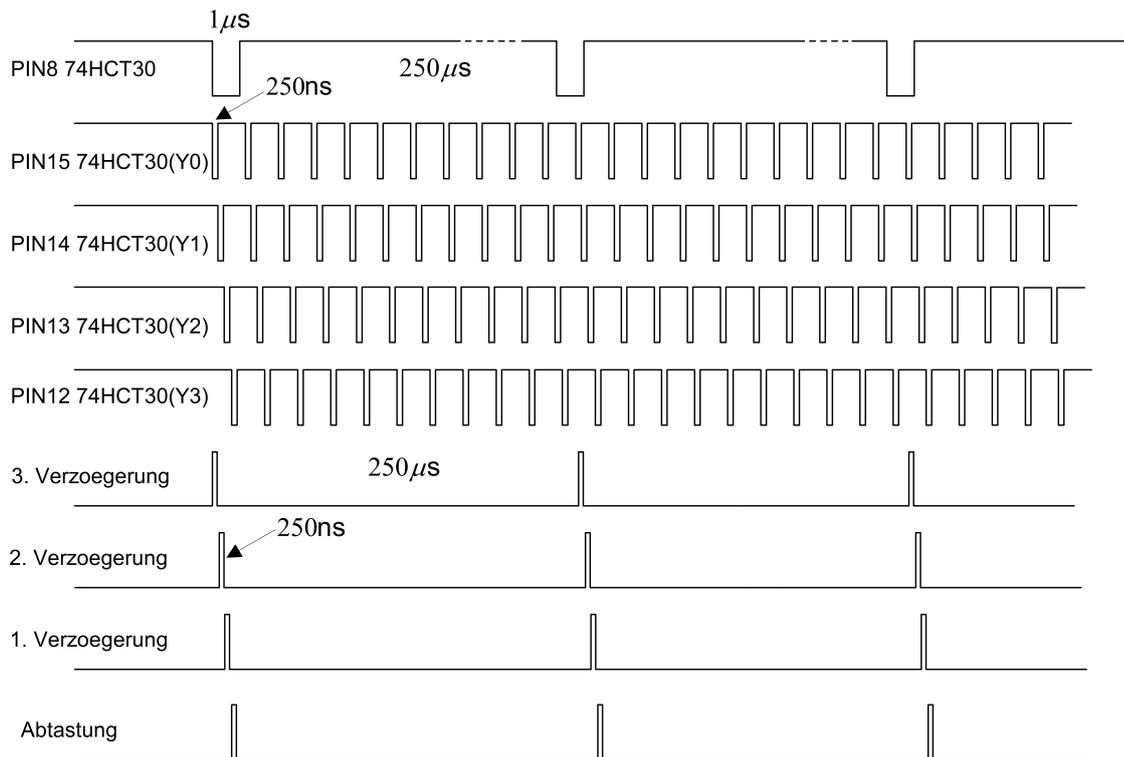
**Abbildung 65: Wahrheitstabelle 74HCT138 (Quelle: [4] Seite 2)**

Der 74HCT138 ist ein Logik 3 zu 8 Decoder, Wie im Datenblatt des 74HCT138 (Abbildung 65) zu sehen ist, verändern sich die Ausgangszustände des 74HCT138 in acht verschiedenen Zuständen mit den variierten Adress-Eingängen nur, wenn die ENABLE-Eingänge  $E_1$ ,  $\overline{E_2}$ ,  $\overline{E_3}$  korrekt mit High-Spannung und Low-Spannung verbunden sind. Im vorliegenden Fall wird der Adress-Eingang A2 nicht verwendet (wegen lediglich 4 Zuständen).



**Abbildung 66: Impulsdigramm der Ausgänge des 74HCT138**

Anhand der Wahrheits-Tabelle des 74HCT138 hat man eine Taktung mit einer Impulsbreite von 250ns und einer Periodendauer von  $1\mu\text{s}$ . Anschließend werden die 4 Ausgänge des 74HCT138 mit Pin 8 des 74HCT30 verbunden, um die gewünschte Taktung zu realisieren. Der 74HCT30 ist ein Logik-NOR-Gate. Mithilfe der Wahrheitstabelle (siehe Tabelle 12) bekommt man am Ende die gewünschte Abtastung und die verzögerte Taktung.



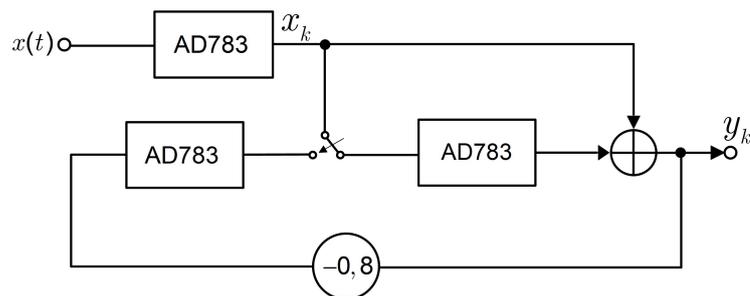
**Abbildung 67: Takterzeugung**

A	B	Y= A NOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

**Tabelle 12: Wahrheitstabelle eines NOR**

## 5.2.2 Hauptschaltung

In der vorliegenden Hauptschaltung werden der Abtaster und die Verzögerungsglieder mit je einer Sample & Hold-Schaltung IC AD783 realisiert. Im Abschnitt 5.2.1 wurde schon erwähnt, dass mithilfe des Sample & Hold IC AD783 mit verzögerter Impulsfolge (z.B.  $I_1$  und  $I_2$ ) entsprechende Signale abgetastet und verzögert werden können. Wie in den Grundlagen bereits dargestellt, lauten die Differenzgleichungen des zeitdiskreten Tiefpass- und Bandpassfilters jeweils  $y_k = x_k + x_{k-1}$  und  $y_k = x_k - 0.8y_{k-2}$ . In der Abbildung 68 ist das Konzept der Hauptschaltung dargestellt.



**Abbildung 68: Konzept der Hauptschaltung**

Die Abbildung 69 zeigt den Schaltungsentwurf der Hauptschaltung. Aus Kostengründen werden die zeitdiskreten Tiefpass- und Bandpassfilter auf einer Leiterplatte realisiert.

Die Hauptschaltung besteht auch aus drei Teilen: Schaltung für Summieren und Koeffizient und Funktionsmodul.

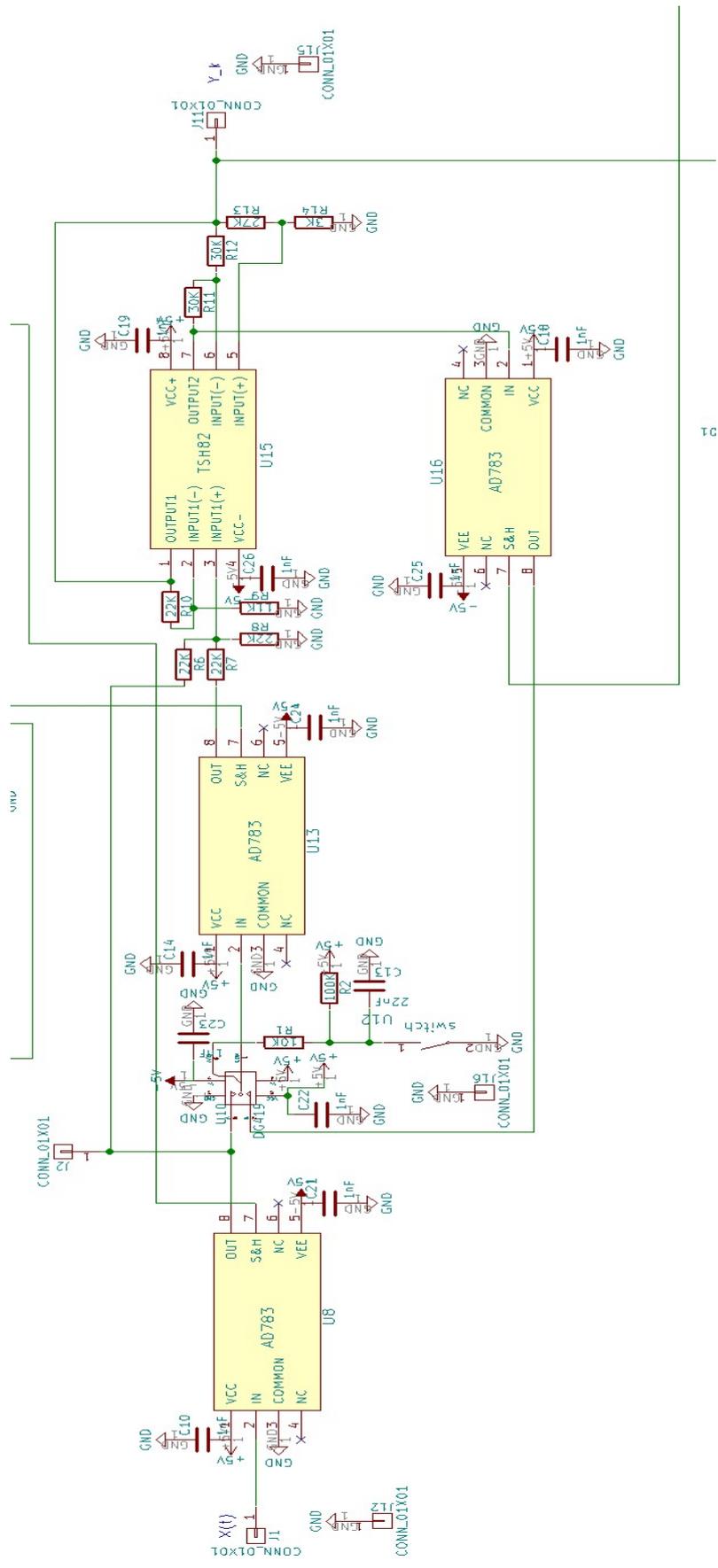


Abbildung 69: Hauptschaltung

## 1. Schaltung für Summieren und Koeffizient.

Als Summieren dient folgende Schaltung:

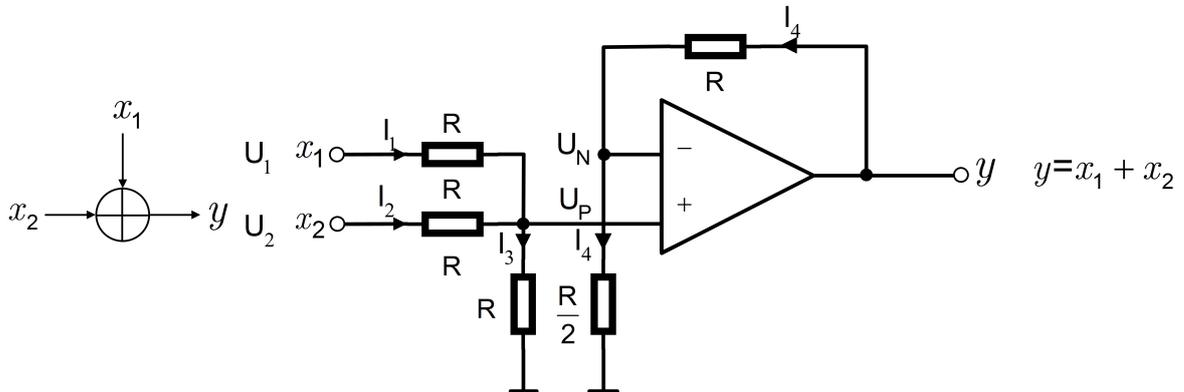


Abbildung 70: Summier mit zwei Summanden

$U_N$  steht für die Spannung am „-“Eingang des OPVs, und  $U_P$  für die Spannung am „+“Eingang des OPV. Normalerweise sind die Spannungsparameter  $U_N$  und  $U_P$  gleich.

$$I_1 = \frac{U_1 - U_P}{R}, I_2 = \frac{U_2 - U_P}{R}, I_3 = I_1 + I_2 = \frac{U_1 - U_P}{R} + \frac{U_2 - U_P}{R} \quad (5.1)$$

$$I_3 \cdot R = U_P = U_1 + U_2 - 2U_P \quad (5.2)$$

$$U_P = U_N = \frac{U_1 + U_2}{3} \quad (5.3)$$

Laut Kirchhoffsche Regeln gibt:

$$\frac{U_a - U_N}{R} = \frac{U_N}{\frac{R}{2}} \quad (5.4)$$

$$U_a = \frac{U_N}{3} = \frac{U_1 + U_2}{3} \quad (5.5)$$

$$U_a = U_1 + U_2 \quad (5.6)$$

Die Einstellung der Koeffizienten des Digitalfilters erfolgt mit folgender Grundschaltung, die Koeffizienten werden durch geeignete Wahl von  $q$  festgelegt.

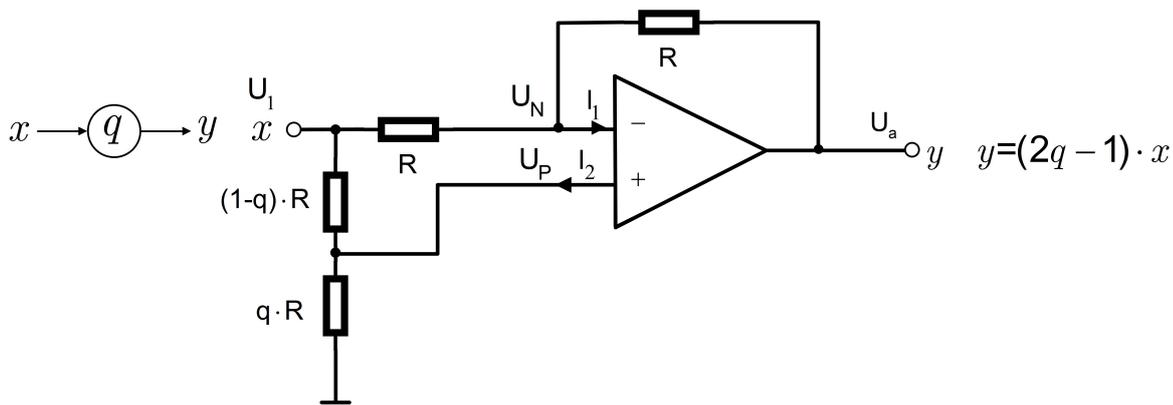


Abbildung 71: Schaltung zur Realisierung der Koeffizienten

Wie bereits erwähnt, sind  $U_N$  und  $U_P$  gleich und Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  sind fast 0.

$$\frac{U_1 - U_P}{(1-q) \cdot R} = \frac{U_P}{q \cdot R} \quad (5.7)$$

$$U_P = U_N = q \cdot U_1 \quad (5.8)$$

$$\frac{U_a - U_N}{R} = \frac{U_N - U_1}{R} \quad (5.9)$$

$$U_a = 2 \cdot U_N - U_1 = 2 \cdot q \cdot U_1 - U_1 = (2 \cdot q - 1) \cdot U_1 \quad (5.10)$$

In der Versuchsschaltung ist der Koeffizient gleich - 0,8, deswegen liegt  $q$  hier bei 0,1.

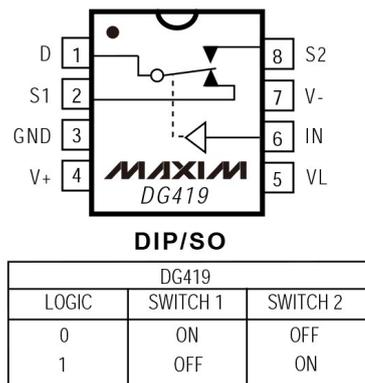
## 2. Funktionsmodul

Um die Hauptschaltung besser zu verstehen, wird an dieser Stelle die Funktionsbeschreibung des Funktionsmoduls durchgeführt. Die ganze Hauptschaltung enthält 3 AD783, einen DG419 und einen TSH82. Davon sind die 3 AD783 für Abtastung und Verzögerung zuständig. Der IC DG419 ist ein SPDT<sup>1</sup> (analoger Schalter), mit dem zwischen zeitdiskreten Tiefpassfilter oder dem Bandpassfilter ausgewählt werden kann. Der IC TSH82 ist mit 2 Operationsverstärkern ausgerüstet, die jeweils Summation und Multiplikation der Koeffizienten durchführen. (Übrigens werden alle VCC und VDD aller IC jeweils mit  $\pm 5V$  beschaltet, damit man 10V Spitze-Spitze Spannung hat. Für alle IC sind auch Abblockkondensatoren nötig, damit die IC gegen impulsartige Betriebsspannungsspitze bei Schaltvorgängen geschützt sind.)

<sup>1</sup> SPDT: Single-Pole-Double-Throw Schalter

Wie in der Abbildung 72 dargestellt, wird ein Eingangssignal  $x(t)$  mit Pin 2 des IC AD783 (U8) verbunden. Pin 7 des U8 steht für Sample & Hold und wird mit dem unverzögerten Takt verbunden. Nach der Abtastung durch den IC AD783 wird das Ausgangssignal  $x_k$  von U8 mit dem ersten Eingang (Pin 8) des SPDT IC DG419 verbunden. Der zweite Eingang des IC DG419 (Pin 2) ist das Ausgangssignal von AD783 U16. Das Datenblatt des IC DG419 enthält die Wahrheitstabelle mit Logiksymbol. Wie sich aus dem Funktionsdiagramm in Abbildung 73 erkennen lässt, ist beim Logik-Low-Level-Spannungspegel SWITCH 1 ON und SWITCH 2 OFF (PIN 6). Beim High-Level-Spannungspegel (Pin 6) wird der Zustand von SWITCH 1 nach 2 gewechselt.

In der Hauptschaltung wird das Wechseln zwischen SWITCH 1 (PIN 8) und SWITCH 2 (PIN 2) mit einem manuellen Schalter realisiert. Wenn der Schalter eingeschaltet ist, liegt die Logik des DG419 auf Low-Level (GND). Bei logisch 0 wird das Signal an PIN 2 durchgelassen. Wenn der Schalter ausgeschaltet ist, liegt die Logik des DG419 auf High-Level (5V). In diesem Fall spielt das Signal am PIN 8 eine Rolle.



**Abbildung 72: Logiktable DG419**

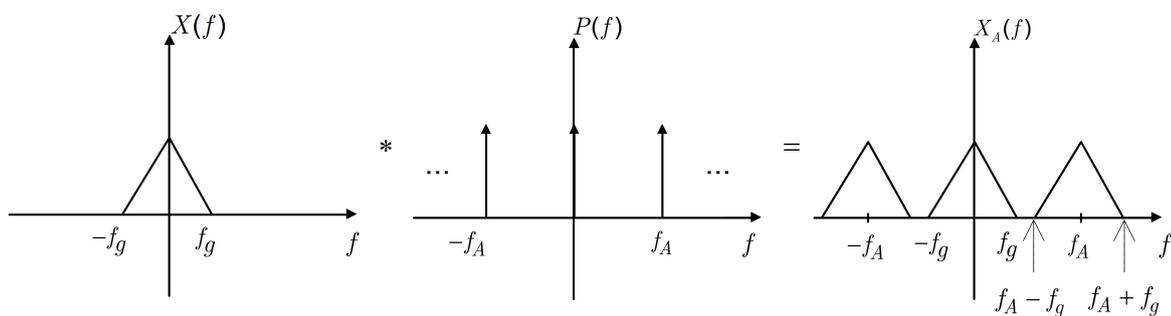
Nun wird angenommen, dass der manuelle Schalter auf „Aus“ ist. Dann wird das abgetastete Signal  $x_k$  mit dem IC AD783 U13 verbunden. Mithilfe der Impulsfolge  $I_3$  wird das abgetastete Signal  $x_k$  am Ausgang als verzögertes Signal  $x_{k-1}$  ausgegeben. Das abgetastete Signal  $x_k$  und das verzögerte Signal  $x_{k-1}$  werden anschließend mithilfe der bereits erwähnten Summier-Schaltung addiert. Am ersten Ausgang des OPV liegt dann  $y_k = x_k + x_{k-1}$  an.

Beim zeitdiskreten Bandpass-Filter wird das Ausgangssignal  $y_k$  mit dem zweiten OPV verbunden. Dann kommt die Koeffizienten-Schaltung zum Einsatz und das Ausgangssignal  $y_k$  wird mit dem Koeffizient -0,8 multipliziert. Im nächsten Schritt erfolgt die Verzögerung von  $-0,8 y_k$  nach  $-0,8 y_{k-1}$  mit dem IC AD783 (U16).

Wenn der manuelle Schalter auf Zustand „Ein“ ist, wird die Verbindung zwischen Pin 2 und Pin 1 des DG419 hergestellt. Anschließend wird das Signal  $-0,8 y_{k-1}$  erneut verzögert und man bekommt  $-0,8 y_{k-2}$ . Am Ende erfolgt die Summation von  $x_k$  und  $-0,8 y_{k-2}$ . Am Ausgang liegt das Signal  $y_k = x_k - 0,8 y_{k-2}$  (Differenzgleichung des zeitdiskreten Bandpassfilters) an.

### 5.2.3 Switched-Capacitor-Tiefpass-Filter

Im Abschnitt Abtasttheorem wurde bereits ausführlich beschrieben, wie das Spektrum eines beliebigen Signals nach Abtastung aussieht.



**Abbildung 73: Spektrum eines abgetasteten Signals**

Aus der Abbildung 73 folgt, dass das Spektrum zwischen  $-f_g$  und  $f_g$  bereits die gleichen Informationen wie das zeitkontinuierliche Signal enthält, die anderen Spektralanteile sind lediglich um  $k \cdot T_A$  verschoben. In der Praxis wird außerdem nur der positive Frequenzteil betrachtet, d.h. um das zeitkontinuierliche Signal zu rekonstruieren, wird ein Tiefpass- oder Bandpassfilter zwischen  $f_A$  und  $f_A - f_g$  eingesetzt.

In dieser Arbeit wird ein Switched-Capacitor-Filter als Tiefpassfilter angewendet, welches häufig kurz als SC-Filter bezeichnet wird. In SC-Filtern werden ohmsche Widerstände durch geschaltete Kondensatoren ersetzt. Der größte Vorteil beim Einsatz der SC-Filter liegt darin, dass man mit nur einem IC entweder Tiefpass oder Bandpassfilter hoher Ordnung realisieren und die Forderung nach Frequenzvariation erfüllen kann, während eine zeitkontinuierliche Schaltung in hoher Ordnung eine Menge frequenzabhängiger Kondensatoren benötigt. Außerdem ist der Aufwand für so eine zeitkontinuierliche Schaltung enorm, weil man nicht nur diese passiven Komponenten kaufen und löten, sondern auch die Temperatur- und Feuchtabhängigkeit berücksichtigen muss. Im Vergleich dazu lassen sich die Filterparameter des SC-Filters sehr leicht steuern, weil die Parameter von der Umschaltfrequenz der Kondensatoren abhängen. Die Abbildung 74 zeigt das Prinzip.



**Abbildung 74: Äquivalenz von geschalteter Kapazität und ohmschem Widerstand**

Bei der rechten Schaltung wird als erstes die geschaltete Kapazität von der Eingangsspannung geladen:  $Q=C_s \cdot U$ . Wenn der Schalter auf den rechten Kontakt trifft, gibt der Kondensator die gleiche Ladung wieder ab. Das bedeutet, dass die Ladung  $Q=C_s \cdot U$  mit dem Schalter vom Eingang zum Ausgang übertragen wird. Der Strom der rechten Schaltung berechnet sich zu:

$$I = \frac{Q}{T_s} = C_s \cdot U \cdot f_s \quad (5.11)$$

Wenn man die beiden Schaltungen vergleicht, lässt sich die Grundäquivalenz zwischen geschalteter Kapazität und einem ohmschen Widerstand angeben als:

$$I = U \cdot R = U \cdot C_s \cdot f_s \rightarrow R = \frac{1}{C_s \cdot f_s} \quad (5.12)$$

Trotzdem kann man einen Nachteil von SC-Filtern auch nicht vernachlässigen. Bei SC-Filtern handelt es sich um zeitdiskrete Filter sowie abgetastete Systeme, deshalb muss die Umschaltfrequenz der Kondensatoren höher als die Grenzfrequenz des Filters sein, um Aliasingeffekte zu vermeiden. Darüber hinaus ist ein SC-Filter kein rein analoges Tiefpassfilter, deswegen muss bei Bedarf noch ein nachgeschalteter Tiefpass zum Einsatz kommen, um die die hochfrequenten Signalanteile der Umschaltfrequenz auszufiltern.

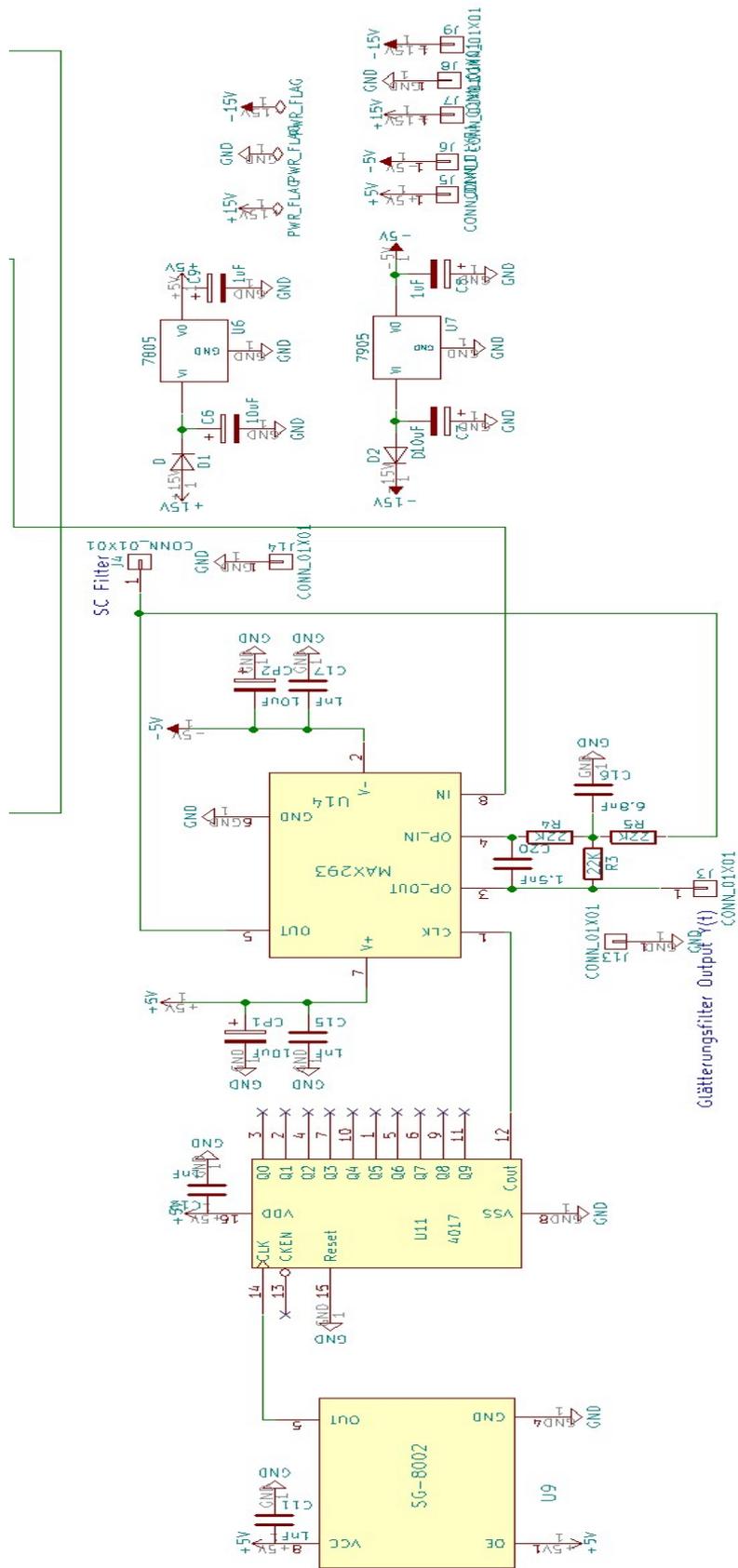


Abbildung 75: SC-Filter-Schaltung

Bei der Realisierung des zeitdiskreten Bandpass- und Tiefpassfilters wird für das SC-Filter der IC MAX293 verwendet, dessen Eingangsfrequenz und Grenzfrequenz 100:1 ist. Die Abtastfrequenz  $f_A$  beträgt 4kHz, deswegen liegen der Maximalwert der Systemfrequenz  $f$  und die Grenzfrequenz des SC-Filters beide bei 2kHz.

Aufgrund des Verhältnisses 100:1 beim MAX293 wird am CLOCK-Eingang (PIN 1) des MAX293 eine 200kHz Frequenz eingespeist, die in der Schaltung mithilfe eines 2MHz Quarzoszillators und dem IC 4017 erzeugt werden. Nachfolgende Tabelle zeigt die Zustände des IC4017.

Clock(Pin14)	Clock Enable(Pin13)	Reset(PIN15)	Decode Output(PIN12)
0	X	0	n
X	1	0	n
X	X	1	„0,,
Steigende Flanke	0	0	n+1
Abfallende Flanke	X	0	n
X	Steigende Flanke	0	n
1	Abfallende Flanke	0	n+1
X=Don't Care	If n<5 Carry = „1“	Otherwise=„0“	

**Tabelle 13: Zustandstabelle des IC 4017**

In der SC-Filter-Schaltung wird CLOCK (Pin 14) mit dem 2MHz-Quarzoszillator und „CLOCK Enable“ (PIN 13) und „Reset“ (PIN 15) mit Masse verbunden. Nach Tabelle 13 wird die Eingangsfrequenz 2MHz durch 10 dividiert und am Ausgang (PIN 12) liegt eine Ausgangsfrequenz von 200kHz. Danach werden diese 200kHz und der Ausgang  $y_k$  in der Hauptschaltung jeweils mit CLOCK (PIN 1) und IN (PIN 8) verbunden. Das Ausgangssignal (PIN 5) enthält aber noch die abgetastete Umschaltfrequenz des SC-Filters. Um diese restlichen Frequenz herauszufiltern, wird das Ausgangssignal noch mit einem Tiefpassfilter verbunden, das im Datenblatt angegeben ist. Am Ende liegt am Ausgang (PIN 3) wieder ein zeitkontinuierliches Signal  $y(t)$  an.

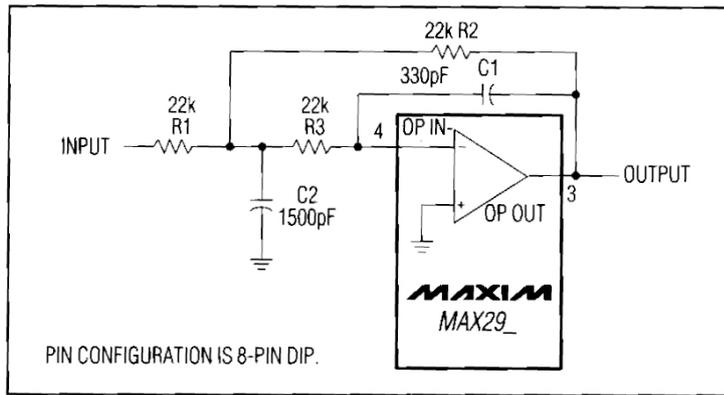


Abbildung 76: Tiefpassfilter im Datenblatt des MAX293

Quelle: [1] Seite 450-451 [2] Kapitel 1.1-1.2

### 5.3 Vergleich der Abtastschaltung

Für die Sample & Hold Schaltung spielt die „Acquisition Time“ eine entscheidende Rolle. Unter dem englischen Begriff „Acquisition Time“ versteht man die Zeit, die der Takt von 0V bis zur Hold-Spannung braucht. Das bedeutet, im praktischen Versuch wird die Abtasterschaltung nicht sofort funktionieren, sondern wegen dieser Einstellzeit ein wenig verzögert. Im Abschnitt 5.2.1 wird die Taktung bereits vorgestellt, die man in der Hauptschaltung benötigt. Das Taktschema stellt die Abbildung 77 dar.

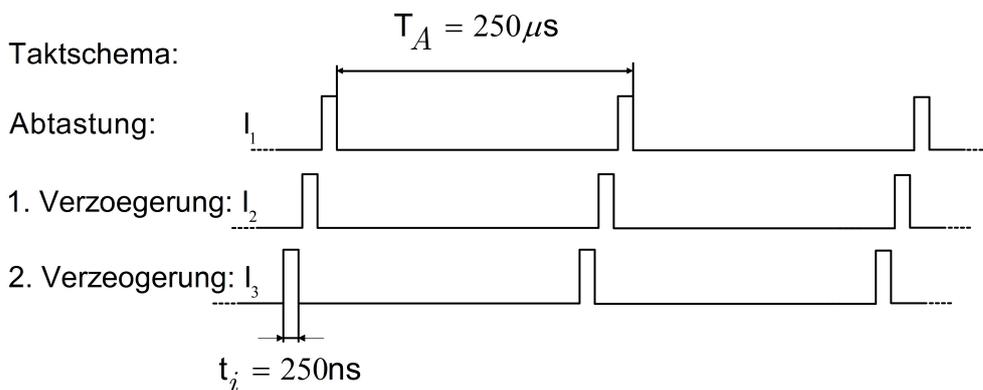
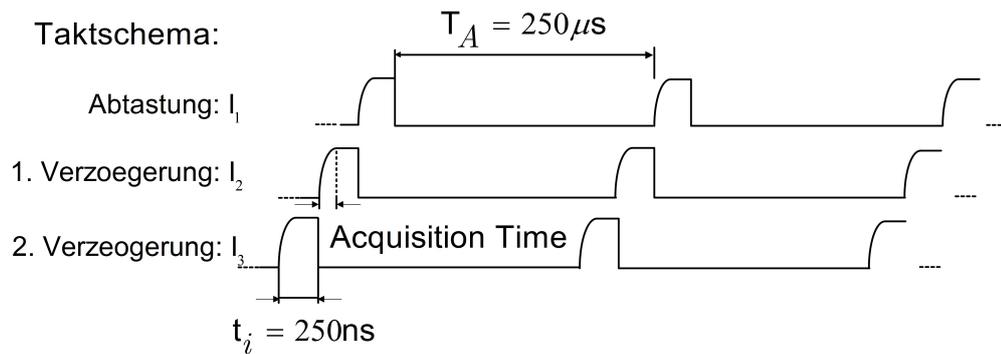


Abbildung 77: Taktschema

In Abhängigkeit von dieser Einstellzeit oder englisch „Acquisition Time“ wird sich das Taktdiagramm verändern. In der Abbildung 78 ist das praxisnahe Taktdiagramm ersichtlich.



**Abbildung 78: Praxisnahes Taktdiagramm**

Unter diesen Voraussetzungen sollte man eine Abtastschaltung verwenden, die nicht nur preisgünstig, sondern deren Einstellzeit auch so kurz wie möglich ist. Auf dem Markt stehen aber eine Vielzahl an Sample & Hold Schaltungen zur Verfügung. Nachfolgenden werden 3 IC (AD783, AD781 und LF298) als Beispiel diskutiert, in der Tabelle 14 sind die wichtigen Parameter der 3 IC aufgelistet.

	AD783	AD781	LF298
Acquisition Time/s	200ns	500ns	4us
Preis/Euro	21,647 Euro	19,56 Euro	2,28 Euro
Versorgungsspannung/V	$\pm 5V$	$\pm 12V$	$\pm 5V$

**Tabelle 14: Vergleich der Parameter AD783, AD781, LF298**

Aus der Tabelle 14 folgt, dass der AD783 die kürzeste Einstellzeit hat. Außerdem wird in der ganzen Schaltung für alle IC  $\pm 5V$  Versorgungsspannung geliefert, die AD783 auch benötigt, aber der AD781 benötigt zusätzlich noch eine spezielle Eingangsspannung von  $\pm 12V$ . Aber ein Nachteil des AD783 ist auch offensichtlich: Jeder AD783 kostet ca. 22 Euro, was viel teurer als die anderen Sample & Hold ICs ist.

## 5.4 Löten und Funktionstest

Bevor die Spannungsversorgung mit der Leiterplatte verbunden wird, muss man zuerst einige Grundtests machen. Als erstes wird kontrolliert, ob alle Bauelemente richtig gelötet sind, wie in der Schaltung gezeichnet. Schon beim Schaltungsentwurf stand fest, dass eine Seite der Leiterplatte mit Masse und die andere Seite der Leiterplatte mit 5V verbunden werden soll. Um alle einzelnen Spannungen auf der Leiterplatte zu überprüfen, wird ein Multimeter verwendet. Es muss sichergestellt sein, dass alle ICs auf der Leiterplatte mit 5V Spannung versorgt sind, damit alle ICs problemlos funktionieren können.

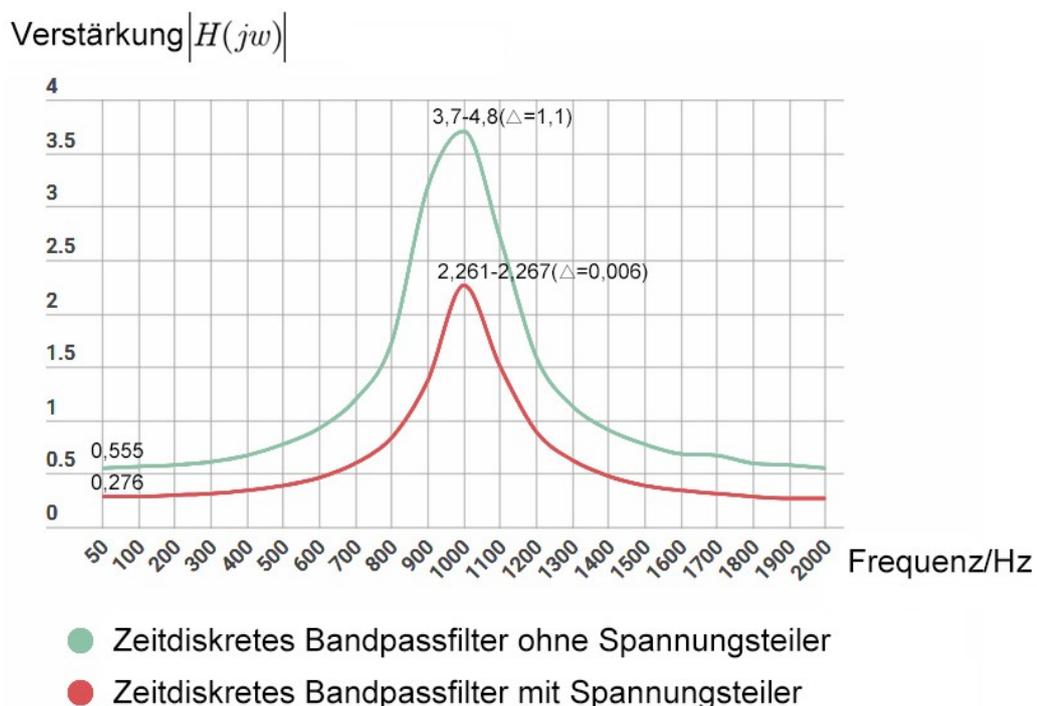
Nach dem erfolgten Grundtest wird die Leiterplatte erst mit der Spannungsquelle verbunden (rot mit Plus, schwarz mit Masse, blau mit Minus). Am besten wäre, dass eine Strombegrenzung z.B. 0,1A, in der Spannungsversorgung eingestellt wird, damit unbemerkte Kurzschlüsse die Leiterplatte nicht schädigen können. Wenn alles in Ordnung ist, wird der Eingang  $x(t)$  mit dem Generator und der Ausgang mit dem Oszilloskop und einem Multimeter verbunden. Bereits in den Abschnitten 4.1 und 4.3 wurde bereits erläutert, dass die Systemfrequenz zur Vermeidung des Aliasingeffekts nur maximal zur Hälfte so groß wie die Abtastfrequenz sein darf. Wenn ein sinusförmiges Signal mit 1V Effektivwert vom Generator eingespeist wird, ist die mit dem Multimeter gemessene Ausgangsspannung genauso groß wie die Verstärkung des zeitdiskreten Systems. In den Tabellen 13 und 14 im Anhang D werden alle gemessenen Zahlenwerte des zeitdiskreten Bandpass- oder Tiefpassfilters in Abhängigkeit von der Frequenz zwischen 50Hz und 2kHz aufgelistet. Es fällt auf, dass die Maximalverstärkung im zeitdiskreten Bandpassfilter bei der Frequenz  $f = 1\text{kHz}$  nicht ein fester Wert ist, sondern die Verstärkung verändert sich von 3,7 bis 4,8, was mit der in Kapitel 4.3.2 berechneten Theorie nicht übereinstimmt. Um diese Schwankung der Verstärkung zu beseitigen, wurde die alte Leiterplatte, die vor ca. 15 Jahren von Dipl.-Ing. Stephan Wnuck erstellt wurde, getestet und die Verstärkung noch einmal gemessen. An den Messwerten der alten Leiterplatte fällt auf, dass die Verstärkung durch einen Spannungsteiler stabil wird, während sich ohne sich die Verstärkung wieder verändert. Um die Auswirkung des Spannungsteilers zu überprüfen, wurde die neu entworfene Leiterplatte auch mit einem Spannungsteiler 1:2 verbunden. Das bedeutet, die Systemfunktion des Bandpassfilters unter Berücksichtigung des Spannungsteilers ist:

$$H(s) = \frac{0.5 \cdot z^2}{z^2 + 0.8} \quad (5.12)$$

Im Abschnitt 4.3.2 wurde der Amplitudengang des zeitdiskreten Bandpassfilters ohne Spannungsteiler schon berechnet. Deswegen sollten in diesem Fall nach der Theorie einfach alle entsprechenden Verstärkungen halbiert werden. Das heißt, das neue zeitdiskrete Bandpassfilter sollte bei 1kHz eine Verstärkung von 2,5 haben, während bei 50Hz und 1,99kHz die Verstärkung 0,275 beträgt. Die gemessenen Zahlenwerte werden in der Tabelle 14 aufgelistet und in der Tabelle erkennt man, dass die Verstärkung bei 50Hz und 1,99kHz der Theorie entspricht, während die Verstärkung bei 1kHz im Bereich von ungefähr 2,261 bis 2,267 liegt. Anhand der gemessenen Zahlenwerte kann man zusammenfassen, dass der Veränderungsbereich der Maximalverstärkung mit dem Spannungsteiler geringer wird. Die Maximalverstärkung wird durch den Spannungsteiler stabil, weil der Spannungsteiler den Eingangspegel verkleinert hat. In der Praxis wird ein analoger RC-Tiefpass in der Summierschaltung hinzugefügt, um das Sprungsignal „rund“ zu machen,

was aber auch einen Pegel-Verlust für das abgetastete Signal verursacht. Mit verkleinertem Eingangspegel durch den Spannungsteiler wird der Verlust auch weniger, deshalb liegt im diesen Fall die Maximalverstärkung fest bei ca. 2,26.

Trotzdem fällt es auf, dass die gemessene Maximalverstärkung 2,26 bei 1kHz dem berechneten Wert 2,5 nicht entspricht. Es besteht noch eine 10% Ungenauigkeit. Im Vergleich mit der alten Leiterplatte liegt diese Ungenauigkeit eventuell daran, dass die Zeitverschiebung der Signale unbestimmt ist. Im zeitdiskreten Bandpassfilter wird das abgetastete  $x_k$  mit dem zweimal zeitlich verzögerten  $y_{k-2}$  addiert. In der Praxis ist die Verzögerungszeit nicht so genau wie in der Theorie. Mit dem Oszilloskop kann man sehen, dass das abgetastete  $x_k$  2 Mikrosekunden eher ist. Um diese 2 Mikrosekunden zu verzögern, muss extra noch eine Schaltung entworfen und in der fertig aufgebauten Leiterplatte hinzugefügt werden, was ziemlich kompliziert und aufwendig ist. In diesem Fall wird diese 10% Ungenauigkeit bleiben. Genau wie das zeitdiskrete Bandpassfilter wird der Amplitudengang des zeitdiskreten Tiefpassfilters in Abhängigkeit der Frequenz auch mit dem Multimeter gemessen und anhand der gemessenen Zahlenwerte in Tabelle 14 lässt sich zusammenfassen, dass der zeitdiskrete Tiefpass genau wie in der Theorie funktioniert und der Spannungsteiler bei dem zeitdiskreten Tiefpass nur als Koeffizient dient. In den folgenden Abbildungen 79 und 80 werden die gemessenen Amplitudengänge der beiden zeitdiskreten Filter dargestellt.



**Abbildung 79: Gemessene Zahlenwerte des zeitdiskreten Bandpassfilters mit und ohne Spannungsteiler**

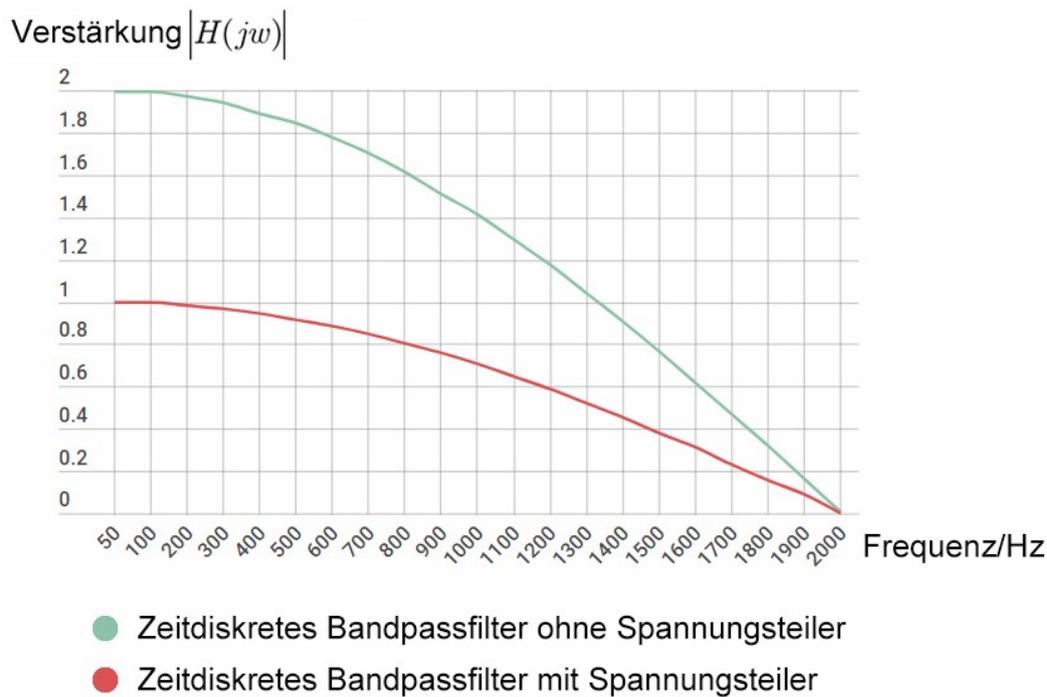


Abbildung 80: Gemessene Zahlenwerte des zeitdiskreten Tiefpassfilters mit und ohne Spannungsteiler

## 5.5 Bewertung der gemessenen Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz

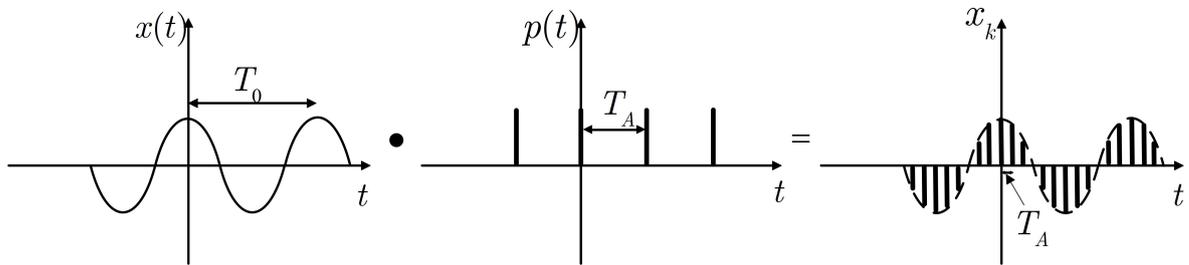
Nach dem erfolgreichen Funktionstest erfolgt der umfangreiche Praxistest der Leiterplatte. Es fällt auf, wenn man den abgetasteten Ausgang  $y_k$  und den Glättungsfilterausgang  $y(t)$  in Abhängigkeit der Frequenz vergleicht, dass die gemessenen Ausgangsspannungen der beiden Ausgänge nicht stimmen. An dieser Stelle stellt sich die Frage nach den Ursachen.

### 5.5.1 Effektivwertmessung bei Abtastung mit Dirac-Impulsen

Die Effektivwertmessung erfolgt bei sogenannter idealer Abtastung, also mittels Abtastung mit Dirac-Impulsen. Zum besseren Verständnis wird hier als Beispiel ein periodisches Cosinus-Signal mit Periodendauer  $T_0$  als abzutastendes Signal angenommen. Bei idealer Abtastung wird das periodische Cosinus-Signal mit zahlreichen Dirac-Impulsen mit der

Abtastperiode  $T_A$  im Zeitbereich multipliziert, während das Spektrum des Cosinus-Signals auch mit zahlreichen Dirac-Impulsen mit der Abtastungsfrequenz  $f_A$  gefaltet wird.

Bei der idealen Abtastung eines Cosinus-Signals im Zeitbereich ergibt sich:



**Abbildung 81: Ideale Abtastung eines Cosinus-Signals im Zeitbereich**

Aus der Korrespondenz für die komplexe Exponentialschwingung

$$e^{-j2\pi f_0 t} \circ \bullet \delta(f + f_0) \quad (5.12)$$

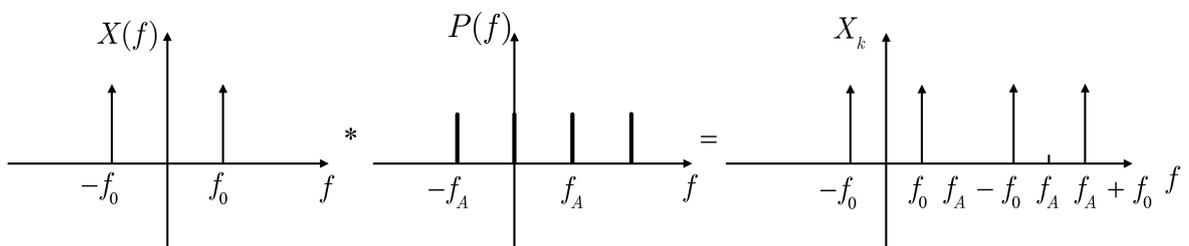
und durch Anwendung der Eulerschen Formel

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} \left[ e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right] \quad (5.13)$$

ergibt sich die Fourier-Transformierte des Cosinus-Signals zu

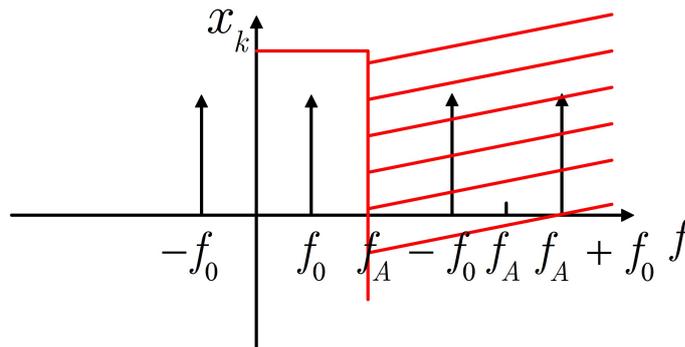
$$\cos(2\pi f_0 t) \circ \bullet \frac{1}{2} \left[ \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) \right] \quad (5.14)$$

Mit der Fourier-Transformierten der Cosinus-Funktion wird die Abtastung mit Dirac-Impulsen im Frequenzbereich in der Abbildung 82 grafisch beschrieben.



**Abbildung 82: Spektrum von der idealen Abtastung**

Genau wie im praktischen Versuch wird ein SC-Filter als Tiefpass mit der Grenzfrequenz  $f_g = \frac{f_A}{2}$  eingesetzt, um ein zeitkontinuierliches Signal zu rekonstruieren. Zur Vermeidung des Aliasingeffekts muss die Abtastungsfrequenz  $f_A$  mindestens 2 mal höher als die Systemfrequenz sein. Unter dieser Bedingung sieht das Spektrum des Glättungssignals in der Abbildung 83 folgendermaßen aus.



**Abbildung 83: Spektrum des Glättungssignals**

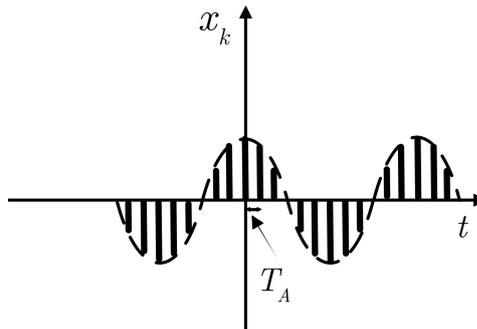
Wenn man die beiden Spektren in den Abbildungen 84 und 85 vergleicht, fällt auf, dass das Spektrum des Glättungssignals viel kleiner als das abgetastete Signal ist, weil das SC-Filter als Tiefpass die andere Frequenz ausgefiltert hat. Wenn man die Effektivwerte der beiden Ausgänge  $y_k$  und  $y(t)$  gemessen hat, ist der Effektivwert des Glättungssignals  $y(t)$  geringer als bei dem abgetasteten Signal  $y_k$ . Diesen Effekt kann man auch mittels Fourier-Reihe erklärt. Das abgetastete Signal  $y_k$  besteht aus einer Menge Rechtecksignale, die unendlich hohe Frequenzen beinhalten. Das Glättungsfiler als Tiefpass spielt eine selektive Rolle, d.h. das SC-Filter hat eine bestimmte Frequenz von einer Menge Frequenzen ausgewählt und im Zeitbereich wird diese ausgewählte Frequenz zu einem zeitkontinuierlichen Signal  $y(t)$  rekonstruiert.

### 5.5.2 Zeitdiskrete Signale unter Verwendung einer Sample-and-Hold-Schaltung (S&H)

Im Abschnitt 5.5.1 wird ausführlich erläutert, worin der Unterschied zwischen den beiden Ausgängen  $y_k$  und  $y(t)$  bei idealer Abtastung mit Dirac-Impulsen besteht. Da solche Dirac-Impulse im praktischen Versuch gar nicht existieren, wird die Abtastung in der Praxis mit einer S&H Schaltung realisiert. In der S&H-Schaltung wird das zeitkontinuierliche

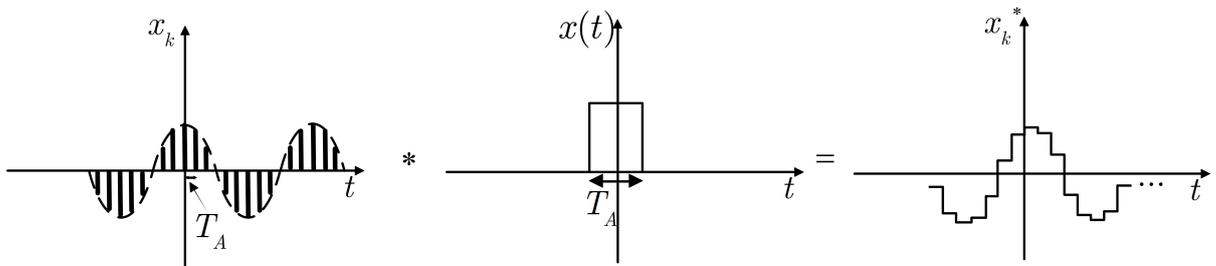
Signal statt mit Dirac-Impulsen mit Rechteckimpulsen mit einer Impulsdauer  $t_0$  zu bestimmten Zeitpunkten erst abgetastet und dann der gerade abgetastete Wert für die Länge der Impulsdauer  $t_0$  konstant gehalten.

In der S&H Schaltung wird also das zeitkontinuierliche Cosinus-Signal als erstes wie bei der idealen Abtastung mit bestimmter Abtastungsperiode  $T_A$  abgetastet. Die grafische Darstellung sieht man in der Abbildung 84.



**Abbildung 84: Abgetastetes Cosinus-Signal**

Zunächst wird eine Faltung zwischen diesem abgetasteten Cosinus-Signal und dem sogenannten Abtasthalteglied (ein Rechteckimpuls mit Impulsdauer  $T_A$ ) im Zeitbereich realisiert.

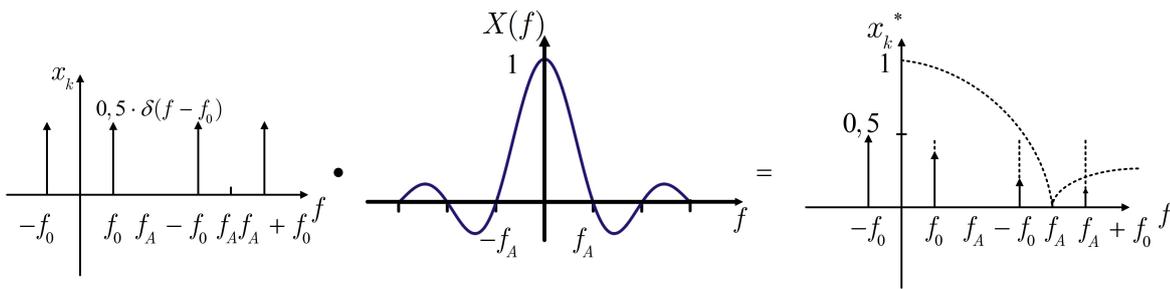


**Abbildung 85: Realistische Abtastung unter Verwendung S&H im Zeitbereich**

Die Faltung in Zeitbereich entspricht einer Multiplikation im Frequenzbereich. Die Fourier-Transformierte der Rechteck-Funktion lautet:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T_A}\right) \circ \bullet T_A \cdot \text{si}(\pi \cdot T_A \cdot f) \quad (5.15)$$

Somit lässt sich das Spektrum der tatsächlichen Abtastung in der Praxis folgendermaßen beschreiben:



**Abbildung 86: Spektrum der realistischen Abtastung unter Verwendung S&H**

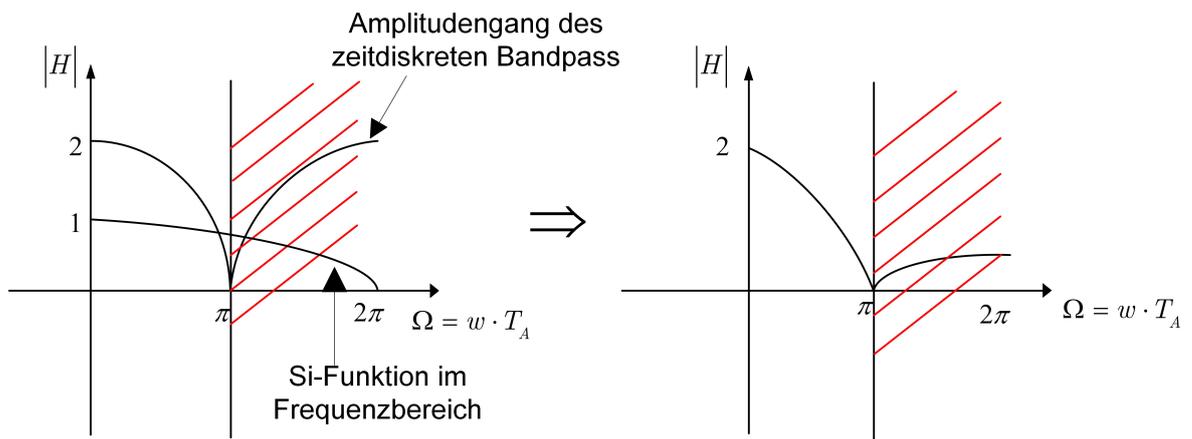
Die Abbildung 86 hat bereits verdeutlicht, dass das Spektrum des abgetasteten Signals mit einer Si-Funktion überlagert ist, die dazu führt, dass das Spektrum bei höheren Frequenzen „abgeschwächt“ wird, während das Spektrum bei niedrigen Frequenzen unverändert bleibt. Laut Abtasttheorem muss die Systemfrequenz  $f$  kleiner als die halbe Abtastungsfrequenz  $f_A$  sein, deswegen sind bei Messung am Ausgang  $y_k$  die Effektivwerte bei praxisrelevanter Abtastung unter Verwendung eines S&H-Gliedes fast identisch mit der vorher mit der Systemfunktion berechneten Verstärkung. Genau wie bei den Dirac-Impulsen wird der abgetastete Ausgang  $y_k$  noch mit einem SC-Tiefpass-Filter mit der

Grenzfrequenz  $f_g = \frac{f_A}{2}$  verbunden, um ein zeitkontinuierliches Signal zu rekonstruieren.

Um den Einfluss der Si-Funktion genauer zu verdeutlichen, wird nun das im Versuch erstellte zeitdiskrete Tiefpassfilter einbezogen. Im praktischen Teil beträgt die Abtastungsfrequenz 4kHz und wegen dem Aliasingeffekt liegt die Grenzfrequenz bei 2kHz. Der Amplituden- und Phasengang des zeitdiskreten Tiefpasses wurde schon im Abschnitt 4.1.1 beschrieben:

$$|H| = 2 \left| \cos \frac{\Omega}{2} \right|, \quad \varphi = -\frac{\Omega}{2} \quad (5.16)$$

Wie schon erwähnt, wird der Amplitudengang bei praxisrelevanter Abtastung unter Verwendung eines S&H-Gliedes mit der Si-Funktion überlagert und der praxisrelevante Amplitudengang sieht so aus:



**Abbildung 87: Amplitudengang des zeitdiskreten Tiefpasses unter Verwendung eines S&H-Gliedes**

Die Abbildung 87 zeigt, dass die Überlagerung der Si-Funktion eine negative Rolle bei höheren Frequenzen spielt, während sich der Amplitudengang bei niedrigen Frequenzen fast nicht verändert.

## 6 Fazit

Diese Arbeit ist im Wesentlichen eine weiterführende Untersuchung der im Praxismodul von mir angefertigten Arbeit zum Thema „Entwurf, Aufbau und Erprobung einer aktiven Bandpass-Schaltung“, in der der Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzverhalten der Sallen-Key-Bandpass-Schaltung diskutiert und eine aktive Sallen-Key-Bandpass-Schaltung aufgebaut wird.

In dieser Arbeit wird als erstes der Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzverhalten verschiedener Systeme, z.B. RC-Tiefpass, RC-Hochpass, auf Basis des Praxismoduls weiter untersucht und diskutiert. Danach werden die zeitdiskreten Systeme 1. Ordnung und 2. Ordnung eingeführt und mit diesen eingeführten Grundlagen der zeitdiskreten Systeme eine Schaltung neu entworfen und realisiert, die als ein zeitdiskretes Tiefpassfilter und ein zeitdiskretes Bandpassfilter verwendet werden kann. Für den Schaltungsentwurf und das PCB-Layout kamen verschiedene Programme in Betracht, auf Grund der kostenlosen Verfügbarkeit und vorher schon gewonnene Erkenntnisse wurde sich in dieser Arbeit für die Software „Kicad“ gewählt. Als Ergebnis der Arbeit entstand eine funktionsfähige Leiterplatte, das zeitdiskrete Tiefpassfilter funktioniert genau wie in der Theorie, während beim Bandpassfilter bei 1kHz eine 10%ige Ungenauigkeit der Verstärkung auftritt. Nach Vergleich mit der vor 15 Jahren erstellten Leiterplatte liegt das Problem eventuell daran, dass die zeitliche Bestimmung des abgetasteten Signals  $x(k)$  nicht richtig ist. Wegen der Kosten und zeitlichen Beschränkung der Arbeit wurde dieses Problem in dieser Arbeit nicht gelöst.

Zukünftig wird die aufgebaute Leiterplatte im Rahmen eines neuen Versuches im Praktikum „Signal- und Systemtheorie“ eingesetzt, mit dem die Studenten die Eigenschaften zeitdiskreter Systeme deutlicher beobachten und verstehen sollen. Diese Arbeit dient auch als Grundlage für eine neue Versuchsanleitung, die sich im Anhang befindet. Die im Kapitel 3 erworbenen Kenntnisse über die zeitkontinuierlichen Systeme können auch als Ergänzung für die Versuche 2 und 3 des Praktikums „Signal- und Systemtheorie“ dienen.

# Literaturverzeichnis

[1] **Ch.Scgenk, U. (1990)**. Halbleiter-Schaltungstechnik. Erlangen und München: Springer-Verlag.

[2] **Eidgenössisch Technische Hochschule Zürich. (2018)**. SV3: Switched-Capacitor Filter. Von <http://www.isiweb.ee.ethz.ch/teaching/labs/SV3.pdf> abgerufen

[3] **Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft. (2018)**. Systemonline. Von <https://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/teil-a-zeitkontinuierliche-signale-und-systeme/zeitkontinuierliche-systeme-im-zeitbereich/beschreibung-zeitkontinuierlicher-systeme-mit-differentialgleichungen/beispiel-rc-netzwerk.html> abgerufen

[4] **Instrument, T. (8 2014)**. High-Speed CMOS Logic 3- to 8-Line Decoder/Demultiplexer Inverting and Noninverting. Von <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/cd74hc138.pdf> abgerufen

[5] **Lampe, P. D.-I. (2017)**. Vorlesung Signal- und Systemtheorie. Von [https://download.hs-mittweida.de/intranet/lehre/INW/Lampe/Signal\\_und\\_Systemtheorie\\_I/Vorlesung/Vorlesung\\_Signal\\_und\\_Systemtheorie\\_Slides.pdf](https://download.hs-mittweida.de/intranet/lehre/INW/Lampe/Signal_und_Systemtheorie_I/Vorlesung/Vorlesung_Signal_und_Systemtheorie_Slides.pdf) abgerufen

[6] **Mathematical Engineering. (2018)**. Sprungantwort. Von Mathematical Engineering: <http://me-irt.de/v-2-1-sprungantwort> abgerufen

[7] **Mertins, P. D.-I. (2013)**. Signaltheorie. Springer Vieweg, Wiesbaden.

[8] **München, T. U. (13. 4. 2016)**. Rückgewinnung von Information. Von <http://docplayer.org/69361741-Technische-universitaet-muenchen-fakultaet-fuer-informatik.html> abgerufen

[9] **Nexperia. (3. 2016)**. 74HC4040; 74HCT4040: 12-stage binary ripple counter. Von [https://assets.nexperia.com/documents/data-sheet/74HC\\_HCT4040.pdf](https://assets.nexperia.com/documents/data-sheet/74HC_HCT4040.pdf) abgerufen

- [10] **Oppenheim, A. V. (2012).** Signal and Systems. USA: MIT Opensource.
- [11] **Schaerer, T. (2018).** Das SC-Filter, eine kurze Einführung. Von Elektronik Kompendium: <https://www.elektronik-kompendium.de/public/schaerer/scf1.htm> abgerufen
- [12] **Signaldarstellung. (2018).** Von [http://www.Intwww.de/cgi-bin/extern/uni.pl?uno=buchseite&due=inhalt&zustand=512&session\\_id=](http://www.Intwww.de/cgi-bin/extern/uni.pl?uno=buchseite&due=inhalt&zustand=512&session_id=) abgerufen
- [13] **Spektrale Darstellung, Spektrum, Fouriertransformation. (2018).** Von [http://dodo.fb06.fh-muenchen.de/maier/analytik/Blaetter/A04\\_Spektrum\\_Fouriertransformation\\_a\\_BA.pdf](http://dodo.fb06.fh-muenchen.de/maier/analytik/Blaetter/A04_Spektrum_Fouriertransformation_a_BA.pdf) abgerufen
- [14] **Wikipedia. (9. 2. 2018).** Filter. Von Wikipedia: [https://de.wikipedia.org/wiki/Filter\\_\(Elektrotechnik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Filter_(Elektrotechnik)) abgerufen
- [15] **Wikipedia. (2018).** Liste mathematischer Symbole. Von [https://de.wikipedia.org/wiki/Liste\\_mathematischer\\_Symbole](https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_mathematischer_Symbole) abgerufen
- [16] **Wnuck, D.-I. S. (2018).** Versuch 3 - Praktikum „Signal -und Systemtheorie“. Von Hochschule Mittweida: [https://download.hs-mittweida.de/intranet/lehre/INW/Wnuck/Praktikum\\_SST\\_ME\\_EIT/Versuchsanleitungen/Versuchsanleitungen\\_EI\\_ME/Vorbereitungshilfen/Versuch3.pdf](https://download.hs-mittweida.de/intranet/lehre/INW/Wnuck/Praktikum_SST_ME_EIT/Versuchsanleitungen/Versuchsanleitungen_EI_ME/Vorbereitungshilfen/Versuch3.pdf) abgerufen
- [17] **Wnuck, S. D.-I. (2010).** Versuch 2 - Praktikum „Signal -und Systemtheorie“ „Zeitverhalten analoger Systeme“. Von Hochschule Mittweida Laufwerk R: [https://download.hs-mittweida.de/intranet/lehre/INW/Wnuck/Praktikum\\_SST\\_ME\\_EIT/Versuchsanleitungen/Versuchsanleitungen\\_EI\\_MD\\_ME\\_MA/Vorbereitungshilfen/Versuch2.pdf](https://download.hs-mittweida.de/intranet/lehre/INW/Wnuck/Praktikum_SST_ME_EIT/Versuchsanleitungen/Versuchsanleitungen_EI_MD_ME_MA/Vorbereitungshilfen/Versuch2.pdf) abgerufen
- [18] **Zhou, X. (2017).** Praxismodulararbeit: Entwurf, Aufbau und Erprobung einer aktiven Bandpass-Schaltung einschließlich der Dokumentation der erreichten Ergebnisse.

# Anhang A: Knotenpunktverfahren

An dieser Stelle wird das Knotenpunktverfahren für die Systemfunktion der Sallen-Key-Bandpass-Schaltung beschrieben.

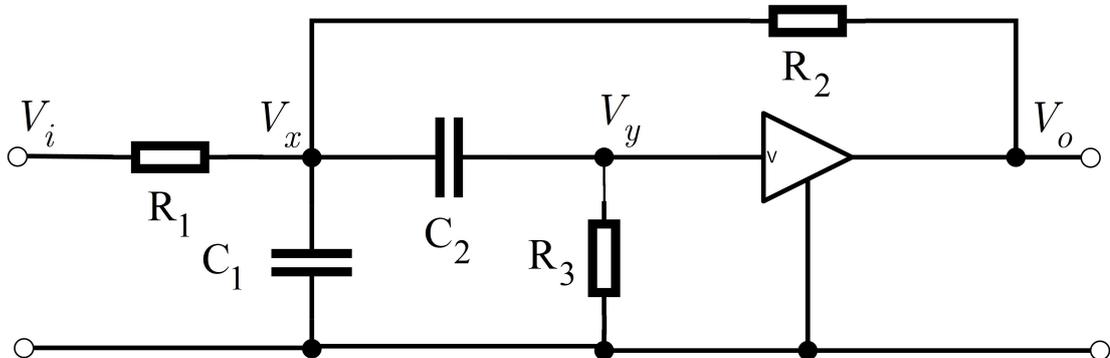


Abbildung 88: Sallen-Key Bandpass-Schaltung mit Knotenpunkten

In der Abbildung 88 sieht man die grundlegende Schaltung der Sallen-Key-Bandpass-Schaltung.

Hier werden 4 Knotenpunkte in dieser Sallen-Key Schaltung betrachtet, um die Berechnung zu vereinfachen. Mit dem Kirchhoff-Gesetz kann wie folgt formuliert werden.

$$\frac{V_x - V_i}{R_1} + \frac{V_x}{\frac{1}{C_1 \cdot s}} + \frac{V_x - V_y}{\frac{1}{C_2 \cdot s}} + \frac{V_x - V_o}{R_2} = 0, \quad V_y = \frac{R_3}{\frac{1}{C_2 \cdot s} + R_3} \cdot V_x \Rightarrow V_x = \frac{\frac{1}{C_2 \cdot s} + R_3}{R_3} \cdot V_y \quad (7.1)$$

$$V_y = \frac{1}{v} \cdot V_o \Rightarrow V_x = \frac{\frac{1}{C_2 \cdot s} + R_3}{R_3} \cdot V_y = \left(1 + \frac{1}{R_3 \cdot C_2 \cdot s}\right) \cdot \frac{1}{v} \cdot V_o = \frac{V_o}{v} \cdot \frac{1 + R_3 \cdot C_2 \cdot s}{R_3 \cdot C_2 \cdot s} \quad (7.2)$$

Jetzt wird  $V_x V_y$  in Gleichung  $\frac{V_x - V_i}{R_1} + \frac{V_x}{\frac{1}{C_1 \cdot s}} + \frac{V_x - V_y}{\frac{1}{C_2 \cdot s}} + \frac{V_x - V_o}{R_2} = 0$  gesetzt. (7.3)

$$\begin{aligned} & \frac{V_0}{V} \cdot \frac{1 + R_3 \cdot C_2 \cdot s}{R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 \cdot s} + \frac{V_0}{V} \cdot \frac{1 + R_3 \cdot C_2 \cdot s}{R_3 \cdot C_2 \cdot s} \cdot C_1 \cdot s + \left( \frac{V_0}{V} \cdot \frac{1 + R_3 \cdot C_2 \cdot s}{R_3 \cdot C_2 \cdot s} - \frac{1}{V} \cdot V_0 \right) \cdot C_2 \cdot s \\ & + \frac{V_0}{V} \cdot \frac{1 + R_3 \cdot C_2 \cdot s}{R_2 \cdot R_3 \cdot C_2 \cdot s} - \frac{V_o}{R_2} = \frac{V_i}{R_1} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Nach Vereinfachung der Berechnung:

$$\frac{V_o}{V_i} = H(s) = \frac{v}{R_1 \cdot C_1} \cdot \frac{s}{s^2 + s \left( \frac{1}{C_1 \cdot R_3} + \frac{1}{C_1 \cdot R_2} + \frac{1}{C_1 \cdot R_1} + \frac{1}{C_2 \cdot R_3} + \frac{V}{C_1 \cdot R_2} \right) + \frac{R_1 + R_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}} \quad (7.5)$$

Somit lautet die Systemfunktion der Sallen-Key Bandpass-Schaltung:

$$H(s) = K \cdot \frac{s}{s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \quad \text{mit } K = \frac{V}{R_1 \cdot C_1}, \quad (7.6)$$

$$a_1 = \frac{1}{C_1 \cdot R_3} + \frac{1}{C_1 \cdot R_2} + \frac{1}{C_1 \cdot R_1} + \frac{1}{C_2 \cdot R_3} + \frac{V}{C_1 \cdot R_2}, \quad (7.7)$$

$$a_0 = \frac{R_1 + R_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}. \quad (7.8)$$

Quelle: [15] Seite 9-10

## Anhang B: Berechnung der Sprungantworten a(t)

Je nach Schaltungsdimensionierung in der Sallen-Key-Bandpass-Schaltung ist:

1.  $\left(\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right) > 0$  ( $R_3 = 33.1\text{K}\Omega$ ). Es ergeben sich zwei einfache reelle Pole (der aperiodische Fall).

2.  $\left(\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right) = 0$  ( $R_3 = 33.3\text{K}\Omega$ ). Es ergibt sich ein Pol der Ordnung 2 (der aperiodische Grenzfall).

3.  $\left(\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right) < 0$  (alle andere  $R_3$  Werte). Es ergeben sich zwei einfache konjugiert komplexe Pole (der Oszillationsfall).

Für  $R_3=50\text{k}\Omega$ ,  $120\text{k}\Omega$ ,  $170\text{k}\Omega$  ist die Schaltung stabil, weil die Sprungantwort a(t) „abklingend“ (Pole in der linken s-Halbebene) ist. Für  $R_3=183\text{k}\Omega$  ist die Schaltung instabil (Pole in der rechten Halbebene). Die Schaltung gibt dann - auch bei abgeschaltetem Generator eine Wechselspannung ab (Oszillator mit ansteigender Amplitude). Die Rücktransformation erfolgt mit dem Residuensatz. Alle Bildfunktionen sind echt gebrochene Funktionen. (Oppenheim, 2012)

Fall 1 und 3 (zwei Pole der Ordnung 1)

$$a(t) = LT^{-1} \left\{ k \cdot \frac{1}{(s-s_{x1}) \cdot (s-s_{x2})} \right\} = k \cdot \left( \lim_{s \rightarrow s_{x1}} \frac{1}{s-s_{x2}} \cdot e^{st} + \lim_{s \rightarrow s_{x2}} \frac{1}{s-s_{x1}} \cdot e^{st} \right) \quad (7.9)$$

$$a(t) = k \cdot \left( \frac{1}{s_{x1} - s_{x2}} \cdot e^{s_{x1}t} + \frac{1}{s_{x1} - s_{x2}} \cdot e^{s_{x2}t} \right)$$

Fall 2 (ein Pol der Ordnung 2)

$$a(t) = LT^{-1} \left\{ k \cdot \frac{1}{(s-s_x)^2} \right\} = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \lim_{s \rightarrow s_x} \left[ \frac{d}{ds} \left( k \cdot \frac{1}{(s-s_x)^2} e^{st} \cdot (s-s_x)^2 \right) \right]$$

$$a(t) = k \cdot \lim_{s \rightarrow s_x} \left[ \frac{d(e^{st})}{ds} \right] = k \cdot \lim_{s \rightarrow s_x} [t \cdot e^{st}] = k \cdot t \cdot e^{s_x t}$$

$$a(t) = k \cdot t \cdot e^{\sigma_x t}$$

(7.10)

Ergebnis für Fall 1:

Mit  $s_{x1} - s_{x2} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$  ergibt sich:

$$a(t) = k \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}} \cdot \left( e^{\left(-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}\right)t} - e^{\left(-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}\right)t} \right)$$

$$a(t) = \frac{k \cdot e^{-\frac{a_1}{2}t}}{\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}} \cdot \frac{e^{\left(\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}\right)t} - e^{\left(-\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}\right)t}}{2} \quad (7.11)$$

$$a(t) = \frac{k \cdot e^{-\frac{a_1}{2}t}}{\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}} \cdot \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}\right) \cdot t$$

Ergebnis für Fall 2:

$$a(t) = k \cdot t \cdot e^{\sigma_x t} = k \cdot t \cdot e^{-\frac{a_1}{2}t} \quad (7.12)$$

Ergebnis für Fall 3:

mit  $s_{x1} = \sigma_x + j\omega_x$  und  $s_{x2} = \sigma_x - j\omega_x$   
 ist  $s_{x1} - s_{x2} = 2j\omega_x$ .

$$a(t) = \frac{k}{2j\omega_x} \left( e^{\sigma_x t} \cdot e^{j\omega_x t} - e^{\sigma_x t} \cdot e^{-j\omega_x t} \right) = \frac{k}{\omega_x} \cdot e^{\sigma_x t} \cdot \frac{e^{j\omega_x t} - e^{-j\omega_x t}}{2j} \quad (7.13)$$

$$a(t) = \frac{k}{\omega_x} \cdot e^{\sigma_x t} \cdot \sin(\omega_x t)$$

$$a(t) = \frac{k}{\sqrt{a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}} \cdot e^{-\frac{a_1}{2}t} \cdot \sin\left(\sqrt{a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}\right) \cdot t$$

Quelle: [14] Seite 2-4

# Anhang C: Lötprozess

Wenn alle Bauelemente und die PCB-Leiterplatte da sind, kann man mit der Bestückung anfangen. Als erstes sollte man alle gelieferten Leiterplatten sortieren und kontrollieren, ob einige Bauelemente falsch geliefert oder bestellt wurden.

## C-1 Vorbereitung für das Löten

Bevor man mit den Lötarbeiten beginnt, sollte man alle benötigten Werkzeuge sowie Lötzinn auf dem Tisch legen. Außerdem muss man den passenden Lötkolben auswählen. Auf der PCB-Leiterplatte gibt es viele SMD-Widerstände und -Kondensatoren. In diesem Fall sollte man einen kleinen Lötkolben verwenden, um besser und einfacher löten zu können.

## C-2 Reihenfolge beim Löten

Zuerst werden alle IC-Bausteine gelötet sowie der IC AD783 und die OPV TSH82. Man muss die Reihenfolge der IC überprüfen, um zu vermeiden, dass ein IC an die falsche Stelle gelötet wird. Dann sind alle SMD an der Reihe. SMD Widerstände oder SMD Kondensatoren sollte man sehr vorsichtig löten, weil sie sehr klein sind. Wenn alle SMD und IC fertig gelötet wurden, können alle anderen Bauelemente daraufgelegt und gelötet werden, denn Bauelemente wie Spannungsregler, normale Kondensatoren und Dioden sind THT, die relativ leicht zu löten sind. Wenn alle Bauelemente gelötet wurden, sollte man noch einmal die fertiggelötete Leiterplatte mit dem PCB-Entwurf vergleichen. Besonders muss noch einmal geprüft werden, ob Dioden und die Kondensatoren richtig gepolt sind. Am Ende verbindet man die Spannungsversorgung der Leiterplatte. Um Plus, Minus und Masse zu unterscheiden, sollten man am besten rot mit Plus, schwarz mit Masse und blau mit Minus verbinden.

## Anhang D: Messwerte

Im Anhang D werden alle Messwerte des zeitdiskreten Tiefpasses und Bandpasses mit und ohne Spannungsteiler in Abhängig von Frequenz aufgelistet.

Zeitdiskretes Bandpassfilter	Zeitdiskretes Bandpassfilter ohne Spannungsteiler	Zeitdiskretes Bandpassfilter mit Spannungsteiler
Frequenz/Hz	Verstärkung $ H(j\omega) $	Verstärkung $ H(j\omega) $
50	0,555	0,276
100	0,560	0,279
200	0,580	0,290
300	0,616	0,310
400	0,675	0,342
500	0,768	0,391
600	0,919	0,468
700	1,184	0,598
800	1,725	0,833
900	3,18	1,361
1K	3,7 - 4,8 ( $\Delta=1,1$ )	2,261 - 2,267 ( $\Delta=0,006$ )
1,1K	2,7	1,5
1,2K	1,59	0,89
1,3K	1,13	0,619
1,4K	0,904	0,478
1,5K	0,767	0,394
1,6K	0,682	0,341
1,7K	0,627	0,307
1,8K	0,593	0,285
1,9K	0,574	0,274
2K	0,001 - 0,556 ( $\Delta=0,555$ )	0,001 - 0,274 ( $\Delta=0,273$ )

**Tabelle 15: Gemessene Zahlenwerte mit zeitdiskretem Bandpassfilter**

Zeitdiskretes Tiefpassfilter	Zeitdiskretes Tiefpassfilter ohne Spannungsteiler	Zeitdiskretes Tiefpassfilter mit Spannungsteiler
Frequenz/Hz	Verstärkung $ H(j\omega) $	Verstärkung $ H(j\omega) $
50	1,99	0,997
100	1,989	0,993
200	1,971	0,982
300	1,944	0,966
400	1,891	0,945
500	1,843	0,918
600	1,777	0,886
700	1,700	0,846
800	1,616	0,804
900	1,510	0,756
1K	1,414	0,703
1,1K	1,297	0,646
1,2K	1,174	0,585
1,3K	1,044	0,523
1,4K	0,907	0,452
1,5K	0,765	0,382
1,6K	0,618	0,309
1,7K	0,468	0,234
1,8K	0,316	0,159
1,9K	0,164	0,086
2K	0,005	0,003

**Tabelle 16: Gemessene Zahlenwerte mit zeitdiskretem Tiefpassfilter**

# Anhang E: Schaltungsentwurf

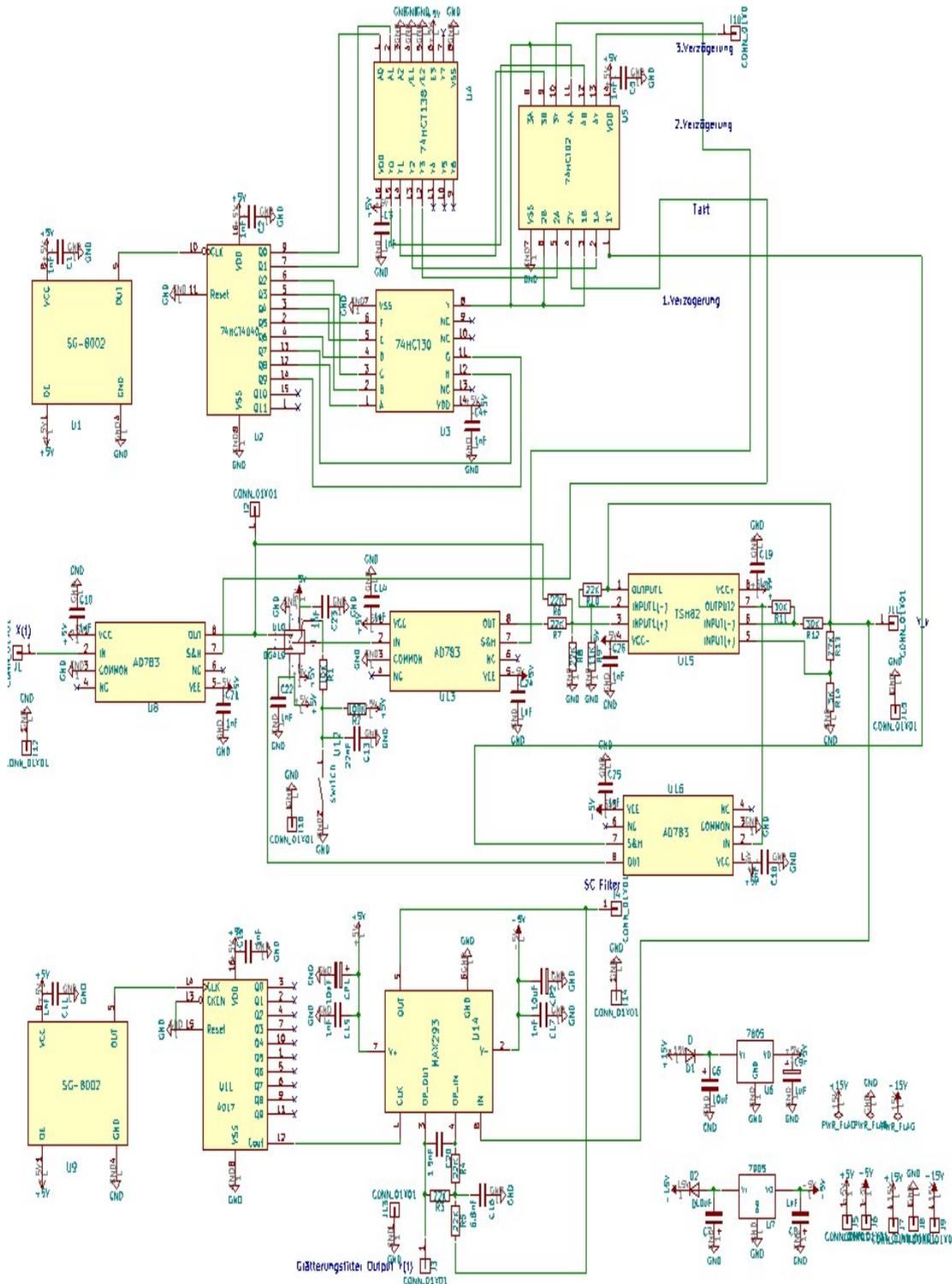


Abbildung 89: Der gesamte Schaltungsentwurf

# Anhang F: Versuchsanleitung

## Praktikum Signal – und Systemtheorie

Studiengänge EI, ME, MD, MA

**Versuch V5: Zusammenhang von Zeitverhalten und Frequenzverhalten zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Systeme**

### 1. Versuchsziele:

- **Kennenlernen des Zeitverhaltens des RC-Tiefpasses und RC-Hochpasses und der Zusammenhang zum Frequenzverhalten.**
- **Vergleich der gemessenen Zahlenwerte mit der Theorie beim Oszillationsfall der Sallen-Key-Bandpass-Schaltung**
- **Verständnis über Abtasttheorem und Aliasingeffekt**
- **Untersuchungen der Wirkungsweise, der Realisierungsmöglichkeiten und insbesondere des Frequenzverhaltens und Zeitverhaltens zeitdiskreter Systeme in ihrer Anwendung als zeitdiskretes Filter**

### 2. Versuchsgrundlage:

- Die Systemfunktion des RC-Tiefpasses lautet:

$$H(s) = \frac{1}{1 + s \cdot \tau}$$

Im Frequenzbereich wird  $s = j2\pi f$  gesetzt und bei hohen Frequenzen kann man 1 im Nenner vernachlässigen, während  $s = j2\pi f$  bei niedrigen Frequenzen auch vernachlässigt werden kann. D.h. bei hohen Frequenzen ist die Systemfunktion des RC-Tiefpasses:

$$H(s) \approx \frac{1}{s \cdot \tau} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{s}$$

Bei niedrigen Frequenzen ist die Systemfunktion des RC-Tiefpasses:

$$H(s) \approx 1$$

Laut der Integrationsregel der Laplace-Transformation ergibt sich, dass  $\frac{1}{s} \cdot F(s)$  im Bild-

bereich einer Integration im Zeitbereich ( $\int_0^t f(\tau) d\tau$ ) entspricht.

Zusammenfassung:

1. RC-Tiefpass funktioniert bei hohen Frequenzen wie ein Integrator.
  2. RC-Tiefpass ändert den Amplitudengang des Eingangssignals bei niedrigen Frequenzen nicht.
- Die Systemfunktion des RC-Hochpasses lautet:

$$H(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s} = \frac{\tau}{\frac{1}{s} + \tau}$$

Genau wie beim RC-Tiefpass wird  $\frac{1}{s}$  bei hohen Frequenzen vernachlässigt ( $s \rightarrow \infty$ ),

während  $\tau$  bei niedrigen Frequenzen auch vernachlässigt wird ( $\frac{1}{s} \rightarrow \infty$ ).

Deswegen lautet die Systemfunktion des RC-Hochpasses bei hohen Frequenzen:

$$H(s) \approx 1$$

Die Systemfunktion des RC-Hochpass ist bei niedrigen Frequenzen:

$$H(s) \approx \frac{\tau}{\frac{1}{s}} = \tau \cdot s$$

Laut der Differenzier-Regel der Laplace-Transformation entspricht  $s \cdot F(s)$  im Bildbereich einer Differentiation ( $\frac{df(t)}{dt}$ ) im Zeitbereich.

Zusammenfassung:

1. RC-Hochpass funktioniert bei niedrigen Frequenzen wie ein Differenzier-Glied
  2. RC-Hochpass ändert den Amplitudengang des Eingangssignals bei hohen Frequenzen nicht.
- Die Systemfunktion der Sallen-Key-Bandpass-Schaltung ist mit:

$$H(s) = k \cdot \frac{s}{s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \quad \text{mit } k = \frac{v}{R_1 \cdot C_1}, a_0 = \frac{R_1 + R_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3},$$

$$a_1 = \frac{1}{C_1 \cdot R_3} + \frac{1}{C_1 \cdot R_2} + \frac{1}{C_1 \cdot R_1} + \frac{1}{C_2 \cdot R_3} + \frac{v}{C_1 \cdot R_2}.$$

Und folgenden Bauelementwerten:

$v = +3.1$ ,  $R_1 = R_2 = R = 100\text{k}\Omega$ ,  $C = 1.5\text{nF}$ ,  $R_3 = 33.1\text{k}\Omega$ ,  $33.3\text{k}\Omega$ ,  $50\text{k}\Omega$ ,  $120\text{k}\Omega$ ,  $170\text{k}\Omega$ ,  $183\text{k}\Omega$

Durch Umformung der Systemfunktion können die Extremwerte ermittelt werden.

$$H(s) = k \cdot \frac{1}{s + a_1 + \frac{a_0}{s}} \xrightarrow{s=j\omega} H(j\omega) = k \cdot \frac{1}{a_1 + j \cdot \left(\omega - \frac{a_0}{\omega}\right)}$$

Bei der Frequenz, bei der  $\left(\omega - \frac{a_0}{\omega}\right) = 0$  ist, wird  $|H(j\omega)|$  maximal und  $\arg(H(j\omega)) = 0$ .

Das ist bei  $f_{\text{MAX}} = \frac{\sqrt{a_0}}{2 \cdot \pi}$  der Fall. Im Maximum ist dann  $|H(j\omega)| = \frac{k}{a_1}$ . Im Fall

$\left(\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right) < 0$  ( $R_3 = 50\text{k}\Omega$ ,  $120\text{k}\Omega$ ,  $170\text{k}\Omega$ ) ergeben sich zwei einfache konjugiert

komplexe Pole (der Oszillationsfall). Für den Oszillationsfall kann man die Sprungantwort  $a(t)$  berechnen.

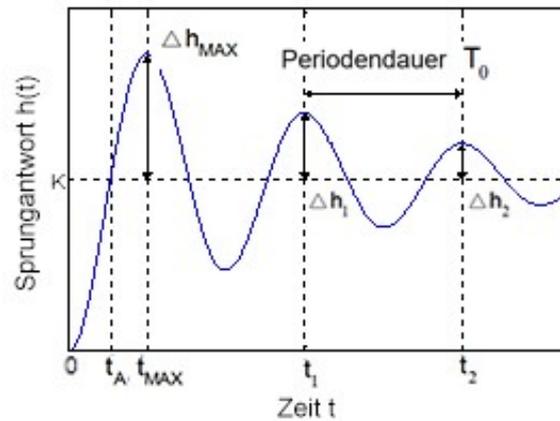
mit  $s_{x1} = \sigma_x + j\omega_x$  und  $s_{x2} = \sigma_x - j\omega_x$

ist  $s_{x1} - s_{x2} = 2j\omega_x$ .

$$a(t) = \frac{k}{2j\omega_x} \left( e^{\sigma_x t} \cdot e^{j\omega_x t} - e^{\sigma_x t} \cdot e^{-j\omega_x t} \right) = \frac{k}{\omega_x} \cdot e^{\sigma_x t} \cdot \frac{e^{j\omega_x t} - e^{-j\omega_x t}}{2j}$$

$$a(t) = \frac{k}{\omega_x} \cdot e^{\sigma_x t} \cdot \sin(\omega_x t)$$

$$a(t) = \frac{k}{\sqrt{a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}} \cdot e^{-\frac{a_1}{2} \cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} \cdot t\right)$$



Um die PN-Daten ( $\sigma_x$  und  $w_x$ ) zu bestimmen, werden zwei Spannungswerte  $u_1$  und  $u_2$  zu den entsprechenden Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  mit der Cursorfunktion im Oszilloskop in jeweils einem lokalen Maximum ermittelt. Zu diesen zwei Zeitpunkten ist der Sinus 1, deswegen ergibt sich:

$$a(t_1) = \frac{k}{w_x} \cdot e^{\sigma_x \cdot t_1} = u_1, \quad a(t_2) = \frac{k}{w_x} \cdot e^{\sigma_x \cdot t_2} = u_2,$$

$$\frac{a_1(t) u_1}{a_2(t) u_2} = e^{\sigma_x(t_1 - t_2)} \rightarrow \sigma_x = \frac{\ln \frac{u_1}{u_2}}{t_1 - t_2}$$

$$\omega_x = 2\pi \cdot f_x \rightarrow f_x = \frac{1}{T_x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \rightarrow \omega_x = 2\pi \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \quad \text{Und } k = \frac{u_1 \cdot w_x}{e^{\sigma_x t_1}} = \frac{u_2 \cdot w_x}{e^{\sigma_x t_2}}.$$

- Vor der Einführung der zeitdiskreten Systeme muss man als Erstes z-Transformation und ihren Zusammenhang mit der Laplace-Transformation betrachten.

**Definition** (zeitdiskrete Laplace-Transformation)

$$X(s) = \sum_0^{\infty} x[k] \cdot e^{-s \cdot k \cdot T_A} \quad (T_A \text{ ist die Abtastungsperiode})$$

Um diese Formel zu vereinfachen, wird eine Abkürzung „Z“ eingeführt.

$$e^{-s \cdot k \cdot T_A} = \frac{1}{e^{s \cdot k \cdot T_A}} = \frac{1}{(e^{s \cdot T_A})^k} = \left(\frac{1}{e^{s \cdot T_A}}\right)^k \Rightarrow \frac{1}{z^k} = z^{-k}$$

Das heißt:  $e^{s \cdot T_A}$  wird durch  $z$  ersetzt. Den Vorgang nennt man z-Transformation.

### Definition (z-Transformation)

$$X(z) = \sum_0^{\infty} x[k] \cdot z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}$$

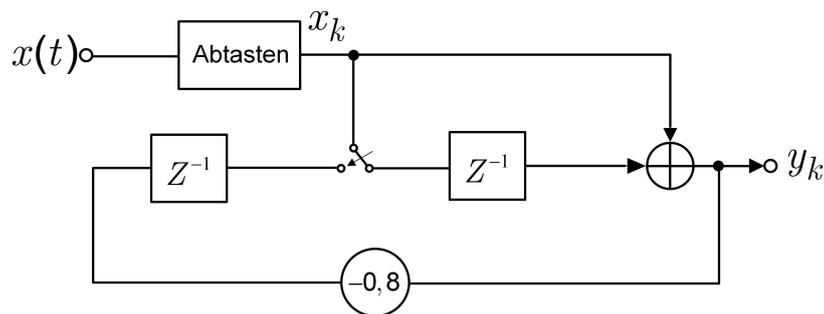
Um das Frequenzverhalten zeitkontinuierlicher Systeme zu bekommen, wird der Laplace-Operator  $s$  durch  $jw$  ersetzt. Analog wird bei zeitdiskreten Systemen  $z = e^{sT_A}$  durch  $e^{jwT_A}$  ersetzt. Mit  $\Omega = wT_A$  wird eine weitere Abkürzung eingeführt. Nun wird die z-Transformation der Systemfunktion folgendermaßen beschrieben:

$$H(z) \Rightarrow H(j\Omega) = |H| \cdot e^{j\varphi}$$

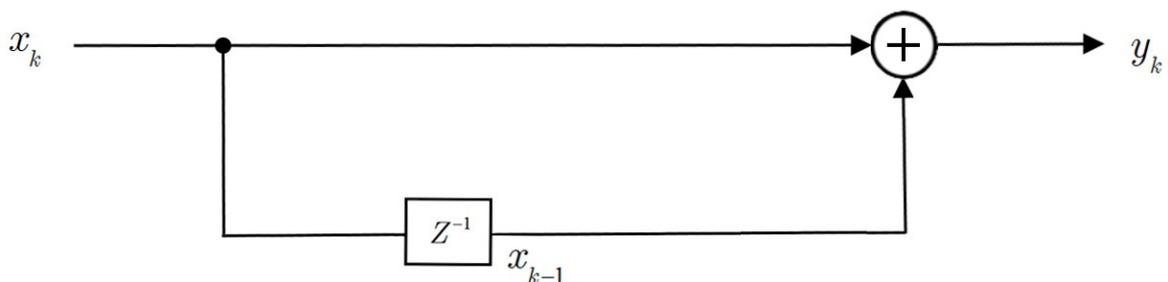
Unter Berücksichtigung des Abtasttheorems ergibt sich somit:

$$\Omega_{\text{MAX}} = w_{\text{max}} \cdot T_A = 2\pi f_{\text{MAX}} \frac{1}{f_A} = 2\pi \frac{f_A}{2} \cdot \frac{1}{f_A} = \pi. \quad \text{Das bedeutet, um Aliasingeffekte zu vermeiden, darf in der Praxis } \Omega \text{ nur im Bereich zwischen } 0 \text{ und } \pi \text{ liegen.}$$

Die Struktur des Versuchsaufbaus ist in folgender Abbildung dargestellt.



Wie in der Abbildung gezeigt, gibt es in diesem Versuch zwei zeitdiskrete Systeme. Ein System davon ist ein zeitdiskretes System 1. Ordnung

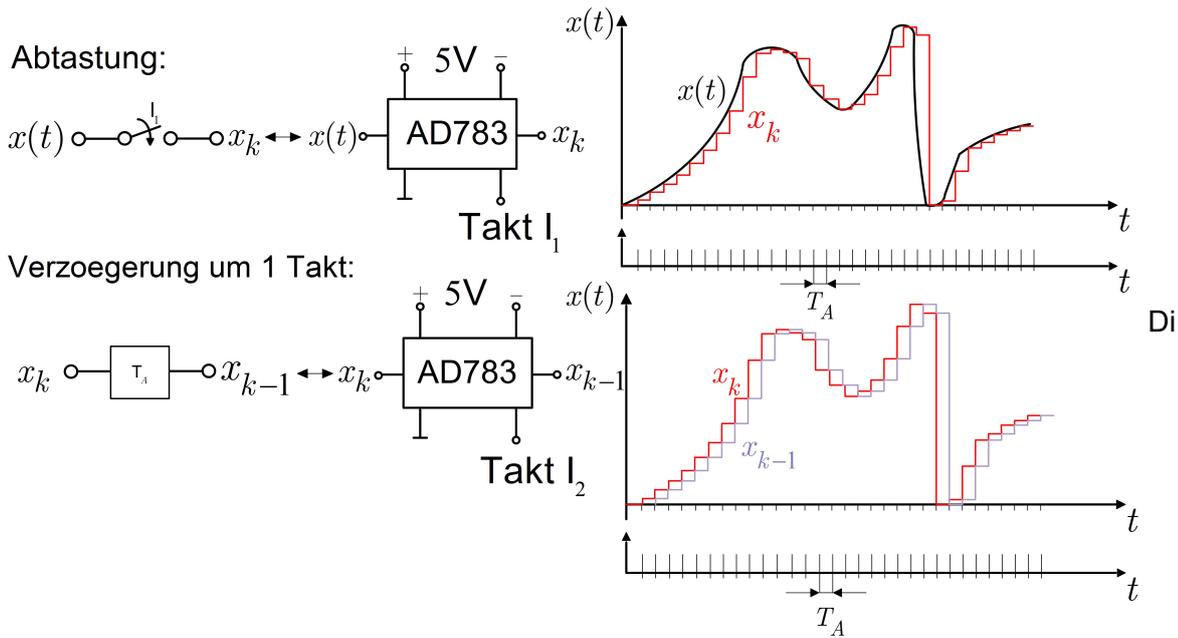


Das andere System kommt in diesem Versuch nicht zum Einsatz.

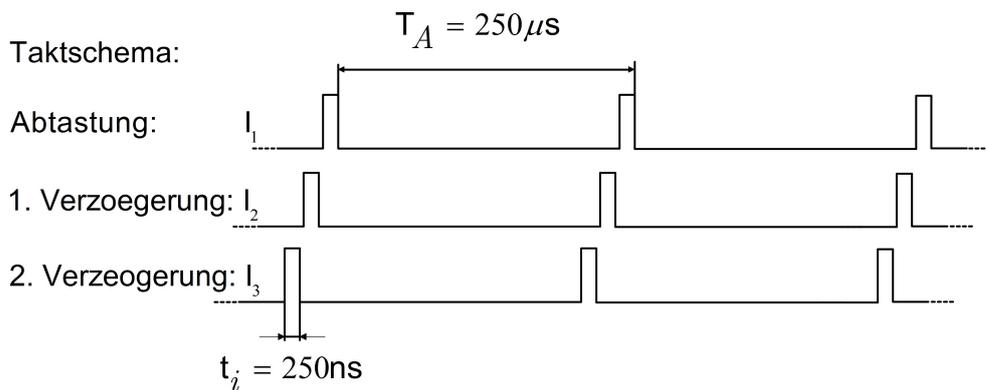
### Funktionsprinzip der Versuchsanordnung

In der Takterzeugung wurden keine speziellen Speicherbauelemente verwendet, sondern der Abtaster und die Verzögerungsglieder wurden in gleicher Weise mit je einer Sample &

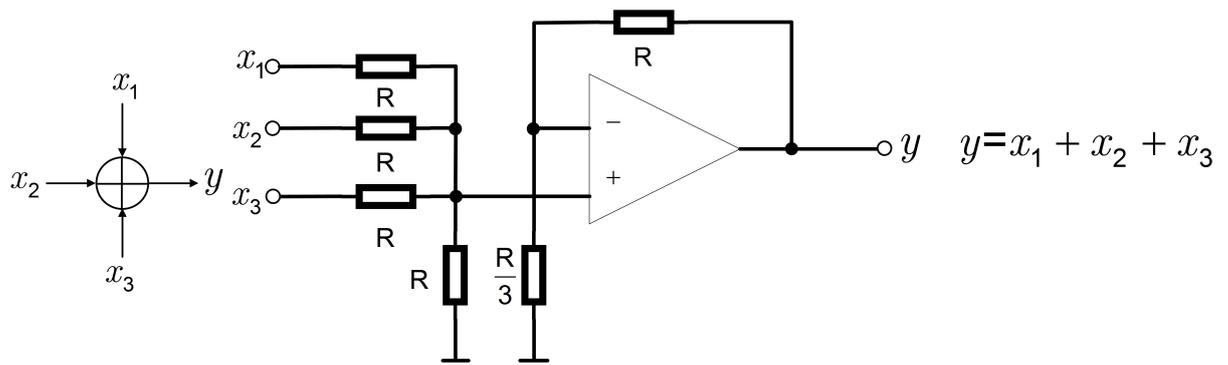
Hold-Schaltung realisiert. In der vorliegenden Schaltung wurde die Abtastung mit dem IC AD783 realisiert. Die Verzögerung um  $T_A$  ergibt sich aus der Taktung des IC AD783 mit den unterschiedlichen Impulsfolgen  $I_1, I_2$  und  $I_3$ . Dabei wird die sehr kurze Impulsdauer  $t_i$  vernachlässigt. Das heißt:  $I_1, I_2$  und  $I_3$  werden als Eingänge des IC AD783 betrachtet, um das entsprechende zeitdiskrete Signal zu verzögern. Z.B. liefert  $x_k$  mit  $I_2$  am Ausgang  $x_{k-1}$ .



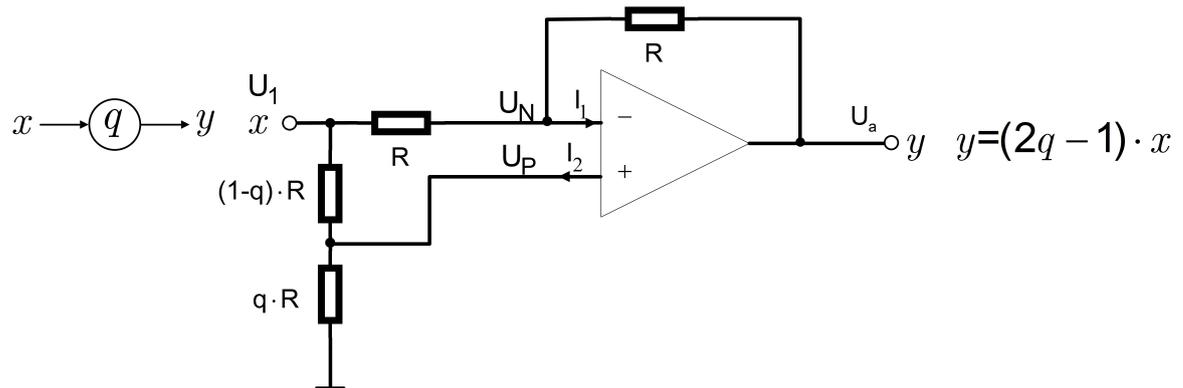
Die unterschiedliche Impulsfolge  $I_1, I_2$  und  $I_3$ , die das verzögerte zeitdiskrete Signal dienen, werden in der Abbildung dargestellt.



Als Summierer dient folgende Schaltung:



Koeffizient wurde mit folgende Schaltung festgelegt:



### 3. Fragen und Aufgaben zur Versuchsvorbereitung

3.1 Ein periodisches Sägezahn-Signal  $u_1(t) = \frac{2V}{100\mu s} t$ ,  $-t_i \leq t \leq t_i$  (mit  $t_i = 50\mu s$ ,  $f = 10\text{kHz}$ )

wird jeweils am Eingang des RC-Tiefpasses und RC-Hochpasses gegeben.

3.1.1 Berechnen Sie das Signal  $u_2(t)$  am Ausgang des RC-Tiefpasses und des RC-Hochpasses und markieren Sie die Zeitpunkte bei  $t = 0\mu s$ ,  $t = 50\mu s$ .

3.1.2 Diskutieren Sie, wie RC-Tiefpass und RC-Hochpass jeweils bei „hohen“ Frequenzen funktionieren?

3.2 Ein periodisches Dreiecke-Signal  $\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2V}{5\text{ms}} |t|, & |t| < 5\text{ms} \\ 0, & \text{ansonsten} \end{cases}$   $f = 100\text{Hz}$  wird je-

weils in der Schaltung RC-Tiefpass und RC-Hochpass angelegt.

3.2.1 Berechnen Sie das Signal  $u_2(t)$  am Ausgang des RC-Tiefpasses und des RC-Hochpasses und markieren Sie die Zeitpunkte bei  $t = 0\text{ms}$ ,  $t = 5\text{ms}$ .

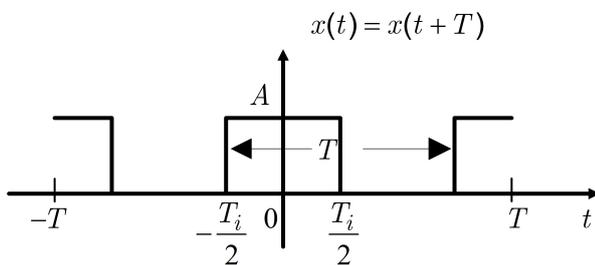
3.2.2 Diskutieren Sie, wie RC-Tiefpass und RC-Hochpass jeweils bei „niedrigen“ Frequenzen funktionieren?

3.3 Die Systemfunktion des Bandpasses 2. Ordnung wird in der Versuchsgrundlage gegeben

3.3.1 Für  $R_3 = 120\text{k}\Omega$ ,  $170\text{k}\Omega$  vervollständigen Sie die folgende Tabelle.  $\sigma_x$  und  $w_x$  sind Parameter in PN-Daten.

$R_3 / \Omega$	120k	170k
$\sigma_x / \text{Hz}$	???	-0.254k
$w_x / \text{Hz}$	8.39k	???
$ H_{MAX}  = \frac{k}{a_1}$	???	40.53
$f_{MAX} = \frac{\sqrt{a_0}}{2\pi} / \text{Hz}$	1.37k	1.15k
$a(t)_{1.MAX}$	1.77	2.7
bei $t / \text{ms}$	???	0.212

3.3.2 Gegeben ist eine periodische Rechteckfolge nachfolgender Skizze:



Für  $A = 1\text{V}$ ,  $V_t = \frac{T_i}{T} = 0,5$  berechnen Sie

- Für  $T = \frac{1}{1,15\text{kHz}}$  den Effektivwert der 1. Harmonischen
- Für  $T = \frac{3}{1,15\text{kHz}}$  den Effektivwert der 3. Harmonischen
- Welche Effektivwerte aus Ausgang der Sallen-Key-Schaltung ergeben sich, wenn die periodische Rechteckfolge an dem Eingang der Schaltung gegeben wird (für a) und b))

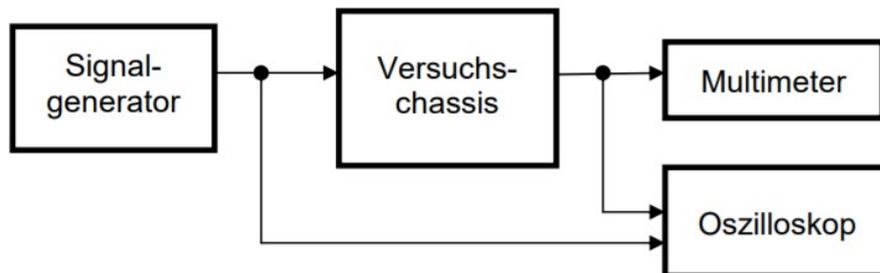
3.4 Was besagt das Abtasttheorem? (Erläuterung des Gesamtzusammenhangs)

3.5 Ermitteln Sie zu dem zeitdiskreten System 1. Ordnung.

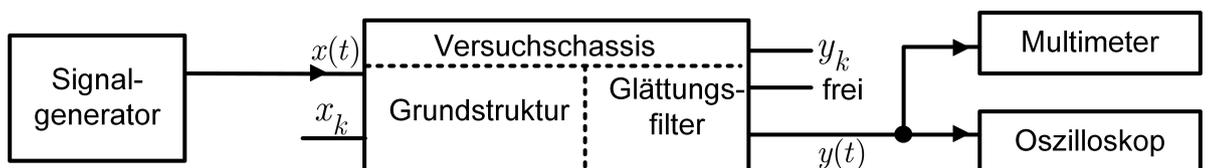
- 3.5.1 die Differenzgleichung
  - 3.5.2 die Übertragungsfunktion  $G(z)$  und  $G(j\Omega)$
  - 3.5.3 den PN-Plan
  - 3.5.4 die Verläufe von Betrag  $|G(\Omega)|$  bzw.  $|G(f)|$  und Winkel  $\arg(G(\Omega))$  bzw.  $\arg(G(f))$  (als Formel)
  - 3.5.5 die Verläufe von Dämpfung  $A(\Omega)$  bzw.  $A(f)$  und Phase  $B(\Omega)$  bzw.  $B(f)$  (als Formel)
  - 3.5.6 Welchen Typ des Frequenzverhalten weisen dieses System 1.Ordnung auf?
  - 3.5.7 Stellen Sie die berechneten Frequenzcharakteristiken  $|G|$ ,  $A$  und  $\arg(G)$  grafisch im Bereich  $0 \leq \Omega \leq 2\pi$  dar. Geben Sie auf der Abszisse der Diagramme neben der normierten Frequenz  $\Omega$  auf einer parallelen Achse auch den realen Frequenzmaßstab  $f$  mit an, wenn mit der Abtastfrequenz  $f_A = 4\text{KHz}$  gearbeitet wird. In diese Diagramme werden später die Messwerte direkt eingetragen.
- 3.6 Berechnen Sie durch Auswertung der Differenzgleichung der zeitdiskreten Systeme 1. Ordnung numerisch und Sprungantwort  $a[k]$  der zeitdiskreten Systeme 1. Ordnung für  $-3 \leq k \leq 10$  und den Endwert suchen.

#### 4. Versuchsaufbau

##### Messaufbau (analoge Systeme)



##### Messaufbau (zeitdiskrete Systeme)



#### 5. Versuchsdurchführung:

Stellen Sie mit den Bedienelementen „Utility“ und „Output Setup“ am Signalgenerator „High Z“ ein.

5.1.1 Legen Sie ein periodisches Sägezahn-Signal  $u_1(t) = \frac{2V}{100\mu s}t$ ,  $-t_i \leq t \leq t_i$  (mit

$t_i = 50\mu s$  d.h. Frequenz  $f=10kHz$ ) nach Aufgabe 3.2 in der Schaltung RC-Tiefpass und RC-Hochpass. Drucken Sie die Ergebnisse aus und markieren Sie die Spannung bei Zeitpunkt  $t = 0$  und  $t = 50\mu s$ . Vergleichen Sie das ausgedruckte Ausgangssignal mit der Berechnung in der Aufgabe 3.2.

5.1.2 Stellen Sie das Sägezahn-Signal auf 50% Symmetrie ein und legen Sie dieses

Sägezahn-Signal  $tri(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2V}{5ms}|t|, & |t| < 5ms \\ 0, & \text{ansonsten} \end{cases}$  in der Schaltung RC-Tiefpass und

RC-Hochpass an, dessen Frequenz  $f=100Hz$  ist. Drucken Sie die Ergebnisse aus und markieren Sie die Spannung bei Zeitpunkt  $t = 0$  und  $t = 50\mu s$ . Vergleichen Sie das ausgedruckte Ausgangssignal mit der Berechnung

5.1.3 Legen Sie ein sinusförmiges Signal mit Frequenz  $f=10kHz$  und Amplitude  $U=1V$  in der Schaltung RC-Tiefpass an. Drucken Sie das Ausgangssignal aus und bestimmen Sie die Amplitude.

5.1.4 Legen Sie ein sinusförmiges Signal mit Frequenz  $f=10Hz$  und Amplitude  $U=1V$  in der Schaltung RC-Hochpass an. Drucken Sie das Ausgangssignal aus und bestimmen Sie die Amplitude.

5.1.5 Welches Zeitverhalten zeigt der RC-Tiefpass und RC-Hochpass in der Abhängigkeit der Frequenz.

5.2 Nehmen Sie die Sallen-Key-Bandpass-Schaltung mit der Dimensionierung

$R_1 = R_2 = 100k\Omega$ ;  $C_1 = C_2 = 1,5nF$ ;  $v = 3,1$ ; für die beide Fälle  $R_3 = 120k\Omega$  und  $R_3 = 170k\Omega$ .

5.2.1 Legen Sie ein sinusförmiges Signal mit  $U_0 = 100mV$  an den Eingang der Sallen-Key Bandpass-Schaltung an. Das Multimeter muss auf „AC“ stehen. Variieren Sie die Frequenz des Eingangssignals von 1kHz bis 2kHz und suchen Sie die maximale Verstärkung  $H_{max}$  im Multimeter und die entsprechende Frequenz  $f_{max}$ . Suchen Sie noch die beide Grenzfrequenzen  $f_{gu}$ ,  $f_{go}$  und berechnen Sie die Bandbreite.

5.2.2 Legen Sie eine unipolare Rechteckimpulsfolge mit  $U_0 = 1V$  ( $0V \dots +1V$ );  $f_0 = 100Hz$  in der Sallen-Key-Bandpass-Schaltung an. Drucken Sie die Ergebnisse aus und markieren Sie die ersten zwei Spannungsmaxima  $U_1, U_2$  und die dazugehörigen Zeitpunkte  $t_1, t_2$ . Berechnen Sie danach die PN-Daten und diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen der Bandbreite  $f_{go} - f_{gu}$  und der Sprungantwort!

5.2.3 Bei  $R_3 = 170k\Omega$  legen Sie ein unipolare Rechteckimpulsfolge mit  $U_0 = 10mV$  und der Frequenz a).  $f = f_{MAX}$  b).  $f = \frac{f_{MAX}}{3}$

Drucken Sie die Ergebnisse in beiden Fällen aus und vergleichen Sie diese mit Ihrer Vorbereitung nach 3.3.2

5.3.1 Legen Sie ein sinusförmiges Signal mit  $U_{RMS} = 1V$  und der Frequenz  $f=1kHz$  an das zeitdiskrete System an. Beobachten Sie die zwei Synchronisationszustände des abgetasteten Signals  $x_k$  und drucken Sie das Eingangssignal  $x(t)$  und die zwei Synchronisationszustände des abgetasteten Signals  $x_k$  aus. Markieren Sie die Abtastpunkte der 2 Zustände des abgetasteten Signals  $x_k$  und berechnen Sie den Effektivwert davon.

5.3.2 Messen Sie den Frequenzgang des zeitdiskreten Systems mit einer Eingangsspannung  $U_{RMS} = 1V$  vor ( $y_k$ ) und nach dem Glättungsfilter ( $y(t)$ ) im Frequenzbereich bis 4kHz. Erklären Sie den unterschiedlichen Kurvenverlauf, insbesondere bis  $f = 2kHz$ .



# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.