VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

ERRORES EN TORNO A LA COMPRENSIÓN DE LA DEFINICIÓN DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

ERRORS IN THE UNDERSTANDING OF THE DEFINITION OF FINITE LIMIT OF A REAL FUNCTION OF A REAL VARIABLE

Cristina La Plata, Uldarico Malaspina
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú)
claplata@upc.edu.pe, umalasp@pucp.edu.pe

Resumen
En el presente trabajo de investigación analizamos los errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, mediante un estudio con una muestra de alumnos de un primer curso universitario de Cálculo. La metodología empleada en nuestro trabajo fue mixta, es decir, cuantitativa y cualitativa. Luego de aplicar un test exploratorio para obtener la información necesaria, en la muestra, y proceder con los análisis cuantitativo y cualitativo correspondientes – usando el enfoque ontosemiótico para estos últimos – podemos afirmar que existen errores conceptuales, simbólicos y gráficos en la comprensión de los alumnos sobre la definición del límite finito de función real de variable real.

Palabras clave: error; comprensión; límite finito

Abstract
In this paper we analyze the errors in the understanding of the definition of finite limit of a real function of a real variable through a study with a sample of students taking their first Calculus class at the university. We used a mixed method research, quantitative and qualitative. After making an exploratory study in order to get the necessary information in the sample and proceeding to the corresponding quantitative and qualitative analyses – using the onto-semiotic approach for the latter – we can state that there are conceptual, symbolic and graphic errors in the students' understanding of the definition of finite limit of a real function of a real variable.

Key words: error; understanding; finite limit

Introducción

Consideramos que el concepto de límite finito de una función real de variable real es uno de los más complejos e importantes de las Matemáticas. Creemos pertinente y necesario investigar sobre la comprensión de este concepto al tener en cuenta que su incomprensión origina dificultades en el entendimiento de otros contenidos matemáticos que luego se desarrollan tanto en el primer como en los posteriores cursos de Cálculo, tales como continuidad, derivada, integral, sucesiones y series, por citar algunos. En el presente trabajo nos centramos específicamente en la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real.

Antecedentes

Existen diversas investigaciones relacionadas al concepto de límite, realizadas bajo diferentes enfoques teóricos y comentaremos las que consideramos se relacionan de alguna manera con los aspectos que abordaremos en nuestra investigación. Así tenemos que según Tall y Vinner (1981), la imagen que algunos alumnos tienen del concepto de límite es la de proceso dinámico, esto es, cuando x se aproxima hacia a provoca que $f(x)$ se aproxime al límite, pero sin alcanzarlo. Sin embargo, esta imagen entra en conflicto con la definición formal del límite, puesto que prevalece sobre ésta y la gran mayoría de intentos por parte de los alumnos de expresar mediante la definición formal los límites de la forma $\lim_{x\to a} f(x) = c$, son incorrectos. Es pertinente tener en cuenta la perspectiva general de Brousseau (1983, citado por Blázquez y Ortega, 2001) al considerar que un conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo. Obstáculo que en sí es un conocimiento que funciona bien al interior de un determinado campo pero no dentro de otros, donde es falso y origina errores. Estos errores persisten, se relacionan entre sí y son difíciles de erradicar. Por ello, plantea la necesidad de promover la interacción del alumno con situaciones problemáticas que desestabilicen sus concepciones para superar el obstáculo que provoca dichos errores.

En cuanto a límites, Sierpinska (1987) considera que hay obstáculos relacionados a cuatro nociones que parecen ser la fuente principal de los obstáculos epistemológicos sobre límites:

- *Conocimiento científico*. La Matemática es un juego formal sobre símbolos. Probar teoremas es su principal objetivo.
- *Infinito.* El infinito no existe. El infinito existe sólo potencialmente.
- *Función.* La función es reducida al conjunto de sus valores. Es reducida a su expresión analítica, la cual siempre existe.
- *Número real*. Carencia de un concepto uniforme de número real.

Además, de acuerdo con Rico (1992, citado en Blázquez, 2000), la reflexión actual sobre errores se centra en el papel del error como parte importante de los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que los errores son productos de concepciones inadecuadas o procedimientos incorrectos.

Por otro lado, Blázquez y Ortega (2001), refieren que el uso de varios sistemas de registros de representación favorece a una mejor comprensión, y con ello a un aprendizaje más rico del concepto de límite de una función real. Sin embargo, advierten que los alumnos pueden presentar en primera instancia cierto rechazo por trabajar en varios registros, prefiriendo trabajar en uno solo, que comúnmente es el registro algebraico, debido quizás a un abuso del propio docente en el uso de tal registro en su enseñanza.

Otro estudio interesante es el de Fernández, J. (2010) quien considera el tema de límites como parte de una unidad didáctica, en la cual enumera once dificultades previsibles para los alumnos en la comprensión de tal concepto. En particular, en lo referente a límite finito de una función real de variable real, puntualiza:

- Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.

- Dificultades para reconocer los límites laterales.
- Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- Problemas con el uso de diferentes representaciones de las funciones.
- Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

Por otra parte, Amílcar, O. (2013) propone el diseño de una secuencia didáctica acerca del límite finito de una función real en un punto, sobre la base de la igualdad de los respectivos límites laterales, sin descuidar el tratamiento aritmético-algebraico. El autor, para elaborar su secuencia didáctica, indica que es importante plantearse interrogantes sobre cada uno de los seis tipos de objetos primarios, en la perspectiva del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS).

Otra investigación interesante es la de Molfino y Buendía (2010), que buscan explicar cómo el concepto de límite de una función real se constituyó en un cuerpo de saber validado y aceptado social y culturalmente. Esto las llevó a explorar acerca del desarrollo socio-histórico-cultural al interior de la comunidad matemática. Además establecen como definición formal actualmente consensuada por la comunidad matemática, la definición dada por Weierstrass expresada en términos de ε y δ. Definición que tomaremos para nuestro trabajo de investigación y explicitaremos en el marco teórico.

Marco teórico

Para el marco teórico se hizo una revisión de tres aspectos fundamentales, que abordaremos posteriormente, a lo largo de nuestro análisis de datos y en base a los cuales formularemos nuestras conclusiones: comprensión, error y configuración (epistémica y cognitiva) desde la perspectiva del EOS.

El modelo de comprensión de Sierpinska

Según Sierpinska (1990, citado por Blázquez, 2000), la comprensión es un acto que está inmerso en un proceso de interpretación y que se desarrolla en forma dinámica entre conjeturas cada vez más elaboradas. Además señala que la comprensión trae consigo un nuevo conocimiento, por ello se puede clasificar la comprensión en función del conocimiento que se produce. Así, la investigadora propone cuatro categorías de actos de comprensión de un objeto matemático:

- Identificación: Identificación de objetos que pertenecen a la denotación del (o un) concepto o identificación de un término como poseedor de un estatus científico. Este acto consiste en una percepción repentina de algo que es como la "figura" en los experimentos gestálticos (reconocimieto visual d figuras globales en lugar de una mera colección de elementos más simples y no relacionados).
- Discriminación: Diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas que antes se confundían.
- Generalización: Consiste en notar que existen condiciones no esenciales o con la posibilidad de extender el alcance de algunas aplicaciones.
- Síntesis: Consiste en establecer relaciones entre dos o más propiedades, hechos u objetos y organizarlos en un todo consistente.

Finalmente, Sierpinska señala que la comprensión y los obstáculos son caras de una misma moneda. Puesto que la comprensión busca nuevas formas de conocimiento y los obstáculos reflejan lo erróneo.

Acerca del error

Según Godino, Batanero y Font (2003), todas las teorías sobre la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en su proceso de aprendizaje, determinar las causas de estos errores y teniendo en cuenta esta información organizar el proceso de enseñanza. De acuerdo con estos autores, en la presente investigación trabajamos con el enfoque que ellos precisan; "se habla de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática" (p.69)

Aspectos del enfoque onto-semiótico de la cognición matemática (EOS)

Según Godino y Batanero (1994, citado por Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009), el EOS centra su atención en la noción de *sistema de prácticas*, entendiéndose como práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona o compartida en el seno de una institución con la finalidad de resolver problemas matemáticos, comunicarle a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos o problemas. Los supuestos tomados de esta teoría encontrados en Godino et al (2009), para nuestro trabajo de investigación son: sistema de prácticas, objetos matemáticos primarios y configuraciones epistémicas y cognitivas.

Sistema de prácticas

Los sistemas de prácticas son considerados en el EOS como una de las posibles maneras de entender "el significado del objeto matemático" y estos son siempre relativos a un contexto o marco institucional (o a una persona individual), además de encontrarse ligados a la solución de cierta clase de situaciones – problemas.

Objetos matemáticos primarios

Para analizar de forma más profunda una actividad matemática es necesario introducir una tipología de objetos matemáticos. El EOS propone las siguientes categorías o tipos de objetos matemáticos primarios, basándose en las diversas funciones desempeñadas por estos objetos en el trabajo matemático:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- *Situaciones–problema* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, …)
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, ...)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...)

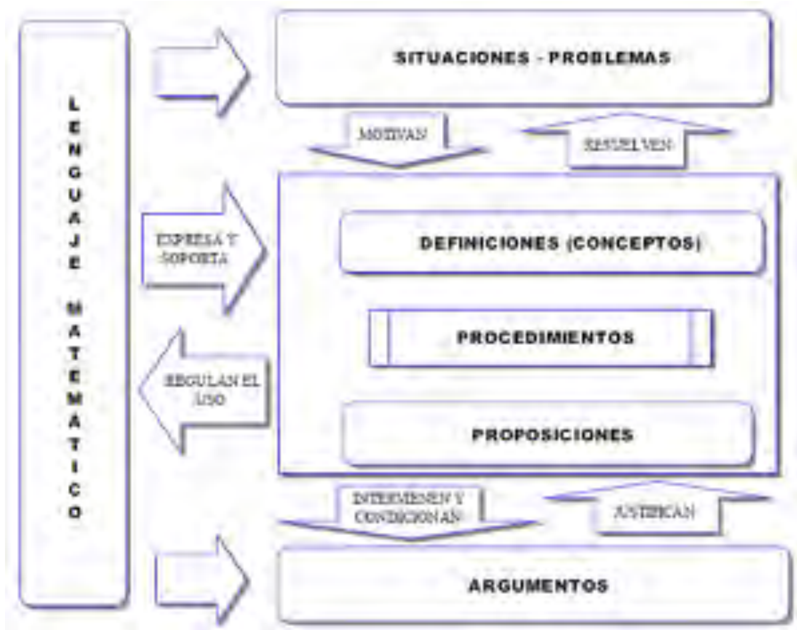


Figura 7. Configuración de objetos primarios.

Malaspina (2008), explicita que las situaciones-problema son el origen o razón de ser de la actividad, el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, y con los argumentos se justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Configuraciones epistémicas y cognitivas.

Los objetos primarios se encuentran relacionados entre sí formando *configuraciones*, la cuales son definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

Por otro lado, también encontramos que Rojas (2012) menciona que en la realización de toda *práctica matemática,* los sujetos emplean sus conocimientos básicos y en ella activan un conjunto de relaciones entre diferentes tipos de objetos primarios: situaciones-problema, lenguaje, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos; es decir, las prácticas matemáticas personales activan una red de objetos intervinientes y emergentes, es decir, la *configuración cognitiva* puesta en juego.

Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para poder describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional. La constitución de estos objetos y relaciones, configuraciones, tanto en su faceta personal como institucional tiene lugar, mediante los procesos matemáticos, a lo largo del tiempo.
Definición formal de límite

Como se mencionó en los antecedentes, haremos referencia al trabajo de Molfino y Buendía (2010) quienes realizan un estudio del concepto de límite a lo largo de la historia de las matemáticas. Esto, con la finalidad de establecer la definición formal de límite de una función real de variable real que se tomará en este trabajo de investigación.

Molfino y Buendía (2010), refieren que el concepto de límite evolucionó a lo largo de varias etapas hasta llegar a la configuración que hoy conocemos. Así, la definición formal, actualmente consensuada en la comunidad matemática y expresada en términos de ε y δ, se refiere a la definición dada por Weierstrass, que se formula de la siguiente manera: *Si a es un punto de acumulación del dominio de una función f, real de variable real, y b es un número real*,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ si y sólo si } \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \; tal\ que$$
$$si\ x \in Domf \wedge 0 < |x - a| < \delta \; entonces \; |f(x) - b| < \varepsilon$$

Adicionalmente a la definición formal del límite finito de una función real de variable real hemos abordado otros aspectos teóricos, implícitamente en algunas de los ítems del test exploratorio, como límites laterales, teorema de existencia de límite y teorema de unicidad de límite que se hicieron explícitas posteriormente en las argumentaciones de las configuraciones epistémicas y en algunas configuraciones cognitivas.

Objetivos

Con el propósito de analizar los errores de los alumnos en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, nos planteamos los siguientes objetivos:
Objetivo general:

Analizar algunos errores al comprender la definición de límite finito de una función real de variable real, en una muestra de alumnos de un primer curso de Cálculo.

Objetivos específicos:

- Diseñar problemas cuyas soluciones permitan detectar errores en la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, mediante el planteamiento de preguntas en diversos registros de representación.
- Tipificar los errores encontrados en las respuestas dadas a los problemas diseñados.
- Analizar mediante configuraciones epistémicas y cognitivas algunos de los tipos de errores encontrados.

Metodología

La metodología empleada en nuestro trabajo fue mixta, es decir, cuantitativa y cualitativa; más específicamente, del tipo explicativo secuencial. Por ello, se diseñó un test exploratorio con ítems planteados en diversos tipos de representación (algebraico, gráfico y simbólico) que se aplicó a los alumnos de la muestra y fue puesto a consideración de la profesora del curso. Luego de recolectar los datos mediante la aplicación del test exploratorio, examinamos las diversas respuestas dadas por los alumnos para cada ítem del test, surgiendo la necesidad de establecer una tipificación de dichas respuestas, incluyendo la caracterización de los errores como conceptuales, simbólicos y gráficos. Para validar esta tipificación de respuestas se recurrió a la triangulación de las mismas con expertos en el tema. Habiendo establecido la tipificación de respuestas, establecimos lo que denominamos *interrelaciones*. Una interrelación consiste en contrastar las respuestas de los alumnos a ítems en los que se les plantea el análisis de situaciones parecidas, relacionadas con límites, utilizando diferentes representaciones.

A modo de ejemplo, en la Figura 2 están los ítems del test exploratorio cuyas respuestas analizamos. Sus interrelaciones, denominadas Interrelación 2, las mostramos en la Figura 3. En la Figura 4 mostramos la distribución de tipos de interrelación de respuestas para los ítems considerados.

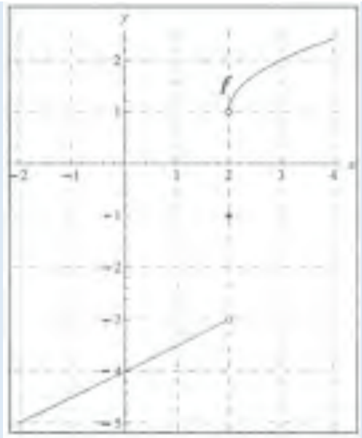
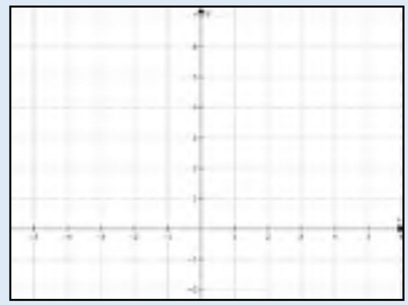
Ítems 1.1, 1.2 y 1.3 Dada la gráfica de la función *f*, determine los límites que se indican. Si fuera pertinente, escriba *no existe.*			Ítem 4 Grafique una función *f* que cumpla: $\lim_{x\to 2} f(x)\ no\ existe \ \wedge \ \ f(2)=3$
1.1	$\lim_{x\to 2^-} f(x)=$		
1.2	$\lim_{x\to 2^+} f(x)=$		
1.3	$\lim_{x\to 2} f(x)=$		

Figura 2. Ítems considerados del test exploratorio en la interrelación 2
Fuente: La Plata, C (2014, p. 23)

Tipo de interrelación	**Descripción de la interrelación**
Interrelación correcta	Los alumnos determinaron correctamente tanto los límites laterales como el límite de la función cuando x tiende a 2, a partir del gráfico dado para la función. Por otro lado, graficaron correctamente una función tal que el límite no existe cuando x tiende a 2 y el valor de la función en 2 si existe.
Interrelación coherente	Los alumnos determinaron en la primera parte (ítems 1.1, 1.2 y 1.3), a partir del gráfico dado para la función, que al ser diferentes los límites laterales (aunque no sean los correctos), el límite de la función no existe. Esta misma idea se mantiene cuando los alumnos grafican una función para la cual no existe el límite cuando *x* tiende a 2 y debe cumplirse que *f* (2)=3 (ítem 4)
Interrelación incoherente tipo 1	Los alumnos determinaron en la primera parte (ítems 1.1, 1.2 y 1.3), a partir del gráfico dado para la función que al ser diferentes los límites laterales, el límite de la función no existe. Sin embargo, esta comprensión no se manifiesta cuando deben graficar una función para la cual no exista el límite de la función cuando *x* tiende a 2 y que *f*(2)=3 (ítem 4). Graficaron una función que no cumple una o ninguna de las condiciones requeridas.
Interrelación incoherente tipo 2	Los alumnos erróneamente determinan la existencia del límite en la primera parte (ítems 1.1, 1.2 y 1.3); sin embargo, graficaron correctamente la función requerida en el ítem 4.
Interrelación por error con énfasis conceptual	Los alumnos reiteraron su error, esto es, tanto en la primera parte (ítems 1.1, 1.2 y 1.3), al no determinar la inexistencia del límite de la función, como al graficar una función que no cumple una o ninguna de las condiciones requeridas en el ítem 4.
Interrelación inexistente	En este caso consideramos todas las situaciones en las que por lo menos, un ítem de los analizados no fue respondido.

Figura 3. Descripción de la clasificación para la interrelación 2
Fuente: La Plata, C (2014, p. 28)

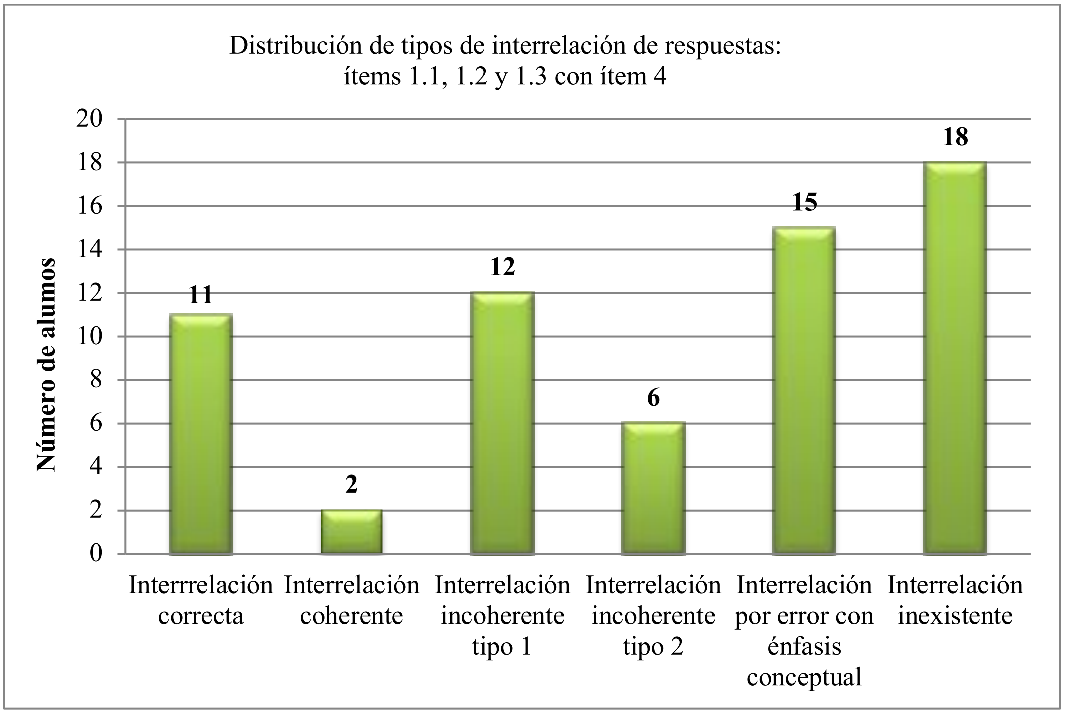


Figura 4. Tipos de interrelación 2
Fuente: La Plata, C (2014, p. 29)

Basados en nuestro resultado cuantitativo (figura 4), podemos concluir que un gran número de alumnos (28%) no realizó el gráfico requerido en el ítem 4 o no determino algunos o todos los límites requeridos en los ítems 1.1, 1.2 y 1.3, por lo cual no se pudo establecer una interrelación (interrelación inexistente). Otro resultado a destacar, es que una gran cantidad de alumnos (23,4%) evidenció no poder concluir la inexistencia del límite finito de una función real de variable real tanto a partir del análisis intuitivo de los límites laterales en base al gráfico dado para la función (ítems 1.1, 1.2 y 1.3) ni trazar un gráfico que cumplía con las condiciones requeridas (ítem 4). También consideramos importante mencionar que un 19% de los alumnos determinaron la inexistencia del límite (ítems 1.1, 1.2 y 1.3); sin embargo, no trazaron un gráfico que cumpla con las condiciones requeridas en el ítem 4 (a pesar que, en esencia, eran las mismas condiciones que tenía el gráfico de la función que analizaron en los ítems 1.1, 1.2 y 1.3. Esto es, en términos del enfoque sobre la comprensión que hace Sierpinska, podríamos decir que un buen número de alumnos tiene una comprensión de la no existencia del límite finito de una función real de variable real, solo en el nivel de *identificación.* De igual manera, llama nuestra atención que sea solo el 17% de alumnos que muestran una comprensión clara de la no existencia del límite finito de una función real de variable real.

Luego de trabajar cuantitativamente con los datos obtenidos, consideramos importante realizar un análisis más profundo sobre las respuestas al test exploratorio. Para ello elaboramos una configuración epistémica (CE) de la solución al test exploratorio hecha por la profesora del curso; configuraciones cognitivas (CC) de cada una de las soluciones hechas por tres alumnos (tomados al azar y a los cuales entrevistamos); y finalmente, comparamos la CE con cada CC para comprender las dificultades presentes en la comprensión del concepto del límite real de variable real.

Consideraciones finales

El análisis cualitativo y cuantitativo hecho mediante las cinco interrelaciones entre las respuestas de los estudiantes – como se muestra en la interrelación 2 (Figuras 2, 3 y 4) – nos permiten afirmar que los alumnos no tienen una comprensión clara, a nivel de generalización o síntesis – según la categorización de comprensión de Sierpinska, A. (1990, citado por Blázquez, 2000) – sobre el límite finito de una función real de variable real.

Otra muestra de esta comprensión restringida del concepto de límite de una función real de variable real es la obtención correcta por el 89% de alumnos, de un límite mediante recursos algebraicos (ítem 3) y por otra parte se evidencian errores en las respuestas a otros ítems del test exploratorio cuando tienen que hacer análisis en el registro gráfico o simbólico.

Las comparaciones entre configuraciones epistémicas y cognitivas de las soluciones nos permiten afirmar, que en la comprensión de los alumnos sobre la definición del límite finito de función real de variable real destacan tres tipos de errores: conceptuales, simbólicos y gráficos. Esta tipificación se hizo para cada ítem del test, según las respuestas dadas, recurriendo a triangulación con expertos.

Las respuestas a algunos ítems del test exploratorio evidencian también que algunos conceptos previos vinculados a la definición de límite finito de una función real de variable real, no son comprendidos en el nivel de *síntesis*, categoría de comprensión dada por Sierpinska, con la consiguiente deficiencia en la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real. Específicamente nos referimos a los conceptos de función (dominio, regla de correspondencia y gráfico) y número real. Lo dicho está en la línea de análisis propuesto por Sierpinska, A. (1987), que considera las nociones de función y número real como fuente de obstáculos epistemológicos sobre el concepto de límite.

Referencias

Amílcar, O. (2013). El diseño de una secuencia didáctica sobre límite Un proceso de toma de decisiones. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 77-88.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis de doctorado en Didáctica de las Ciencias -Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valladolid. España.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 4(3), pp. 219-256.

Fernández, J. (2010). *Unidad Didáctica: Límite y Continuidad de funciones.* Trabajo de fin de Máster. Recuperado el 18 de julio de 2013 de http://www.ugr.es/~lrico/MasterSec_files/Fernandez%20Plaza%20TFM.pdf

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des mathématiques*, 22(2.3), 237-284.

Godino, J.,Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado el 18 de julio de 2013 de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2009). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. Comunicación en el XIII Simposio de la SEIEM, Santander, 2009. Recuperado el 18 de julio de 2013 de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXIII/DidMatDisCientifica/Godino_Font_Wilhelmi_Lurduy_R.pdf

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Tesis de doctorado no publicada, Pontificia

Universidad Católica del Perú.

Molfino, V., Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*. 5(1) 27-41.

La Plata, C. (2014). Errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real. Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Rojas Garzón, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos*. Tesis de doctorado Interinstitucional en Educación. Universidad distrital Francisco José de Caldas, Bogotá Colombia.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics* 18, 371 – 397.

Tall, S. & Vinner, D. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.