

# Konzeption und Auslegung von geräuschoptimierten inäquidistanten Verzahnungen

Philipp Neubauer, M.Sc.  
Dissertationsschrift, 2019



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT





---

# Konzeption und Auslegung von geräuschoptimierten inäquidistanten Verzahnungen

Vom Fachbereich Maschinenbau  
an der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte  
DISSERTATION

vorgelegt von

**Philipp Neubauer, M.Sc.**

geboren in Schwetzingen

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Stephan Rinderknecht
Tag der Einreichung:	20.05.2019
Tag der mündlichen Prüfung:	16.07.2019

Darmstadt 2019

D17

---

---

Philipp Neubauer: Konzeption und Auslegung von geräuschoptimierten  
inäquidistanten Verzahnungen

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt

Jahr der Veröffentlichung der Dissertation auf TUPrints: 2019

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-89758

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/8975>

Tag der mündlichen Prüfung: 16.07.2019



Veröffentlicht unter CC BY-SA 4.0 International  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>

---



---

## Vorwort

Diese Arbeit entstand im Zeitraum zwischen Juli 2014 und Juli 2019 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Systemzuverlässigkeit, Adaptronik und Maschinenakustik SAM der Technischen Universität Darmstadt.

Mein Dank gilt allen, die zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen haben.

Ich danke Herrn Professor Tobias Melz für die Betreuung meiner Arbeit und das entgegengebrachte Vertrauen beim Beschreiten neuer Wege. Herrn Professor Stephan Rinderknecht danke ich für die Übernahme des Korreferates und das große Interesse an meiner Arbeit.

Besonders bedanke ich mich bei Herrn Dr.-Ing. Joachim Bös für die Unterstützung und die Motivation auch in unsicheren Zeiten. Meinen aktuellen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen am Fachgebiet SAM danke ich für die fachliche Unterstützung und die tolle Zeit zusammen. Hervorheben möchte ich Steffen Ochs und Karsten Moritz, die bei dem wichtigsten Durchbruch dabei waren und mich auf dem Weg dorthin unterstützt haben.

Die Arbeit wäre ohne die vielfältige Unterstützung durch zahlreiche helfende Hände von vielen Studierenden nicht möglich gewesen. Mein besonderer Dank gilt hierbei Alexander Gröninger, Carina Drieselmann, David Löffler, Heiko Diefenbach, Johannes Knieper und Philipp Schumann.

Meiner gesamten Familie und insbesondere meinen Eltern Elke und Rudolf danke ich von Herzen für die Unterstützung und die Motivation auf allen Wegen.

Ich widme diese Arbeit meiner Frau Jasmin, mit der ich auch den Weg der Dissertation – Seite an Seite – bestreiten durfte. Danke für deine stete Unterstützung auf allen Ebenen. Ich freue mich auf die vielen weiteren Dinge, die uns noch gemeinsam erwarten werden.

---



---

---

## Kurzfassung

---

In elektrischen Antriebssträngen, wie zum Beispiel in Elektrofahrzeugen, sind Zahnradgetriebe aufgrund einer nur geringen Maskierung durch den Antrieb häufig die dominante Geräuschquelle. Durch den stark tonhaltigen Geräuschcharakter des Zahneingriffes sind diese Geräusche sehr prominent und werden daher als besonders lästig empfunden. Bisher erfolgt die Minderung von Getriebegeräuschen durch Schrägverzahnungen, mechanische Entkopplungen, Dämpfungen und Verzahnungskorrekturen, was den tonhaltigen Geräuschcharakter jedoch nicht oder nur geringfügig beeinflusst. Der aus anderen Bereichen der Technik bekannte Ansatz einer Geräuschminderung lästiger tonhaltiger Geräuschkomponenten mittels unregelmäßiger Geometrien, wie zum Beispiel bei Lüftern oder Pkw-Reifen, wird im Rahmen dieser Arbeit auf Verzahnungen übertragen. Es entsteht die inäquidistante Verzahnung. Zusätzlich zur Minderung des physikalisch messbaren Schalldruckes wird insbesondere der lästige tonhaltige Geräuschcharakter gemindert. Die bisherigen Ansätze zur Geräuschminderung sind mit inäquidistanten Verzahnungen kombinierbar, um eine noch stärkere Geräuschreduktion zu erreichen.

In dieser Arbeit werden Methoden entwickelt, mit denen die neuartige inäquidistante Verzahnung von Grund auf konzipiert, ausgelegt und akustisch optimiert werden kann. Um die Konzeption und Auslegung von geräuschoptimierten inäquidistanten Verzahnungen zu ermöglichen, werden deren Geräuschmechanismen mathematisch analytisch modelliert. Hierzu werden zunächst die grundlegenden Prinzipien der geometrischen Modellierung inäquidistanter Verzahnungen auf Basis eingeführter Inäquidistanz-Parameter dargestellt. Darauf aufbauend wird die analytische Berechnungskette, bestehend aus statischen, elastostatischen, dynamischen und maschinenakustischen Modellierungsschritten, zur geräuschoptimalen Auslegung inäquidistanter Verzahnungen entwickelt. Aus der Literatur bekannte Ansätze zur Berechnung der Verzahnungssteifigkeit und der lastbedingten Überdeckungsvergrößerung konventioneller Verzahnungen werden hinsichtlich der Anwendung auf inäquidistante Verzahnungen erweitert. Diese Ansätze werden anhand von FE-Simulationen validiert. Ein dynamisches Modell einer Stirnradstufe wird aufgebaut, das die dynamischen Verzahnungskräfte liefert, welche als Eingangsgröße in die maschinenakustische Grundgleichung eingehen. Die Anteile der Körperschallfunktion und des Abstrahlgrades werden für einen im Rahmen dieser Arbeit aufgebauten Getriebeprüfstand ermittelt, um die errechneten Luftschallsignale anhand von experimentell ermittelten Luftschallsignalen validieren zu können. Es zeigt sich, dass die gewählten Modellierungsansätze gut geeignet sind, um das Geräuschverhalten inäquidistanter Verzahnungen zu berechnen. Ein Ansatz zur Geräuschbewertung inäquidistanter Verzahnungen wird vorgestellt, der anhand von Ergebnissen eines psychoakustischen Hörversuches

---

entwickelt wird. Der Nachweis einer subjektiv wahrgenommenen Geräuschminderung durch inäquidistante Verzahnungen wird erbracht. Abschließend wird ein Ansatz zur Optimierung des Geräusches inäquidistanter Verzahnungen, unter Berücksichtigung der maschinenakustischen Eigenschaften des Getriebeprüfstandes, vorgestellt. Das Resultat einer exemplarisch durchgeführten Optimierung wird diskutiert.

Die Ergebnisse der Arbeit zeigen, dass das Geräusch von Zahnradgetrieben durch inäquidistante Verzahnungen deutlich gemindert werden kann. Mittels der entwickelten analytischen Berechnungskette und der Methoden zur Konzeption und Auslegung von geräuschoptimierten inäquidistanten Verzahnungen können der Summenschalldruckpegel wie auch das Frequenz- und Ordnungsspektrum des Geräusches von konventionellen und inäquidistanten Geradverzahnungen mit guter Genauigkeit, das von Schrägverzahnungen mit ausreichender Genauigkeit, berechnet werden. Die entwickelte Optimierungsmethode ermöglicht die akustisch optimierte Auslegung von inäquidistanten Verzahnungen.

---

---

## Abstract

---

In electric drive trains, such as in electric vehicles, gear drives are often the dominant source of noise due to a low masking by the engine. This noise is very prominent and is, therefore, considered particularly annoying due to the strongly tonal character of the tooth mesh noise. In the state of the art gear noise is reduced by the use of helical gearing, mechanical decoupling, damping, and gear tooth modifications. However, this has little or no influence on the tonal noise character. An approach from other areas of noise control engineering, such as the reduction of tonal noise excited by vehicle tire treads and fans by using uneven geometries, is applied to gear wheels. This results in the inequidistant gearing. In addition to the reduction of the physically measurable sound pressure, particularly the annoying tonal noise character is reduced. The state-of-the-art measures of gear noise reduction may be combined with the inequidistant gearing to achieve even stronger noise reduction.

In this thesis methods are developed that can be used to design the new inequidistant gearing from scratch and to acoustically optimize it. In order to enable the design of noise optimized inequidistant gears, their noise excitation mechanisms are mathematically modeled. For this purpose, the fundamentals of the geometric modeling of inequidistant gears, based on introduced inequidistance parameters, are presented. The analytical calculation chain, which comprises static, elastostatic, dynamic and machine acoustic modeling steps, is developed to enable the noise-optimal design of inequidistant gears. Approaches for the calculation of the gear mesh stiffness and the load-induced increase of overlap of conventional gears known from literature are extended with regard to the application to inequidistant gears. These approaches are validated by FEM simulations. A dynamic model of a set of spur gears is set up, which provides the dynamic tooth forces, which are used as input variables in the fundamental equation of machine acoustics. The structure-borne sound efficiency and the sound radiation are determined for a gear test bench. This test bench is designed and built up within the scope of this work in order to allow for experimental simulations and to validate the analytical modeling chain. The results show that the selected modeling approaches are well suited to calculate the noise excited by inequidistant gears. A noise evaluation approach for inequidistant gears is presented, which is derived from the results of a psychoacoustic listening test. Hence, the capability of inequidistant gears to reduce gear noise is validated, based on subjective judgments. Finally, an optimization approach regarding the noise reduction of inequidistant gears, which takes the acoustic properties of the test bench into account, is presented. The result of an exemplary optimization is discussed.

---

The results of this thesis show that the noise of gear drives can be significantly reduced by using inequidistant gears. The developed analytical calculation chain and the methods for the design of noise-optimized inequidistant gears enable the calculation of the overall sound pressure level, the frequency spectra and the order spectra with good accuracy for spur gears and sufficient accuracy for helical gears. The developed optimization method allows for the design of acoustically optimized inequidistant gears.

---

---

## Inhaltsverzeichnis

---

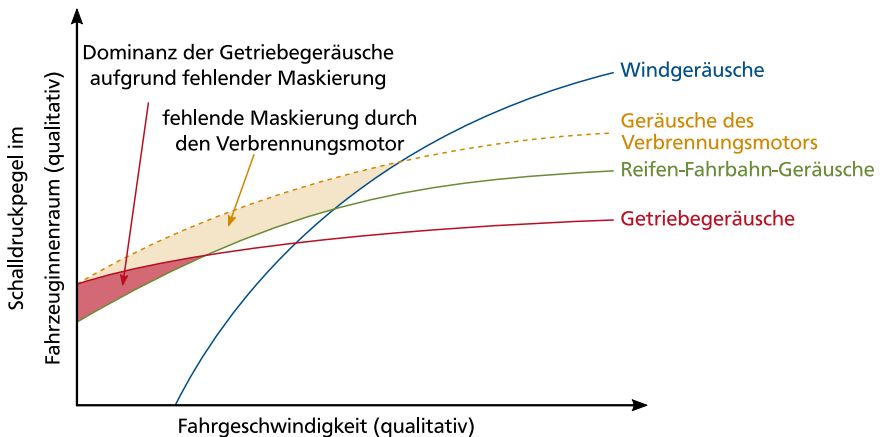
<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation.....	1
1.2	Neuheit des Ansatzes von inäquidistanten Verzahnungen.....	2
1.3	Forschungsfrage und Methode.....	3
<b>2</b>	<b>Stand der Forschung und Technik zu Verzahnungsgeräuschen</b>	<b>5</b>
2.1	Geräuscentstehung in Maschinen.....	5
2.2	Geometrische Zusammenhänge bei Evolventenverzahnungen.....	11
2.3	Geräuschanregungsmechanismen in Zahnradgetrieben.....	16
2.4	Modellierungsansätze für Zahnradgetriebe.....	20
2.5	Geräuschkinderungsmaßnahmen an Zahnradgetrieben.....	31
2.6	Psychoakustik.....	33
2.7	Geräuschkinderung durch ungleichmäßige Anregung.....	37
2.8	Fazit zum Stand der Forschung und Technik.....	42
<b>3</b>	<b>Konzeption von inäquidistanten Verzahnungen</b>	<b>43</b>
3.1	Inäquidistanz-Parameter zur Definition der Verzahnungsgeometrie ...	43
3.2	Paarung von inäquidistanten Zahnrädern.....	52
3.3	Grenzen der Parameterräume.....	55
3.4	Aufbau in inäquidistanten Mustern.....	57
3.5	Chancen und Herausforderungen von inäquidistanten Verzahnungen.	58
3.6	Fazit zur Konzeption von inäquidistanten Verzahnungen.....	59
<b>4</b>	<b>Auslegung von inäquidistanten Verzahnungen</b>	<b>60</b>
4.1	Prüfverzahnung und Getriebeprüfstand.....	61
4.2	Statische Modellierung.....	64
4.3	Elastostatische Modellierung.....	68
4.4	Dynamische Modellierung.....	86
4.5	Maschinenakustische Modellierung.....	105
4.6	Experimentelle Simulation der Prüfverzahnungen.....	112
4.7	Fazit zur Auslegung inäquidistanter Verzahnungen.....	125

<b>5</b>	<b>Geräuschbewertung von inäquidistanten Verzahnungen</b>	<b>128</b>
5.1	Online-Hörversuch von DRIESELMANN .....	128
5.2	Definition eines Optimierungskriteriums zur Geräuschbewertung .....	131
5.3	Fazit zur Geräuschbewertung von inäquidistanten Verzahnungen .....	133
<b>6</b>	<b>Geräuschoptimierung von inäquidistanten Verzahnungen</b>	<b>134</b>
6.1	Untersuchung des Lösungsraumes .....	134
6.2	Entwicklung und Anwendung einer Optimierungsmethode.....	137
6.3	Diskussion der Optimierungsergebnisse .....	143
6.4	Fazit zur Geräuschoptimierung von inäquidistanten Verzahnungen ....	144
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>146</b>
7.1	Zusammenfassung .....	146
7.2	Ausblick.....	148
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>150</b>
A.1	Absolute Zahnpositionen und Zahndicken der Prüfverzahnungen .....	150
A.2	Experimentell ermittelte Drehwegfehler der Prüfverzahnungen .....	151
A.3	Elementgröße in der FE-Simulation der Körperschallfunktion .....	153
A.4	Numerisch berechnete Schwingformen des Getriebeprüfstandes .....	155
A.5	Körperschallfunktionen des Getriebeprüfstandes .....	157
A.6	Bestimmung der Referenz-Messposition .....	161
A.7	Daten und Drehwegfehler der schrägverzahnten Prüfverzahnung.....	163
A.8	Inäquidistanz-Parameter der optimierten inäquidistanten Verzahnung	166
A.9	Bezugswerte zur Pegelbildung .....	168
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>169</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>177</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>179</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>180</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>186</b>



## 1 Einleitung

Die Elektrifizierung der Antriebstechnik schreitet stetig voran – insbesondere in der Elektromobilität. Elektrische Antriebe versprechen eine emissionsreduzierte Mobilität und einen erhöhten Komfort. Die zunehmend ins Bewusstsein der Bevölkerung rückenden Umweltaspekte und der Wunsch nach Nachhaltigkeit verstärken den Trend zur Elektrifizierung. Als besonders effizient in Bezug auf die Leistungsdichte und das Gewicht gelten Elektromotoren mit hohen Drehzahlen [1–3]. Jedoch steht dadurch unter anderem die Beherrschung der Akustik eines solchen Hochdrehzahlantriebsstranges vor neuen Herausforderungen. Wo bei Pkw zuvor ein Verbrennungsmotor durch seine breitbandige akustische Anregung viele Geräuschquellen verdeckte, fehlt dieser Maskierungseffekt aufgrund des deutlich leiseren Elektromotors. Geräuschquellen wie Reifen-Fahrbahn-Geräusche, Lüftungsgeräusche und insbesondere Getriebegeräusche treten deutlich in den Vordergrund. [1–10] Abbildung 1.1 zeigt schematisch den Effekt der fehlenden Maskierung durch den Verbrennungsmotor in einem Elektrofahrzeug. Weiterhin entstehen durch die höheren Drehzahlen Geräusche mit höheren Frequenzen, was die Prominenz und die Lästigkeit dieser Geräusche verstärkt [1, 2, 5, 8, 11].



**Abbildung 1.1:** fehlende Maskierung durch den Verbrennungsmotor führt zu erhöhter Wahrnehmbarkeit von Getriebegeräuschen

### 1.1 Motivation

In elektrischen Pkw-Antriebssträngen mit modernen Hochdrehzahlkonzepten werden Getriebe zwingend benötigt, um die mechanische Leistung des Elektromotors, welche bei hohen Drehzahlen und niedrigen Drehmomenten abgegeben wird, in

---

eine für die Räder passende niedrigere Drehzahl bei höherem Drehmoment zu wandeln. Es kann zweckmäßig sein, mehrstufige schaltbare Getriebe vorzusehen, um den Elektromotor über große Betriebsbereiche hinweg möglichst effizient betreiben zu können. Ein aktuelles Beispiel ist das Forschungsprojekt Speed2E [2, 12], in dem zwei Elektromotoren mit Drehzahlen von bis zu 30 000 U/min zum Einsatz kommen, wodurch ein zweistufiges, schaltbares Getriebe notwendig wird. Die unweigerlich bei solchen Konzepten entstehenden hochfrequenten und tonhaltigen Geräuschkomponenten (*Getriebeheulen* oder *Getriebepeifen* genannt) werden als besonders störend empfunden und können zu einer von Kunden wahrgenommenen verminderten Produktqualität führen [4, 5, 13]. Die Geräuschminderung an Zahnradgetrieben in elektrischen Antriebssträngen kann daher nicht nur auf Basis des physikalischen Schalldruckes, sondern muss auch unter dem Aspekt der *Psychoakustik* erfolgen [2, 7, 8, 10, 11, 13].

## 1.2 Neuheit des Ansatzes von inäquidistanten Verzahnungen

Nach dem Stand der Forschung und Technik werden Getriebeegeräusche im Zahneingriff gemindert, indem die Verzahnungsgeometrie angepasst wird. Allgemein führen Schräg- statt Geradverzahnungen, ganzzahlige Gesamtüberdeckungen, geringe Fertigungstoleranzen, Hochverzahnungen und breitere Zähne zu einer geringeren Geräuschanregung. Darüber hinaus können dämpfende Werkstoffe eingesetzt werden. [14–29] Durch Korrekturen wie Kopfrücknahmen, Fußfreischnitte, Breitenballigkeiten oder sogar periodische Profilkorrekturen lässt sich die Geräuschanregung im Zahneingriff für bestimmte Betriebsbereiche weiter reduzieren [16, 30, 31]. Alle diese Geräuschminderungsmaßnahmen sind äußerst wirksam bei der Reduktion der physikalischen Anregungsamplituden. Jedoch ändern diese Maßnahmen nicht den tonhaltigen und lästigen Geräuschcharakter, der durch den periodischen Zahneintritt entsteht. Im Rahmen aktueller Forschung wurde beobachtet, dass das Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben mit geringen, zufällig verteilten Fertigungsabweichungen zu einer Verbesserung des psychoakustischen Geräuschverhaltens führen kann – jedoch unter der Prämisse, dass der Summenschalldruckpegel aufgrund der höheren Fertigungsabweichungen ansteigt [32–34].

An dieser Stelle geht die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte inäquidistante Verzahnung über den Stand der Forschung und Technik hinaus. Sie ist durch eine unregelmäßige Verzahnungsgeometrie, zum Beispiel unregelmäßige Zahndicken und Zahnpositionen, charakterisiert. Die im Eingriff stehenden Zahnräder werden einander angepasst, sodass das Verzahnungsgesetz exakt eingehalten wird. Durch die gezielt unregelmäßig gestaltete Verzahnungsgeometrie werden die Vorteile einer deutlich verbesserten Psychoakustik erreicht, ohne dabei einen erhöhten Summenschalldruckpegel in Kauf nehmen zu müssen. Vielmehr wird gezeigt, dass

---

inäquidistante Verzahnungen den Summenschalldruckpegel, verursacht durch den Zahneingriff, sogar weiter reduzieren können.

### 1.3 Forschungsfrage und Methode

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Ansatz von inäquidistanten Verzahnungen zur Geräuschkürzung an Zahnradgetrieben neu entwickelt. Es werden Methoden erarbeitet, mit denen das Geräuschverhalten von inäquidistanten Verzahnungen berechnet, bewertet und optimiert werden kann. Im Zentrum dieser Arbeit steht die Forschungsfrage:

*Wie lässt sich ein Stirnradgetriebe mithilfe der inäquidistanten Verzahnung hinsichtlich des Geräusches optimieren?*

Zur Beantwortung dieser Forschungsfrage werden drei Hypothesen aufgestellt, die es im Verlauf der Arbeit zu prüfen gilt:

1. Durch inäquidistante Verzahnungen kann das Zahneingriffsgeräusch von Zahnradgetrieben gemindert werden.
2. Die Geräuschregung von inäquidistanten Verzahnungen lässt sich mathematisch beschreiben.
3. Es ist eine Methode entwickelbar, mit der ein Geräuschoptimum hinsichtlich eines zu bestimmenden Kriteriums ermittelt werden kann.

Kapitel 2 gibt einen Überblick über die für diese Arbeit relevanten maschinenakustischen Grundlagen (Abschnitt 2.1), über die geometrischen Zusammenhänge bei Evolventenverzahnungen (Abschnitt 2.2), über Geräuschregungsmechanismen in (Abschnitt 2.3) und Geräuschkürzungsmaßnahmen an Zahnradgetrieben (Abschnitt 2.5), über elastostatische und dynamische Modellierungsansätze für Zahnradgetriebe (Abschnitt 2.4), über psychoakustische Kenngrößen (Abschnitt 2.6) sowie über Geräuschkürzungsmaßnahmen mittels unregelmäßiger Anregungsmechanismen (Abschnitt 2.7). Abschnitt 2.8 fasst die Ergebnisse der Literaturrecherche in einem Fazit zusammen.

In Kapitel 3 wird die Konzeption von inäquidistanten Verzahnungen vorgestellt. Es werden die Inäquidistanz-Parameter zur Definition der geometrischen Unregelmäßigkeiten eingeführt und deren Auswirkung auf die Verzahnungsgeometrie beschrieben (Abschnitt 3.1). Kompatibilitätsgleichungen werden hergeleitet, um zwei im Eingriff stehende inäquidistante Verzahnungen ideal fehlerfrei zu paaren (Abschnitt 3.2). Weiterhin werden die geometrischen Grenzen der unregelmäßigen Ausgestaltung diskutiert (Abschnitt 3.3) und das Prinzip des Aufbaus von inäquidistanten Verzahnungen in Mustern (Abschnitt 3.4) vorgestellt. Das Kapitel endet mit einer Diskussion über Chancen und Herausforderungen bei der

---

Anwendung von inäquidistanten Verzahnungen (Abschnitt 3.5) und einem Fazit (Abschnitt 3.6).

Kapitel 4 umfasst die gesamte Auslegung inäquidistanter Verzahnungen. Zunächst werden äquidistante und inäquidistante Prüfverzahnungen sowie ein Getriebeprüfstand ausgelegt und aufgebaut (Abschnitt 4.1). Methoden zur statischen (Abschnitt 4.2), elastostischen (Abschnitt 4.3) und dynamischen Modellierung (Abschnitt 4.4) der Geräuschanregung von konventionellen Zahnradgetrieben werden für die Modellierung inäquidistanter Verzahnungen angepasst und validiert. In Abschnitt 4.5 erfolgt die Modellierung der maschinenakustischen Grundgleichung für den Getriebeprüfstand auf Basis von experimentellen, numerischen und analytischen Simulationen. Die Ergebnisse werden jeweils validiert (Abschnitt 4.6). Das Kapitel endet mit einem Fazit (Abschnitt 4.7).

Kapitel 5 beschreibt die Ergebnisse eines Online-Hörversuchs zur Bewertung der Lästigkeit des Geräusches von inäquidistanten Verzahnungen (Abschnitt 5.1). Auf Basis dieser Ergebnisse wird ein Optimierungskriterium entwickelt, mit dem das Geräusch von inäquidistanten Verzahnungen objektiv bewerten werden kann (Abschnitt 5.2). Abschnitt 5.3 schließt das Kapitel mit einem Fazit.

In Kapitel 6 wird ein Ansatz zur Optimierung inäquidistanter Verzahnungen hinsichtlich des Geräusches vorgestellt. Nach einer Untersuchung des Lösungsraumes (Abschnitt 6.1) wird eine zweistufige Optimierungsmethode entwickelt. Anhand dieser Methode wird eine optimierte inäquidistante Verzahnung ausgelegt (Abschnitt 6.2). Im Anschluss an eine Diskussion der Optimierungsergebnisse (Abschnitt 6.3) endet das Kapitel mit einem Fazit (Abschnitt 6.4).

Kapitel 7 schließt die Arbeit mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

---

## 2 Stand der Forschung und Technik zu Verzahnungsgeräuschen

---

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Maschinenakustik und der Geometrie von Evolventenverzahnungen, die Geräuschanregungsmechanismen in Zahnradgetrieben sowie Geräuschminderungsmaßnahmen nach dem Stand der Forschung und Technik vorgestellt. Weiterhin werden Modellierungsansätze für die wichtigsten Anregungsmechanismen in Zahnradgetrieben eingeführt. Die für diese Arbeit relevanten psychoakustischen Kenngrößen werden eingeführt und Ansätze zur Geräuschminderung mittels unregelmäßiger Anregungsprinzipien aus anderen Bereichen der Technik werden aufgezeigt.

### 2.1 Geräuscentstehung in Maschinen

Aus der Perspektive der Maschinenakustik existieren zwei Wege der Geräuscentstehung in Maschinen, siehe Abbildung 2.1 [17, 18, 30, 35]. Bei der direkten

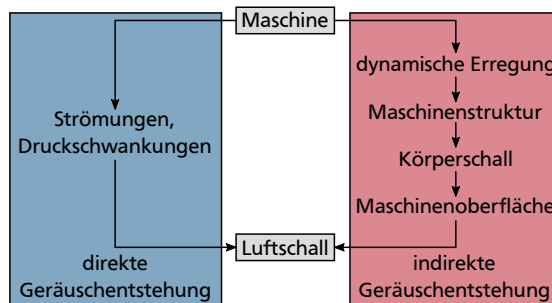
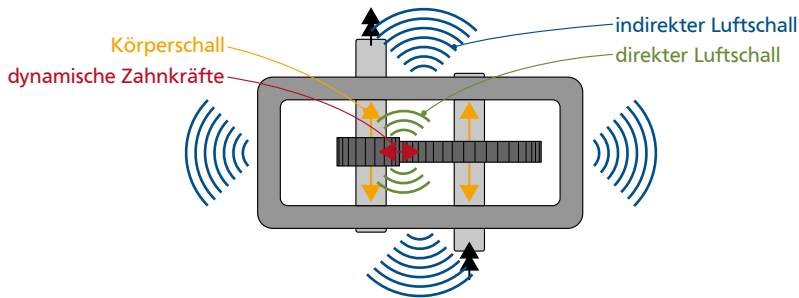


Abbildung 2.1: direkte und indirekte Geräuscentstehung in Maschinen

Geräuscentstehung wird ein Geräusch direkt durch instationäre Druckschwankungen oder Strömungen des Umgebungsmediums angeregt, was hauptsächlich in der Strömungsakustik (Lüftergeräusche, Turbulenzgeräusche, ...) auftritt. Häufiger in der Maschinenakustik ist der Weg der indirekten Geräuscentstehung durch eine dynamische Erregung einer Maschinenstruktur (Kraft-, Geschwindigkeits- oder Wegerregung). Es stellt sich eine Schwingung ein, die auf der Maschinenoberfläche als Luftschall abgestrahlt wird. [16–18, 35] Abbildung 2.2 zeigt ein Zahnradgetriebe als Beispiel für eine Maschine mit einer direkten Geräuscentstehung innerhalb des Getriebes (Strömungsanregung im Zahneingriff) und einer indirekten Geräuscentstehung mittels dynamischer Zahnkräfte. Um den Weg der indirekten Geräuscentstehung als Modellvorstellung verständlich beschreiben zu können, wurde die *maschinenakustische Grundgleichung für krafterreagte Strukturen* nach Gleichung (2.1) entwickelt [16–18, 35]. Sie hat sich zur Beschreibung der



**Abbildung 2.2:** mittels dynamischer Zahnkräfte angeregte Maschine am Beispiel eines Zahnradgetriebes

Geräuscentstehung in Maschinen, wie zum Beispiel Zahnradgetrieben, über die letzten Jahrzehnte hinweg etabliert [1, 21, 29–31, 35–43].

$$P(f) = \tilde{F}^2(f) \frac{T_v^2(f)}{Z_E^2(f)} S \sigma(f) Z'_{\text{Med}} \quad (2.1)$$

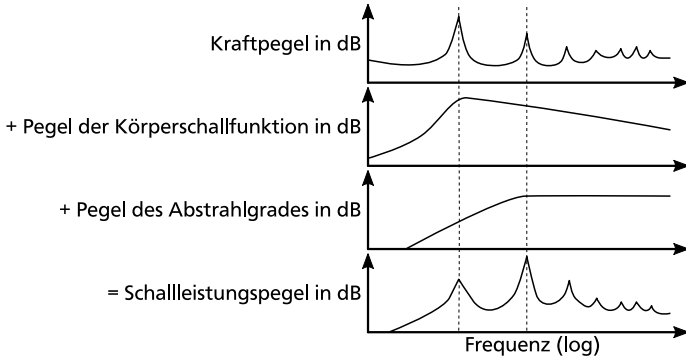
$P$	in W	Schalleistung	$f$	in Hz	Frequenz
$F$	in N	Kraft	$T_v$	in —	Körperschalltransferfunktion
$Z_E$	in $\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$	Eingangsimpedanz	$S$	in $\text{m}^2$	schallabstrahlende Fläche
$\sigma$	in —	Abstrahlgrad	$Z'_{\text{Med}}$	in $\frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$	Schallkennimpedanz

Eine dynamische Kraft  $F(f)$  regt eine Maschinenstruktur an. In Abhängigkeit von der Eingangsimpedanz  $Z_E(f)$  und der Körperschalltransferfunktion  $T_v(f)$  beginnt die Maschinenstruktur zu schwingen. Der Term  $\frac{T_v^2(f)}{Z_E^2(f)} S$  wird auch *Körperschallfunktion*  $Sh_T^2$  genannt. Darin ist  $S$  der Flächeninhalt der schallabstrahlenden Oberfläche, wobei der Abstrahlgrad  $\sigma(f)$  bestimmt, welcher Teil der Schwingungsleistung frequenzabhängig in das umgebende Medium mit der Schallkennimpedanz  $Z'_{\text{Med}}$  abgestrahlt wird. Die maschinenakustische Grundgleichung lässt sich auch in Pegelschreibweise darstellen, wobei aus Konsistenzgründen die Bezugswerte aus DIN 45630-1 [44] verwendet werden. [17, 18, 35]

$$L_P(f) = L_F(f) + L_{Sh_T^2}(f) + L_\sigma(f) + L_{Z'_{\text{Med}}} \quad (2.2)$$

$L_P$	in dB	Schalleistungspegel	$f$	in Hz	Frequenz
$L_F$	in dB	Kraftpegel	$L_{Sh_T^2}$	in dB	Pegel der Körperschallfunktion
$L_\sigma$	in dB	Pegel des Abstrahlgrades	$L_{Z'_{\text{Med}}}$	in dB	Pegel der Schallkennimpedanz

Für den Fall einer Schallabstrahlung in Luft unter Normalbedingungen ergibt sich für die Schallkennimpedanz aufgrund des Bezugswertes von  $Z'_0 = Z'_{\text{Med}}$  der Wert  $L_{Z'_{\text{Med}}} = 0 \text{ dB}$ , weshalb in diesem Fall die Angabe von  $L_{Z'_{\text{Med}}}$  in Gleichung (2.2) ausgelassen werden kann [35]. Das Prinzip der maschinenakustischen Grundgleichung ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Im Folgenden wird auf die Teile der maschinen-



**Abbildung 2.3:** maschinenakustischen Grundgleichung als Superposition der Spektren der einzelnen Anteile

akustischen Grundgleichung näher eingegangen. Für weitere Hintergründe zur maschinenakustischen Grundgleichung wird auf die Grundlagenliteratur, wie zum Beispiel [17, 18, 35], verwiesen.

### 2.1.1 Anregungskräfte

Die Anregungskräfte  $F(f)$  der maschinenakustischen Grundgleichung resultieren aus den im Betrieb einer Maschine entstehenden dynamischen Kräften, die auf die Maschinenstruktur einwirken. Die Anregungskräfte können zum Beispiel durch instationäre Bewegungsvorgänge (Beschleunigung des Kolbens eines Verbrennungsmotors), elektrische Anregungen (elektrisches Wechselfeld eines Elektromotors), Stoßanregungen (Schmiedevorgänge) oder Schwingungen von Zahnrädern in Getrieben entstehen. [17, 18, 30, 35]

Die maschinenakustische Grundgleichung ist lediglich für die Anregung durch eine Einzelkraft definiert. In der Realität wird eine Maschinenstruktur jedoch durch mehrere Kräfte an mehreren Stellen gleichzeitig angeregt. Es ist möglich, die gesamte Kraftanregung in Einzelkräfte zu zerlegen und die jeweils entstehenden Schalleistungen zu superponieren [18]. Da die maschinenakustische Grundgleichung nur im Frequenzbereich definiert ist, muss das Zeitsignal der Anregungs-

kraft  $F(t)$  gegebenenfalls mittels Fourier-Transformation in den Frequenzbereich  $F(f)$  überführt werden. [17, 18, 35, 37, 42]

### 2.1.2 Körperschallfunktion

Die Körperschallfunktion beschreibt das Übertragungsverhalten des Körperschalls einer Maschinenstruktur von der anregenden Kraft  $F(f)$  hin zu den Schwingungen der Maschinenoberfläche. Der mittlere Teil der maschinenakustischen Grundgleichung (Gleichung (2.1) auf S. 6) lässt sich umformen, was zur Körperschallfunktion  $Sh_T^2(f)$  führt. [17, 18, 35]

$$\frac{T_v^2(f)}{Z_E^2(f)} S = \frac{\overline{\tilde{v}^2(f)}}{\overline{\tilde{F}^2(f)}} S = Sh_T^2(f) \quad (2.3)$$

$T_v$	in	–	Körperschalltransferfunktion	$f$	in	Hz	Frequenz
$Z_E$	in	$\frac{Ns}{m}$	Eingangsimpedanz	$v$	in	$\frac{m}{s}$	Oberflächenschnelle
$F$	in	N	Kraft	$S$	in	$m^2$	schallabstrahlende Fläche
$Sh_T^2$	in	$\frac{m^4}{N^2 s^2}$	Körperschallfunktion				

$\overline{\tilde{v}^2(f)}$  beschreibt hierbei die über die schallabstrahlende Oberfläche gemittelte quadratische Oberflächenschnelle. Hier zeigt sich eine weitere Vereinfachung der maschinenakustischen Grundgleichung, denn die Oberflächenschnellen einer Maschinenstruktur gehen nur als ein über der Fläche gemittelter Wert in Abhängigkeit von der Frequenz ein. [17, 18, 35] Die Definition der Körperschallfunktion nach Gleichung (2.3) hat den Vorteil, dass die Übertragungseigenschaften einer Maschinenstruktur unabhängig von der tatsächlichen Anregung der Maschine ermittelt werden können und somit zu einer strukturspezifischen Eigenschaft werden. Die Körperschallfunktion kann experimentell, numerisch oder analytisch ermittelt werden. Ist die Körperschallfunktion bestimmt, kann sie als eine Filterfunktion zwischen der Anregungskraft  $F(f)$  und der Schalleistung  $P(f)$  interpretiert werden. [17, 18, 35, 37, 42]

### 2.1.3 Schallabstrahlung

Die Schallabstrahlung findet auf der Oberfläche der Maschinenstruktur statt. Der Abstrahlgrad  $\sigma(f)$  beschreibt dabei in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$ , welcher Anteil der auf der Oberfläche vorhandenen Schwingungsleistung als Schalleistung  $P$  in die Luft abgestrahlt wird. [17, 18, 30, 35, 42] Die konservativste Abschätzung stellt die hauptsächlich in der Automobilindustrie gebräuchliche äquivalente abgestrahlte Schalleistung (*equivalent radiated power – ERP*) dar. Die ERP basiert auf der Annahme, dass der Abstrahlgrad bei jeder Frequenz den Wert



$$\sigma_{\text{ERP}}(f) = 1 \quad (2.4)$$

$\sigma_{\text{ERP}}$  in – Abstrahlgrad bei der ERP  $f$  in Hz Frequenz

annimmt und somit die gesamte auf der Maschinenoberfläche befindliche Schwingungsleistung als Schallleistung abgestrahlt wird. [45] Insbesondere bei tiefen Frequenzen überschätzt dieses Modell die abgestrahlte Schallleistung deutlich. Dennoch ist die ERP aufgrund des minimalen Berechnungsaufwandes (frequenzunabhängiger und konstanter Wert) ein zweckmäßiger Ansatz, um qualitative Vergleiche von Berechnungsergebnissen durchzuführen [46].

Ein in der Maschinenakustik gebräuchliches Modell ist der *Kugelstrahler 0. Ordnung*. Dieses Modell geht von einer kugelförmigen Schallquelle aus, deren Oberfläche konphas schwingt (auch *Monopol-Strahler* genannt). Das Modell berücksichtigt die verringerte Schallabstrahlung bei tiefen Frequenzen. [17, 18, 35] Der Abstrahlgrad eines Kugelstrahlers 0. Ordnung wird hauptsächlich durch die Kugelstrahlereckfrequenz

$$f_{\text{K0}} = \frac{c_{\text{Med}}}{\sqrt{\pi S}} \quad (2.5)$$

$f_{\text{K0}}$  in Hz Kugelstrahlereckfrequenz  $c_{\text{Med}}$  in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  Schallgeschwindigkeit  
 $S$  in  $\text{m}^2$  schallabstrahlende Fläche

bestimmt. Für Frequenzen größer als  $f_{\text{K0}}$  nimmt  $\sigma$  in Pegelschreibweise konstant den Wert 0 dB (entspricht in linearer Schreibweise dem Wert Eins) an, während der Abstrahlgrad für Frequenzen kleiner als  $f_{\text{K0}}$  mit 20 dB pro Dekade zu tiefen Frequenzen hin abfällt. Der Abstrahlgrad des Kugelstrahlers 0. Ordnung ist gegeben durch [17, 18]

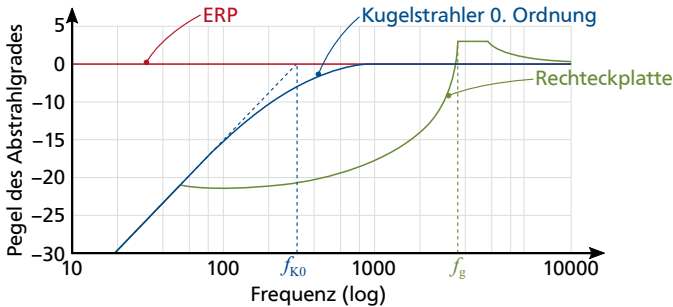
$$\sigma_{\text{K0}}(f) = \frac{f^2}{f^2 + f_{\text{K0}}^2} \quad (2.6)$$

$\sigma_{\text{K0}}$  in – Abstrahlgrad beim Kugelstrahler  $f$  in Hz Frequenz  
 $f_{\text{K0}}$  in Hz Kugelstrahlereckfrequenz

Das Modell des Kugelstrahlers 0. Ordnung ist ebenfalls eine konservative Schätzung des Abstrahlgrades. Effekte, die zu einer verringerten Schallabstrahlung führen, wie zum Beispiel der akustische Kurzschluss bei dünnwandigen, flächigen Strukturen, werden vernachlässigt. [17, 18, 35] Nichtsdestotrotz beschreibt das Modell insbesondere für kompakte und relativ dickwandige Strukturen den

Abstrahlgrad in guter Näherung [35]. Aktuelle Untersuchungen von MORITZ [47] bestätigen das.

Um den Abstrahlgrad von Rechteckplatten abzuschätzen, haben STORM [42] und WEBER [41] ein Abstrahlmodell entwickelt, bei welchem der Verlauf des Abstrahlgrades im Frequenzspektrum durch Linien konstruiert wird [17, 18, 41, 42]. Dieses Abschätzverfahren berücksichtigt zwar den akustischen Kurzschluss, der unterhalb der Koinzidenzgrenzfrequenz  $f_g$  (Frequenz hoher Schallabstrahlung durch gleiche Luftschall- und Biegewellenlänge der Platte) stattfindet, ist jedoch aufwändiger zu modellieren als der Kugelstrahler 0. Ordnung, weshalb an dieser Stelle nicht genauer darauf eingegangen werden soll. Abbildung 2.4 zeigt schematisch den Abstrahlgrad der drei vorgestellten Modelle (ERP, Kugelstrahler 0. Ordnung und Rechteckplatte).



**Abbildung 2.4:** anhand dreier Modelle errechneter Abstrahlgrad  $\sigma(f)$ : ERP, Kugelstrahler 0. Ordnung und Rechteckplatte

Die Schallkennimpedanz des umgebenden Mediums  $Z'_{\text{Med}}$  ist ein frequenzunabhängiger Wert, der sich unter der Annahme ebener Wellen nach Gleichung (2.7) berechnet [17, 18].

$$Z'_{\text{Med}} = \rho_{\text{Med}} c_{\text{Med}} \quad (2.7)$$

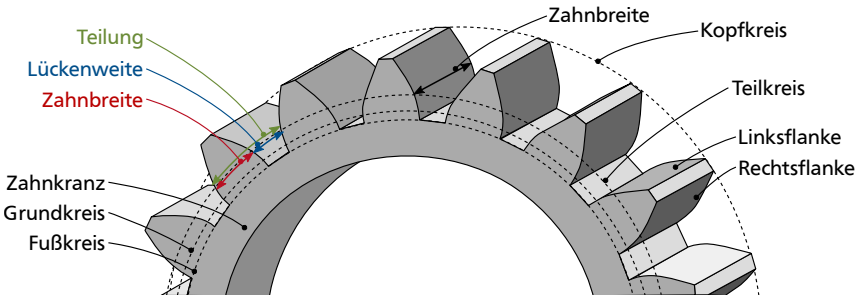
$Z'_{\text{Med}}$	in $\frac{\text{N s}}{\text{m}^3}$	Schallkennimpedanz	$\rho_{\text{Med}}$	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte
$c_{\text{Med}}$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schallgeschwindigkeit			

Analog der Körperschallfunktion kann das Produkt aus Abstrahlgrad und Schallkennimpedanz  $\sigma(f) Z'_{\text{Med}}$  als eine weitere Filterfunktion zwischen der Anregungskraft  $F(f)$  und der abgestrahlten Schalleistung  $P$  interpretiert werden.

## 2.2 Geometrische Zusammenhänge bei Evolventenverzahnungen

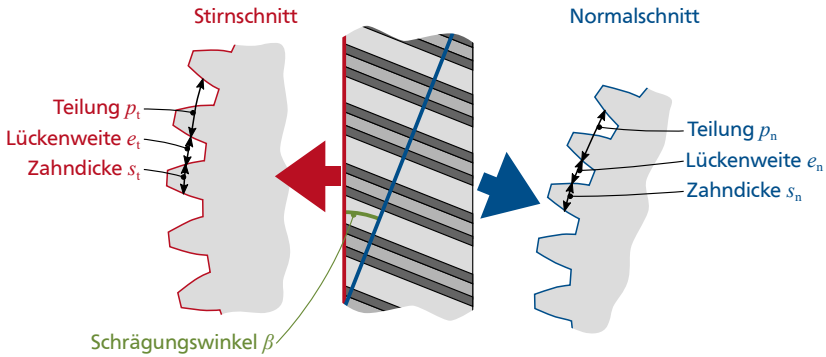
Zahnradgetriebe dienen zur Wandlung rotatorischer mechanischer Leistungen. Das Verzahnungsgesetz besagt, dass die Zahnflanken einer Verzahnung stets so ausgebildet sein müssen, dass eine kontinuierliche und gleichförmige Übertragung von Drehbewegungen gewährleistet ist [14, 19, 24, 25]. Es existiert eine Vielzahl an verschiedenen Bauformen für Zahnradgetriebe, wie zum Beispiel Stirnradgetriebe, Planetengetriebe, Kegelradgetriebe und Hypoidgetriebe. Ebenso existiert eine Vielzahl an Verzahnungsformen wie zum Beispiel Evolventenverzahnungen, Zykloidenverzahnungen und Triebstockverzahnungen. Davon ist jedoch aufgrund einfacher und wirtschaftlicher Herstellungsmöglichkeiten praktisch nur die Evolventenverzahnung für den allgemeinen Maschinenbau relevant. Weiterhin kann zwischen Gerad-, Schräg- und Pfeilverzahnungen unterschieden werden. [14, 19, 24–29] Für die vorliegende Arbeit sind jedoch lediglich evolventische gerad- und schrägverzahnte Stirnradgetriebe mit Außenverzahnung relevant, weshalb sich alle nachfolgenden Erläuterung auf diese beziehen. Im Folgenden werden lediglich die für diese Arbeit relevanten geometrischen Parameter vorgestellt. Dabei werden – soweit möglich – die Bezeichnungen und Definitionen aus DIN ISO 21771:2014-08 [48] übernommen. Ausführlichere Beschreibungen der geometrischen Parameter und deren detaillierte mathematische Zusammenhänge sind in der Fachliteratur [14, 19, 24–29] oder in normativen Werken [48–50] gegeben.

### 2.2.1 Grundlegende Begriffe



**Abbildung 2.5:** geometrische Parameter an einem evolventischen geradverzahnten Stirnrad mit Außenverzahnung

Die äußere und die innere Begrenzung der Zähne ist durch den Kopfkreis mit dem *Kopfkreisdurchmesser*  $d_a$  beziehungsweise den Fußkreis mit dem *Fußkreisdurchmesser*  $d_f$  definiert. Beim Blick auf die Vorderseite eines Zahnrades (in der Regel durch eine Beschriftung markiert) ist die linke Flanke eines nach oben ge-



**Abbildung 2.6:** Stirnschnitt (parallel zur Stirnfläche des Zahnrades) und Normalschnitt (normal zu den schräg gestellten Zähnen) eines schrägverzahnten evolventischen Stirnrades mit Außenverzahnung

richteten Zahnes die *Linksflanke*, die rechte Flanke wird *Rechtsflanke* genannt. Die Zähne sind fest mit dem Radkörper verbunden, wobei der äußerste Teil des Radkörpers auch *Zahnkranz* genannt wird. Die evolventische Form der Zahnflanken geht vom Grundkreis mit dem *Grundkreisdurchmesser*  $d_b$  aus. Der gedachte Zylinder, auf dem zwei Zahnräder aufeinander abrollen, wird *Teilkreis* (oder *Wälzkreis*) genannt und hat den *Teilkreisdurchmesser*  $d$ . Der Abstand zweier jeweils aufeinanderfolgender Links- oder Rechtsflanken entlang des Teilkreises wird *Teilung*  $p$  genannt. Sie ergibt sich aus einer der wichtigsten geometrischen Verzahnungsgrößen – dem *Verzahnungsmodul*  $m$ . DIN 780-1 [51] definiert bevorzugte Modulreihen für die Bezugsprofile von Stirnrädern. [14, 19, 24–29, 48–50]

$$p = m \pi \quad (2.8)$$

$p$	in m	Teilung	$m$	in m	Verzahnungsmodul
-----	------	---------	-----	------	------------------

Wird die Teilung statt zwischen den Links- beziehungsweise Rechtsflanken zwischen den Zahnmitten angegeben, so wird das Zahnmittenteilung  $p_m$  genannt. Die Teilung  $p$  untergliedert sich in die *Zahndicke*  $s$  und die *Lückenweite*  $e$ . Die Breite des Zahnrades wird *Zahnbreite*  $b$  genannt. Bei Schrägverzahnungen muss zwischen der Betrachtung im Stirnschnitt (Schnitt parallel zur Stirnfläche des Zahnrades) und im Normalschnitt (Schnitt normal zu den schräg gestellten Zähnen) unterschieden werden, siehe Abbildung 2.6. [14, 19, 24–29, 48–50] Durch die

Schrägstellung der Zähne um den *Schrägungswinkel*  $\beta$  ergeben sich für den Verzahnungsmodul  $m$  und damit unter anderem auch für die Teilung  $p$ , die Zahndicke  $s$  und die Lückenweite  $e$  unterschiedliche Werte im Stirnschnitt (Index t) und im Normalschnitt (Index n). Für Geradverzahnungen fallen Stirn- und Normalschnitt zusammen, weshalb diesbezüglich keine Unterscheidung getroffen werden muss.

### 2.2.2 Bezugsprofile nach DIN 867

Klassischerweise wird die Geometrie der Verzahnung mittels eines Bezugsprofils nach DIN 867 [50] erzeugt, siehe Abbildung 2.7. Das Bezugsprofil definiert die Geometrie des Werkzeuges zur Fertigung der Verzahnung. [14, 19, 24–29, 48–50] Der *Profilwinkel des Bezugsprofils*  $\alpha_p$  definiert den Winkel der Flanken des

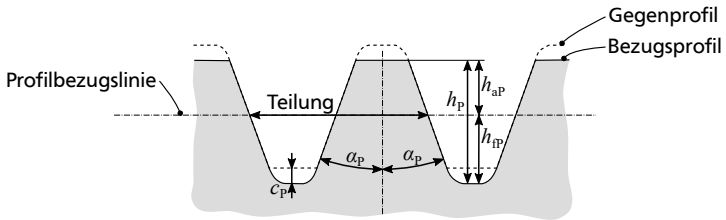


Abbildung 2.7: Bezugsprofil eines evolventischen Stirnrades

Bezugsprofils und entspricht dem *Normaleingriffswinkel*  $\alpha_n$  des durch dieses Bezugsprofil hergestellten Zahnrades. In den meisten Fällen beträgt  $\alpha_p$  (und damit auch  $\alpha_n$ )  $20^\circ$ . Die *Zahnhöhe des Bezugsprofils*  $h_p$  setzt sich zusammen aus der *Kopfhöhe des Bezugsprofils*  $h_{ap}$  und der *Fußhöhe des Bezugsprofils*  $h_{fp}$ . Diese beiden Größen sind nach DIN 867-1 definiert als

$$h_{ap} = m_n \quad (2.9)$$

und

$$h_{fp} = m_n + c_p. \quad (2.10)$$

$h_{ap}$	in	m	Kopfhöhe des Bezugsprofils	$m_n$	in	m	Normalmodul
$h_{fp}$	in	m	Fußhöhe des Bezugsprofils	$c_p$	in	m	Kopfspiel

Um ein Aufsetzen des Zahnkopfes auf den Zahngrund eines paarenden Zahnrades zu vermeiden, wird ein *Kopfspiel*  $c_p$  vorgesehen. Dieses Kopfspiel kann, je nach Anwendungsfall, mittels des Kopfspielfaktors  $c_p^*$  unterschiedlich groß eingestellt

werden, beträgt jedoch in der Regel  $0,1 m_n \dots 0,4 m_n$ . Für positive Werte des Kopfspiefaktors  $c_p^*$  wird die Zahnücke tiefer. [14, 19, 24–29, 48–50]

$$c_p = c_p^* m_n \quad (2.11)$$

$c_p$	in m	Kopfspiel	$c_p^*$	in –	Kopfspiefaktor
$m_n$	in m	Normalmodul			

Die Zahnhöhe  $h$  des Zahnes am Zahnrad ergibt sich zu [48]

$$h = h_{ap} + h_{fp} + k m_n. \quad (2.12)$$

$h$	in m	Zahnhöhe	$h_{ap}$	in m	Kopfhöhe des Bezugsprofils
$h_{fp}$	in m	Fußhöhe des Bezugsprofils	$k$	in –	Kopfhöhenänderungsfaktor

Neben dem Bezugsprofil kann die Zahnhöhe auch durch den Kopfhöhenänderungsfaktor  $k$  angepasst werden. Für positive Werte von  $k$  wird der Zahn höher, für negative Werte kleiner. [14, 19, 24–29, 48–50]

### 2.2.3 Profilverziehung

Bei der Fertigung von Zahnradern tangiert in der Regel die Profilbezugslinie des Werkzeuges den Teilkreis. Wird das Werkzeug gegenüber dieser Ausgangslage verschoben, entsteht eine Profilverziehung  $x m_n$ , siehe Abbildung 2.8. Durch die

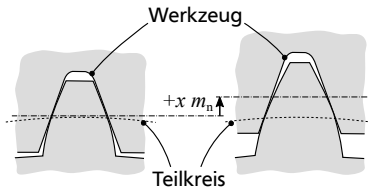


Abbildung 2.8: Profilverziehung bei evolvierenden Stirnrädern

Profilverziehung wird der wirksame Teil der Evolventenflanke verschoben. Für positive Werte von  $x m_n$  wird der Zahn am Teilkreis dicker, jedoch auch an seinem Kopf spitzer. Für negative Werte von  $x m_n$  wird der Zahn am Teilkreis dünner. Mittels Profilverziehung können zum Beispiel der Achsabstand  $a_w$ , die Gleitgeschwindigkeit, die Zahnform und die Tragfähigkeit beeinflusst werden. [14, 19, 24–29, 48–50] Anhaltspunkte für die Wahl eines geeigneten Wertes für die Profilverziehung geben beispielsweise DIN 3992 [52] und die Grundlagenliteratur [19, 24, 25].

## 2.2.4 Übersetzungsverhältnis

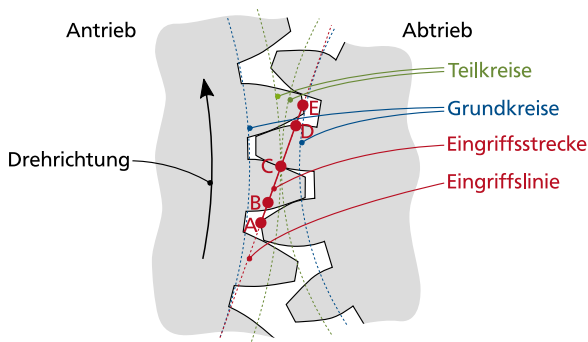
Das Verhältnis der antriebsseitigen (Index I) und abtriebsseitigen (Index II) Drehzahlen  $n$ , Teilkreisdurchmesser  $d$ , Zähnezahlen  $z$  und (unter der Annahme verlustfreier Leistungsübertragung) Drehmomente  $M$  ist für Stirnradverzahnungen definiert als das Übersetzungsverhältnis [14, 19, 24, 25, 48, 49]

$$i = \frac{n_I}{n_{II}} = -\frac{d_{II}}{d_I} = -\frac{z_{II}}{z_I} = \frac{M_{II}}{M_I}. \quad (2.13)$$

$i$	in	–	Übersetzungsverhältnis	$n_I$	in	$\frac{1}{s}$	Drehzahl, Antrieb
$n_{II}$	in	$\frac{1}{s}$	Drehzahl, Abtrieb	$d_I$	in	m	Teilkreisdurchmesser, Antrieb
$d_{II}$	in	m	Teilkreisdurchmesser, Abtrieb	$z_I$	in	–	Zähnezahl, Antrieb
$z_{II}$	in	–	Zähnezahl, Abtrieb	$M_I$	in	N m	Drehmoment, Antrieb
$M_I$	in	N m	Drehmoment, Abtrieb				

## 2.2.5 Eingriffslinie und Eingriffsstrecke

Bei evolventischen Verzahnungen definiert der Grundkreis mit dem Grundkreisdurchmesser  $d_b$  den Ursprung der Evolventen. Die Evolventenform ergibt sich aus dem Abwickeln eines Fadens vom Grundkreis. Durch diese Definition kann jede normal auf die Evolvente einwirkende Kraft entlang ihrer Wirkungslinie bis zum Grundkreis, wo sie diesen tangiert, verschoben werden. Entsprechend ist die Linie, die an beiden Zahnrädern tangential an deren Grundkreisen anliegt, die Linie, in der die Kraft übertragen wird. Sie wird *Eingriffslinie* genannt, siehe Abbildung 2.9. Sofern ein störungsfreier Zahneingriff vorliegt, erfolgt die Kraftübertragung



**Abbildung 2.9:** charakteristische Kreise, Eingriffslinie und Eingriffsstrecke einer Stirnradpaarung

zwischen zwei Stirnrädern ausschließlich entlang der Eingriffslinie. Der erste Kontakt von zwei in Eingriff tretenden Zähnen findet am *Anfangspunkt A* statt. Der Zahneingriff endet am *Endpunkt E*. Die Strecke zwischen den Punkten A und E beschreibt den Bereich, in dem der Zahneingriff stattfindet, und wird *Eingriffsstrecke* genannt. Genau in der Mitte, am Berührungspunkt der beiden Teilkreise, liegt der *Wälzpunkt C*. Bei geradzahnten Stirnrädern existieren in der Regel Zeitpunkte, zu denen ein Zahnpaar alleinig die gesamte Last trägt. Der Punkt, an dem das erstmalig auftritt, wird *innerer Einzeleingriffspunkt B*, der Punkt, an dem das letztmalig auftritt, wird *äußerer Einzeleingriffspunkt D* genannt. Ändert sich die Lastrichtung, so ändert sich auch die Orientierung der Eingriffslinie und damit der Eingriffsstrecke. [19, 24, 25, 29, 48, 49]

### 2.3 Geräuschanregungsmechanismen in Zahnradgetrieben

Zahnradgetriebe regen auch bei theoretisch perfekter Fertigung und Montage prinzipbedingt Strukturschwingungen des Gehäuses und damit Geräusche an. Die in einem Zahnradgetriebe auftretenden Geräuschanregungsmechanismen können prinzipiell in *äußere* und *innere Anregungsmechanismen* unterteilt werden.

Die äußeren Geräuschanregungsmechanismen haben ihre Ursache zum Beispiel in schwankenden An- und Abtriebsmomenten (Antriebe mit periodisch schwankenden Drehmomenten, Abtriebe mit schwankendem Leistungsbedarf, ...), ungleichförmig übertragenden Kupplungselementen (Gelenkwellen, ...) oder Unwuchten rotierender Maschinenelemente. Diese Anregungsmechanismen können beispielsweise zu Rasselgeräuschen im Getriebe oder zu modulierten Geräuschen führen.

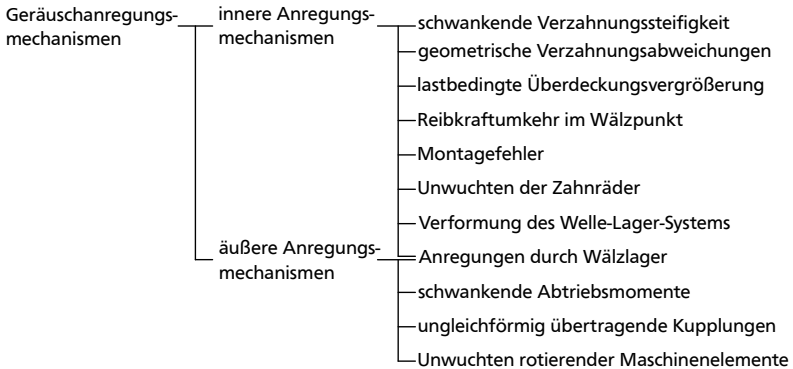
Die inneren Geräuschanregungsmechanismen sind hauptsächlich die schwankende Verzahnungssteifigkeit im Zahneingriff, geometrische Verzahnungsabweichungen und die Überdeckungsvergrößerung durch elastische Verformungen im Zahneingriff. Weiterhin zu nennen sind die Reibkraftumkehr im Wälzpunkt, Unwuchten, Montagefehler, Störungen des Zahneingriffes durch elastische Verformungen des Welle-Lager-Systems und Anregungen durch die Wälzlager, wobei Letztgenanntes auch zu den äußeren Anregungsmechanismen gezählt werden kann. Die meisten der Geräuschanregungsmechanismen treten mit dem Zahneingriff auf und regen daher auch hauptsächlich in der Zahneingriffsfrequenz, welche sich aus der Zähnezahl und der Drehzahl ergibt, und deren Vielfache (auch *Harmonische*) an.

$$f_z = n z \tag{2.14}$$

$f_z$	in Hz	Zahneingriffsfrequenz	$n$	in $\frac{1}{s}$	Drehzahl
$z$	in –	Zähnezahl			



Abbildung 2.10 strukturiert die Geräuschanregungsmechanismen, wobei deren Relevanz (basierend auf den Ergebnissen der Literaturrecherche) von oben nach unten abnehmend dargestellt ist. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die



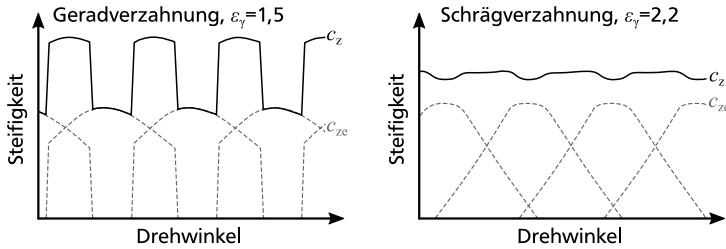
**Abbildung 2.10:** innere und äußere Geräuschanregungsmechanismen in Zahnradgetrieben, absteigend sortiert nach deren Relevanz in der Literatur

inneren Geräuschanregungsmechanismen, weshalb hier auf die äußeren Anregungsmechanismen nicht näher eingegangen werden soll. Die relevanten inneren Geräuschanregungsmechanismen werden im Folgenden vertieft. [1, 6, 13, 15–22, 28, 29, 31, 36, 38, 39, 43, 45, 53–58]

### 2.3.1 Schwankende Verzahnungssteifigkeit

Die Verzahnungssteifigkeit ist die momentane Steifigkeit im Zahneingriff entlang der Eingriffslinie. Sie ist abhängig von der Anzahl sowie der relativen Positionierung der im Eingriff befindlichen Zahnpaare und ist somit unter anderem abhängig vom Drehwinkel der Zahnräder. Insbesondere bei Geradverzahnungen findet eine periodische Schwankung der Anzahl der im Eingriff befindlichen Zahnpaare statt (bei Geradverzahnungen in der Regel ein Wechsel zwischen ein und zwei Zahnpaaren). Bei Schrägverzahnungen schwankt die Verzahnungssteifigkeit aufgrund der über die Zahnbreite kontinuierlich in den Eingriff tretenden Zähne weniger stark. Die durchschnittliche Anzahl an Zahnpaaren im Eingriff wird *Gesamtüberdeckung*  $\varepsilon_\gamma$  genannt. Ist  $\varepsilon_\gamma$  ganzzahlig, so kommt immer genau dann ein weiteres Zahnpaar in den Eingriff, wenn ein anderes Zahnpaar den Eingriff verlässt. Folglich entsteht kein Steifigkeitssprung, weswegen Verzahnungsauslegungen mit ganzzahligen Gesamtüberdeckungen  $\varepsilon_\gamma$  aus akustischer Sicht zu bevorzugen sind. Der Verlauf der Verzahnungssteifigkeit  $c_z$  als Superposition der einzelnen Zahnpaarsteifigkeiten  $c_{ze}$  für eine Gerad- und eine Schrägverzahnung ist in Abbil-

Abbildung 2.11 qualitativ dargestellt. [20, 30, 31, 36, 54, 56, 59] Unter der vereinfachten



**Abbildung 2.11:** qualitativer Verlauf der Verzahnungssteifigkeit für eine Gerad- und eine Schrägverzahnung

Annahme einer ideal konstanten statischen Vorlast  $F_{t,stat}$  im Zahneingriff entlang der Eingriffslinie wird durch Aufstellen des HOOKE'schen Gesetzes die Ursache der Geräuschanregung durch schwankende Verzahnungssteifigkeiten deutlich – eine sich mit dem Drehwinkel ändernde Verzahnungssteifigkeit  $c_z(\varphi)$  führt zu einem sich mit dem Drehwinkel ändernden Schwingweg  $x_{dyn}(\varphi)$ .

$$F_{t,stat} = c_z(\varphi) x_{dyn}(\varphi) \tag{2.15}$$

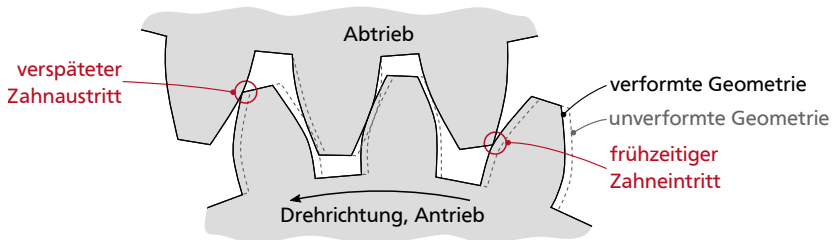
$F_{t,stat}$	in N	statische Vorlast	$c_z$	in $\frac{N}{m}$	Verzahnungssteifigkeit
$\varphi$	in rad	Drehwinkel	$x_{dyn}$	in m	Schwingweg

### 2.3.2 Geometrische Verzahnungsabweichungen

Unter den geometrischen Verzahnungsabweichungen werden sämtliche Abweichungen des realen vom idealen Zahnrad verstanden, die zum Beispiel aufgrund von Fertigung, Montage und Verschleiß entstehen können. Die Abweichungsarten sind vielfältig und umfassen Flankenrichtungsfehler, Welligkeiten und Oberflächenrauheiten. [15, 30, 36, 54, 56, 60, 61] GACKA [36] klassifiziert die Verzahnungsabweichungen auf Basis von DIN 4760 [62]. Weitere Formen von Verzahnungsabweichungen sind Teilungsfehler, wodurch der Abstand zweier jeweils aufeinander folgender Links- oder Rechtsflanken fehlerbehaftet ist. Das führt zu zusätzlichen Beschleunigungen und Verzögerungen der im Eingriff stehenden Zahnräder. Die kurzzeitigen, periodisch auftretenden Schwankungen der Winkelbeschleunigungen wirken sich im Spektrum in Form von Seitenbändern der Zahneingriffsfrequenz  $f_z$  und deren Harmonischen aus. [30, 31, 54–56, 59, 63]

### 2.3.3 Lastbedingte Überdeckungsvergrößerung

Durch die endliche Steifigkeit der im Eingriff befindlichen Zähne findet unter Last eine Verformung statt. Das antreibende Zahnrad eilt seinem idealen Drehwinkel um den Betrag der elastischen Verformung voraus. Kommt ein weiteres Zahnpaar in den Eingriff, so ist es zu Beginn noch unbelastet und daher auch unverformt, eilt jedoch ebenfalls seiner idealen Position voraus. Dadurch kommt dieses Zahnpaar verfrüht in den Eingriff, was sich durch ein stoßartiges Auftreffen der Zahnflanken (*Eingriffsstoß*) äußern kann, siehe Abbildung 2.12. Analog dazu tritt ein Zahnpaar am Ende des Eingriffs, bedingt durch die elastische Verformung und das vorauseilende antreibende Zahnrad, verspätet aus, was einen *Austrittsstoß* zur Folge haben kann. Insgesamt ist der Zahneingriff somit unter lastbedingter elastischer Verformung verlängert, was die Überdeckungsvergrößerung bewirkt. [30, 31, 55]



**Abbildung 2.12:** elastische Verformungen unter Last führen zu einer Überdeckungsvergrößerung durch frühzeitigen Zahneintritt und verspäteten Zahnaustritt

### 2.3.4 Weitere Geräuschanregungsmechanismen

Die im Folgenden aufgeführten Geräuschanregungsmechanismen sind laut Literaturangaben von untergeordneter Bedeutung. Nichtsdestotrotz sollen sie kurz Erwähnung finden.

#### Reibkraftumkehr am Wälzpunkt

In der ersten Hälfte des Eingriffes eines Zahnpaares bewegen sich die Zahnflanken mit ihrem Kontaktpunkt in einer gleitenden Relativbewegung aufeinander zu. In etwa der zweiten Hälfte des Eingriffes bewegen sich die Zahnflanken wieder auseinander. Am *Wälzpunkt* wird die Gleitgeschwindigkeit kurzzeitig null und ändert ab dort ihre Richtung, wodurch die entstehenden Reibkräfte ebenfalls ihre Richtung ändern. Die Stärke der Anregung durch die Reibkraftumkehr am Wälzpunkt hängt von den Gleiteigenschaften der Zahnflanken (Oberflächenrauheiten und Schmierung) ab. Insbesondere für Schrägverzahnungen wird aufgrund des konti-

---

nuielerischen Zahneingriffes die Relevanz dieses Geräuschanregungsmechanismus als gering eingeschätzt. [30, 31, 55]

### **Montagefehler**

Exzentrisch oder verkippt montierte Zahnräder führen ebenfalls zu Geräuschanregungen. Durch ein exzentrisch montiertes Zahnrad (zum Beispiel durch eine exzentrische Mittenbohrung) wird die Geschwindigkeit, mit der die Zähne in den Eingriff kommen, mit der Drehzahl des Zahnrades moduliert. Es entstehen mit dem Abstand der Umdrehungsfrequenz Seitenbänder um die Zahneingriffsfrequenz und deren Harmonische. Auch verkippt montierte Zahnräder erzeugen durch ihre taumelnde Bewegung Seitenbänder im Spektrum des Schalldruckes, jedoch mit dem Abstand der doppelten Drehfrequenz des Zahnrades. [15, 56, 64]

### **Zahneingriffsstörungen durch elastische Verformung des Welle-Lager-Systems**

Die statischen und dynamischen Kräfte im Zahneingriff müssen durch die Radkörper, die Wellen und die Lager vom Getriebegehäuse aufgenommen werden. Alle diese Elemente besitzen eine endliche Steifigkeit und verformen sich daher unter Last. Dies kann zu einer Verlagerung der Zahnräder und somit zu einem gestörten Zahneingriff führen, was eine erhöhte Geräuschanregung zur Folge haben kann. Dies tritt hauptsächlich bei dünnwandigen Leichtbau-Getriebegehäusen auf. Sind jedoch die Wellen dick und kurz, die Lager steif sowie das Gehäuse dickwandig und massiv ausgeführt, kann diese Form der Geräuschanregung vernachlässigt werden. [30, 65, 66]

### **Anregung durch Wälzlager**

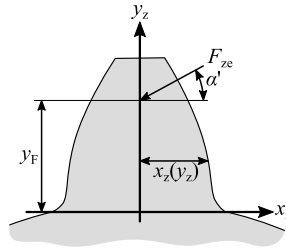
Die zur Lagerung der Getriebewellen benötigten Wälzlager haben durch ihren Aufbau aus umlaufenden Wälzkörpern charakteristische Anregungseigenschaften. Ebenso wie Verzahnungen spielen Steifigkeitsschwankungen sowie Fertigungs- und Montageabweichung eine wichtige Rolle. Die Stärke der Geräuschanregung durch Wälzlager hängt vom verwendeten Lagertyp, der Schmierung und der Einbausituation ab. [14, 24, 55]

## **2.4 Modellierungsansätze für Zahnradgetriebe**

Wie im vorigen Abschnitt erwähnt, sind die dominierenden Geräuschanregungsmechanismen in Zahnradgetrieben die schwankende Verzahnungssteifigkeit, geometrische Verzahnungsfehler und die lastbedingte Überdeckungsvergrößerung. Im Folgenden werden Modellierungsansätze vorgestellt, mit denen sich diese drei Anregungsmechanismen abbilden lassen. Weiterhin werden Modellierungsansätze vorgestellt, mit denen die dynamischen Zahnkräfte im Zahneingriff berechnet werden können.

### 2.4.1 Modellierung der schwankenden Verzahnungssteifigkeit

WEBER und BANASCHEK [67] liefern einen geschlossenen Lösungsansatz auf Basis der Formänderungsarbeit für die Berechnung der Zahnachgiebigkeit. Der Zahn wird als ein am Zahnkranz befestigter Biegebalken modelliert. Es werden die Verformungen des Zahnes sowie des sich direkt daran anschließenden Teils des Zahnkranzes berücksichtigt, die sich durch die anliegende Zahnkraft  $F_{ze}$  einstellen. [67] Abbildung 2.13 zeigt die zur Berechnung der Zahnachgiebigkeit notwendigen Größen. Es wird ein  $x_z$ - $y_z$ -Koordinatensystem mit Ursprung in der Zahnmitte



**Abbildung 2.13:** zur Berechnung der Zahnachgiebigkeit nach WEBER und BANASCHEK [67] notwendige Größen

auf Höhe des Zahnfußes aufgespannt. Die Zahnkraft  $F_{ze}$  wird in die Zahnmitte transformiert, wo sie diese auf der Höhe  $y_F$  schneidet. Durch die Möglichkeit einer freien mathematischen Beschreibung der Zahnflankenform als halbe Zahndicke  $x_z$  in Abhängigkeit von der Höhe  $y_z$  ist die Berechnung der Nachgiebigkeit jeder beliebigen Zahnform möglich. Um die Integrale in Gleichung (2.16) im Rahmen einer numerischen Berechnung zu lösen, ist es notwendig, die Geometrie des Zahnes entlang der Höhe zu diskretisieren. Die Nachgiebigkeit eines Zahnes ist gegeben durch [67]

$$w = \frac{F_{ze}}{E b} \cos^2 \alpha' \left( 10,92 \int_0^{y_F} \frac{(y_F - y_z)^2}{(2 x_z)^3} dy_z + 3,1 (1 + 0,294 \tan^2 \alpha') \cdot \int_0^{y_F} \frac{dy_z}{2 x_z} + 5,2 \frac{y_F^2}{b^2} + \frac{y_F}{b} + 1,4 (1 + 0,294 \tan^2 \alpha') \right). \quad (2.16)$$

$w$	in m	Zahnverschiebung	$F_{ze}$	in N	Zahnkraft
$b$	in m	Zahnbreite	$E$	in $\frac{N}{m^2}$	Elastizitätsmodul
$\alpha'$	in rad	Kraftangriffswinkel am Zahn	$y_F$	in m	Kraftangriffshöhe am Zahn
$y_z$	in m	y-Koordinate am Zahn	$x_z$	in m	x-Koordinate am Zahn

Weiterhin liefern WEBER und BANASCHEK [67] mit Gleichung (2.17) einen geschlossenen Ansatz zur Berechnung der HERTZ'schen Abplattung an der Kontaktstelle. Es wird angenommen, dass die an der Zahnflanke eingeleitete Kraft eine Abplattung der Flanken erzeugt. Entsprechend beschreiben  $h_{H,I}$  und  $h_{H,II}$  den Abstand zwischen dem Kraftangriffspunkt auf der Zahnflanke und der Zahnmitte für den Antrieb und den Abtrieb. Die Zahnflanken werden als Zylinderwalzen modelliert. Die Krümmungsradien der Walzen  $r_{H,I}$  und  $r_{H,II}$  hängen von der Krümmung der Evolventen am Kontaktpunkt ab und lassen sich anhand der Evolventenform bestimmen. Die HERTZ'sche Abplattung ist nichtlinear, was sich daran erkennen lässt, dass die Zahnkraft  $F_{ze}$  zusätzlich im Nenner des logarithmischen Terms steht. [67]

$$w_H = \frac{2 F_{ze} (1 - \nu^2)}{\pi E b} \left( \ln \frac{h_{H,I} h_{H,II} b \pi E}{2 F_{ze} \frac{r_{H,I} r_{H,II}}{r_{H,I} + r_{H,II}} (1 - \nu^2)} - \frac{\nu}{1 - \nu} \right) \quad (2.17)$$

$w_H$	in m	HERTZ'sche Abplattung	$F_{ze}$	in N	Zahnkraft
$\nu$	in –	Querkontraktionszahl	$E$	in $\frac{N}{m^2}$	Elastizitätsmodul
$h_{H,I}$	in m	Kraftangriffsabstand, Antrieb	$h_{H,II}$	in m	Kraftangriffsabstand, Abtrieb
$r_{H,I}$	in m	Krümmungsradius, Antrieb	$r_{H,II}$	in m	Krümmungsradius, Abtrieb
$b$	in m	Zahnbreite			

Die Gesamtverschiebung eines Zahnpaars im Eingriff ergibt sich aus der Summe der Zahnverschiebungen der beiden in Kontakt stehenden Zähne und der HERTZ'schen Abplattung am Kontaktpunkt. Die Zahnpaarsteifigkeit – der Kehrwert der Gesamtverschiebung unter gegebener Last – ergibt sich somit zu [67]

$$c_{ze} = \frac{F_{ze}}{w_I + w_{II} + w_H}. \quad (2.18)$$

$c_{ze}$	in $\frac{N}{m}$	Zahnpaarsteifigkeit	$F_{ze}$	in N	Zahnkraft
$w_I$	in m	Zahnverschiebung, Antrieb	$w_{II}$	in m	Zahnverschiebung, Abtrieb
$w_H$	in m	HERTZ'sche Abplattung			

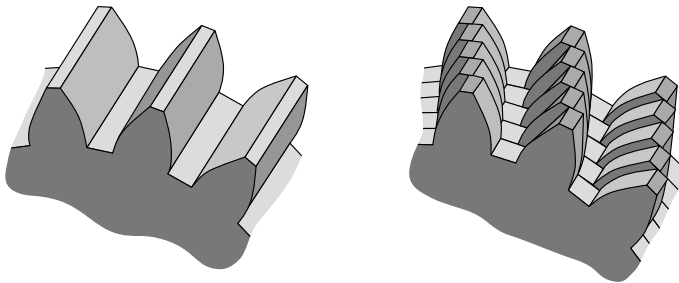
Durch Superposition der Zahnpaarsteifigkeiten  $c_{ze}$  der zum jeweiligen Zeitpunkt im Eingriff befindlichen Zähne ergibt sich die Verzahnungssteifigkeit  $c_z$ . Messungen von WINTER und PODLESNIK [68–70] haben jedoch gezeigt, dass der Berechnungsansatz tendenziell zu hohe Werte für die Verzahnungssteifigkeit  $c_z$  liefert. Ein Grund hierfür könnte die Vernachlässigung von Oberflächenrauheiten sein. Daher wurde ein in der Literatur anerkannter Korrekturfaktor von 0,8 (laut WINTER und PODLESNIK [68–70] streng genommen 0,78) eingeführt, um die Berechnungs-

ergebnisse an die Messergebnisse anzupassen. Die nach WEBER und BANASCHEK [67] errechneten Werte werden daher als *theoretische Verzahnungssteifigkeit*  $c_{z,th}$ , die mit dem Faktor 0,8 korrigierten Werte als *Verzahnungssteifigkeit*  $c_z$  bezeichnet. [19, 55, 68–72]

$$c_z = 0,8 c_{z,th} \quad (2.19)$$

$c_z$	in $\frac{N}{m}$	Verzahnungssteifigkeit	$c_{z,th}$	in $\frac{N}{m}$	theoretische Verzahnungssteifigkeit
-------	------------------	------------------------	------------	------------------	-------------------------------------

Der Berechnungsansatz nach WEBER und BANASCHEK [67] ist in der Literatur weit verbreitet und gilt als Standard für die rechnerische Bestimmung der Verzahnungssteifigkeit von geradverzahnten Stirnrädern [19, 30, 31, 54–56, 67–70, 72–74]. Der Ansatz kommt ebenfalls in kommerzieller Software zum Einsatz [75]. Er kann auf Schrägverzahnungen erweitert werden, indem die Schrägverzahnung aus einer in der Tangentialebene in Scheiben geschnittene und gegeneinander verdrehte Geradverzahnung entwickelt wird, siehe Abbildung 2.14. Durch die fehlende gegenseitige Stützwirkung der Scheiben unterschätzt dieser Ansatz tendenziell die tatsächliche Verzahnungssteifigkeit von Schrägverzahnungen. [19, 25, 43, 56]



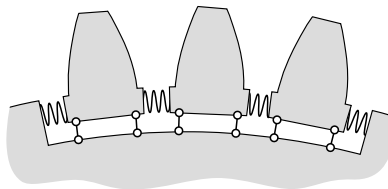
**Abbildung 2.14:** Modellierung einer Schrägverzahnung durch Zerschneiden und Verdrehen einer Geradverzahnung

Die gesamte im Zahneingriff wirkende Kraft verteilt sich proportional zu den Steifigkeiten auf die im Eingriff befindlichen Zahnpaare. Werden die Zahnpaare zur Berechnung der Verzahnungssteifigkeit einer Schrägverzahnung als gegeneinander verdrehte Scheiben betrachtet, so verteilt sich die angreifende Last weiterhin über der Zahnbreite entsprechend der Steifigkeit der im Eingriff befindlichen Zahnscheiben. Detaillierte Informationen zur Lastverteilung in Zahnradgetrieben

---

geben zum Beispiel WIKIDAL [76], WINTER et al. [70], SCHINAGL [77], OTTO [73] und DIN 3990-1 [71].

ZIEGLER [61] stellt einen Ansatz vor, mit dem die Verzahnungssteifigkeit von Schrägverzahnungen genauer berechnet werden kann. Er modelliert den Zahn als eingespannten brettförmigen Balken (statt eines eingespannten Balkens wie bei WEBER und BANASCHEK [67]) und kann daher auch Effekte über die Zahnbreite abbilden. Ein großer Nachteil dieser Methode ist jedoch, dass keine geschlossene Lösung mehr angegeben werden kann, weshalb sich der Ansatz nicht durchsetzen konnte. Jedoch hat ZIEGLER [61] einen wichtigen Effekt beschrieben: die gegenseitige elastische Kopplung benachbarter Zähne auf dem elastischen Radkörper. Eine Belastung eines Zahnes bewirkt neben einer elastischen Verformung desselben auch eine elastische Verformung des Radkörpers. Diese wirkt sich auf die benachbarten Zähne im Sinne einer elastischen Vorverformung aus. Er beschreibt diesen Effekt mit einem *verbesserten Federmodell*, das die elastische Kopplung der Zähne untereinander berücksichtigt, siehe Abbildung 2.15. Die mathematische Beschreibung dieses Effekts beruht jedoch auf mittels experimenteller Simulationen empirisch bestimmten Parametern und gilt nur für einige wenige Zahnradgeometrien. Der Ansatz konnte sich zwar als Berechnungsmodell nicht durchsetzen, spielt aber als qualitativer Erklärungsansatz eine wichtige Rolle. [37, 54, 61]



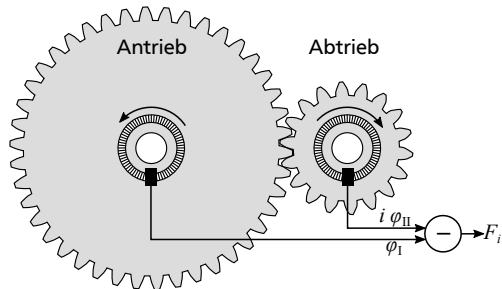
**Abbildung 2.15:** verbessertes Federmodell nach ZIEGLER [61] zur Beschreibung der elastischen Kopplung benachbarter Zähne auf einem gemeinsamen elastischen Radkörper

## 2.4.2 Modellierung der geometrischen Verzahnungsabweichungen

Die Gründe für geometrische Verzahnungsabweichungen sind vielfältig, hängen jedoch hauptsächlich von den Toleranzen bei der Fertigung und der Montage ab. Sie bewirken eine zusätzliche Beschleunigung und Verzögerung der Zahnräder aufgrund der Abweichungen von der idealen Geometrie – also eine zusätzliche *Wegerregung*. Diese Wegerregung kann als Anregungsfunktion bei der Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines Zahnradgetriebes berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 2.4.4 ab S. 26). [15, 31, 54, 56, 58, 78–85]



Obwohl bereits diverse Ansätze zur Simulation des Fertigungsprozesses einer Verzahnung erarbeitet wurden [32, 86], sind die tatsächlichen geometrischen Verzahnungsabweichungen nur sehr begrenzt bereits in der Auslegungsphase prognostizierbar. Für ein vorliegendes Zahnrad oder Zahnradpaar lassen sich jedoch mittels *Einflankenwälzprüfung* die geometrischen Abweichungen entlang der Eingriffslinie – der *Drehwegfehler* – experimentell bestimmen. Der Drehwegfehler ist die Größe, die als Wegerregung unmittelbar zu Schwingungen im Zahneingriff führt. Die Einflankenwälzprüfung wird in VDI/VDE 2608 [87] ausführlich beschrieben und in DIN 21772:2012-07 [88] sowie in DIN 3960 [49] vorgestellt. Bei diesem Prüfverfahren kann entweder der Drehwegfehler einer Zahnradpaarung oder eines einzelnen Zahnrades durch Paarung mit einem praktisch fehlerfreien Zahnrad (*Meisterrad*) ermittelt werden. Die Zahnräder werden auf einen Prüfstand mit definiertem Achsabstand und hoher Steifigkeit montiert. Auf beiden Wellen der Prüfanordnung wird der Drehwinkel hochaufgelöst erfasst. Aus der Differenz zwischen den gemessenen Drehwinkelverhältnissen und dem theoretisch mittels des Übersetzungsverhältnisses  $i$  errechneten Drehwinkelverhältnis lässt sich der Drehwegfehler bestimmen. Die Untersuchung wird dabei quasi-lastfrei durchgeführt, sodass die Zahnflanken zwar permanent in Kontakt bleiben, jedoch praktisch keine elastische Verformung im Zahneingriff stattfindet. Das Prinzip der Einflankenwälzprüfung ist in Abbildung 2.16 schematisch dargestellt. Der gemess-



**Abbildung 2.16:** prinzipieller Messaufbau bei der Einflankenwälzprüfung

sene Drehwegfehler enthält langwellige Anteile, deren Wellenlängen im Bereich ganzer Zahnradumfänge liegen, und kurzwellige Anteile, deren Wellenlängen im Bereich der Strecke eines Zahneingriffes liegen. Während die langwelligen Anteile eine Modulation der Eingriffsgeschwindigkeit bewirken, erzeugen die kurzwelligen Anteile direkte Anregungen mit der Zahneingriffsfrequenz und führen daher zu starker Schwingungs- und Geräuscherregung [21, 29, 49, 87, 88]. Die Amplitude des Drehwegfehlers (Spitze-zu-Spitze-Wert) wird *Einflanken-Wälzabweichung*  $F_i'$  genannt, wobei sich diese in die *langwelligen Anteile* der

---

Einflanken-Wälzabweichung  $f_1'$  und die kurzwelligen Anteile der Einflanken-Wälzabweichung (auch Einflanken-Wälzsprung)  $f_k'$  aufteilen. Anhand von DIN 3963 [89] kann die Verzahnungsqualität auf Basis der Einflanken-Wälzabweichung  $F_1'$  und des Einflanken-Wälzsprungs  $f_k'$  bewertet werden.

Der Vollständigkeit halber sei auf DIN 3961 [60] hingewiesen, in der weitere Prüfverfahren für die Ermittlung von weiteren Verzahnungsabweichungen beschrieben sind. Daraus sind dazu passend mittels DIN 3962, Teile 1 bis 3 [90–92] die Verzahnungsqualitäten bestimmbar.

### 2.4.3 Modellierung der lastbedingten Überdeckungsvergrößerung

Wie in Abschnitt 2.3.3 auf S. 19 beschrieben, führt die elastische Verformung unter Last zu einem frühzeitigen Zahneintritt und einem verspäteten Zahnaustritt – also zu einer Überdeckungsvergrößerung. Der Zahneintritt findet nicht plötzlich, sondern aus Gründen der Vorverformung und der Lastverteilung ab dem ersten Kontakt kontinuierlich statt. BOSCH [56] trifft die Annahme, dass dieser *sanfte Ein- und Austritt* über eine Strecke von 5 bis 8 % einer Eingriffsperiode andauert und interpoliert in diesem Bereich zwischen den Steifigkeiten. NIEMANN et al. [93] beschreiben die von RETTIG [94] empirisch ermittelte Gleichung zur Berechnung der Überdeckungsvergrößerung. Zu einem späteren Zeitpunkt beschreiben NIEMANN et al. [95, 96], basierend auf der Arbeit von BAETHGE [74], dass sich die Überdeckungsvergrößerung auch theoretisch errechnen lässt. Dazu wird die Verformung des Zahnes entlang der Eingriffslinie berechnet und mit dem Abstand der in den Eingriff tretenden Zähne verglichen. Ist der theoretische Abstand der Zähne zueinander kleiner als die Verformung, so berühren sich die Zähne. THOMA [65] leitet exakte Gleichungen zur Berechnung der Überdeckungsvergrößerung her. Das Prinzip der Überdeckungsvergrößerung ist in Abbildung 2.12 auf S. 19 dargestellt.

### 2.4.4 Modellierung der Dynamik von Zahnradgetrieben

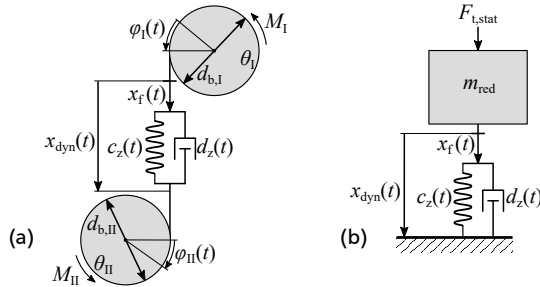
Das Ziel der dynamischen Modellierung ist das Berechnen der dynamischen Zahnkräfte, die im Zahneingriff entstehen. Diese werden über die Radkörper, die Wellen und die Lager in die Gehäusestruktur eingeleitet und von dort schließlich als Luftschall abgestrahlt.

#### Dynamische Modelle

In der Literatur existiert eine Vielzahl an verschiedenen Modellen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Zahnradgetrieben. Die Modelle unterscheiden sich hauptsächlich in der Anzahl an Freiheitsgraden, die davon abhängt, ob zum Beispiel Lagersteifigkeiten, Wellensteifigkeiten und Gehäusesteifigkeiten als Freiheitsgrade bei der Modellierung berücksichtigt werden. Das mit Abstand am weitesten verbreitete Modell ist auch gleichzeitig das einfachste, mit dem sich die

Dynamik von Stirnradgetrieben beschreiben lässt – das *Ein-Masse-Modell*. [19, 21, 25, 27, 30, 31, 36, 38–40, 43, 54–56, 58, 71, 80, 82–84, 97, 98] Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird lediglich auf dieses Modell eingegangen. Informationen zu weiteren Modellen finden sich zum Beispiel in den Arbeiten von ÖZGÜVEN et al. [81] und KORKA [99] sowie in der Veröffentlichung von KÜCÜKAY [79]. Die nachfolgende Herleitung ist den oben genannten Literaturquellen entnommen.

Das Ein-Masse-Modell besteht aus zwei homogenen Zylinderkreisscheiben, wobei deren Durchmesser dem Grundkreisdurchmesser  $d_b$  und deren Breite der Zahnbreite  $b$  der beiden im Eingriff stehenden Zahnräder entspricht. Die beiden Zylinder sind mittels der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit  $c_z(t)$  und der veränderlichen Verzahnungsdämpfung  $d_z(t)$  miteinander verbunden. Zusätzlich wird die Koordinate  $x_f(t)$  in der Verbindungsstrecke eingebracht, um die Wegerregung durch den Drehwegfehler darzustellen. Abbildung 2.17 zeigt das dynamische Modell. Das dargestellte Modell hat zwei Freiheitsgrade ( $\varphi_I(t)$  und  $\varphi_{II}(t)$ ) und



**Abbildung 2.17:** Ein-Masse-Modell zur Berechnung des dynamischen Verhaltens einer Stirnradpaarung (a) und als Vereinfachung zum Einmassenschwinger (b)

daher auch zwei Eigenwerte. Einer der Eigenwerte gehört jedoch zu einer Mode, die aus einer freien Drehung der Zahnräder ohne Relativbewegung, also ohne dynamische Zahnkräfte, besteht. In der Literatur wird daher die translatorische Relativkoordinate  $x_{dyn}(t)$  für den Schwingweg eingeführt, um das Modell auf einen Freiheitsgrad zu reduzieren

$$x_{dyn}(t) = \varphi_{II} \frac{d_{b,II}}{2} - \varphi_I \frac{d_{b,I}}{2}. \quad (2.20)$$

$x_{dyn}$	in m	Schwingweg	$t$	in s	Zeit
$\varphi_I$	in rad	Drehwinkel, Antrieb	$d_{b,I}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Antrieb
$\varphi_{II}$	in rad	Drehwinkel, Abtrieb	$d_{b,II}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Abtrieb

Weiterhin lassen sich die Massenträgheitsmomente  $\theta_I$  und  $\theta_{II}$ , bestehend aus den Massen der Zahnräder und gegebenenfalls weiterer fest angebundener Elemente, zu einer reduzierten Ersatzmasse  $m_{\text{red}}$  zusammenführen

$$m_{\text{red}} = \frac{4 \theta_I \theta_{II}}{\theta_I d_{b,II}^2 + \theta_{II} d_{b,I}^2}. \quad (2.21)$$

$\theta_I$	in $\text{kg m}^2$	Massenträgheitsmoment, Antrieb	$\theta_{II}$	in $\text{kg m}^2$	Massenträgheitsmoment, Abtrieb
$d_{b,I}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Antrieb	$d_{b,II}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Abtrieb
$m_{\text{red}}$	in kg	reduzierte Masse			

Mit diesen Umformungen entspricht das Modell einem Einmassenschwinger nach Abbildung 2.17 (b), wodurch sich auch der Name *Ein-Masse-Modell* erklärt. Die Bewegungsgleichung des Ein-Masse-Modells lautet

$$m_{\text{red}} \ddot{x}_{\text{dyn}}(t) + d_z(t) (\dot{x}_{\text{dyn}}(t) + \dot{x}_f(t)) + c_z(t) (x_{\text{dyn}}(t) + x_f(t)) = F_{t,\text{stat}}. \quad (2.22)$$

$m_{\text{red}}$	in kg	reduzierte Masse	$\ddot{x}_{\text{dyn}}$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Schwingbeschleunigung
$t$	in s	Zeit	$d_z$	in $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	Verzahnungsdämpfungskonstante
$\dot{x}_{\text{dyn}}$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schwingschnelle	$\dot{x}_f$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Ableitung des Drehwegfehlers
$c_z$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Verzahnungssteifigkeit	$x_{\text{dyn}}$	in m	Schwingweg
$x_f$	in m	Drehwegfehler	$F_{t,\text{stat}}$	in N	statische Vorlast

Die Verzahnungsdämpfungskonstante ergibt sich zu

$$d_z = 2 \sqrt{m_{\text{red}} c_z} D_z. \quad (2.23)$$

$d_z$	in $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	Verzahnungsdämpfungskonstante	$m_{\text{red}}$	in kg	reduzierte Masse
$D_z$	in —	Verzahnungsdämpfungsgrad	$c_z$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Verzahnungssteifigkeit

### Bestimmung der Verzahnungsdämpfung

Der Verzahnungsdämpfungsgrad  $D_z$  hängt von der Art der Reibung der Zahnflanken (trocken, Mischreibung, hydrodynamisch), dem Strömungswiderstand des Schmiermittels, den Lagerreibungen und der Oberflächenrauheit der Zahnflanken ab. Alle diese Anteile werden zu einem über dem Eingriff konstanten Zahnpaardämpfungsgrad  $D_{ze}$  kombiniert, der für ein im Eingriff befindliches Zahnpaar gilt. Der Verzahnungsdämpfungsgrad  $D_z$  ergibt sich durch die Summe der Zahnpaardämpfungsgrade  $D_{ze}$  aller im Eingriff befindlichen Zahnpaare. Analog der

Verzahnungssteifigkeit schwankt somit auch der Verzahnungsdämpfungsgrad  $D_z$ . Die Verzahnungsdämpfung wird in der Regel als geschwindigkeitsproportionale (viskose) Dämpfung modelliert. [19, 55, 56, 98]

Die Zahnpaardämpfung ist experimentell nur indirekt zugänglich, denn die klassischen Verfahren erlauben eine Bestimmung nur im Stand. Jedoch ist die Dämpfung im Stand nicht repräsentativ für die Verhältnisse im Lauf des Zahnradgetriebes. Eine experimentelle Bestimmung der Verzahnungsdämpfung ist somit nur mittels einer Betriebsmessung der Verzahnungskräfte rund um den Bereich der Verzahnungsresonanz möglich. [55] Es herrscht in der Literatur Uneinigkeit darüber, wie sich die Zahnpaardämpfung zum Beispiel mit der Drehzahl ändert. Während BOSCH [56] einen degressiven Verlauf der Dämpfung mit steigender Drehzahl beschreibt, ermittelt GERBER [55] einen progressiven Verlauf, wobei zweite Annahme in der Literatur stärker verbreitet ist [31, 98]. Gleichung (2.24) zeigt die empirisch ermittelte Näherungsgleichung nach GERBER [55] zur Bestimmung des Zahnpaardämpfungsgrades (Zahlenwertgleichung; Faktoren  $10^3$  und  $10^{-3}$  zur Anpassung an SI-Einheiten). GERBER [55] schränkt den Gültigkeitsbereich seiner Gleichung auf Achsabstände  $a_w$  zwischen 0,05 m und 0,25 m sowie auf Umfangsgeschwindigkeiten  $v_t$  zwischen  $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  ein.

$$D_{ze} = 2,2 \cdot 10^4 (a_w \cdot 10^3 - 23)^{0,55} \cdot (\eta \cdot 10^{-3} + 39)^{0,27} \cdot (v_t - 5)^{0,53} \quad (2.24)$$

$D_{ze}$	in	—	Zahnpaardämpfungsgrad	$a_w$	in	m	Achsabstand
$\eta$	in	Pa·s	dynamische Viskosität des Öls	$v_t$	in	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Umfangsgeschwindigkeit

Auch über den Betrag der Zahnpaardämpfungsgrade herrscht in der Literatur Uneinigkeit. LINKE [19] fasst die Angaben aus verschiedenen Quellen zusammen und nennt für den Zahnpaardämpfungsgrad  $D_{ze}$  Werte zwischen 0,01 und 0,4, wobei der Durchschnitt bei etwa 0,1 liegt. In der Praxis wird der Wert des Zahnpaardämpfungsgrades mittels Abgleich zwischen Berechnung und experimenteller Simulation empirisch ermittelt. LINKE [19] postuliert, dass der Wert des Zahnpaardämpfungsgrades bei der Schwingungsberechnung unkritisch ist und selbst ungenaue Annahmen prinzipiell nicht zu stark fehlerbehafteten Ergebnissen führen können [19].

### Numerische Lösung der Differenzialgleichung

Die Bewegungsgleichung nach Gleichung (2.22) ist eine *parametererregte Differenzialgleichung*, da die Verzahnungssteifigkeit  $c_z(t)$ , die Verzahnungsdämpfung  $d_z(t)$  und der Drehwegfehler  $x_f(t)$  nicht konstant, sondern zeitlich veränderlich sind. Es existieren keine geschlossenen Lösungen, weswegen nur numerische Näherungsverfahren in Betracht kommen. Standardmäßig wird die numerische Zeitschrittintegration mittels Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung verwendet. Die

Lösung der Differenzialgleichung kann sehr zeitaufwändig sein, insbesondere wenn durch die schwankende Verzahnungssteifigkeit und die schwankende Verzahnungsdämpfung starke Sprünge auftreten, was sehr kleine Zeitschritte bei der Lösung der Gleichung notwendig macht. [30, 31, 54, 55]

### Krafterregung als vereinfachter Ansatz

Trotz des einfachen Ein-Masse-Modells mit nur einem Freiheitsgrad kann es notwendig sein, die Berechnung zu beschleunigen, zum Beispiel wenn viele Varianten in kurzer Zeit verglichen werden sollen oder wenn das Schwingungsverhalten bei einem Drehzahlhochlauf über mehrere Sekunden berechnet wird. In der Literatur ist für diese Fälle ein vereinfachter Ansatz zur Berechnung der dynamischen Zahnkraft  $F_{\text{dyn}}$  bekannt – die *Krafterregung*. Diese geht davon aus, dass das Zahnradgetriebe mit so hoher Drehzahl betrieben wird, dass die Zahnräder keine relativen Ausgleichsbewegungen mehr durchführen können (Grenzzustand  $n \rightarrow \infty$ ). Alle relativen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten der Zahnräder werden null. Eliminieren aller Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in Gleichung (2.22) führt auf die Krafterregung [19, 30, 31, 57]

$$F_{\text{dyn}}(t) = c_z(t)(x_{\text{stat}} + x_f(t)). \quad (2.25)$$

$F_{\text{dyn}}$	in N	dynamische Zahnkraft	$t$	in s	Zeit
$c_z$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Verzahnungssteifigkeit	$x_{\text{stat}}$	in m	statische Auslenkung
$x_f$	in m	Drehwegfehler			

GEISER [57] erweitert den Ansatz der Krafterregung, indem er die Vergrößerungsfunktion für ein linearisiertes Zahnrad-Schwingungsmodell mit konstanten (gemittelten) Parametern herleitet, siehe Gleichung (2.26) (hier erweitert als komplexe Darstellung). Durch eine Multiplikation des Spektrums der Krafterregung mit der Vergrößerungsfunktion im Frequenzbereich kann die Schwingungsantwort des parametererregten Ein-Masse-Modells angenähert werden. Die Lösung der Differenzialgleichung entspricht dann jedoch lediglich dem Anteil der partikulären Lösungen ohne den homogenen Lösungsanteil. Das Ergebnis spiegelt somit nur den eingeschwungenen Zustand ohne das transiente Verhalten wider. [57]

$$\underline{V}(f, D_z) = \frac{(f/f_0)^2}{1 - (f/f_0)^2 + i 2 \overline{D_z} (f/f_0)} \quad \text{mit } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\overline{c_z}}{m_{\text{red}}}} \quad (2.26)$$

$V$	in –	Vergrößerungsfunktion	$f$	in Hz	Frequenz
$D_z$	in –	Verzahnungsdämpfungsgrad	$f_0$	in Hz	Eigenfrequenz
$c_z$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Verzahnungssteifigkeit	$m_{\text{red}}$	in kg	reduzierte Masse

## 2.5 Geräuschminderungsmaßnahmen an Zahnradgetrieben

BÖS und HANSELKA [100] strukturieren Geräuschminderungsmaßnahmen von Maschinen nach aktiven und passiven sowie nach primären und sekundären Maßnahmen. *Primäre Maßnahmen* greifen in der Maschine selbst an und verringern oder vermeiden die Anregung, Weiterleitung und Abstrahlung von Körperschall. Sie sind in der Maschinenakustik prinzipiell zu bevorzugen. *Sekundäre Maßnahmen* mindern nachträglich den bereits abgestrahlten Luftschall, zum Beispiel mittels Dämpfungsmaterialien. Beide Maßnahmengruppen lassen sich wiederum in aktive und passive Maßnahmen unterteilen. Während *passive Maßnahmen* ohne weitere Energiezufuhr auskommen, bestehen *aktive Maßnahmen* zur Geräuschminderung in der Regel aus Sensoren, Elektronikkomponenten sowie Aktoren und benötigen daher eine externe Energieversorgung. [100] Tabelle 2.1 gibt einige Beispiele. Obschon alle Prinzipien auf Zahnradgetriebe angewendet werden können, beschränkt sich diese Arbeit auf passive Primärmaßnahmen.

**Tabelle 2.1:** primäre und sekundäre sowie aktive und passive Geräuschminderungsmaßnahmen an Maschinen

	primär	sekundär
passiv	Anregungskräfte verringern, Versteifung, Entkopplung, Dämpfung, Tilgung	Kapseln, Schalldämpfung, persönlicher Schallschutz
aktiv	active vibration control	active noise cancelling

### 2.5.1 Ganzzahlige Gesamtüberdeckung

Der wichtigste geometrische Einflussfaktor in Bezug auf das Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben ist die Gesamtüberdeckung  $\varepsilon_\gamma$ . Sie gibt die Anzahl an Zahnpaaren an, die sich im zeitlichen Mittel im Eingriff befinden. Wird die Gesamtüberdeckung ganzzahlig ausgelegt, so werden die Schwankungen der Verzahnungssteifigkeit – der Hauptanregungsmechanismus – minimiert, da immer ein weiteres Zahnpaar neu in den Zahneingriff eintritt, während ein anderes Zahnpaar austritt. [14–20, 22]

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um die Gesamtüberdeckung einer Verzahnung zu beeinflussen. Eine Möglichkeit ist der Übergang auf eine Schrägverzahnung. Durch den Schrägungswinkel  $\beta$  wird die Dauer des Zahneingriffes gespreizt, wodurch sich die Gesamtüberdeckung in weiten Bereichen einstellen lässt, siehe Abbildung 2.11 auf S. 18. Gegenüber einer Geradverzahnung führt eine Schrägverzahnung jedoch zu Axialkräften, die von der Lagerung aufgenommen werden

---

müssen. *Pfeilverzahnungen* können zwar die Axialkräfte kompensieren, sind jedoch ungleich aufwändiger in der Fertigung. [14–20, 22, 30, 54] Eine weitere Möglichkeit, die Gesamtüberdeckung zu beeinflussen, ist das Anpassen der Zahnhöhen. In der Regel werden die Zahnhöhen vergrößert – man spricht von einer *Hochverzahnung*. Durch die vergrößerte Zahnhöhe kommen die Zahnpaare früher in den Eingriff und treten erst später wieder aus. Die Eingriffsdauer der Zahnpaare – und damit die Gesamtüberdeckung – steigt. Eine Hochverzahnung hat jedoch den Nachteil, dass die Zahnköpfe spitzer werden und es so unter Umständen schneller zu Schäden kommt. [19, 23] Weiterhin kann eine *höhere Zähnezahl* gewählt werden, um die Gesamtüberdeckung zu erhöhen [101]. Ein anderer Ansatz ist das *Phasing*. Dabei werden zwei gleiche Zahnradpaare mit einem bestimmten Phasenversatz des Drehwinkels parallel geschaltet, um die jeweiligen Schwankungen der Verzahnungssteifigkeiten wechselseitig zu kompensieren. [102–104]

### 2.5.2 Verzahnungskorrekturen

Insbesondere um die lastbedingten elastischen Verformungen im Zahneingriff zu kompensieren, werden Verzahnungskorrekturen durchgeführt. Dazu zählen zum Beispiel *Kopfrücknahmen* und *Fußfreischnitte*. Diese Korrekturen führen einerseits zu einer verringerten Schwingungs- und Geräuschanregung, andererseits zur Sicherstellung der Tragfähigkeit. Auch über der Zahnbreite können Verzahnungskorrekturen zur Minderung der Anregung eingesetzt werden (zum Beispiel *Breitenballigkeiten*). In der Regel sind die Verzahnungskorrekturen für einen bestimmten Lastpunkt ausgelegt und können daher unter Umständen zu einer erhöhten Schwingungs- und Geräuschanregung an anderen Betriebspunkten führen. Informationen zur genauen Auslegung von Verzahnungskorrekturen können der Literatur entnommen werden. [16, 19, 25, 30, 31]

Eine besondere Form der Verzahnungskorrektur sind *periodische Profilkorrekturen*. Dabei wird der zu erwartende Schwingweg einer unkorrigierten Verzahnung bei einem spezifischen Betriebspunkt (Last und Drehzahl) gegenphasig auf die Zahnflanke geschliffen, was theoretisch zu einem vollständig schwingungsfreien Lauf führen kann. Neben der extrem hohen Genauigkeitsanforderung an die Fertigung (Abweichungen unter 1  $\mu\text{m}$ ) limitiert auch die Festlegung auf einen spezifischen Betriebspunkt den Einsatzbereich von periodischen Profilkorrekturen. [30, 31, 105]

### 2.5.3 Erhöhung der Dämpfung

Ein allgemeines Werkzeug der Geräuschkürzung ist die Erhöhung der Dämpfung. Bei Zahnradgetrieben wird in der Praxis oft der Ölfüllstand angepasst oder ein Öl mit höherer Viskosität verwendet, um die Dämpfung im Zahneingriff (und



---

indirekt die Dämpfung des Gehäuses) zu erhöhen. [14, 15, 55] Weiterhin können Werkstoffe mit höherer Materialdämpfung genutzt werden [53, 106–109].

#### **2.5.4 Verschiebung des Betriebspunktes**

OPITZ [59] stellt fest, dass der Schalldruckpegel bei Lastverdoppelung um etwa 3 dB, bei Drehzahlverdoppelung um etwa 6 dB ansteigt. LINKE [19] bestätigt diese Tendenz. Eine geschickte Verschiebung des Betriebspunktes kann somit eine Geräuschminderung bewirken. In der Praxis lässt sich der Betriebspunkt jedoch nur selten verschieben. Ein Beispiel, bei dem der Betriebspunkt zugunsten des Geräusches angepasst wird, ist die Windkraft. Einige Windkraftanlagen werden nachts in einen schallreduzierten Betriebsmodus versetzt, um das Geräusch – insbesondere das Getriebegeräusch – gemäß den gelten Lärmschutzverordnungen (TA Lärm [110]) zu reduzieren. [111]

#### **2.5.5 Erhöhung der Verzahnungsqualität**

Verzahnungsabweichungen können zu sehr starken Schwingungs- und Geräusch-anregungen führen, weshalb die Erhöhung der Verzahnungsqualität (geringere Abweichungen) ein sehr effektives Mittel der Geräuschreduktion von Zahnradgetrieben ist [14, 15, 30, 36, 54, 56, 61, 64]. Aktuelle Forschungen zeigen jedoch, dass besonders präzise gefertigte Verzahnungen wiederum akustische Nachteile mit sich bringen können. KNECHT et al. [34] untersuchen Kegelräder, die mittels Verzahnungsschleifen und Verzahnungsläppen gefertigt wurden, wobei die geläppte Verzahnung zufällig verteilte Teilungsfehler auf mikroskopischer Ebene aufweist. KNECHT et al. [34] stellen fest, dass die geläppte Verzahnung weniger tonhaltige Geräuschanteile anregt, wodurch ein weniger lästiges Geräusch entsteht – obwohl der Summenschalldruckpegel leicht ansteigt. Zu ähnlichen Ergebnissen kommt STRUNK [33], der die Verzahnungsabweichungen in Kegelräder gezielt einbringt. KNECHT et al. [34], BRECHER et al. [13] und MORITZ et al. [47, 112, 113] schlussfolgern, dass eine Senkung der physikalischen Anregung alleine oftmals nicht zielführend ist und stattdessen eine psychoakustische Bewertung von Getriebegeräuschen anzustreben ist.

### **2.6 Psychoakustik**

Die Psychoakustik widmet sich der Aufgabe, den Zusammenhang zwischen dem physikalisch messbaren Schall und der subjektiven Wahrnehmung des Menschen zu beschreiben. Eine rein physikalische Beschreibung des Schalls gilt als unzureichend, insbesondere in Bezug auf die Geräuschqualität und die damit verbundene Wahrnehmung der Wertigkeit eines Produktes. [6, 47, 53, 112, 114–116]

---

## 2.6.1 Etablierte psychoakustische Metriken

Einige psychoakustische Metriken, wie zum Beispiel die *Lautheit*, die *Schärfe* und die *Rauigkeit*, haben sich etabliert, um bestimmte Attribute des Geräusches anhand von Schalldrucksignalen objektiv zu berechnen. Die Metriken sind größtenteils anhand von Hörversuchen abgeleitet. Es besteht der Konsens, dass diese Metriken im Allgemeinen eine gute Übereinstimmung mit subjektiven Bewertungen aufweisen. Klassischerweise werden die psychoakustischen Metriken auf Luftschallsignale angewendet. MORITZ et al. [47, 112, 113] und BRECHER et al. [117] zeigen, dass sie unter Umständen auch auf Körperschallsignale anwendbar sind, um den Aufwand der experimentellen Ermittlung der Signale zu minimieren.

### Lautheit

Die Lautheit beschreibt die subjektiv wahrgenommene Lautstärke eines Geräusches und ist abhängig von dessen Schalldruck, Frequenz, zeitlichem Verlauf und Bandbreite. Wird die Bandbreite eines Geräusches erhöht, so ändert sich die wahrgenommene Lautheit erst dann, wenn eine bestimmte Bandbreite (*kritische Bandbreite*) überschritten ist. Weiterhin berücksichtigt die Lautheit Maskierungseffekte. Sie wird in der Einheit Sone angegeben, wobei der Wert von 1 sone als die Lautheit eines Sinustons bei der Frequenz von 1 kHz und einem Schalldruck von 40 dB definiert ist. Die Lautheit ist in DIN 45631 [118] und DIN 45631/A1 [119] genormt. Geräusche mit hoher Lautheit werden allgemein als unangenehm empfunden, sofern es sich um unerwünschte Geräusche handelt. [6, 29, 114–116, 120, 121]

### Schärfe

Die Schärfe beschreibt eine Empfindung, die bei Geräuschen mit ausgeprägten hochfrequenten Anteilen – besonders stark oberhalb von etwa 4 kHz – auftritt. Je stärker diese Anteile im Verhältnis zu niederfrequenten Anteilen auftreten, desto stärker ist die Schärfewahrnehmung. Die Einheit der Schärfe ist Acum (lat. scharf), wobei als Referenzschall für 1 acum ein Schmalbandrauschen um 1 kHz (920 Hz–1080 Hz) mit einem Schalldruckpegel von 60 dB dient. Es existieren drei etablierte Ansätze zur Berechnung der Schärfe. Der Ansatz nach VON BISMARCK und der Ansatz nach DIN 45692 bewerten die Schärfe eines Geräusches unabhängig von der Lautheit und liefern aufgrund der sehr ähnlichen Berechnungsweise in der Praxis auch nahezu gleiche Berechnungsergebnisse. Der Ansatz nach AURES unterscheidet sich von den beiden anderen Ansätzen dadurch, dass er die Zunahme der Schärfe bei zunehmender Lautheit des Geräusches berücksichtigt. In Hörversuchen konnte dieser Effekt zwar bestätigt werden, wird jedoch als vernachlässigbar gering beschrieben. Geräusche mit hoher Schärfe gelten allgemein als unangenehm. [6, 29, 114–116, 121, 122]

---

## Rauigkeit

Die Rauigkeit beschreibt den Geräuscheindruck, der entsteht, wenn die Frequenzen zweier Töne so dicht beieinander liegen, dass eine Amplitudenmodulation entsteht. Der Rauigkeitseindruck beginnt bei Modulationsfrequenzen oberhalb von etwa 20 Hz, endet, wenn die beiden Töne unabhängig voneinander wahrnehmbar sind und hat seinen Schwerpunkt bei der Modulationsfrequenz von 70 Hz. Er hängt hauptsächlich von der Trägerfrequenz, der Modulationsfrequenz und dem Modulationsgrad ab, weniger jedoch von der Lautheit. Die Rauigkeit wird in der Einheit Asper (lat. rau) angegeben, wobei 1 asper mit dem Referenzschall eines mit 70 Hz amplitudenmodulierten 1 kHz-Tons mit dem Modulationsgrad von 1 bei einem Schalldruck von 60 dB definiert ist. Geräusche mit hoher Rauigkeit können – je nach persönlicher Erwartungshaltung – als angenehm oder unangenehm empfunden werden. [6, 29, 114–116, 121]

## Schwankungsstärke

Ähnlich wie die Rauigkeit beschreibt die Schwankungsstärke einen Geräuscheindruck, der durch Modulationen entsteht – jedoch bei Modulationsfrequenzen unterhalb von 20 Hz. Bei diesen Modulationsfrequenzen kann das menschliche Gehör die Lautstärkeschwankungen wahrnehmen, was zu dem schwankenden Geräuscheindruck führt. Der stärkste Geräuscheindruck der Schwankungsstärke wird bei einer Modulationsfrequenz von 4 Hz bei einem Modulationsgrad von 1 erreicht. Die Schwankungsstärke wird in der Einheit Vacil (vacillare von lat. schwanken) angegeben, wobei der Referenzschall für 1 vacil definiert ist als ein 1 kHz-Ton, der mit einer Modulationsfrequenz von 4 Hz und einem Modulationsgrad von 1 amplitudenmoduliert ist und einen Schalldruckpegel von 60 dB aufweist. Geräusche mit hoher Schwankungsstärke werden allgemein als unangenehm empfunden. [6, 29, 114–116, 121]

## Tonhaltigkeit

Die Tonhaltigkeit (auch *Tonalität* oder *Klanghaftigkeit*) bewertet, wie stark einzelne Töne aus einem Geräusch hervortreten. DIN 45645-2 [123] nutzt zur Bewertung tonhaltiger Geräusche am Arbeitsplatz einen Tonzuschlag von bis zu 6 dB, welcher durch einen Sachverständigen je nach Informationsgehalt und Dominanz der tonhaltigen Geräuschanteile vergeben wird [124]. DIN 45681 [125] berechnet die Tonhaltigkeit, indem sie die Pegeldifferenz zwischen einem hervortretenden Ton und dem Hintergrundgeräusch im Frequenzspektrum (*prominence ratio*) ermittelt. Entsprechend dieser Differenz wird ebenfalls ein Tonzuschlag von bis zu 6 dB auf den gemessenen Summenschalldruckpegel addiert, um der besonders störenden Wirkung von Geräuschen mit stark tonhaltigen Anteilen Rechnung zu tragen. Beim Ansatz nach AURES wird ebenfalls die Pegeldifferenz zwischen einem Ton und dem Hintergrundgeräusch als Maß zur Bewertung der Tonhaltigkeit genutzt,

---

jedoch um Verdeckungsphänomene, die Bandbreite und in Abhängigkeit von der Frequenz korrigiert. Die Tonhaltigkeit wird in tu (tonality unit) angegeben, wobei ein 1 kHz-Ton bei 60 dB als Referenzschall zur Erzeugung einer Tonhaltigkeit von 1 tu dient. Geräusche mit hoher Tonhaltigkeit gelten als äußerst unangenehm und weisen eine außerordentliche Störwirkung auf, selbst bei geringen Schalldruckpegeln. [6, 29, 45, 114, 121, 125–128]

### Tonheit

Die Tonheit (auch *Verhältnistonhöhe*) entspricht der wahrgenommenen Tonhöhe eines Geräusches. Nicht nur bei Tönen, sondern auch bei rauschartigen Geräuschen können Tonhöhen wahrgenommen werden. Die Tonheit wird in der Einheit Bark angegeben und steigt nicht linear mit der physikalischen Frequenz eines Tons an. ZWICKER et al. [129] geben den Zusammenhang in einer Gleichung an: [114, 116, 126, 130]

$$Z = 13 \arctan(0,76 f) + 3,5 \arctan\left(\frac{f}{7,5}\right)^2. \quad (2.27)$$

Z	in bark	Tonheit	f	in Hz	Frequenz
---	---------	---------	---	-------	----------

Geräusche werden mit zunehmender Tonheit, also mit zunehmender wahrgenommener Tonhöhe, allgemein als unangenehmer empfunden [15, 116, 131].

### 2.6.2 Psychoakustische Lästigkeit

Die Lästigkeit beschreibt, wie sehr ein Geräusch subjektiv als lästig wahrgenommen wird. Diese Wahrnehmung kann interindividuell sehr unterschiedlich ausfallen und wird zusätzlich zu den akustischen Eigenschaften des Geräusches auch in großem Maße von der persönlichen Einstellung gegenüber dem Geräusch, der Tageszeit und der aktuellen emotionalen Lage beeinflusst. Aus akustischer Sicht ist es außerordentlich reizvoll, die Lästigkeit eines Geräusches aus einem gegebenen Schalldrucksignal errechnen zu können. Dementsprechend gibt es viele Ansätze, eine solche Berechnungsgleichung aufzustellen – meistens aufgebaut aus einer Kombination der etablierten psychoakustischen Metriken, basierend auf den Ergebnissen von Hörversuchen, durchgeführt mit einer bestimmten Geräuschart. Aufgrund der Vielzahl an verfügbaren Lästigkeitsmetriken wird im Folgenden nur eine Auswahl derer vorgestellt. [10, 15, 29, 45, 113, 114, 121, 127, 132]

#### Psychoacoustic annoyance nach FASTL und ZWICKER

Die bekannteste Lästigkeitsmetrik stammt von FASTL und ZWICKER [115]. Die *psychoacoustic annoyance* basiert auf den Ergebnissen von Hörversuchen und wurde ursprünglich zur Bewertung der Lästigkeit von Verbrennungsmotoren entwickelt.

---

Sie wird von der Lautheit dominiert, wobei auch hohe Werte der Schärfe, der Schwankungsstärke und der Rauigkeit zu einer hohen psychoacoustic annoyance führen. Die Tonhaltigkeit bleibt jedoch unberücksichtigt. [114–116] DI et al. [133] erweitern den Ansatz von FASTL und ZWICKER [115] um einen Tonhaltigkeitsanteil, um dessen lästigkeitssteigernde Wirkung zu berücksichtigen.

### **AVL engine annoyance index**

Der AVL engine annoyance index wurde zur Bewertung der Lästigkeit des Geräusches von Verbrennungsmotoren entwickelt. Die genaue Gleichung zur Berechnung des *AVL engine annoyance index* ist in der Literatur nicht veröffentlicht, jedoch setzt sie sich zusammen aus der Lautheit, der Schärfe, der Impulshaftigkeit (das Auftreten kurzzeitiger, hervorstechender Geräuschanteile) und der Periodizität (ähnlich der Tonheit). [45, 53, 134–136]

### **Lästigkeit von Zahnradgetrieben nach SCHLITTENLACHER**

SCHLITTENLACHER et al. [10, 113, 132] haben auf Basis von Hörversuchen eine Metrik zur Bewertung der Lästigkeit des Geräusches von Zahnradgetrieben entwickelt. Sie stellen im Rahmen von Hörversuchen eine Korrelation zwischen der Lästigkeit und den Attributen laut, scharf, heulend und tonal fest. In die Berechnungsgleichung der Lästigkeit von Zahnradgetrieben nach SCHLITTENLACHER et al. gehen lediglich die Lautheit und die Schärfe ein. [10, 113, 132]

### **Zusammenfassung der Parameter mit Einfluss auf die Lästigkeit**

Aus der Literatur ergibt sich somit ein Gesamtbild, wonach ein hoher Wert für die Lästigkeit eines Geräusches in der Regel durch hohe Werte der folgenden psychoakustischen Metriken entsteht:

- Lautheit
- Tonhaltigkeit
- Schärfe
- Schwankungsstärke
- Tonheit
- (Rauigkeit, je nach Literaturquelle)

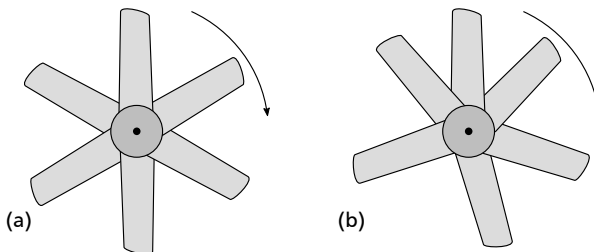
## **2.7 Geräuschminderung durch ungleichmäßige Anregung**

In verschiedenen Bereichen der Technik existiert eine Geräuschminderungsmaßnahme, die gezielt auf die Reduktion von tonhaltigen Geräuschanteilen abzielt. Da diese tonhaltigen Geräuschanteile besonders lästig sind und eine hohe Störwirkung aufweisen, bewirkt deren Minderung eine deutliche Verbesserung im Bereich der Qualitätswahrnehmung und des Komforts. Das Grundprinzip dieser Geräuschminderungsmaßnahme basiert darauf, streng regelmäßige Anregungsmechanismen (zum Beispiel Geräuschregungen durch regelmäßig angeordnete

Lüfterschaufeln) durch ein gezieltes Einbringen von Unregelmäßigkeiten in ihrer Periodizität zu stören. Der Charakter des durch diese sonst streng periodischen Anregungsmechanismen erzeugten Geräusche ändert sich durch die unregelmäßige Ausgestaltung weg von einem tonhaltigen hin zu einem eher rauschartigen Geräusch. Die Geräuschminderung ergibt sich aus der geringeren Lästigkeit und Störwirkung von rauschartigen gegenüber tonhaltigen Geräuschen. [45, 128, 137–142] Im Folgenden werden einige Beispiele vorgestellt, bei denen die Geräuschminderung durch eine unregelmäßige Ausgestaltung von Anregungen erzielt wird.

### 2.7.1 Unregelmäßige Schaufelverteilungen bei Lüftern

Bei Lüftern mit regelmäßiger Schaufelaufteilung entsteht durch die periodische Luftschallerregung ein tonhaltiges Geräusch – der *Drehklang*. In der Literatur existieren viele Ansätze, den Drehklang mittels unregelmäßiger Schaufelanordnungen zu unterdrücken und stattdessen ein rauschartiges Geräusch zu erzeugen. [15, 45, 127, 128, 137, 138, 142–146] Abbildung 2.18 zeigt einen regelmäßig und einen unregelmäßig aufgebauten Lüfter. Zwar stellt LEWY [145] fest, dass die



**Abbildung 2.18:** regelmäßig (a) und unregelmäßig (b) aufgebauter Lüfter zur Minderung tonhaltiger Geräuschkomponenten

exakt regelmäßige Anordnung den akustisch schlimmsten Fall darstellt und jede unregelmäßige Ausführung eine Verbesserung bringt, jedoch hängt der Erfolg der Minderung der tonhaltigen Geräuschkomponenten entscheidend von der Wahl der unregelmäßigen Positionen der Lüfterschaufeln ab. Da jede Lüfterschaufel in ihrer Position individuell verändert werden kann, entsteht eine schwer zu beherrschende Variantenvielfalt. Nachfolgend werden die drei am weitesten verbreiteten Ansätze vorgestellt.

Der bekannteste Ansatz stammt von MELLIN und SOVRAN [128] und umfasst eine inkrementelle Modulation der Positionen der Lüfterschaufeln. Es wird ein Winkelinkrement eingeführt, um welches die Lüfterschaufeln in aufsteigender Reihenfolge verschoben werden. MELLIN und SOVRAN [128] errechnen mit diesem

Ansatz Winkel für die optimalen Schaufelabstände zur Minimierung der tonhaltigen Geräuschanteile. Sie geben konkrete Werte für Lüfter mit unterschiedlichen Schaufelanzahlen an. Diese Werte gelten in der Literatur als geeignete Startwerte für die unregelmäßige Gestaltung von Anregungen in verschiedenen Bereichen [127].

Ein zweiter weit verbreiteter Ansatz ist die Sinus-Phasenmodulation zur Bestimmung der Position der Lüfterschaufeln. Die Berechnungsgleichung ist gegeben durch

$$\varphi'_{L,j} = \varphi_{L,j} + \Delta\varphi \sin(n_{\text{wdh}} \varphi_{L,j}). \quad (2.28)$$

$\varphi'_{L,j}$	in rad	unregelmäßiger Schaufelwinkel	$\Delta\varphi$	in rad	Modulationsinkrement
$\varphi_{L,j}$	in rad	regelmäßiger Schaufelwinkel	$n_{\text{wdh}}$	in –	Anzahl der Wiederholungen

Mittels des Modulationsinkrementes  $\Delta\varphi$  lässt sich der gesamte unregelmäßige Aufbau des Lüfters durch nur einen einzigen Skalar definieren. Über die Anzahl der Wiederholungen  $n_{\text{wdh}}$  lässt sich einstellen, wie oft sich ein unregelmäßig aufgebaute Abschnitt entlang des Umfangs wiederholt. Nimmt  $n_{\text{wdh}}$  Werte von zwei und größer an, so ist der unregelmäßig aufgebaute Lüfter aufgrund der Symmetrie immer ausgewuchtet. [127, 137, 143, 146, 147]

Durch die mittlerweile zur Verfügung stehenden Rechnerkapazitäten werden auch randomisierte Verfahren, bei denen viele Varianten miteinander verglichen werden, möglich. JIANG et al. [146] errechnen durch eine randomisierte Schaufelverteilung eine Auslegung, bei der die tonhaltigen Geräuschanteile stärker als bei der Sinus-Phasenmodulation gemindert werden.

In der Regel wird durch die unregelmäßige Schaufelanordnung weder der Wirkungsgrad des Lüfters noch der erzeugte Summenschalldruckpegel geändert [15, 127, 128, 145, 146, 148]. DOBRZYNSKI [149] stellt jedoch eine Reduktion des A-bewerteten Summenschalldruckpegels von bis zu 4 dB gegenüber einem Lüfter mit regelmäßiger Schaufelanordnung fest. Da durch die unregelmäßige Schaufelverteilung das Geräusch zu tieferen Frequenzen verschoben wird, entstehen niederfrequente Geräuschanteile, die bei der A-Bewertung des Geräusches weniger stark berücksichtigt werden.

### 2.7.2 Unregelmäßige Profilblockverteilung bei Pkw-Reifen

Bei Pkw-Reifen tritt durch die Aufteilung der Lauffläche in Profilblöcke ein tonhaltiges Geräusch im Reifen-Fahrbahn-Kontakt auf – das *Reifensingen*. Um dieses zu mindern und das entstehende Geräusch rauschartiger zu gestalten, werden – analog den Schaufelpositionen bei Lüftern – die Profilblöcke unregelmäßig ent-

---

lang des Umfangs ausgestaltet. Da bei Pkw-Reifen die Variantenvielfalt durch unregelmäßige Profilblockverteilungen nochmals deutlich größer ist als bei der Schaufelverteilung von Lüftern, kommt in der Praxis nur ein randomisierter Ansatz zur Anwendung [15, 45], wenn auch in Patentschriften [150] spezifische Gestaltungsprinzipien beschrieben werden.

### 2.7.3 Unregelmäßige Kettengliedlängen in stufenlosen Getrieben

Einige stufenlose Getriebe in Fahrzeugen (continuously variable transmission, CVT-Getriebe) nutzen Stahlketten, welche aus einer Vielzahl an Kettengliedern aufgebaut sind, als Zugmittel. Besteht eine solche Kette ausschließlich aus Kettengliedern mit gleichen Längen, erfolgt der Eingriffsstoß der Kettenglieder streng periodisch und erzeugt deshalb stark tonhaltige Geräuschkomponenten. Um dem entgegenzuwirken, werden verschiedene lange Kettenglieder in unregelmäßiger Reihenfolge genutzt. Die Variantenvielfalt an möglichen Kombinationen ist enorm, weshalb auch hier in der Regel ein randomisierter Ansatz genutzt wird, wobei auch bereits ein genetischer Algorithmus zur effizienteren Auslegung unregelmäßiger Ketten untersucht wurde. [53, 139, 151]

### 2.7.4 Weitere Beispiele für unregelmäßige Anregungen

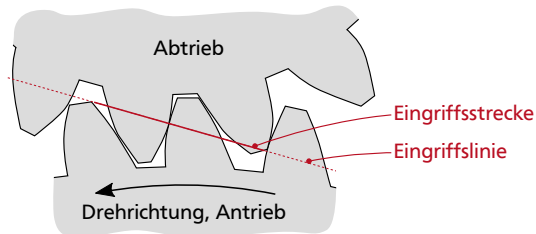
Darüber hinaus wird bei Frequenzumrichtern zum Betrieb von Elektromotoren die Modulationsfrequenz unregelmäßig gestaltet, um das *Umrichterpfeifen* zu mindern [140, 141, 152]. Auch bei Verbrennungsmotoren mit vielen Zylindern kann die Zündfolge unregelmäßig gestaltet werden, um tonhaltige Geräusche zu mindern, wie MOKDAD et al. [153] am Beispiel eines Verbrennungsmotors mit 20 Zylindern für Baumaschinen zeigen. In einem Beispiel aus der Medizintechnik werden die Schneiden eines Räumwerkzeuges zum Einsetzen von Hüftprothesen unregelmäßig angeordnet, um einen schwingungsreduzierten Betrieb und somit glattere Bearbeitungsflächen zu erreichen [154]. Aus Patenten sind außerdem Wälzlager bekannt, die zum Zwecke einer Geräuschminderung eine unregelmäßige Anordnung der Wälzkörper aufweisen [155, 156].

### 2.7.5 Unregelmäßige Verzahnungen

Es sind einige Ansätze bekannt, die unregelmäßige Geometrien in Verzahnungen beschreiben. Die wenigsten davon zielen jedoch auf die Akustik, sondern vielmehr auf Aspekte wie eine variable Übersetzung, eine Drehrichtungssperre oder eine Erhöhung der Tragfähigkeit ab. Beispiele für unregelmäßige Verzahnungen in Zahnstangenlenkungen mit variablen Übersetzungen finden sich in den Patentanmeldungen DE2844359A1 [157], EP47017B1 [158], GB951562A [159] sowie GB951562A [159]. Unregelmäßige Verzahnungen zur Drehrichtungssperre werden zum Beispiel in den Patentanmeldungen DE2604741A1 [160], EP11127B1 [161], US4223528A [162], US2399925A [163] und DE69902990T2 [164]



vorgestellt. Zur Erhöhung der Tragfähigkeit bei Verzahnungen ist die asymmetrische Verzahnung bekannt. Diese ist durch zwei unterschiedliche Eingriffswinkel auf den Links- und Rechtsflanken charakterisiert, wodurch sich eine Tragfähigkeitssteigerung in einer bevorzugten Lastrichtung der Verzahnung ergibt. [19, 165–168] Ein Beispiel für eine asymmetrische Verzahnung ist in Abbildung 2.19 dargestellt. In Bezug auf Geräuschminderungen an Zahnradgetrieben be-



**Abbildung 2.19:** asymmetrische Verzahnung mit unterschiedlichen Eingriffswinkeln auf der Links- und Rechtsflanke, um eine erhöhte Tragfähigkeit in eine bevorzugte Lastrichtung zu erreichen

schreiben die Patentanmeldungen DE397039A [169] und DE102015223120A1 [170] die Möglichkeit, die Zahnhöhe eines Zahnes zu reduzieren. Die Patentanmeldungen JPH09152014A [171] und US020080163502A1 [172] beschreiben unregelmäßig tief ausgeschnittene Zahnlücken. Bei Kettentrieben beschreiben die Patentanmeldungen DE102006034364A1 [173], DE102007032440A1 [174], DE102009017455A1 [175], JP2005163806A [176], JP2009275788A [177] und US020100137085A1 [178] Kettenräder mit unregelmäßigen Teilungen. Weiterhin existieren Patentanmeldungen, die über der Zahnbreite eine Veränderung des Schrägungswinkels (DE102015218544A1 [179], CN103727206A [180]), der Zahnhöhe (JP2006242325A [181]) oder der Zahndicke (WO2012019897A2 [182], GB995092A [183], DE102010038443A1 [184]) beschreiben.

Jedoch sind keine wissenschaftlichen Untersuchungsergebnisse zu den tatsächlichen Auswirkungen der in den oben genannten Patentanmeldungen beschriebenen Technologien bekannt. In vielen Fällen mag das mit den Geheimhaltungsvorschriften der anmeldenden Unternehmen begründet sein. Es muss jedoch davon ausgegangen werden, dass hinter vielen Patentanmeldungen eher wirtschaftliche und strategische als wissenschaftliche Interessen stecken und daher auch keine wissenschaftlich fundierten Erkenntnisse zugrunde liegen.

Eine Patentanmeldung, die der in dieser Arbeit vorgestellten inäquidistanten Verzahnung nahe kommt, ist DE3533743A1 [185] aus dem Jahre 1985. Es wird eine

---

Verzahnung mit *ungleichmäßig wechselnd beabstandeten Zähnen* beschrieben. In einem persönlichen Gespräch mit dem Erfinder, Herrn Dipl.-Ing. Bernhard Lange, am 23.01.2018 [186] hat sich jedoch herausgestellt, dass es sich auch bei dieser Patentanmeldung um eine technologische Absicherung handelte und keine weitere Forschung dazu durchgeführt wurde. Auch technologisch konnte sich im Rahmen dieser Arbeit vom bisherigen Stand der Technik abgegrenzt werden, weshalb die Technologie der inäquidistanten Verzahnung national sowie international zum Patent angemeldet wurde [187, 188].

## 2.8 Fazit zum Stand der Forschung und Technik

Aus Abschnitt 2.3 ab S. 16 ist bekannt, dass die Geräuschanregungsmechanismen von Zahnradgetrieben hauptsächlich in der Zahneingriffsfrequenz und in deren Harmonischen anregen, was zu Geräuschen mit ausgeprägten tonhaltigen Anteilen führt. Die in Abschnitt 2.5 ab S. 31 vorgestellten konventionellen Geräuschkinderungsmaßnahmen können zwar die physikalischen Anregungsamplituden verringern, können aber nicht verhindern, dass sich die angeregten Schwingungen und Geräusche auf wenige Frequenzen konzentrieren. Aus Abschnitt 2.6 ab S. 33 ist bekannt, dass tonhaltige Geräusche sehr lästig sind, eine hohe Störwirkung haben und die wahrgenommene Produktqualität verringern. Aus Abschnitt 2.7 ab S. 37 geht hervor, dass das Prinzip der unregelmäßigen Anregung die tonhaltigen und lästigen Geräuschanteile in vielen Bereichen der Technik bereits erfolgreich mindert. Die Patentrecherche zeigt, dass eine unregelmäßige Ausgestaltung von Verzahnungen zur Minderung tonhaltiger Getriebeegeräusche (Getriebeheulen) allgemein auf großes Interesse stößt. Jedoch konnten im Rahmen der Literatur- und Patentrecherche keine dahinterstehenden fundierten wissenschaftlichen Erkenntnisse gefunden werden. Aus diesem Grund wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit die *inäquidistante Verzahnung zur Geräuschkinderung an Zahnradgetrieben* vorgestellt, beschrieben und unter akustischen Gesichtspunkten wissenschaftlich kritisch untersucht.

---

### 3 Konzeption von inäquidistanten Verzahnungen

---

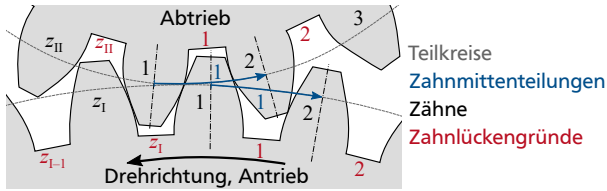
Inäquidistante Verzahnungen zur Geräuschminderung an Zahnradgetrieben sind durch eine unregelmäßige Verzahnungsgeometrie charakterisiert. Ziel der hier neu vorgestellten Verzahnungsart ist die Minderung von Zahneingriffsgeräuschen in Getrieben. Der Ansatz inäquidistanter Verzahnungen ist interessant, da er die einzige Geräuschminderungsmaßnahme darstellt, die gezielt tonhaltige und lästige Geräuschanteile reduziert. In Abschnitt 3.1 werden die *Inäquidistanz-Parameter* vorgestellt, mithilfe derer die unregelmäßige Verzahnungsgeometrie definiert wird. In Abschnitt 3.2 wird eine Methode zum Paaren inäquidistanter Zahnräder vorgestellt, woraufhin in Abschnitt 3.3 die Grenzen der Inäquidistanz-Parameter mathematisch beschrieben werden. In Abschnitt 3.4 wird das Prinzip des Aufbaus inäquidistanter Verzahnungen in Mustern vorgestellt. Das Kapitel endet mit einer Diskussion über Chancen und Herausforderungen inäquidistanter Verzahnungen (Abschnitt 3.5) und einem Fazit (Abschnitt 3.6).

#### 3.1 Inäquidistanz-Parameter zur Definition der Verzahnungsgeometrie

Wie in Abschnitt 2.2 ab S. 11 dargestellt, wird die Geometrie von Evolventenverzahnungen durch diverse Parameter definiert. Wird das Einbringen von Unregelmäßigkeiten in eine Verzahnung angestrebt, ergeben sich diverse Möglichkeiten, wie zum Beispiel durch unregelmäßige

- Zahnpositionen,
- Zahndicken,
- Zahnkopfhöhen,
- Zahnlückengruntiefen,
- Eingriffswinkel,
- Verzahnungsmoduln,
- Zahnbreiten,
- Schrägungswinkel und
- Werkstoffe,

um nur einige Optionen zu nennen. Für jeden dieser geometrischen Parameter kann mittels eines *zahnindividuellen Inäquidistanz-Parameters* die Unregelmäßigkeit definiert werden. Da sich somit diverse Größen von Zahn zu Zahn unterscheiden können, wird die in Abbildung 3.1 dargestellte Nummerierungskonvention eingeführt. Die Zähne werden jeweils so nummeriert, dass die Zahl des in den Eingriff kommenden Zahnes im zeitlichen Verlauf ansteigt. Für eine Drehung des Antriebes in mathematisch positive Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) ergibt sich eine Nummerierung im Uhrzeigersinn ( $j = 1 \dots z_I$ ), für den Abtrieb eine Nummerierung gegen den Uhrzeigersinn ( $j = 1 \dots z_{II}$ ), wobei  $j$  die Laufvariable ist. Nach



**Abbildung 3.1:** Konvention zur Nummerierung der Zähne, Zahnlückengründe und Zahnmittenteilungen

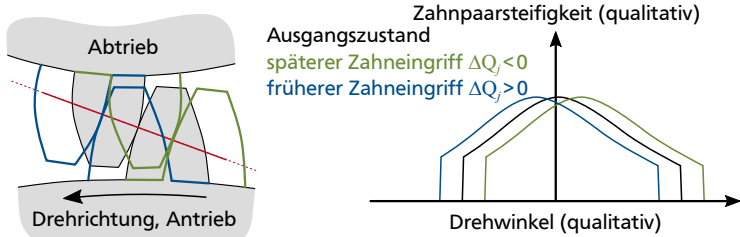
einer vollständigen Umdrehung folgt auf den Zahn mit der Nummer  $z$  der Zahn 1. Das entspricht der in DIN ISO 21771 [48] beschriebenen Zahnnummerierung. Analog dazu erfolgt die Nummerierung der Zahnmittenteilungen (entlang der Teilkreise) und der Zahnlückengründe. Die Variablen für den Antrieb werden mit einer tiefgestellten I, die des Abtriebs mit einer tiefgestellten II gekennzeichnet.

Die detaillierte Modellierung und Untersuchung aller genannten Inäquidistanz-Parameter überschreitet den Umfang dieser Arbeit, weshalb sich auf die Untersuchung unregelmäßiger Zahnpositionen und Zahndicken beschränkt wird. Weiterhin werden die Auswirkungen von unregelmäßigen Zahnkopfhöhen und Zahnlückengründtiefen auf die Geräuschanregung kurz diskutiert. Im Folgenden werde alle Größen, die sich auf konventionelle, regelmäßige (äquidistante) Verzahnungen beziehen, mit dem Index *aq* markiert.

### 3.1.1 Unregelmäßige Zahnpositionen

Analog den unregelmäßigen Schaufelpositionen bei Lüftern können die Zahnpositionen unregelmäßig ausgestaltet werden. Aus den unterschiedlichen Distanzen zwischen den Zähnen ergibt sich der Name *inäquidistante Verzahnung*, wobei diese Bezeichnung selbstverständlich auch alle anderen zuvor genannten Möglichkeiten einer unregelmäßigen Ausgestaltung von Verzahnungen einschließt. Abbildung 3.2 zeigt exemplarisch den Effekt der Positionsveränderung eines Zahnpaars auf den Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit. Der nach vorne (nach hinten) verschobene Zahn kommt früher (später) in den Eingriff, weshalb auch die Zahnpaarsteifigkeit vorzeitig (verspätet) ansteigt. Der Amplitudenverlauf der Zahnpaarsteifigkeit ändert sich jedoch nicht. Durch eine Verschiebung von Zähnen entsteht somit ausschließlich eine *zeitliche Unregelmäßigkeit*.

Um die Abweichung der Zahnposition zu beschreiben, wird der *Zahnpositionsfaktor*  $\Delta Q_j$  eingeführt. Multipliziert mit der Stirnteilung eines äquidistanten Zahnrades  $p_{t,aq}$  gibt er die absolute Positionsabweichung des Zahnes  $j$  von  $Q_{j,aq}$  an.  $Q_{j,aq}$  ist dabei die absolute äquidistante Zahnposition des Zahnes  $j$  und ist definiert als die Strecke zwischen dem Ursprung (Zahnmitte des ersten Zahns, siehe Abbildung 3.3) und der Zahnmitte des Zahnes  $j$  entlang des Teilkreises in ma-



**Abbildung 3.2:** Effekte der Positionsveränderung eines Zahnpaars auf den Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit (analytische Berechnung)

thematisch positiver Richtung (am Abtrieb in mathematisch negativer Richtung). Sie lässt sich wie folgt errechnen

$$Q_{j, \text{aq}} = (z + 1 - j) p_{t, \text{aq}}, \quad (3.1)$$

$Q_{j, \text{aq}}$	in m	äquidistante Zahnposition	$j$	in –	Zahnnummer
$p_{t, \text{aq}}$	in m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt	$z$	in –	Zähnezahl

wobei sie auch als Zahnpositionswinkel (ebenfalls in mathematisch positiver Richtung) ausgedrückt werden kann

$$\varphi_{j, \text{aq}} = \frac{2 Q_{j, \text{aq}}}{d}. \quad (3.2)$$

$\varphi_{j, \text{aq}}$	in rad	äquidistanter Zahnpositionswinkel	$j$	in –	Zahnnummer
$Q_{j, \text{aq}}$	in m	äquidistante Zahnposition	$d$	in m	Teilkreisdurchmesser

Die inäquidistante Zahnposition  $Q_j$  des Zahnes  $j$  ergibt sich zu

$$Q_j = Q_{j, \text{aq}} + \Delta Q_j p_{t, \text{aq}}, \quad (3.3)$$

$Q_j$	in m	inäquidistante Zahnposition	$j$	in –	Zahnnummer
$Q_{j, \text{aq}}$	in m	äquidistante Zahnposition	$\Delta Q_j$	in –	Zahnpositionsfaktor
$p_{t, \text{aq}}$	in m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt			

wobei auch sie mithilfe von Gleichung (3.2) als inäquidistanter Zahnpositionswinkel ausgedrückt werden kann

$$\varphi_j = \varphi_{j,\text{aq}} + \frac{2 \Delta Q_j p_{t,\text{aq}}}{d}. \quad (3.4)$$

$\varphi_j$	in rad	inäquidanter Zahnpositionswinkel	$j$	in –	Zahnnummer
$\varphi_{j,\text{aq}}$	in rad	äquidanter Zahnpositionswinkel	$\Delta Q_j$	in –	Zahnpositionsfaktor
$p_{t,\text{aq}}$	in m	äquidante Teilung, Stirnschnitt	$d$	in m	Teilkreisdurchmesser

Es wird bewusst eine absolute Verschiebung des Zahnes in Form einer *Positionsabweichung* statt einer relativen Verschiebung mittels *Teilungsabweichung* definiert. Eine relative Definition würde dazu führen, dass sich durch Änderung des Inäquidanz-Parameters eines Zahnes die Zahnpositionen aller darauf folgenden Zähne ebenfalls ändern würden. Das würde die Nachvollziehbarkeit und die mathematische Beschreibung unnötig erschweren. Dass die Positionsabweichung  $\Delta Q_j p_{t,\text{aq}}$  proportional zur äquidanten Stirnteilung gewählt ist, hat den Vorteil, dass sich die Positionsabweichungen mit einer Skalierung des Zahnrades proportional anpassen. Für positive Werte von  $\Delta Q_j$  wird der Zahn  $j$  in Richtung seines Vorgängers verschoben und kommt somit früher in den Zahneingriff. Zum Beispiel wird für einen Wert von  $\Delta Q_j = 1$  der Zahn  $j$  um eine ganze Teilung nach vorne verschoben und wäre somit theoretisch exakt an der Position seines Vorgängers  $j-1$ . Bei Bedarf lassen sich für eine relative Bestimmung der Zahnpositionen die absoluten Positionsabweichungen auch in die jeweiligen Zahnmittenteilungen umrechnen

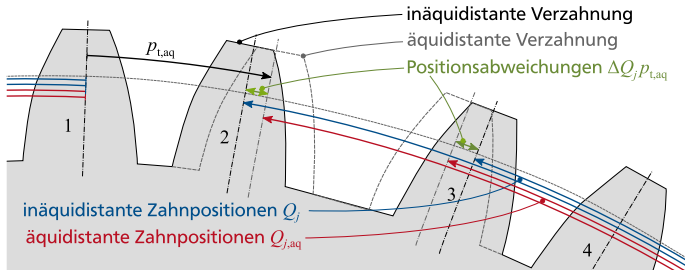
$$p_{t,m,j} = p_{t,\text{aq}} (1 + \Delta Q_j - \Delta Q_{j+1}). \quad (3.5)$$

$p_{t,m,j}$	in m	Zahnmittenteilung, Stirnschnitt	$j$	in –	Zahnnummer
$p_{t,\text{aq}}$	in m	äquidante Teilung, Stirnschnitt	$\Delta Q_j$	in –	Zahnpositionsfaktor

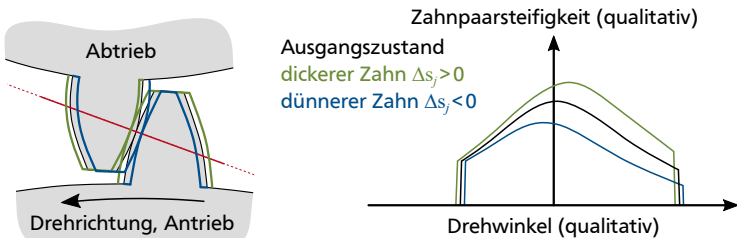
Abbildung 3.3 zeigt ein Zahnrad mit  $\Delta Q_2 = 0,15$  und  $\Delta Q_3 = -0,15$ . Während sich die Lückenweiten ändern, bleiben die Zahndicken konstant.

### 3.1.2 Unregelmäßige Zahndicken

Eine zweite Möglichkeit, die Verzahnungsgeometrie unregelmäßig zu gestalten, ist die Anpassung der Zahndicken. Abbildung 3.4 zeigt den Effekt eines unterschiedlich dick ausgeführten Zahnes am Antrieb auf den Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit. Die Zahnpaarsteifigkeit ergibt sich aus einer Reihenschaltung der beiden Einzelzahnsteifigkeiten (und dem Effekt durch die HERTZ'sche Abplattung am Kontaktpunkt). Zu Beginn des Zahneingriffes kommt der abweichend dick ausgeführte Zahn des Antriebs zuerst in der Nähe seines Zahnfußes in Kontakt. Der Zahn des Abtriebs kommt an seinem Kopf in den Eingriff, wodurch er eine deutlich geringere Steifigkeit aufweist. Aufgrund der Hebelverhältnisse wird die



**Abbildung 3.3:** unregelmäßige Zahnpositionen ( $\Delta Q_2 = 0,15$  und  $\Delta Q_3 = -0,15$ ); durch die Verschiebung der Zähne ändern sich die Zahndicken nicht



**Abbildung 3.4:** Effekt eines unterschiedlich dick ausgeführten Zahnes am Antrieb auf den Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit (analytische Berechnung)

Zahnpaarsteifigkeit zu diesem Zeitpunkt hauptsächlich von der Steifigkeit des Zahnes des Abtriebs bestimmt. Ein abweichend dick ausgeführter Zahn am Antrieb hat zu Beginn des Zahneingriffes somit praktisch keinen Einfluss auf die Zahnpaarsteifigkeit. Am Ende des Zahneingriffes drehen sich die Verhältnisse um. Hier findet der Kontakt am Kopf des Zahnes des Antriebs und am Fuß des Zahnes des Abtriebs statt. Aufgrund der Hebelverhältnisse wird die Zahnpaarsteifigkeit nun hauptsächlich von der Einzelzahnsteifigkeit des Zahnes des Antriebs bestimmt. Für einen dicker (dünnere) ausgeführten Zahn des Antriebs erhöht (verringert) sich die Zahnpaarsteifigkeit somit am Ende des Zahneingriffes. Über die Dauer des Eingriffes hinweg erfolgt ein kontinuierlicher Übergang zwischen den beiden beschriebenen Zuständen. Wird ein Zahn statt am Antrieb am Abtrieb unterschiedlich dick ausgeführt, beeinflusst dies hauptsächlich die Zahnpaarsteifigkeit zu Beginn des Zahneingriffes. Die Zeitpunkte des Ein- und des Austritts ändern sich aufgrund der leichten Verschiebung der kraftübertragenden Flanke geringfügig, siehe Abbildung 3.4. Hauptsächlich wirkt sich eine unregelmäßige Ausgestaltung der Zahndicken jedoch in einer *Unregelmäßigkeit der Steifigkeitsamplituden* aus.

Zur Beschreibung der unregelmäßigen Zahndicken wird der *Zahndickenfaktor*  $\Delta s_j$  eingeführt. Analog dem Zahnpositionsfaktor ergibt er, multipliziert mit der Stirnteilung eines äquidistanten Zahnrades  $p_{t,aq}$ , die absolute Änderung der Zahndicke des Zahnes  $j$

$$s_{t,j} = s_{t,aq} + \Delta s_j p_{t,aq}. \quad (3.6)$$

$s_{t,j}$	in m	inäquidistante Zahndicke, Stirnschnitt	$j$	in –	Zahnnummer
$s_{t,aq}$	in m	äquidistante Zahndicke, Stirnschnitt	$\Delta s_j$	in –	Zahndickenfaktor
$p_{t,aq}$	in m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt			

Da sich die absolute Zahndickenänderung aus dem Produkt  $\Delta s_j p_{t,aq}$  ergibt, skaliert sie proportional zur Zahnradgröße. Die Zahndicke des äquivalenten äquidistanten Zahnrades  $s_{t,aq}$  berechnet sich nach DIN ISO 21771 [48] zu

$$s_{t,aq} = \frac{p_{t,aq}}{2} + \frac{2 x m_n}{\cos \beta} \tan \alpha_n. \quad (3.7)$$

$s_{t,aq}$	in m	äquidistante Zahndicke, Stirnschnitt	$x m_n$	in m	Profilverschiebung
$p_{t,aq}$	in m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt	$\beta$	in rad	Schrägungswinkel
$\alpha_n$	in rad	Normaleingriffswinkel			

Gleichung (3.7) in Gleichung (3.6) eingesetzt ergibt für die inäquidistante Zahndicke

$$s_{t,j} = p_{t,aq} \left( \frac{1}{2} + \Delta s_j \right) + \frac{2 x m_n}{\cos \beta} \tan \alpha_n. \quad (3.8)$$

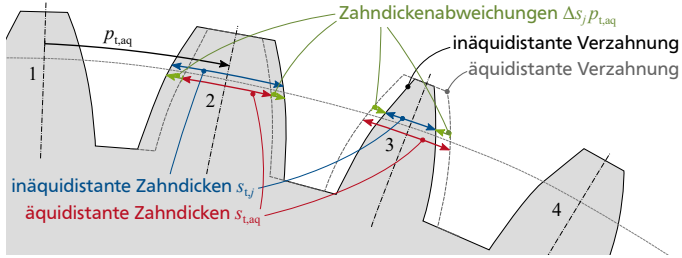
$s_{t,j}$	in m	inäquidistante Zahndicke, Stirnschnitt	$j$	in –	Zahnnummer
$p_{t,aq}$	in m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt	$\Delta s_j$	in –	Zahndickenfaktor
$x m_n$	in m	Profilverschiebung	$\beta$	in rad	Schrägungswinkel
$\alpha_n$	in rad	Normaleingriffswinkel			

Abbildung 3.5 zeigt ein Zahnrad, dessen Zähne mit den Zahndickenfaktoren  $\Delta s_2 = 0,15$  und  $\Delta s_3 = -0,15$  unregelmäßig ausgestaltet sind. Die Zahnpositionen ändern sich hierdurch nicht.

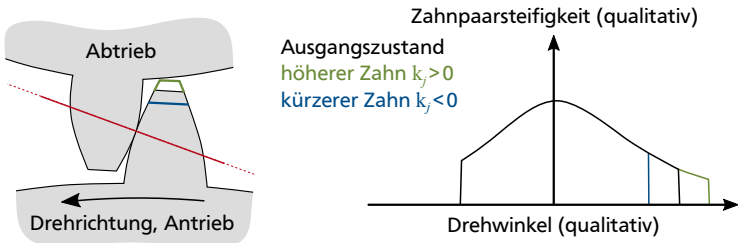
### 3.1.3 Unregelmäßige Zahnkopfhöhen und Zahnlückengrundtiefen

Wird ein Zahn des Antriebs in seiner Kopfhöhe verändert, so wirkt sich das ausschließlich auf die Austrittszeitpunkte aus, siehe Abbildung 3.6. Wird der Zahn höher (kürzer) ausgeführt, findet der Zahnausgriff zu einem späteren (früheren)





**Abbildung 3.5:** unregelmäßige Zahndicken ( $\Delta s_2 = 0,15$  und  $\Delta s_3 = -0,15$ ); durch die unterschiedlichen Zahndicken ändern sich die Zahnpositionen nicht



**Abbildung 3.6:** Effekt eines unterschiedlich hoch ausgeführten Zahnes am Antrieb auf den Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit (analytische Berechnung)

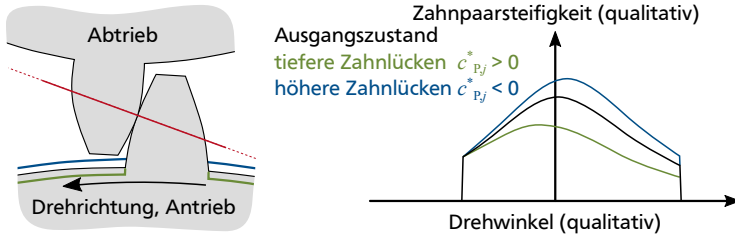
Zeitpunkt statt. Der Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit ändert sich lediglich durch einen verlängerten (verkürzten) Verlauf in diesem Bereich. Analog dazu findet für einen höher (kürzer) ausgeführten Zahn des Abtriebs der Zahneingriff zu einem früheren (späteren) Zeitpunkt statt. Unregelmäßige Zahnhöhen bewirken somit – ähnlich wie unregelmäßige Zahnpositionen – eine *zeitliche Unregelmäßigkeit*.

Die unregelmäßigen Zahnhöhen für jeden Zahn  $j$  können durch eine zahnindividuelle Wahl des Kopfhöhenänderungsfaktors  $k_j$  (siehe Abschnitt 2.2.2 ab S. 13) definiert werden, der, multipliziert mit dem Normalmodul  $m_n$ , die absolute Zahnhöhenänderung angibt. Gleichung (2.12) auf S. 14 ergibt sich für unregelmäßige Zahnhöhen somit zu

$$h_j = h_{ap} + h_{fp} + k_j m_n. \quad (3.9)$$

$h_j$	in	m	inäquidistante Zahnhöhe	$j$	in	–	Zahnnummer
$h_{ap}$	in	m	Kopfhöhe des Bezugsprofils	$h_{fp}$	in	m	Fußhöhe des Bezugsprofils
$k_j$	in	–	inäquidistanter Kopfhöhenänderungsfaktor	$m_n$	in	m	Normalmodul

Werden die Zahn­lücken um einen Zahn des Antriebs tiefer eingeschnitten, ver­ringert sich die Amplitude der Zahn­paar­steifigkeit, da der Zahn, gedacht als eingespannter Balken, länger wird. Da der Zahn des Antriebs beim Zahnaustritt an seinem Kopf belastet wird, dominiert er dort den Wert der Zahn­paar­steifigkeit. Entsprechend wirkt sich die Änderung der Zahn­lücken­grundtiefe am Antrieb hauptsächlich am Zahnaustritt aus, siehe Abbildung 3.7. Analog dazu wird haupt­



**Abbildung 3.7:** Effekt eines unterschiedlich tief ausgeschnittenen Zahn­lücken­grundes am Antrieb auf den Verlauf der Zahn­paar­steifigkeit (analytische Berechnung)

sächlich die Zahn­paar­steifigkeit am Zahneintritt beeinflusst, wenn die Zahn­lücken um einen Zahn des Abtriebs in ihrer Tiefe verändert werden. Eine unregelmäßige Ausgestaltung der Zahn­lücken­grund­tiefen hat zur Folge, dass ein Zahn auf beiden Seiten unterschiedliche Zahn­lücken­grund­tiefen (Zahn­lücken  $j-1$  und  $j$  grenzen an Zahn  $j$  an) aufweist. Die Auswirkung eines solchen asymmetrischen Aufbaus auf die Zahn­paar­steifigkeit ist analytisch schwer zu beschreiben. Unregelmäßige Zahn­lücken­grund­tiefen wirken sich ausschließlich in Form einer *Unregelmäßigkeit der Steifigkeitsamplituden* aus.

Mathematisch können unregelmäßige Zahn­lücken­grund­tiefen mittels eines zahn­individuell gewählten Kopf­spielfaktors  $c_{p,j}^*$  beschrieben werden. Analog dem Kopf­höhen­änderungs­faktor  $k_j$  beschreibt er, multipliziert mit dem Normal­modul, die absolute Änderung der Zahn­lücken­grund­tiefe, siehe Gleichung (2.11) auf S. 14. Es ergeben sich unregelmäßige Fuß­kreis­durchmesser  $d_{f,j}$  zwischen den Zähnen. Die Berechnungs­gleichung für den Fuß­kreis­durchmesser nach DIN ISO 21771 [48] kann wie folgt für inäquidistante Fuß­kreis­durchmesser  $d_{f,j}$  – also unregelmäßige Zahn­lücken­grund­tiefen – erweitert werden

$$d_{f,j} = d - 2(m_n + c_{p,j}^* m_n - x m_n). \quad (3.10)$$

$d_{f,j}$	in m	inäquidistanter Fuß­kreis­durchmesser	$j$	in –	Zahn­nummer
$d$	in m	Teilkreis­durchmesser	$m_n$	in m	Normal­modul
$c_{p,j}^*$	in –	inäquidistanter Kopf­spielfaktor	$x m_n$	in m	Profil­verschiebung

---

Für positive (negative) Werte von  $c_{p,j}^*$  wird die Zahnlücke tiefer (weniger tief) eingeschnitten, wodurch sich eine verringerte (vergrößerte) Zahnsteifigkeit ergibt.

Unregelmäßige Zahnhöhen und Zahnlückengrundtiefen haben sehr ähnliche Effekte wie unregelmäßige Zahnpositionen beziehungsweise Zahndicken. Prinzipiell besteht die Möglichkeit, dass durch die gleichzeitige Anwendung aller vier vorgestellten Inäquidistanz-Parameter pro Zahn eine noch bessere Geräuschminderung möglich ist als bei der Anwendung von nur zwei Parametern. Im Rahmen dieser Arbeit steht die Erarbeitung von grundlegenden Methoden zur Konzeption, Auslegung und Optimierung von inäquidistanten Verzahnungen im Fokus. Um die Variantenvielfalt bei der unregelmäßigen Ausgestaltungen beherrschbar zu halten, wird die Methodenentwicklung im Folgenden nur am Beispiel unregelmäßiger Zahnpositionen und Zahndicken durchgeführt. Selbstverständlich lassen sich die entwickelten Methoden auch auf die zusätzlichen Inäquidistanz-Parameter erweitern.

### 3.1.4 Vermeidung von redundanten Kombinationen

Bei inäquidistanten Verzahnungen kann es zu redundanten Kombinationen kommen. Würden zum Beispiel alle Zähne eines Zahnrades mit dem gleichen Wert für die Zahnpositionsfaktoren  $\Delta Q_j$  verschoben werden, ergäbe sich ein identisches Zahnrad, das als Ganzes um den Betrag  $\Delta Q_j p_{t,eq}$  verdreht ist. Um diese Art der Redundanzen zu vermeiden, wird gefordert, dass die Zahnposition des ersten Zahnes immer null sein muss. Für den Zahnpositionsfaktor wird daher postuliert

$$\Delta Q_1 \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.11)$$

Trotz dieser Forderung können weitere Redundanzen auftreten. Beispielsweise wären Zahnräder, bei denen entweder nur der zweite oder nur der dritte Zahn um jeweils den gleichen Betrag verschoben ist, wiederum geometrisch identisch. Gleiches gilt, wenn entweder nur der zweite oder nur der dritte Zahn in seiner Dicke um jeweils den gleichen Betrag verändert wird. Um diese Redundanzen zu unterbinden, wird für inäquidistante Verzahnungen weiterhin postuliert

$$\Delta Q_2 \stackrel{!}{\neq} 0 \text{ und/oder } \Delta s_2 \stackrel{!}{\neq} 0. \quad (3.12)$$

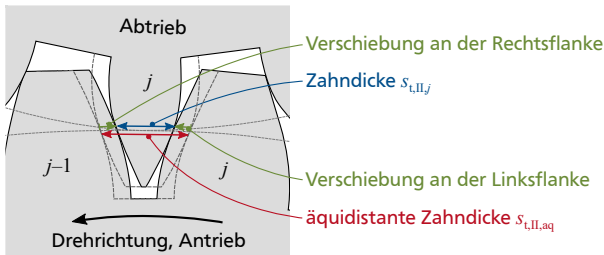
Diese Forderung ist für jede inäquidistante Verzahnung erfüllbar, sofern mindestens ein Zahn mindestens in seiner Position oder seiner Dicke verändert wird. Trifft das nicht zu, handelt es sich nicht um eine inäquidistante, sondern um eine konventionelle Verzahnung. Die beiden Forderungen vermeiden somit redundante Kombinationen von inäquidistanten Verzahnungen, schränken jedoch nicht die Vielfalt unterschiedlicher Kombinationsmöglichkeiten ein.

## 3.2 Paarung von inäquidistanten Zahnradern

Die Geometrie eines mit unregelmäßigen Zahnpositionen und Zahndicken aufgebauten Zahnrades (Antrieb) kann mittels der zahnindividuellen Zahnpositionsfaktoren  $\Delta Q_j$  und der zahnindividuellen Zahndickenfaktoren  $\Delta s_j$ , zusätzlich zu den Parametern für konventionelle äquidistante Zahnradern, vollständig definiert werden. Für eine störungsfreie Leistungsübertragung auf ein zweites Zahnrad (Abtrieb) nach dem Verzahnungsgesetz ist ein ideal an den Antrieb angepasstes Zahnrad am Abtrieb notwendig. Ein dicker ausgeführter Zahn am Antrieb muss zum Beispiel immer in eine weiter ausgeführte Lücke am Abtrieb treffen. Die Inäquidistanz-Parameter des Abtriebs ( $\Delta s_{II,j}$  und  $\Delta Q_{II,j}$ ) werden daher aus jenen des Antriebs ( $\Delta s_{I,j}$  und  $\Delta Q_{I,j}$ ) errechnet.

### 3.2.1 Berechnung der Zahndickenfaktoren des Abtriebs

Der Zahn  $j$  des Abtriebs ist zwischen den Zähnen  $j-1$  und  $j$  des Antriebs positioniert. Die Zahndicke des Zahnes am Abtrieb  $s_{t,II,j}$  ergibt sich somit aus der äquidistanten Zahndicke  $s_{t,I,aq}$ , angepasst um die Verschiebung der beiden Zahnflanken der angrenzende Zähne des Antriebs, siehe Abbildung 3.8.



**Abbildung 3.8:** Zahndicken des Abtriebs ergeben sich aus den Verschiebungen der angrenzenden Zahnflanken des Antriebs

Die absolute Verschiebung der Linksflanke des Zahnes  $j$  am Abtrieb nach links ergibt sich aus der absoluten Verschiebung der Linksflanke des Zahnes  $j$  am Antrieb. Diese wiederum ergibt sich aus dem Verschiebungsanteil aus der absoluten Zahnpositionsänderung  $\Delta Q_{I,j} p_{t,aq}$  und der Hälfte des Anteils aus der Zahndickenänderung  $\Delta s_{I,j} p_{t,aq}$ . Die absolute Verschiebung der Rechtsflanke des Zahnes  $j$  am Abtrieb nach rechts ergibt sich analog dazu aus der absoluten negativen Zahnpositionsänderung  $-\Delta Q_{I,j-1} p_{t,aq}$  und der Hälfte der absoluten Zahndickenänderung  $\Delta s_{I,j-1} p_{t,aq}$  des Zahnes  $j-1$  des Antriebs. Die absolute Zahndicke des Zahnes  $j$  am Abtrieb ergibt sich somit zu

$$s_{t,II,j} = s_{t,II,aq} + p_{t,aq} \left( \Delta Q_{I,j-1} - \Delta Q_{I,j} - \frac{\Delta s_{I,j-1} + \Delta s_{I,j}}{2} \right). \quad (3.13)$$

$s_{t,II,j}$	in m	inäquidistante Zahndicke, Abtrieb, Stirnschnitt	$j$	in –	Zahnnummer
$s_{t,II,aq}$	in m	äquidistante Zahndicke, Abtrieb, Stirnschnitt	$\Delta Q_{I,j}$	in –	Zahnpositionsfaktor, Antrieb
$p_{t,aq}$	in m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt	$\Delta s_{I,j}$	in –	Zahndickenfaktor, Antrieb

Wird die äquidistante Zahndicke des Abtriebs  $s_{t,II,aq}$  mithilfe von Gleichung (3.7) auf S. 48 ersetzt, ergibt sich daraus

$$s_{t,II,j} = p_{t,aq} \left( \frac{1}{2} + \Delta Q_{I,j-1} - \Delta Q_{I,j} - \frac{\Delta s_{I,j-1} + \Delta s_{I,j}}{2} \right) + \frac{2 x m_n}{\cos \beta} \tan \alpha_n. \quad (3.14)$$

$s_{t,II,j}$	in m	inäquidistante Zahndicke, Abtrieb, Stirnschnitt	$\Delta s_{I,j}$	in –	Zahndickenfaktor, Antrieb
$p_{t,aq}$	in m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt	$j$	in –	Zahnnummer
$\Delta Q_{I,j}$	in –	Zahnpositionsfaktor, Antrieb	$x m_n$	in m	Profilverschiebung
$\beta$	in rad	Schrägungswinkel	$\alpha_n$	in rad	Normaleingriffswinkel

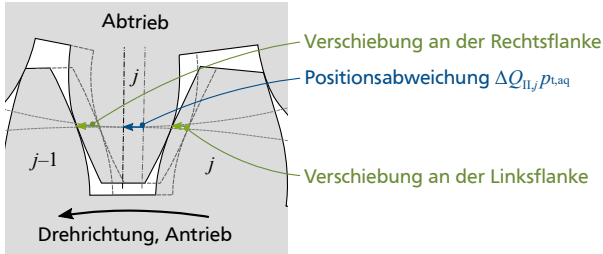
Die Zahndickenfaktoren des Abtriebs  $\Delta s_{II,j}$  können schließlich durch Umstellen von Gleichung (3.6) auf S. 48 mithilfe der Inäquidistanz-Parameter des Antriebs wie folgt errechnet werden

$$\Delta s_{II,j} = \Delta Q_{I,j-1} - \Delta Q_{I,j} - \frac{\Delta s_{I,j-1} + \Delta s_{I,j}}{2}. \quad (3.15)$$

$\Delta s_{II,j}$	in –	Zahndickenfaktor, Abtrieb	$j$	in –	Zahnnummer
$\Delta Q_{I,j}$	in –	Zahnpositionsfaktor, Antrieb	$\Delta s_{I,j}$	in –	Zahndickenfaktor, Antrieb

### 3.2.2 Berechnung der Zahnpositionsfaktoren des Abtriebs

Die Zahnpositionen am Abtrieb ergeben sich aus der Überlegung, dass die Zahnmitte immer genau zwischen der jeweiligen Links- und Rechtsflanke liegt. Entsprechend erfährt die Zahnmitte den Mittelwert der Verschiebungen dieser beiden Zahnflanken, siehe Abbildung 3.9. Die Verschiebung an der Linksflanke ergibt sich aus der absoluten Zahnverschiebung  $\Delta Q_{I,j} p_{t,aq}$  und der Hälfte der absoluten Zahndickenänderung  $\Delta s_{I,j} p_{t,aq}$  des Zahnes  $j$  des Antriebs. Die Verschiebung an der Rechtsflanke ergibt sich aus der absoluten Zahnverschiebung  $\Delta Q_{I,j-1} p_{t,aq}$  und der Hälfte der negativen absoluten Zahndickenänderung  $-\Delta s_{I,j-1} p_{t,aq}$  des



**Abbildung 3.9:** Zahnpositionen des Abtriebs ergeben sich aus der mittleren Verschiebung der angrenzenden Zahnflanken des Antriebs

Zahnes  $j-1$  des Antriebs. Daraus ergeben sich die Zahnpositionsfaktoren des Abtriebs zu

$$\Delta Q_{II,j} = \frac{\Delta Q_{I,j-1} + \Delta Q_{I,j}}{2} + \frac{-\Delta s_{I,j-1} + \Delta s_{I,j}}{4}. \quad (3.16)$$

$\Delta Q_{II,j}$	in	–	Zahnpositionsfaktor, Abtrieb	$j$	in	–	Zahnnummer
$\Delta Q_{I,j}$	in	–	Zahnpositionsfaktor, Antrieb	$\Delta s_{I,j}$	in	–	Zahndickenfaktor, Antrieb

Einsetzen in Gleichung (3.3) auf S. 45 liefert die absoluten inäquidistanten Zahnpositionen des Abtriebs

$$Q_{II,j} = p_{t, aq} \left( z_{II} + 1 - j + \frac{\Delta Q_{I,j-1} + \Delta Q_{I,j}}{2} + \frac{-\Delta s_{I,j-1} + \Delta s_{I,j}}{4} \right). \quad (3.17)$$

$Q_{II,j}$	in	m	inäquidistante Zahnposition, Abtrieb	$\Delta s_{I,j}$	in	–	Zahndickenfaktor, Antrieb
$p_{t, aq}$	in	m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt	$z_{II}$	in	–	Zähnezahl, Abtrieb
$\Delta Q_{I,j}$	in	–	Zahnpositionsfaktor, Antrieb	$j$	in	–	Zahnnummer

Als Zahnpositionswinkel ausgedrückt ergibt sich

$$\varphi_{II,j} = \frac{2 p_{t, aq}}{d_{II}} \left( z_{II} + 1 - j + \frac{\Delta Q_{I,j-1} + \Delta Q_{I,j}}{2} + \frac{-\Delta s_{I,j-1} + \Delta s_{I,j}}{4} \right). \quad (3.18)$$

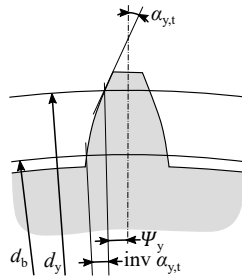
$\varphi_{II,j}$	in	rad	inäquidistanter Zahnpositionswinkel, Abtrieb	$d_{II}$	in	m	Teilkreisdurchmesser, Abtrieb
$p_{t, aq}$	in	m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt	$j$	in	–	Zahnnummer
$\Delta Q_{I,j}$	in	–	Zahnpositionsfaktor, Antrieb	$z_{II}$	in	–	Zähnezahl, Abtrieb
$\Delta s_{I,j}$	in	–	Zahndickenfaktor, Antrieb				

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die in Abschnitt 3.1.4 ab S. 51 eingeführten Bedingungen zur Vermeidung von Redundanzen nur für die Auslegung eines ersten Zahnrades gelten. Für ein zweites Zahnrad, das auf das erste mittels der eingeführten Gleichungen angepasst ist, gelten diese Bedingungen nicht.

### 3.3 Grenzen der Parameterräume

Die unregelmäßigen Zahnpositionen und Zahndicken können nur in bestimmten Grenzen, welche durch die Zahngeometrie gegeben sind, variiert werden. In der Theorie dürfen einerseits die Zahnbreiten am Kopf nicht negativ werden, andererseits dürfen sich die Zahnfüße zweier benachbarter Zähne nicht überschneiden. In der Praxis müssen die Grenzen noch enger gesetzt werden, denn weder ein zu spitzer Zahn noch eine zu enge Zahnücke sind aus Sicht der Fertigung und des Verschleißes umsetzbar. Im Rahmen dieser Arbeit werden im Hinblick auf die Methodenentwicklung jedoch die theoretischen Grenzen genutzt.

Die Zahnbreite auf verschiedenen Höhen des Zahnes hängt von der Form der evolventischen Zahnflanke ab. Mit der Evolventenfunktion des Winkels  $\alpha_{y,t}$  (auch *Involut-Funktion*,  $\text{inv } \alpha_{y,t}$ ) kann der Winkel zwischen dem Evolventenursprung auf dem Grundkreis mit Durchmesser  $d_b$  und einem Punkt auf der Evolventenflanke an einem beliebigen Durchmesser  $d_y$  bestimmt werden, siehe Abbildung 3.10. Die



**Abbildung 3.10:** Zahndickenhalbwinkel  $\Psi_y$  und Evolventenfunktion des Winkels  $\alpha_{y,t}$  für beliebige Durchmesser  $d_y$

Evolventenfunktion des Winkels  $\alpha_{y,t}$  ist definiert durch [48]

$$\text{inv } \alpha_{y,t} = \tan \alpha_{y,t} - \alpha_{y,t}, \quad (3.19)$$

$\alpha_{y,t}$  in rad Stirnprofilwinkel bei  $d_y$

wobei sich der Stirnprofilwinkel  $\alpha_{y,t}$  wie folgt errechnet:

$$\alpha_{y,t} = \arccos\left(\frac{d_b}{d_y}\right). \quad (3.20)$$

$\alpha_{y,t}$	in rad	Stirnprofilwinkel bei $d_y$	$d_b$	in m	Grundkreisdurchmesser
$d_y$	in m	beliebiger Durchmesser am Zahnrad			

Der Winkel, der die halbe Zahndicke des Zahnes  $j$  am Teilkreis einschließt, wird *Zahndickenhalbwinkel* genannt und ist gegeben durch [48]

$$\Psi_j = \frac{s_{t,j}}{d}. \quad (3.21)$$

$\Psi_j$	in rad	Zahndickenhalbwinkel, Teilkreis	$j$	in —	Zahnnummer
$s_{t,j}$	in m	inäquidistante Zahndicke, Stirnschnitt	$d$	in m	Teilkreisdurchmesser

### 3.3.1 Vermeidung von negativen Zahnbreiten am Kopf

Um sicherzustellen, dass die Zahnbreite am Kopf des Zahnes  $j$  nicht negativ wird, wird gefordert, dass der Zahndickenhalbwinkel am Kopf  $\Psi_{a,j}$  stets positive Werte annimmt.  $\Psi_{a,j}$  setzt sich aus dem Zahndickenhalbwinkel am Teilkreis  $\Psi_j$  und den Evolventenfunktionen zusammen, siehe Abbildung 3.10. Es folgt

$$\Psi_{a,j} = \Psi_j + \text{inv } \alpha_t - \text{inv } \alpha_{a,t} > 0. \quad (3.22)$$

$\Psi_{a,j}$	in rad	Zahndickenhalbwinkel, Kopfkreis	$j$	in —	Zahnnummer
$\Psi_j$	in m	Zahndickenhalbwinkel, Teilkreis	$\alpha_t$	in rad	Stirnprofilwinkel
$\alpha_{a,t}$	in rad	Stirnprofilwinkel, Kopfkreis			

### 3.3.2 Vermeidung von Zahnfußüberschneidungen benachbarter Zähne

Die Zahnfüße zweier benachbarter Zähne des Antriebs überschneiden sich, wenn der Abstandswinkel  $\varphi_{\text{abs},j}$  zwischen dem Zahnfuß (am Grundkreis) an der Rechtsflanke des Zahnes  $j$  und dem Zahnfuß an der Linksflanke des Zahnes  $j+1$  negativ wird, siehe Abbildung 3.11. Der Abstandswinkel  $\varphi_{\text{abs},j}$  zwischen den beiden benachbarten Zahnfüßen (am Grundkreis) kann durch die Zahnpositionswinkel  $\varphi_j$  und die Zahndickenhalbwinkel am Grundkreis  $\Psi_b$  ausgedrückt werden. Er muss stets größer null sein.

$$\varphi_{\text{abs},j} = (\varphi_j - \Psi_{b,j}) - (\varphi_{j+1} + \Psi_{b,j+1}) > 0, \quad (3.23)$$

$\varphi_{\text{abs},j}$	in rad	Abstandswinkel	$\varphi_j$	in rad	inäquidistanter Zahnpositionswinkel
$j$	in —	Zahnnummer	$\Psi_{b,j}$	in rad	Zahndickenhalbwinkel, Grundkreis



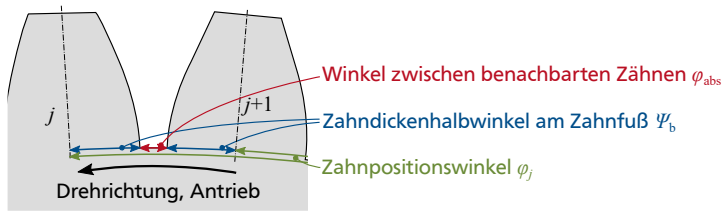


Abbildung 3.11: Winkel zwischen benachbarten Zähnen

wobei sich  $\Psi_{b,j}$  analog Gleichung (3.22) wie folgt ergibt

$$\Psi_{b,j} = \Psi_j + \text{inv } \alpha_t. \quad (3.24)$$

$\Psi_{b,j}$	in rad	Zahndickenhalbwinkel, Grundkreis	$j$	in —	Zahnnummer
$\Psi_j$	in m	Zahndickenhalbwinkel, Teilkreis	$\alpha_t$	in rad	Stirnprofilwinkel

Entsprechend der Nummerierungskonvention in Abschnitt 3.1 auf S. 43 wird der Abstandswinkel  $\varphi_{\text{abs},j}$  am Abtrieb zwischen dem Zahnfuß an der Linksflanke des Zahnes  $j-1$  und dem Zahnfuß an der Rechtsflanke des Zahnes  $j$  gemessen.

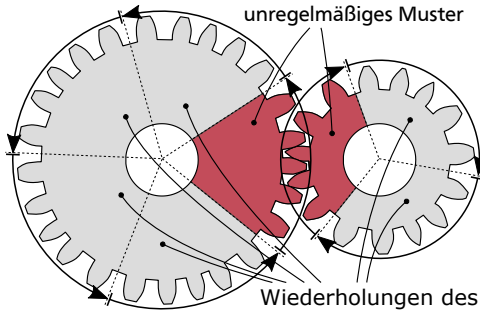
### 3.4 Aufbau in inäquidistanten Mustern

Würden die Zahnposition und die Zahndicke eines jeden Zahnes eines inäquidistanten Zahnrades unregelmäßig ausgestaltet werden, so könnte es nur mit einem Zahnrad gleicher Zähnezahl gepaart werden. Das einzig mögliche Übersetzungsverhältnis wäre folglich  $i = -1$ . Um die Anzahl möglicher Übersetzungsverhältnisse zu vergrößern, werden inäquidistante Zahnräder in *inäquidistanten Mustern* aufgebaut. Die Muster bestehen aus einer bestimmten Anzahl an Zähnen  $\Phi$ , wovon jeder Zahn beliebig ausgestaltet sein kann. Das inäquidistante Muster wiederholt sich mehrfach entlang des Umfangs des Zahnrades. So würde sich zum Beispiel auf einer Zahnradpaarung mit  $z_I = 25$  und  $z_{II} = 15$  Zähnen durch die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (ggT) ein inäquidistantes Muster mit

$$\Phi = \text{ggT}(z_I, z_{II}) = \text{ggT}(25, 15) = 5 \quad (3.25)$$

$\Phi$	in —	inäquidistante Musterlänge	$z$	in —	Zähnezahl
--------	------	----------------------------	-----	------	-----------

Zähnen fünfmal beziehungsweise dreimal wiederholen, siehe Abbildung 3.12. Das Übersetzungsverhältnis ergibt sich in diesem Fall zu  $i = -0,6$ . In Mustern aufgebaute inäquidistante Verzahnungen haben den Vorteil, dass sie trotz des unregelmäßigen Aufbaus keine Unwucht aufweisen, sofern sich das Muster min-



**Abbildung 3.12:** in einem Muster mit  $\Phi = 5$  Zähnen aufgebaute inäquidistante Zahnradpaarung; die Muster wiederholen sich fünf- beziehungsweise dreimal entlang des Umfangs

destens zweimal entlang des Umfangs wiederholt. Weiterhin besteht nur eine Einschränkung bei den möglichen Übersetzungsverhältnissen: ein ganzzahliger gemeinsamer Teiler der Zähnezahlen, der der Musterlänge  $\Phi$  entspricht.

Während sich die Anregung bei äquidistanten Verzahnungen mit jedem Zahneintritt periodisch wiederholt, entsteht die Periodizität bei inäquidistanten Verzahnungen erst nach einem inäquidistanten Muster. Aus akustischer Sicht ist daher ein großer Wert für  $\Phi$  anzustreben, da dies mehr Möglichkeiten zur unregelmäßigen Ausgestaltung der Verzahnung und somit zur Geräuschminderung bietet. Aus Sicht der Verzahnungsauslegung wird ein eher kleiner Wert für  $\Phi$  angestrebt, da dies größere Freiheiten bei den Übersetzungsverhältnissen einräumt. Der optimale Wert für  $\Phi$  muss für jeden Einsatzzweck individuell bestimmt werden.

### 3.5 Chancen und Herausforderungen von inäquidistanten Verzahnungen

Inäquidistante Verzahnungen bieten das Potenzial einer Geräuschminderung, insbesondere von lästigen, tonhaltigen Geräuschkomponenten. Jedoch birgt der Ansatz in der Praxis auch Herausforderungen. In der Literatur sind diverse Fertigungsverfahren (zum Beispiel Wälzfräsen, Wälzschleifen oder Profilschleifen) bekannt, die sich nicht alle dazu eignen, auch inäquidistante Verzahnungen herzustellen. Das Wälzfräsen ist aufgrund der Wirtschaftlichkeit ein in der Praxis sehr häufig eingesetztes Fertigungsverfahren. [14, 19, 25, 27, 29, 189] Durch das Prinzip eines schneckenförmigen Wälzfräswerkzeuges ist es jedoch nur eingeschränkt zur Fertigung von inäquidistanten Verzahnungen geeignet, zum Beispiel mittels mehrgängiger Wälzfräswerkzeuge. Eine weitere Herausforderung ist die verringerte Tragfähigkeit einer Verzahnung aufgrund dünner ausgeführter Zähne. Da die Tragfähigkeit eines Zahnes etwa proportional zum Quadrat seiner Dicke ist [14, 19, 24, 25, 71, 190], sind deutliche Einbußen zu befürchten. Aus diesem Grund wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Bachelor-Thesis betreut, die sich dem Thema

---

nähert. Darin kommt DESCH [191] zu dem Ergebnis, dass sich bei inäquidistanten Verzahnungen die Tragfähigkeit durch die dünner ausgeführten Zähne in der Tat reduziert, jedoch weit weniger stark als befürchtet. Da nicht nur die Zahndicken, sondern auch die Zeitpunkte der inneren und äußeren Einzeleingriffspunkte unregelmäßig sind, kompensiert die vorteilhaftere Lastverteilung zwischen den Zahnpaaren bei inäquidistanten Verzahnungen die Einbußen bei der Tragfähigkeit teilweise. Aufgrund des Zwanges zu einem gemeinsamen Teiler beider Zähnezahlen (die inäquidistante Musterlänge  $\Phi$ ) können keine teilerfremden Verzahnungen realisiert werden. Aus Sicht des Verschleißes sind laut Literatur Verzahnungen mit gemeinsamem Teiler der Zähnezahlen zu vermeiden, da sich lokale Fehlstellen durch die häufigere Berührung der gleichen Zähne schneller vergrößern können [29]. Es existieren jedoch auch Aussagen, die die Forderung nach teilerfremden Zähnezahlen, basierend auf der heutzutage möglichen hochgenauen Fertigung der Zahnräder, relativieren [192]. Der Herausforderung einer fehleranfälligen Montage aufgrund der Forderung nach einer korrekten Positionierung inäquidistanter Zahnräder zueinander kann zum Beispiel durch eine Montagemarkierung begegnet werden.

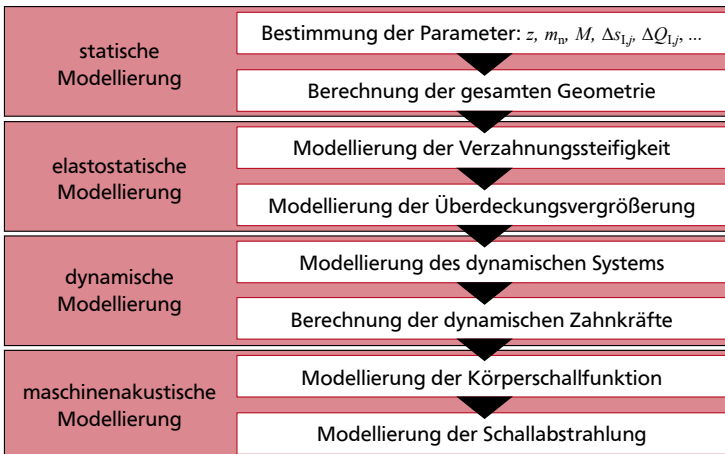
### 3.6 Fazit zur Konzeption von inäquidistanten Verzahnungen

In diesem Kapitel wird die inäquidistante Verzahnung vorgestellt, die durch eine unregelmäßig ausgestaltete Verzahnungsgeometrie charakterisiert ist. Die unregelmäßige Geometrie kann zum Beispiel mittels unregelmäßiger Zahnpositionen, Zahndicken, Zahnhöhen, Zahnlückengrundtiefen, Eingriffswinkel oder Zahnbreiten erreicht werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden die grundlegenden Methoden zur Definition der unregelmäßigen Geometrie von inäquidistanten Verzahnungen, erzeugt mittels unregelmäßiger Zahnpositionen (Auswirkung auf den zeitlichen Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit) und unregelmäßiger Zahndicken (Einfluss auf die Amplitude der Zahnpaarsteifigkeit), entwickelt. Um die Geometrie eines inäquidistanten Zahnrades eindeutig zu definieren, werden der Zahnpositionsfaktor  $\Delta Q_j$  und der Zahndickenfaktor  $\Delta s_j$  eingeführt. Kompatibilitätsgleichungen werden hergeleitet, um ein zu paarendes Zahnrad so auszugestalten, dass das Verzahnungsgesetz exakt eingehalten wird. Schließlich wird das Prinzip des Aufbaus in inäquidistanten Mustern vorgestellt, mit dem ein Kompromiss zwischen den Freiheiten bei der akustischen Gestaltung und bei der Wahl möglicher Übersetzungsverhältnisse möglich ist.

## 4 Auslegung von inäquidistanten Verzahnungen

In diesem Kapitel werden Methoden entwickelt, um inäquidistante Verzahnungen akustisch ausulegen. Die jeweiligen Modellierungsmethoden werden vorgestellt und auf ein konkretes Beispiel angewendet. Hierfür dienen Prüfverzahnungen und ein Getriebeprüfstand, in den die Prüfverzahnungen eingebaut werden. Beides wird in Abschnitt 4.1 vorgestellt. Darauf folgen die statische Modellierung (Abschnitt 4.2), die elastostatische Modellierung (Abschnitt 4.3) und die dynamische Modellierung (Abschnitt 4.4) der Stirnradpaarung. Die maschinenakustischen Eigenschaften des Getriebeprüfstandes werden in der maschinenakustischen Modellierung (Abschnitt 4.5) abgebildet. In Abschnitt 4.6 erfolgt eine experimentelle Validierung der Berechnungskette. Das Kapitel schließt mit einem Fazit in Abschnitt 4.7.

Die gesamte in diesem Kapitel entwickelte Berechnungskette basiert – bis auf die numerische Lösung der Bewegungsgleichung und die numerische Berechnung einiger Parameter – auf analytischen Gleichungen, weshalb sie im Folgenden *analytische Berechnungskette* genannt wird. Abbildung 4.1 zeigt schematisch den Aufbau der analytischen Berechnungskette.



**Abbildung 4.1:** analytische Berechnungskette zur akustischen Auslegung inäquidistanter Verzahnungen

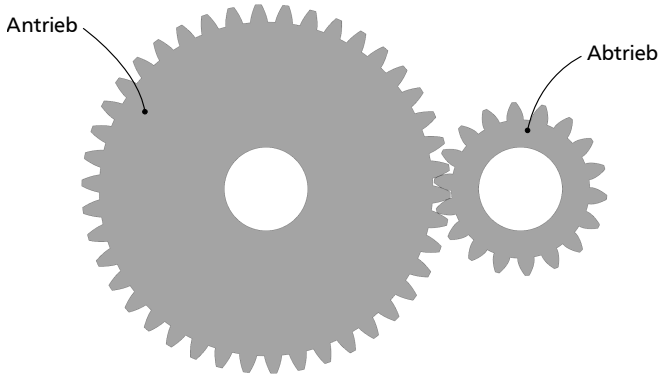
## 4.1 Prüfverzahnung und Getriebeprüfstand

Um die grundlegenden Methoden der akustischen Modellierung von inäquidistanten Verzahnungen zu erarbeiten, wird eine geradzahnte Stirnradpaarung als *äquidistante Prüfverzahnung* ausgewählt. Sie ist so gewählt, dass sie ein typisches, praxisnahes Beispiel aus der Antriebstechnik darstellt und sich dazu eignet, auch als inäquidistante Verzahnung ausgeführt zu werden. Die Verzahnungsdaten sind in Tabelle 4.1 gegeben.

**Tabelle 4.1:** Verzahnungsdaten der äquidistanten Prüfverzahnung

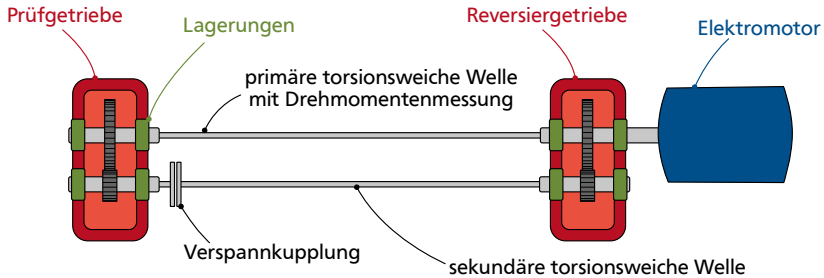
Bezeichnung	Variable	Einheit	Antrieb	Abtrieb
Bezugsprofil			DIN 867	
Normalmodul	$m_n$	m	$3 \cdot 10^{-3}$	
Zähnezahl	$z$	—	42	18
inäquidistante Musterlänge	$\Phi$	—	6	
Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$	rad	0,3491	
Achsabstand	$a_w$	m	$91,5 \cdot 10^{-3}$	
Zahnbreite	$b$	m	$20 \cdot 10^{-3}$	
Kopfspiel	$c_p$	m	$0,3 \cdot 10^{-3}$	
Schrägungswinkel	$\beta$	rad	0	
Profilverschiebung	$xm_n$	m	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
Elastizitätsmodul	$E$	$\frac{N}{m^2}$	$210 \cdot 10^9$	
Querkontraktionszahl	$\nu$	—	0,3	
Dichte	$\rho$	$\frac{kg}{m^3}$	7850	

Die Materialkennwerte entsprechen dem Werkstoff Stahl und sind der Literatur entnommen [26, 108, 109, 193]. Die inäquidistante Musterlänge  $\Phi$  wird zu sechs gewählt, um einen guten Kompromiss zwischen einem praxisnahen Übersetzungsverhältnis und der Möglichkeit einer möglichst starken Geräuschminderung zu erreichen. Abbildung 4.2 zeigt das CAD-Modell der äquidistanten Prüfverzahnung. Um die Komplexität der akustischen Modellierung so gering wie möglich zu halten, weist die äquidistante Prüfverzahnung keine Verzahnungskorrekturen, Profilkorrekturen und Fußausrundungen auf. Der Achsabstand ist mit  $91,5 \cdot 10^{-3}$  m so gewählt, dass er jenem der *FZG-Zahnrad-Verspannungs-Prüfmaschine* nach DIN 51354 [194, 195] und DIN ISO 14635-1 [196] entspricht. Das dort vorgestellte



**Abbildung 4.2:** äquidistante Prüfverzahnung, CAD-Modell

Prüfstandskonzept wurde ursprünglich zur Untersuchung von Schmieröleigenschaften entworfen, wird jedoch mittlerweile auch an vielen Stellen für akustische Untersuchungen verwendet [30, 31, 39, 74, 197]. Das Verspannungsprinzip des Getriebeprüfstandes ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Zwei Zahnradgetriebe mit

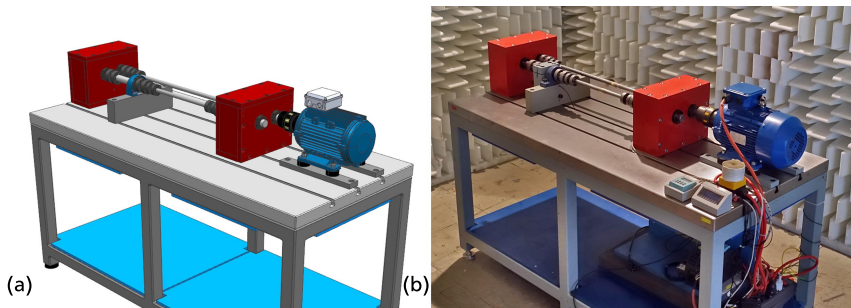


**Abbildung 4.3:** Aufbau eines Getriebeprüfstandes nach dem Verspannungsprinzip

gleicher Verzahnung (Prüfgetriebe und Reversiergetriebe) sind mittels torsionsweicher Wellen miteinander verbunden. Die Wellen sind so weich ausgelegt, dass statische Drehmomente übertragen, die beiden Getriebe jedoch aufgrund der Nachgiebigkeit der Wellen als dynamisch entkoppelt betrachtet werden können. Die sekundäre torsionsweiche Welle ist an der Verspannkupplung geteilt. Durch eine Relativedrehung der geteilten Wellenenden gegeneinander wird im Getriebeprüfstand eine mechanische Vorspannung eingebracht, die mittels Schließen der Verspannkupplung konserviert wird. Die beiden gleichen Getriebe sind somit in einem mechanischen Kreisschluss gegeneinander verspannt. Der Elektromotor muss nur die Reibmomente überwinden, um das vorgespannte Gesamtsystem in

Bewegung zu versetzen. Das mechanische Verspannungsprinzip hat den großen Vorteil, dass sich die von außen einzubringende Leistung auf die Reibleistung beschränkt. Elektrische Verspannungsprüfstände, die die mechanische Leistung mittels elektrischer Maschinen am An- und Abtrieb des Prüfgetriebes bereitstellen, sind zwar mechanisch einfacher aufgebaut, müssen jedoch enorme elektrische Leistungen bis hin zu mehreren hundert Kilowatt bereitstellen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein an die FZG-Zahnrad-Verspannungs-Prüfmaschine angelehnter Getriebeprüfstand aufgebaut. Er ist durch zwei gleiche, quaderförmige Getriebegehäuse (jeweils  $0,14 \cdot 0,3 \cdot 0,24 \text{ m}^3$  mit einer Wandstärke von  $0,02 \text{ m}$ ) aufgebaut, die mit einer massiven Grundplatte ( $1,6 \cdot 0,7 \cdot 0,05 \text{ m}^3$ ) aus Stahl verschraubt sind. Die Grundplatte ist auf einem Tischgestell aus Stahlprofilen montiert. Der Wellendurchmesser an den Zählrädern beträgt  $0,03 \text{ m}$ , der Durchmesser der torsionsweichen Wellen  $0,018 \text{ m}$ , um eine bestmögliche dynamische Entkopplung bei statischen Lasten bis  $200 \text{ N m}$  zu gewährleisten. Die Wellen sind mittels geräuscharmer Rillenkugellager gelagert. Durch den massiven Aufbau der Grundplatte und der Getriebegehäuse können deren elastische Verformungen vernachlässigt werden. An der primären torsionsweichen Welle sind Dehnungsmessstreifen in Vollbrückenschaltung zur Messung des Drehmomentes, wie in [198] beschrieben, angebracht. Der Antrieb erfolgt durch einen elektrischen Asynchronmotor (JS-Technik JS-MS2 100L1-3kW-2pol-B3), dessen Drehzahl mittels eines Frequenzumrichters (Siemens Sinamics G110) gesteuert wird. Abbildung 4.4 zeigt das CAD-Modell und den real aufgebauten Getriebeprüfstand.



**Abbildung 4.4:** im Rahmen dieser Arbeit aufgebauter Getriebeprüfstand; CAD-Modell (a) und real aufgebauter Prüfstand (b)

## 4.2 Statische Modellierung

In der statischen Modellierung wird die Geometrie der Verzahnung vollständig definiert. Dabei werden zunächst alle geometrischen Parameter, die zur Definition einer konventionellen Verzahnung notwendig sind, zusammengetragen. Zur vollständigen Definition der Geometrie von inäquidistanten Verzahnungen sind zusätzlich die inäquidistante Musterlänge  $\Phi$  sowie die Zahnpositionsfaktoren  $\Delta Q_{I,j}$  und die Zahndickenfaktoren  $\Delta S_{I,j}$  des Antriebs zu definieren.

### 4.2.1 Bestimmung der geometrischen Parameter

Die äquidistante Prüfverzahnung ist durch die in Tabelle 4.1 auf S. 61 gegebenen geometrischen Parameter vollständig definiert. Von dieser Verzahnung wird die *inäquidistante Prüfverzahnung* abgeleitet. Die inäquidistante Musterlänge wird aufgrund des größten gemeinsamen Teilers der Zähnezahlen von Antrieb und Abtrieb mit 42 beziehungsweise 18 Zähnen auf den Wert  $\Phi = 6$  festgelegt. Theoretisch wären auch inäquidistante Musterlängen von zwei oder drei Zähnen möglich, was jedoch die Möglichkeiten zur unregelmäßigen Ausgestaltung zu weit einschränken würde. Für jeden der sechs Zähne des inäquidistanten Musters des Antriebs können die Zahnposition und die Zahndicke individuell gewählt werden – wobei gilt:  $\Delta Q_{I,1} \stackrel{!}{=} 0$ , wie in Abschnitt 3.1.4 ab S. 51 beschrieben. Da keine Erfahrungswerte bezüglich akustisch vorteilhafter Werte für diese Parameter vorliegen, werden Werte aus der Literatur zur Geräuschminderung an Lüftern übernommen [128]. Trotz der prinzipiell unterschiedlichen Anregungsmechanismen von Lüftern und Zahnradgetrieben wird die Übernahme der Werte als zweckmäßiger Ansatz erachtet.

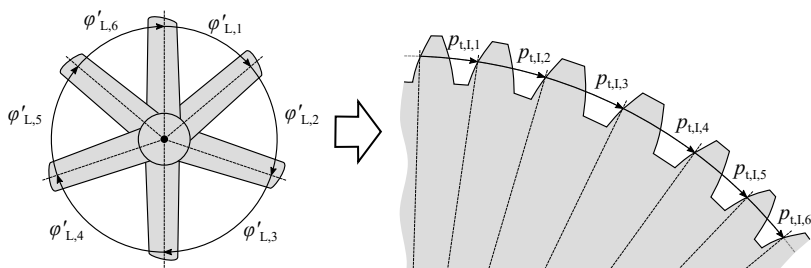
### Inäquidistanz-Parameter des Antriebs

MELLIN und SOVRAN [128] liefern konkrete Zahlenwerte für theoretisch optimale Schaufelteilungen bei Axiallüftern zur Minimierung der tonhaltigen Geräuschanteile. Sie gelten allgemein als gute Startwerte zur Minderung tonhaltiger Geräuschkomponenten in verschiedenen Bereichen [127]. Die von MELLIN und SOVRAN [128] gegebenen Zahlenwerte für die Schaufelteilungen  $\varphi'_{L,j}$  eines unausgewuchteten Lüfters mit sechs Schaufeln werden für die Ausgestaltung der inäquidistanten Prüfverzahnung übernommen. Die zeitliche Abfolge der Anregungen durch die Lüfterschaukeln wird auf die zeitliche Abfolge des Zahneintrittes übertragen. Im hier betrachteten Fall einer Drehung des Antriebs in mathematisch positive Richtung erfolgt die Übertragung somit auf die Positionen der Linksflanken, siehe Abbildung 4.5. Die unregelmäßigen Schaufelwinkel  $\varphi'_{L,j}$  lassen sich daher aus den Schaufelwinkeln eines regelmäßig (äquidistant) aufgebauten Lüfters  $\varphi_{L,j}$  (hier  $2\pi/6$  rad) und der äquidistanten Teilung am Antrieb  $p_{t,I,aq}$  proportional in die unregelmäßigen Stirnteilungen  $p_{t,I,j}$  (Linksflanke zu Linksflanke) umrechnen



$$p_{t,l,j} = \frac{\varphi'_{L,j}}{\varphi_{L,j}} p_{t,l,aq}. \quad (4.1)$$

$p_{t,l,j}$	in m	inäquidistante Teilung, Stirnschnitt, Antrieb	$\varphi'_{L,j}$	in rad	unregelmäßiger Schaufelwinkel
$j$	in —	Zahnnummer	$\varphi_{L,j}$	in rad	regelmäßiger Schaufelwinkel
$p_{t,l,aq}$	in m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt, Antrieb			



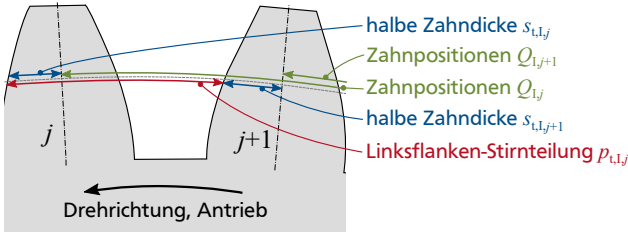
**Abbildung 4.5:** Übertragung der Lüfterteilungen von MELLIN und SOVRAN [128] auf die Linksflankenteilung eines Zahnrades

Analog dem Zahnpositionsfaktor aus Gleichung (3.3) auf S. 45 kann zur Vereinfachung der nachfolgenden Berechnungen auch ein *Zahnteilungsfaktor* errechnet werden

$$\Delta p_{l,j} = \frac{p_{t,l,j} - p_{t,l,aq}}{p_{t,l,aq}}. \quad (4.2)$$

$\Delta p_{l,j}$	in —	Zahnteilungsfaktor, Antrieb	$j$	in —	Zahnnummer
$p_{t,l,j}$	in m	inäquidistante Teilung, Stirnschnitt, Antrieb	$p_{t,l,aq}$	in m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt, Antrieb

Abbildung 4.6 zeigt die für die nachfolgenden Überlegungen relevanten Parameter. Mit den Zahnteilungsfaktoren  $\Delta p_{l,j}$  steht eine Information pro Zahn zur Verfügung, wobei jeder Zahn durch zwei Inäquidistanz-Parameter (Zahnpositionsfaktor und Zahndickenfaktor) beschrieben wird. Es muss also eine weitere Annahme getroffen werden. Um keine zu extremen Unterschiede zwischen den Zahndicken und den angrenzenden Lückenweiten entstehen zu lassen, wird gefordert, dass sich die absoluten Änderungen der Stirnteilungen  $\Delta p_{l,j} p_{t,l,aq}$  gleichmäßig auf die absoluten Änderungen der Zahndicken  $\Delta s_{l,j} p_{t,l,aq}$  und die absoluten Änderungen der Lückenweiten aufteilen. Die absoluten Änderungen der Zahndicken entspre-



**Abbildung 4.6:** Zahndicken, Zahnpositionen und Stirnteilung an einem Zahnrad

chen daher den halben absoluten Änderungen der Stirnteilungen. Somit ergibt sich für die Zahndickenfaktoren

$$\Delta s_{I,j} p_{t,I,aq} = \frac{\Delta p_{I,j} p_{t,I,aq}}{2} \rightarrow \Delta s_{I,j} = \frac{\Delta p_{I,j}}{2} \quad (4.3)$$

$\Delta s_{I,j}$	in	–	Zahndickenfaktor, Antrieb	$j$	in	–	Zahnnummer
$p_{t,I,aq}$	in	m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt, Antrieb	$\Delta p_{I,j}$	in	–	Zahnteilungsfaktor, Antrieb

Mithilfe von Abbildung 4.6 können schließlich die Werte für die Zahnpositionsfaktoren  $\Delta Q_{I,j}$  bestimmt werden. Die absolute Verschiebung  $\Delta Q_{I,j+1} p_{t,I,aq}$  des Zahnes  $j+1$  in positive Richtung (in Abbildung 4.6 nach links) ergibt sich aus der absoluten Verschiebung  $\Delta Q_{I,j} p_{t,I,aq}$ , der negativen absoluten Änderung der Stirnteilung  $-\Delta p_{I,j} p_{t,I,aq}$ , der halben absoluten Zahndickenänderung  $\Delta s_{I,j} p_{t,I,aq}$  und der negativen halben absoluten Zahndickenänderung  $-\Delta s_{I,j+1} p_{t,I,aq}$ . Entsprechend kann  $\Delta Q_{I,j+1} p_{t,I,aq}$  rekursiv wie folgt berechnet werden

$$\Delta Q_{I,j+1} p_{t,I,aq} = p_{t,I,aq} \left( \Delta Q_{I,j} - \Delta p_{I,j} + \frac{\Delta s_{I,j} - \Delta s_{I,j+1}}{2} \right), \quad (4.4)$$

$\Delta Q_{I,j}$	in	–	Zahnpositionsfaktor, Antrieb	$j$	in	–	Zahnnummer
$p_{t,I,aq}$	in	m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt, Antrieb	$\Delta p_{I,j}$	in	–	Zahnteilungsfaktor, Antrieb
$\Delta s_{I,j}$	in	–	Zahndickenfaktor, Antrieb				

wobei aufgrund der Bedingung zur Vermeidung von redundanten Kombinationen aus Abschnitt 3.1.4 ab S. 51 gilt:

$$\Delta Q_{I,1} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.5)$$

## Inäquidistanz-Parameter des Abtriebs

Die Zahnpositionsfaktoren  $\Delta Q_{II,j}$  und die Zahndickenfaktoren  $\Delta S_{II,j}$  des Abtriebs können anhand von Gleichung (3.16) auf S. 54 beziehungsweise Gleichung (3.15) auf S. 53 errechnet werden.

## Zusammenfassung der Inäquidistanz-Parameter

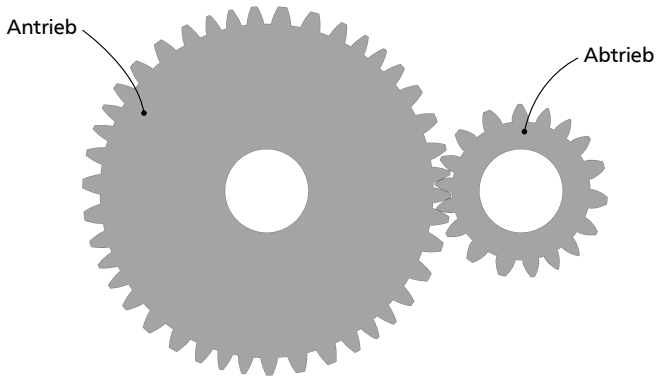
Die anhand der entwickelten Gleichungen errechneten Inäquidistanz-Parameter mit den zugrunde liegenden Schaufelteilungen  $\varphi'_{L,j}$  nach MELLIN und SOVRAN [128] sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Die absoluten Werte der Zahnpositionen und Zahndicken, die sich daraus für die äquidistante und inäquidistante Prüfverzahnung ergeben, sind in Anhang A.1 gegeben.

**Tabelle 4.2:** Inäquidistanz-Parameter der inäquidistanten Prüfverzahnung

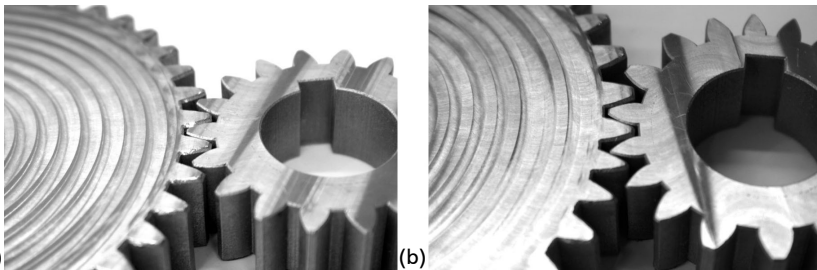
Variable	Einheit	Zahnnummer $j$					
		1	2	3	4	5	6
$\varphi'_{L,j}$	rad	0,871	1,025	1,246	1,246	1,025	0,871
$p_{t,I,j}$	m	0,0078	0,0092	0,0112	0,0112	0,0092	0,0078
$\Delta p_{I,j}$	–	-0,168	-0,022	0,19	0,19	-0,022	-0,168
$\Delta s_{I,j}$	–	-0,084	-0,011	0,095	0,095	-0,011	-0,084
$\Delta Q_{I,j}$	–	0	0,132	0,1	-0,09	-0,227	-0,168
$\Delta S_{II,j}$	–	-0,084	-0,084	-0,011	0,095	0,095	-0,011
$\Delta Q_{II,j}$	–	-0,084	0,084	0,143	0,005	-0,185	0,216

### 4.2.2 Berechnung der Gesamtgeometrie

Mit den errechneten Werten lässt sich schließlich die Geometrie der Zahnradpaarung vollständig berechnen. Abbildung 4.7 zeigt das CAD-Modell der inäquidistanten Prüfverzahnung. Die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung werden mittels des 3D-Druckverfahrens des selektiven Laserschmelzens hergestellt. Der verwendete Werkstoff ist Stahl (1.4542). Die Zahnräder werden flach liegend mit einer Schichtdicke von 25  $\mu\text{m}$  gedruckt. Die sich daraus ergebende Oberflächenrauheit beträgt etwa  $R_z \approx 30 \mu\text{m}$ . Die Stirnseiten der Zahnräder werden geplant, die Zahnflanken werden nicht nachbearbeitet. Abbildung 4.8 zeigt die 3D-gedruckten Prüfverzahnungen. Um die Verzahnungen im in Abschnitt 4.1 ab S. 61 vorgestellten Getriebeprüfstand untersuchen zu können, werden von jeder Verzahnung zwei Paare hergestellt.



**Abbildung 4.7:** inäquidistante Prüfverzahnung, CAD-Modell



**Abbildung 4.8:** mittels selektiven Laserschmelzens hergestellte Prüfverzahnungen; äquidistante Prüfverzahnung (a) und inäquidistante Prüfverzahnung (b)

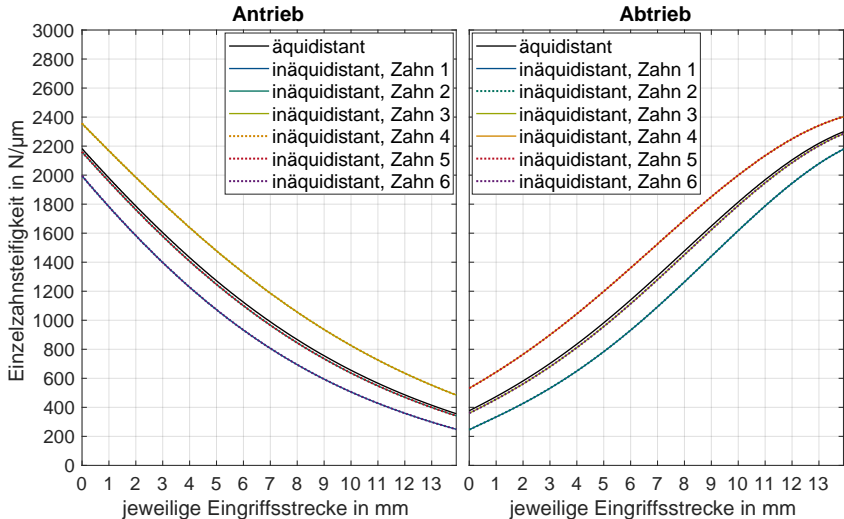
### 4.3 Elastostatische Modellierung

In der elastostatischen Modellierung werden die analytischen Ansätze zur Modellierung der Verzahnungssteifigkeit und der lastbedingten Überdeckungsvergrößerung von konventionellen äquidistanten Verzahnungen auf inäquidistante Verzahnungen übertragen. Eine Validierung erfolgt einerseits anhand eines Abgleiches mit Ergebnissen von experimentellen Simulationen aus der Literatur und andererseits anhand eines Abgleiches mit den Ergebnissen aus einer FE-Berechnung.

#### 4.3.1 Modellierung der Verzahnungssteifigkeit

Der in Abschnitt 2.4.1 ab S. 21 vorgestellte analytische Ansatz nach WEBER und BANASCHEK [67] zur Berechnung der Zahnpaarsteifigkeiten ist für beliebige Zahnformen gültig, weshalb angenommen wird, dass er auch für inäquidistante Verzahnungen gültig ist. Analog den Beschreibungen in Abschnitt 2.4.1 werden

die Einzelzahnsteifigkeiten für die Prüfverzahnungen in Abhängigkeit von der jeweiligen Eingriffsstrecke berechnet, siehe Abbildung 4.9. Es werden nur die Einzelzahnsteifigkeiten eines inäquidistanten Musters ( $\Phi = 6$  Zähne) dargestellt, da sich die Geometrie im Anschluss daran wiederholt. Für die Zähne des Antriebs



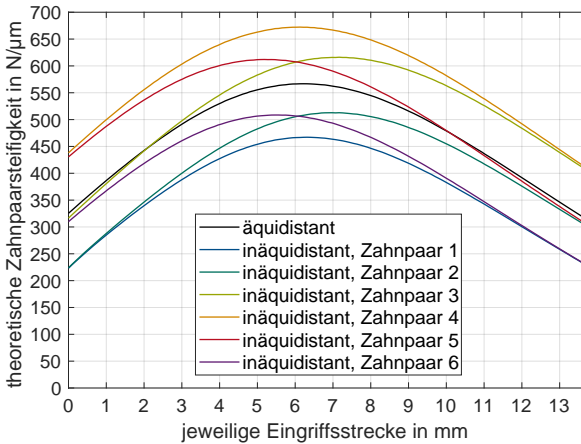
**Abbildung 4.9:** nach dem Ansatz von WEBER und BANASCHEK [67] berechnete Einzelzahnsteifigkeiten der Prüfverzahnungen (analytische Berechnung)

fällt die Einzelzahnsteifigkeit über der Eingriffsstrecke kontinuierlich ab, da der Kontaktpunkt vom Zahnfuß zum Zahnkopf wandert, wodurch die effektive Länge des als eingespannten Balken gedachten Zahnes vergrößert wird. Bei den Zähnen des Abtriebs steigt die Einzelzahnsteifigkeit entlang der Eingriffsstrecke kontinuierlich an, da hier der Kontaktpunkt vom Zahnkopf zum Zahnfuß wandert. Für Zähne mit gleichen Dicken (1 und 6, 2 und 5, 3 und 4 am Antrieb sowie 1 und 2, 3 und 6, 4 und 5 am Abtrieb, siehe Anhang A.1 ab S. 150) ergeben sich die gleichen Verläufe der Einzelzahnsteifigkeit.

Der Anteil der HERTZ'schen Verformung wird nach dem Ansatz von WEBER und BANASCHEK [67] anhand von Gleichung (2.17) auf S. 22 berechnet. Ein wichtiger Aspekt hierbei ist die Nichtlinearität des Ansatzes. Der Steifigkeitsanteil der HERTZ'schen Verformung steigt progressiv mit der angelegten Last an.

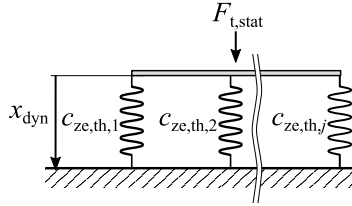
Die theoretischen Zahnpaarsteifigkeiten  $c_{ze,th}$  werden für jedes Zahnpaar anhand von Gleichung (2.18) auf S. 22 errechnet. Die theoretischen Zahnpaarsteifigkeiten

sind in Abbildung 4.10 dargestellt. Die höchsten Werte für die theoretische Zahn-



**Abbildung 4.10:** nach dem Ansatz von WEBER und BANASCHEK [67] berechnete theoretische Zahnpaarsteifigkeiten der Prüfverzahnungen (analytische Berechnung)

paarsteifigkeit erreicht das Zahnpaar 4, da hier zwei dicker ausgeführte Zähne aufeinander treffen. Die niedrigsten Werte ergeben sich für das Zahnpaar 1, da die Paarung aus zwei dünner ausgeführten Zähnen besteht. Die theoretischen Zahnpaarsteifigkeiten aller anderen Zahnpaare liegen dazwischen und haben aufgrund der Übergänge zwischen unterschiedlichen Zahndicken unterschiedliche Charakteristiken. Anhand der in Abschnitt 4.2.1 ab S. 64 berechneten absoluten Zahnpositionen werden die theoretischen Zahnpaarsteifigkeiten über dem Drehwinkel des Antriebs angeordnet und superponiert. Für die exakte Berechnung der theoretischen Verzahnungssteifigkeit muss jedoch bekannt sein, wie sich die im Zahneingriff wirkende Gesamtlast auf die einzelnen Zahnpaare aufteilt. Mit dieser Information kann die Nichtlinearität der HERTZ'schen Verformung für die aktuelle Lastverteilung berechnet werden. Als Modell zur Berechnung der Lastverteilung werden die theoretischen Zahnpaarsteifigkeiten als lineare Federn angenommen. Befinden sich zum Zeitpunkt  $t$  zum Beispiel zwei Zahnpaare im Eingriff, wird die theoretische Zahnpaarsteifigkeit als Parallelschaltung zweier linearer Federn modelliert, siehe Abbildung 4.11. Die Berechnung muss für jede Winkelstellung der Zahnräder und aufgrund der Nichtlinearität iterativ durchgeführt werden. Im ersten Schritt wird der Steifigkeitsanteil durch die HERTZ'sche Verformung vernachlässigt. Die aktuelle Kraft am Zahnpaar  $F_{ze,j}$  ergibt sich aus der statischen Vorlast im Zahneingriff  $F_{t,stat}$ , den theoretischen Zahnpaarsteifigkeiten  $c_{ze,th,j}$



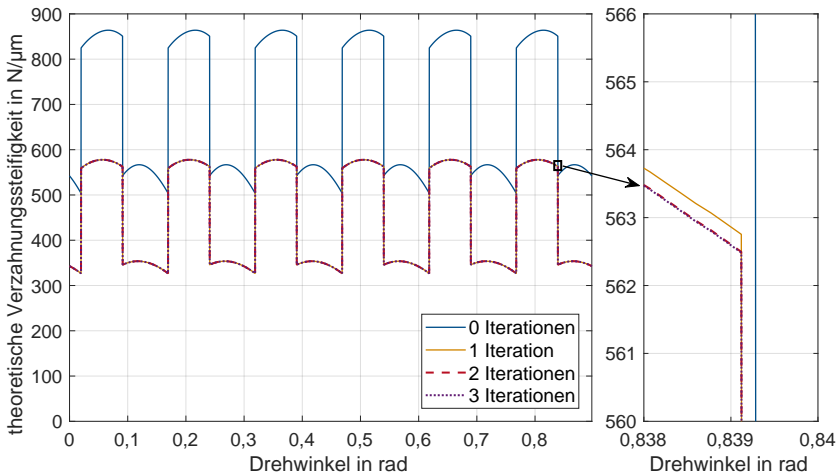
**Abbildung 4.11:** Berechnung der theoretischen Verzahnungssteifigkeit durch Superposition der als lineare Federn modellierten theoretischen Zahnpaarsteifigkeiten

und der theoretischen Verzahnungssteifigkeit  $c_{z,th}$  (Summe der theoretischen Zahnpaarsteifigkeiten aller aktuell im Eingriff befindlichen Zahnpaare)

$$F_{ze,j} = F_{t,stat} \frac{c_{ze,th,j}}{c_{z,th}} \quad (4.6)$$

$F_{ze,j}$	in N	Kraft am Zahnpaar	$j$	in –	Zahnpaarnummer
$c_{ze,th,j}$	in $\frac{N}{m}$	theoretische Zahnpaarsteifigkeit	$F_{t,stat}$	in N	statische Vorlast
$c_{z,th}$	in $\frac{N}{m}$	theoretische Verzahnungssteifigkeit			

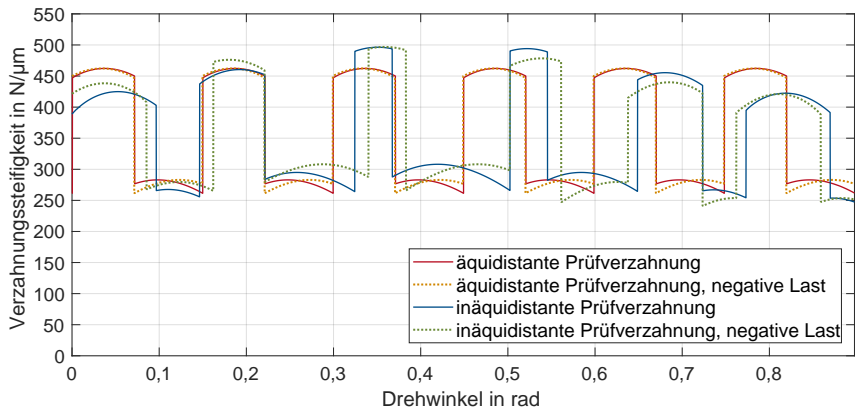
Mit den errechneten Werten für  $F_{ze,j}$  können die HERTZ'schen Verformungen für die jeweiligen Zahnpaare zum jeweiligen Zeitpunkt anhand von Gleichung (2.17) auf S. 22 berechnet werden. Dadurch ändern sich die Werte der Zahnpaarsteifigkeiten  $c_{ze,th,j}$ , wodurch Gleichung (4.6) mit den neuen Werten nochmals angewendet werden muss. Es ergeben sich neue Werte für die Kräfte an den Zahnpaaren  $F_{ze,j}$ , wodurch sich wiederum mittels Gleichung (2.17) neue Werte für die HERTZ'schen Verformungen ergeben. Dieses iterative Vorgehen muss so oft wiederholt werden, bis das Ergebnis konvergiert. Abbildung 4.12 zeigt die theoretischen Verzahnungssteifigkeiten der äquidistanten Prüfverzahnung für drei Iterationsschritte. Wird keine Iteration durchgeführt, kann der Steifigkeitsanteil durch die HERTZ'sche Verformung nicht berechnet werden. Entsprechend sind die Werte der theoretischen Verzahnungssteifigkeit deutlich erhöht. Schon nach einer Iteration wird ein Kurvenverlauf errechnet, der sich im Bereich des Doppelengriffes um nur noch  $0,2 \text{ N}/\mu\text{m}$  von den Ergebnissen nach mehreren Iterationsschritten unterscheidet (siehe Detailansicht in Abbildung 4.12 rechts). Nach mehr als zwei Iterationsschritten sind die Abweichungen vernachlässigbar. Da der Berechnungsaufwand mit zunehmender Anzahl an Iterationen steigt, wird als Kompromiss zwischen einer genauen und einer effizienten Berechnung eine Anzahl von zwei Iterationen als angemessen erachtet. Wie in Abschnitt 2.4.1 ab S. 21 beschrieben, wird die theoretische Verzahnungssteifigkeit  $c_{z,th}$  mittels Multiplikation mit 0,8 in die Verzahnungssteifigkeit  $c_z$  umgerechnet (siehe



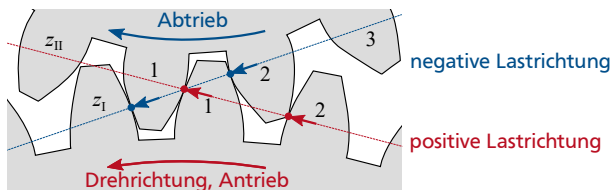
**Abbildung 4.12:** theoretische Verzahnungssteifigkeit der äquidistanten Prüfverzahnung für mehrere Iterationen bei der Berechnung der Lastverteilung (analytische Berechnung)

Gleichung (2.19) auf S. 23). Abbildung 4.13 zeigt den Verlauf der (mittels des Faktors 0,8 korrigierten) Verzahnungssteifigkeiten der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung. Die Verzahnungssteifigkeit der äquidistanten Prüfverzahnung ist aufgrund des regelmäßigen geometrischen Aufbaus sowohl im zeitlichen Verlauf als auch im Verlauf der Amplituden periodisch. Das führt zu Geräuschen mit einer ausgeprägten Tonhaltigkeit (Getriebeheulen). Die Verzahnungssteifigkeit der inäquidistanten Prüfverzahnung ist sowohl im zeitlichen Verlauf als auch im Verlauf der Amplituden unregelmäßig ausgeführt. Wie in Abschnitt 3.1 ab S. 43 beschrieben, werden der unregelmäßige zeitliche Verlauf hauptsächlich durch die unregelmäßigen Zahnpositionen und der unregelmäßige Verlauf der Amplituden durch die unregelmäßigen Zahndicken erzeugt. Die unregelmäßige Verzahnungsgeometrie führt somit tatsächlich zu einer unregelmäßigen Anregungscharakteristik. Während es bei konventionellen äquidistanten Verzahnungen für den Verlauf der Verzahnungssteifigkeit praktisch keine Rolle spielt, ob die Zahnräder positiv oder negativ (Vertauschung von Antrieb und Abtrieb) belastet werden, hat das bei inäquidistanten Verzahnungen einen sehr großen Einfluss auf den Verlauf. Abbildung 4.14 zeigt die sich ergebenden Zahnpaare bei positiver und negativer Lastrichtung. Bei positiver Lastrichtung wird die Kraft entsprechend der in Abschnitt 4.3.2 ab S. 75 eingeführten Konvention zur Nummerierung der Zähne über Zahnpaare, bestehend aus Zähnen mit der gleichen Nummer, übertragen (Zahn  $j$  zu Zahn  $j$ ). Bei negativer Lastrichtung (Antrieb und Abtrieb vertauscht) hingegen ergeben sich die Zahnpaare aus





**Abbildung 4.13:** Verzahnungssteifigkeit der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; bei der inäquidistanten Prüfverzahnung hat die Lastrichtung einen deutlichen Einfluss auf den Verlauf der Verzahnungssteifigkeit (analytische Berechnung)

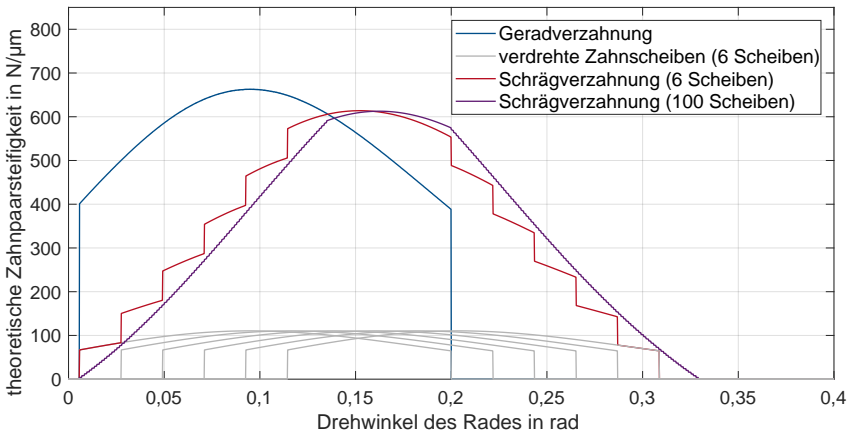


**Abbildung 4.14:** unterschiedliche kraftübertragenden Zahnpaare bei unterschiedlichen Lastrichtungen

Zähnen unterschiedlicher Nummer (Zahn  $j$  zu Zahn  $j+1$ ). Bei konventionellen äquidistanten Verzahnungen ändert sich durch das Umkehren der Lastrichtung die Bewegungsrichtung des Kraftangriffspunktes. Dieser wandert am Antrieb vom Zahnfuß an den Zahnkopf statt vom Zahnkopf an den Zahnfuß. Der Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit wird invertiert, wodurch sich die in Abbildung 4.13 dargestellten geringfügigen Abweichungen zwischen den Lastrichtungen erklären lassen. Da, unter Vernachlässigung eventueller Fertigungs- und Montageteranzen, jeder Zahn gleich ausgeführt ist, spielt die unterschiedliche Lastrichtung somit praktisch keine Rolle. Da bei inäquidistanten Verzahnungen jedoch die Zähne individuell unterschiedlich ausgeführt sind, ändern sich durch die unterschiedlichen Lastrichtungen somit auch die Verläufe der Zahnpaarsteifigkeiten und damit die Verläufe der Verzahnungssteifigkeit. Diese Eigenschaft von inäquidistanten Verzahnungen erhöht einerseits die Komplexität bei der Auslegung, bietet aber

andererseits auch die Chance, die Geräuschcharakteristik bewusst unterschiedlich in unterschiedliche Lastrichtungen auslegen zu können.

Mit dem beschriebenen Vorgehen lassen sich mittels des in Abschnitt 2.4.1 ab S. 21 beschriebene Scheibenmodells ebenfalls die Verzahnungssteifigkeiten von Schrägverzahnungen berechnen, siehe Abbildung 4.15. Die theoretische Zahn-



**Abbildung 4.15:** durch das Scheibenmodell berechnete Zahnpaarsteifigkeit einer Schrägverzahnung (analytische Berechnung)

paarsteifigkeit wird auf die einzelnen Zahnscheiben aufgeteilt, wodurch eine theoretische Zahnpaarsteifigkeit pro Scheibe entsteht. Bei der Superposition zur theoretischen Verzahnungssteifigkeit der Schrägverzahnung müssen neben den absoluten Zahnpositionen im Stirnschnitt auch die Verschiebungen durch die gegeneinander verdrehten Scheiben aufgrund des Schrägungswinkels  $\beta$  berücksichtigt werden. Durch die Diskretisierung in Zahnscheiben entstehen aufgrund der Superposition treppenförmig an- und absteigende Flanken. Je feiner die Diskretisierung, desto weniger ausgeprägt ist dieser Effekt. Abbildung 4.15 zeigt weiterhin die über einen längeren Winkel gestreckte Zahnpaarsteifigkeit der Schrägverzahnung. In Kombination mit der geringeren Maximalamplitude führt dies insgesamt zu einer weniger stark wechselnden Verzahnungssteifigkeit und so zu einer geringeren Geräuschanregung. Bei der iterativen Berechnung der Lastverteilung werden die theoretischen Zahnpaarsteifigkeitsanteile aller im Eingriff befindlichen Zahnscheiben parallel geschaltet. Wie in Abschnitt 2.4.1 ab S. 21 beschrieben, vernachlässigt das Scheibenmodell die gegenseitige Stützwirkung

benachbarter Zahnscheiben und führt damit tendenziell zu verringerten Werten der berechneten Verzahnungssteifigkeiten.

### 4.3.2 Modellierung der lastbedingten Überdeckungsvergrößerung

Durch die elastische Verformung der Verzahnung unter Last treten die Zahnpaare früher in und später aus dem Eingriff als bei einer ideal unverformten Verzahnung. Die hier vorgestellte Modellierungsmethode ist angelehnt an BAETHGE et al. [74, 95, 96].

Mithilfe der Verzahnungssteifigkeit ist – unter Vernachlässigung dynamischer Effekte – der Verformungszustand der Verzahnung zu jedem Zeitpunkt  $t$  bekannt:

$$x_{\text{stat}}(t) = \frac{F_{t,\text{stat}}}{c_z(t)}. \quad (4.7)$$

$x_{\text{stat}}$	in m	statische Auslenkung	$t$	in s	Zeit
$F_{t,\text{stat}}$	in N	statische Vorlast	$c_z$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Verzahnungssteifigkeit

Außerdem kann anhand der Geometrie der ideal unverformten Verzahnung die Distanz zwischen zwei in Eingriff tretenden Zähnen berechnet werden, siehe Abbildung 4.16. Durch einen Vergleich der idealen Distanzen am Zahneintritt

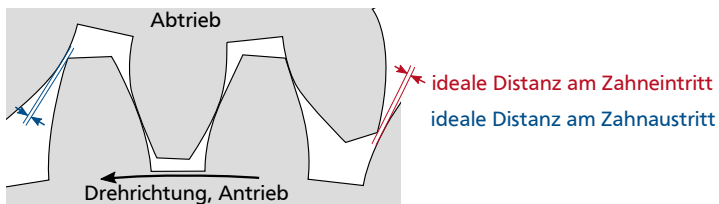
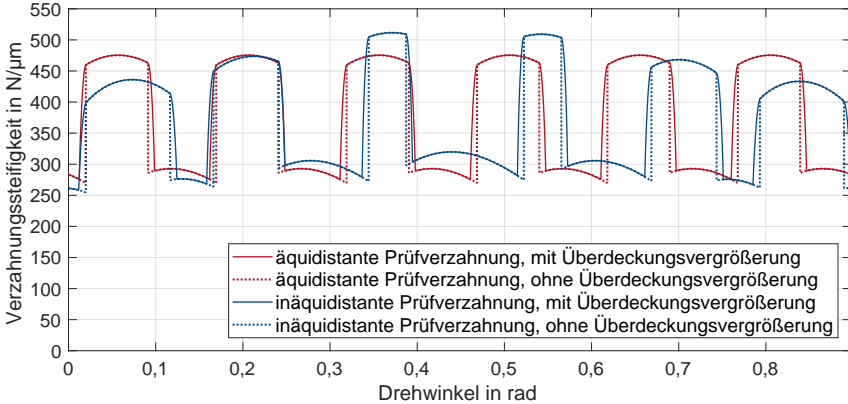


Abbildung 4.16: ideale Distanzen beim Zahneintritt und beim Zahnaustritt

aller in den Eingriff tretenden Zahnpaare zu jedem Zeitpunkt mit dem Betrag der aktuellen elastischen Verformung kann der Zeitpunkt bestimmt werden, zu dem die Zähne frühzeitig in Kontakt treten. Analog dazu kann mittels eines Vergleiches der idealen Distanz am Zahnaustritt mit dem Betrag der aktuellen elastischen Verformung der Zeitpunkt bestimmt werden, zu dem die Zähne erstmalig ihren Kontakt verlieren. In den Zwischenbereichen findet ein kontinuierlicher Übergang zwischen dem Zustand ohne und mit vollständigem Eingriff des Zahnpaars statt. Die Verzahnungssteifigkeit ändert sich in diesen Bereichen somit nicht sprunghaft, sondern kontinuierlich. Um diesen Übergang möglichst kontinuierlich darzustellen, wird zwischen dem erstmaligen (letztmaligen) Kontaktpunkt

und zwei Punkten bei vollständigem Kontakt quadratisch interpoliert. Durch die quadratische Interpolation entsteht ein glatter Verlauf beim Übergang zum vollständigen Kontakt. Abbildung 4.17 zeigt die Verläufe der Verzahnungssteifigkeit der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung mit und ohne Überdeckungsvergrößerung bei einer Last von 200 N m.



**Abbildung 4.17:** Verzahnungssteifigkeiten mit und ohne Überdeckungsvergrößerung; 200 N m am Antrieb (analytische Berechnung)

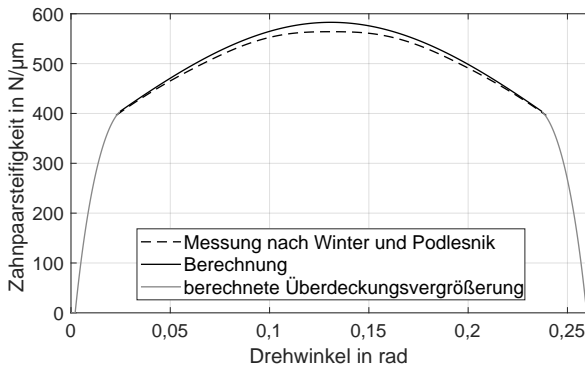
### 4.3.3 Validierung der Verzahnungssteifigkeit mittels Literatur

Die experimentelle Bestimmung der Verzahnungssteifigkeit ist aufgrund der sehr geringen Verformungen (wenige  $\mu\text{m}$ ) bei hohen Lasten sehr aufwändig. In der Literatur gibt es daher nur wenige Angaben zu experimentell ermittelten Verzahnungssteifigkeiten. Abbildung 4.18 zeigt die von WINTER und PODLESNIK [69] experimentell ermittelte Zahnpaarsteifigkeit einer Geradverzahnung im Vergleich zu den mit der hier vorgestellten Methode berechneten Ergebnissen. Die Verzahnungsdaten sind in Tabelle 4.3 gegeben.

Die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der experimentellen Simulation und den berechneten Ergebnissen ist als sehr gut zu bewerten. Die größten Abweichungen ergeben sich in der Mitte des Eingriffes und betragen etwa 3%. Den Effekt der Überdeckungsvergrößerung konnten WINTER und PODLESNIK [69] aufgrund der Untersuchung nur eines Zahnpaars nicht abbilden. In der Berechnung hingegen kann die Überdeckungsvergrößerung bestimmt werden (siehe graue Linien in Abbildung 4.18).

**Tabelle 4.3:** Verzahnungsdaten der von WINTER und PODLESNIK [69] in einer experimentellen Simulation untersuchten Verzahnung

Bezeichnung	Variable	Einheit	Antrieb	Abtrieb
Zähnezahl	$z$	—	48	48
Normalmodul	$m_n$	m	0,01	
Achsabstand	$a_w$	m	0,48	
Profilverschiebung	$xm_n$	m	0	0
Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$	rad	0,341	
Schrägungswinkel	$\beta$	rad	0	
Kopfhöhenänderungsfaktor	$k$	—	-0,078	-0,078
Zahnbreite	$b$	m	0,04	0,04
Lastmoment	$M$	N m	18000	



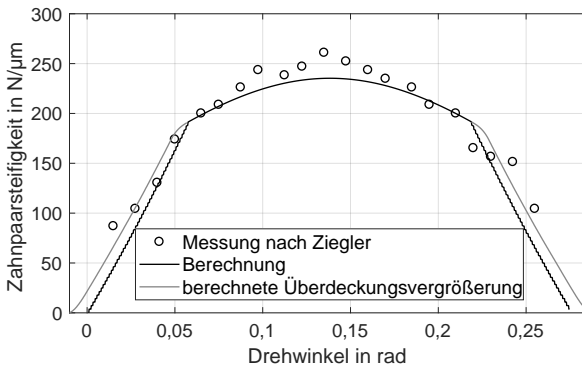
**Abbildung 4.18:** von WINTER und PODLESNIK [69] in einer experimentellen Simulation ermittelte Zahnpaarsteifigkeit einer Geradverzahnung im Vergleich zu den mit der hier vorgestellten Methode berechneten Ergebnissen (experimentelle Simulation aus der Literatur und analytische Berechnung)

ZIEGLER [61, 199] führt experimentelle Simulationen an Schrägverzahnungen durch. Abbildung 4.19 zeigt die Ergebnisse von Ziegler im Vergleich zu den mit der hier vorgestellten Methode berechneten Ergebnissen. Tabelle 4.4 gibt die Verzahnungsdaten der von ZIEGLER untersuchten Verzahnung an.

Auch die Daten der experimentellen Simulation von ZIEGLER [61] passen gut zu der hier berechneten Zahnpaarsteifigkeit. Insgesamt liegen die experimentell ermittelten Werte tendenziell höher als die berechneten Werte. Dies kann auf

**Tabelle 4.4:** Verzahnungsdaten der von ZIEGLER [61] in einer experimentellen Simulation untersuchten Verzahnung

Bezeichnung	Variable	Einheit	Antrieb	Abtrieb
Zähnezahl	$z$	—	49	49
Normalmodul	$m_n$	m	0,0025	
Achsabstand	$a_w$	m	0,125	
Profilverschiebung	$xm_n$	m	0	0
Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$	rad	0,341	
Schrägungswinkel	$\beta$	rad	0,2	
Kopfhöhenänderungsfaktor	$k$	—	0	0
Zahnbreite	$b$	m	0,01775	0,01775
Lastmoment	$M$	N m		183



**Abbildung 4.19:** von ZIEGLER [61] in einer experimentellen Simulation ermittelte Zahnpaarsteifigkeit einer Schrägverzahnung im Vergleich zu den mit der hier vorgestellten Methode berechneten Ergebnissen (experimentelle Simulation aus der Literatur und analytische Berechnung)

die durch das Scheibenmodell vernachlässigte Stützwirkung der Zahnscheiben zurückgeführt werden.

Das im Rahmen dieser Arbeit implementierte Berechnungsverfahren für die Verzahnungssteifigkeit von Stirnrädern ist für konventionelle Gerad- und Schrägverzahnungen anhand von experimentellen Simulationen aus der Literatur somit erfolgreich validiert.

---

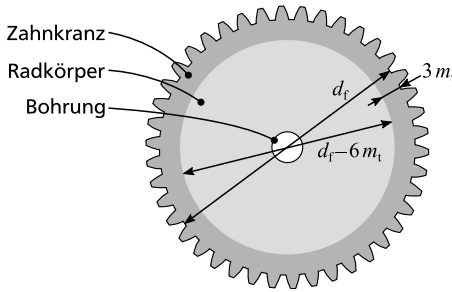
#### 4.3.4 Validierung der Verzahnungssteifigkeit mittels FE-Berechnung

Besonders relevant für diese Arbeit ist die korrekte Modellierung der Verzahnungssteifigkeit von inäquidistanten Verzahnungen. Da inäquidistante Verzahnungen bisher noch nicht wissenschaftlich untersucht wurden, entfällt die Möglichkeit einer Validierung mit Daten aus der Literatur. Daher werden die Verzahnungssteifigkeiten der äquidistanten und inäquidistanten Prüfverzahnungen anhand von mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM) numerisch errechneten Verzahnungssteifigkeiten validiert.

In der Literatur existieren einige Ansätze zur numerischen Bestimmung der Verzahnungssteifigkeit [200–204]. Alle haben gemeinsam, dass ein CAD-Modell einer gegebenen Verzahnung mittels finiter Elemente diskretisiert wird. Die Diskretisierung muss an den kraftübertragenden Zahnflanken besonders fein sein, um die Effekte der HERTZ'schen Verformung ausreichend genau abbilden zu können. Das zieht eine enorme Berechnungsdauer im Bereich von mehreren Stunden bis hin zu Tagen auf einer konventionellen Workstation nach sich. Bei Geradverzahnungen kann das Berechnungsmodell auf eine zweidimensionale Scheibe im Stirnschnitt der Verzahnung reduziert werden, wie beispielsweise von WANG et al. [201] und LEE [202] beschrieben. Damit lassen sich jedoch Effekte der Lastverteilung über die Zahnbreite und die Schrägung von Schrägverzahnungen nicht abbilden.

Die Verzahnungssteifigkeit kann mittels FE-Berechnung nicht direkt errechnet werden. Für jede Winkelstellung muss die Verformung im Zahneingriff bei einer gegebenen Last in die Steifigkeit umgerechnet werden. Dabei verformt sich jedoch nicht nur die Verzahnung, sondern auch der daran angeschlossene Radkörper. LIANG et al. [204] stellen einen erheblichen Einfluss des Radkörpers auf die ermittelte Verzahnungssteifigkeit fest. Je größer der zum Zahnkranz hinzugerechnete Anteil des Radkörpers ist, desto mehr verringert sich die ermittelte Verzahnungssteifigkeit aufgrund der Elastizität des Radkörpers. Die genaue Grenze zwischen dem aufgrund der Zahneinspannungen zu beachtenden Zahnkranz und dem bei der Berechnung der Verzahnungssteifigkeit zu vernachlässigenden Radkörper ist nicht eindeutig definierbar. HOHREIN und SENF [205] bestimmen die zu beachtende Zahnkranzdicke zu etwa  $2 m_t$ . SCHMITT [206] untersucht den Einfluss der Einspannung eines Balkens auf dessen Elastizität und stellt fest, dass die Höhe der Einspannung mindestens 1,5 mal der Balkendicke – übertragen auf eine Verzahnung also mindestens  $2 m_t$  – entsprechen muss. LÖFFLER [207] untersucht in seiner im Rahmen dieser Arbeit betreuten Bachelor-Thesis den Einfluss des Radkörpers auf die Verzahnungssteifigkeit. Er kommt zu dem Schluss, dass bei einer Zahnkranzdicke von etwa  $3 m_t$  ein guter Kompromiss zwischen der korrekten Abbildung der Einspannungselastizität der Zähne und der Minimierung des Einflusses der Radkörpersteifigkeit gefunden werden kann. Für die hier durchgeführten numerischen Untersuchungen wird daher die zu beachtende

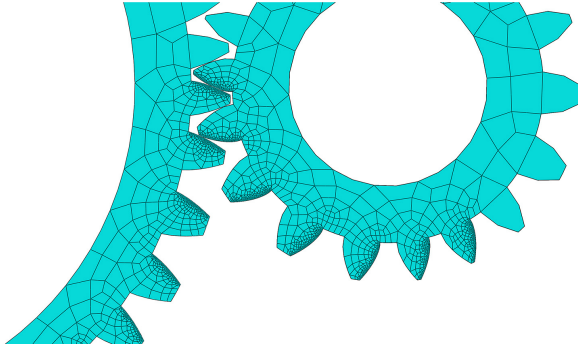
Zahnkranzdicke zu  $3 m_t$  definiert, siehe Abbildung 4.20. Der Radkörper erstreckt sich vom Bohrungsdurchmesser bis zur Grenze des Zahnkranzes.



**Abbildung 4.20:** Unterteilung in Radkörper und Zahnkranz; die für die numerischen Untersuchungen zu beachtende Zahnkranzdicke beträgt  $3 m_t$

Die Geometriedateien werden in die Finite-Elemente-Software Abaqus importiert. Da die Verformungen im Zahneingriff unter Last im Bereich weniger  $\mu\text{m}$  liegen, muss besonders auf die Exaktheit der Geometriedaten geachtet werden. Abweichungen können zum Beispiel bei der Konvertierung in verschiedene Dateiformate entstehen. Die Vernetzung erfolgt durch Hexaeder-Elemente mit quadratischer Ansatzfunktion und reduzierter Integration (C3D20R). Eine Netzstudie hat ergeben, dass die mittlere Elementgröße an den kraftübertragenden Zahnflanken auf  $0,12\text{ mm}$  reduziert werden muss, um eine ausreichend genaue Beschreibung der HERTZ'schen Verformung am Kontaktpunkt abbilden zu können. Die übrigen Anteile der kraftübertragenden Zähne haben eine mittlere Elementgröße von etwa  $1\text{ mm}$ , wobei die Elementgröße am inneren Rand des Zahnkranzes und außerhalb des Eingriffsbereiches auf bis zu  $5\text{ mm}$  vergrößert wird. Die in der Literatur gängige Praxis, die Berechnungen nur für ein Zahnpaar durchzuführen und die Ergebnisse zu duplizieren, lässt sich auf inäquidistante Verzahnungen aufgrund der unregelmäßig ausgestalteten Geometrie nicht anwenden. Es muss mindestens eine inäquidistante Musterlänge von  $\Phi = 6$  Zähnen berechnet werden. Abbildung 4.21 zeigt exemplarisch das Netz der inäquidistanten Prüfverzahnung. Als Simulationsmethode wird eine implizite dynamische Simulation mit quasi-statischem Ansatz (Vernachlässigung aller dynamischen Kräfte) gewählt. Als Kontaktbedingung wird die Methode *penalty* gewählt. Dabei wird eine zusätzliche Steifigkeit zwischen zwei in Kontakt tretende Körper eingebracht, um den nichtlinearen Übergang zwischen dem Zustand zweier vollständig getrennter Körper und zweier in Kontakt stehender Körper darzustellen. Der Solver-Algorithmus konvertiert schneller und stabiler. Am Antrieb wird das Moment angelegt, wobei sich der Antrieb frei





**Abbildung 4.21:** für die numerische Berechnung der Verzahnungssteifigkeit genutztes Netz an der inäquidistanten Prüfverzahnung

drehen kann. Das Moment wird vom Antrieb aufgenommen, wobei diesem eine feste Winkelgeschwindigkeit vorgegeben wird. Im Zentrum der Zahnräder werden Referenzpunkte erzeugt, die mit der Innenseite des jeweiligen Zahnkranzes verbunden sind. Alle Freiheitsgrade der Referenzpunkte, bis auf diejenigen in Drehrichtung der Zahnräder, sind fest. Für die Eingriffsstellung an jedem ausgewerteten Zeitschritt wird das statische Gleichgewicht berechnet. Ausgewertet wird der Drehwinkel des Antriebs über den Bereich eines inäquidistanten Musters. Im ersten Schritt wird die Simulation quasi-lastfrei ( $0,01 \text{ N m}$ ) durchgeführt, um den Verlauf des Drehwinkels des Rades im quasi-unverformten Zustand  $\varphi_{1,0}$  zu erhalten. Die Zahnräder stehen permanent in Kontakt. Im zweiten Schritt wird die gleiche Simulation durchgeführt, jedoch mit dem am Antrieb anliegenden Lastmoment, wodurch sich der Verlauf des Drehwinkels des Antriebs unter Last  $\varphi_I$  ergibt. Aus der Differenz der beiden Drehwinkel an Antrieb und mit dem Grundkreisdurchmesser des Antriebs  $d_{b,I}$  kann die lastbedingte Drehwegabweichung berechnet werden

$$x_{abw} = (\varphi_I - \varphi_{1,0}) \frac{d_{b,I}}{2}. \quad (4.8)$$

$x_{abw}$	in m	lastbedingte Drehwegabweichung	$d_{b,I}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Antrieb
$\varphi_{1,0}$	in rad	Drehwinkel, Antrieb, lastfrei	$\varphi_I$	in rad	Drehwinkel, Antrieb

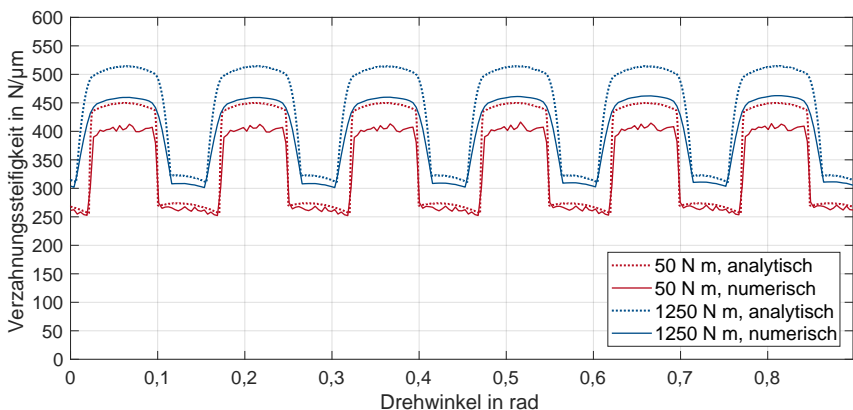
Das angelegte Lastmoment  $M$  wird in die am Grundkreis angreifende statische Vorlast  $F_{t,stat}$  umgerechnet, woraus sich schließlich die theoretische Verzahnungssteifigkeit mittels Hooke'schem Gesetz und der lastbedingten Drehwegabweichung  $x_{abw}$  errechnen lässt

$$c_{z,\text{th}} = \frac{2 M}{x_{\text{abw}} d_{b,I}}. \quad (4.9)$$

$c_{z,\text{th}}$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	theoretische Verzahnungssteifigkeit	Verzahnungs-	$x_{\text{abw}}$	in m	lastbedingte Drehwegabweichung
$M$	in N m	Drehmoment		$d_{b,I}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Antrieb

Genau wie bei den analytischen Berechnungsansätzen ergibt sich aus der numerischen Berechnung der Verzahnungssteifigkeit die theoretische Verzahnungssteifigkeit. Multipliziert mit dem Korrekturfaktor 0,8 ergibt sich die Verzahnungssteifigkeit  $c_{z,r}$ , siehe Abschnitt 2.4.1 ab S. 21.

Abbildung 4.22 zeigt die mittels FEM und die analytisch berechneten Verzahnungssteifigkeiten der äquidistanten Prüfverzahnung für 50 N m und 1250 N m. Bei dem Moment von 50 N m ergeben sich allgemein gute Übereinstimmungen

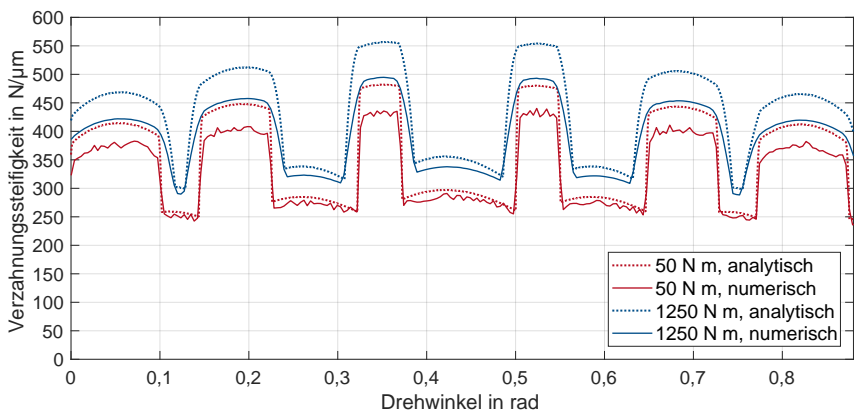


**Abbildung 4.22:** Verzahnungssteifigkeiten der äquidistanten Prüfverzahnung; 50 N m und 1250 N m (numerische Simulation und analytische Berechnung)

zwischen der analytisch und der numerisch berechneten Verzahnungssteifigkeit. In den Bereichen des Einzeleingriffes (niedrigere Plateaus) weist die numerische Berechnung geringfügig niedrigere Werte als die analytische Berechnung auf, was auf die Kontaktbedingung *penalty* in der numerischen Berechnung zurückzuführen ist. In den Bereichen des Doppeleingriffes (höhere Plateaus) weist die numerische Berechnung jedoch deutlich geringere Werte auf. Dies lässt sich anhand des *verbesserten Federmodells* nach ZIEGLER [61] (siehe Abschnitt 2.4.1 ab S. 21) erklären. Da alle Zähne eines Zahnrades am selben Zahnkranz angebracht

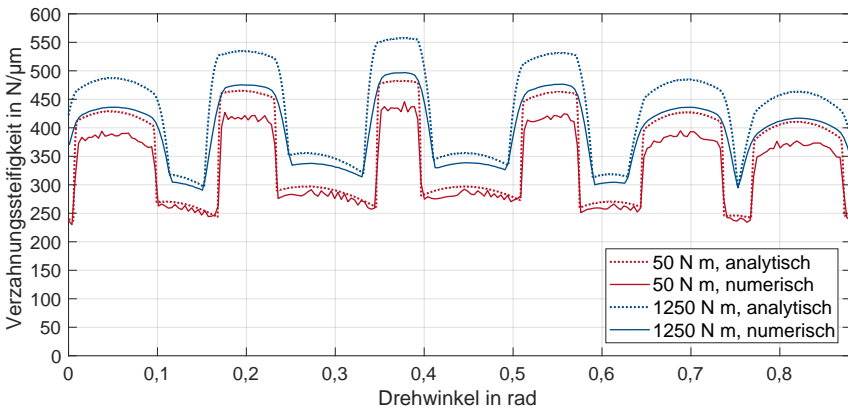
sind, führt die Verformung eines Zahnes zu einer Vorverformung aller benachbarten Zähne. Die Steifigkeit der benachbarten Zähne wird somit geschwächt, wodurch sich die geringere Verzahnungssteifigkeit beim Doppeleingriff ergibt. Die Abweichung im Bereich des Doppeleingriffes sind als unkritisch zu bewerten, da dieser Effekt sowohl bei äquidistanten als auch bei inäquidistanten Verzahnungen auftritt und somit keinen Einfluss auf direkte Vergleiche der entstehenden Geräusche haben. Der leicht verrauschte Verlauf der numerisch berechneten Kurve entsteht durch numerische Approximations- und Rundungsfehler aufgrund der sehr geringen Auslenkungen bei dem verhältnismäßig geringen Moment von 50 N m. Bei 1250 N m fallen die elastischen Verformungen deutlich stärker aus, wodurch sich das numerische Rauschen weniger stark auswirkt. Durch die stärkeren Verformungen entsteht auch eine stärkere Überdeckungsvergrößerung (weniger steile Übergänge zwischen Einzel- und Doppeleingriff). Der Betrag der Überdeckungsvergrößerung aus der numerischen Simulation stimmt mit dem aus der analytischen Berechnung gut überein. Mithilfe der numerischen Berechnung kann somit auch die Modellierungsmethode der Überdeckungsvergrößerung, wie in Abschnitt 4.3.2 ab S. 75 beschrieben, als validiert angesehen werden. Die Nichtlinearität der Verzahnungssteifigkeit, bedingt durch die HERTZ'sche Verformung, wirkt sich in der numerischen wie auch in der analytischen Berechnung gleichermaßen durch eine Zunahme der Verzahnungssteifigkeit aus.

Abbildung 4.23 zeigt die mittels FEM und die analytisch berechneten Verzahnungssteifigkeiten der inäquidistanten Prüfverzahnung für 50 N m und 1250 N m. Prin-



**Abbildung 4.23:** Verzahnungssteifigkeiten der inäquidistanten Prüfverzahnung; positive Lastrichtung; 50 N m und 1250 N m (numerische Simulation und analytische Berechnung)

ziell zeigen die Verzahnungssteifigkeiten der inäquidistanten Prüfverzahnung die gleichen Effekte wie jene der äquidistanten Prüfverzahnung. Eine besonders wichtige Beobachtung ist jedoch, dass der Verlauf der Verzahnungssteifigkeit über dem Drehwinkel des Antriebs sehr genau übereinstimmt. Wie auch bei der äquidistanten Prüfverzahnung weichen die Steifigkeitsamplituden, insbesondere in den Bereich mit Doppeleingriffen, voneinander ab, was, wie zuvor beschrieben, als unkritisch zu betrachten ist. Qualitativ werden die unterschiedlichen Steifigkeitsamplituden der Zahnpaare mit verschiedenen dicken Zähnen jedoch sehr gut abgebildet. Die Modellierung der Zahnpaarsteifigkeiten von unregelmäßig dick ausgeführten Zähnen nach dem Ansatz von WEBER und BANASCHEK [67] ist somit auch für inäquidistante Verzahnungen gültig. Der Vollständigkeit halber zeigt Abbildung 4.24 die numerisch und analytisch berechneten Verzahnungssteifigkeiten der inäquidistanten Prüfverzahnung für 50 N m und 1250 N m bei negativer Lastrichtung.



**Abbildung 4.24:** Verzahnungssteifigkeiten der inäquidistanten Prüfverzahnung; negative Lastrichtung; 50 N m und 1250 N m (numerische Simulation und analytische Berechnung)

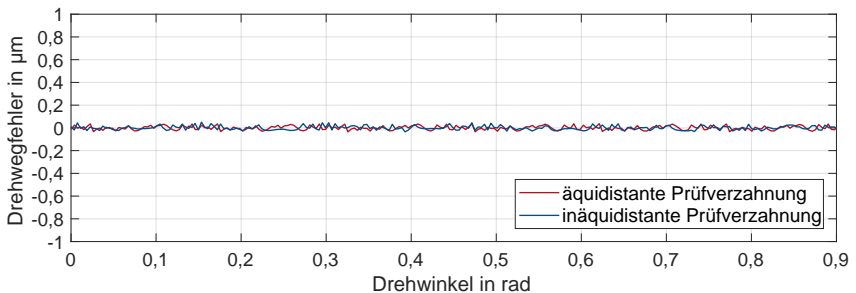
Auch bei negativer Lastrichtung stimmen die numerisch und analytisch berechneten Verzahnungssteifigkeiten (im Rahmen der zuvor beschriebenen Effekte) gut überein. Insgesamt wird festgestellt, dass die in Abschnitt 4.3.1 ab S. 68 und Abschnitt 4.3.2 ab S. 75 beschriebenen Ansätze zur Modellierung der Verzahnungssteifigkeit und der lastbedingten Überdeckungsvergrößerung mithilfe der numerischen Untersuchungen erfolgreich validiert sind.

Mit den Ergebnissen der numerischen Untersuchungen lassen sich zusätzlich zu den Verzahnungssteifigkeiten auch die Drehwegfehler (siehe Abschnitt 2.4.2 ab S. 24) berechnen. Der Drehwegfehler quantifiziert geometrische Abweichungen entlang der Eingriffslinie. Sofern die CAD-Dateien der Prüfverzahnungen korrekt aufgebaut werden und die zugrunde liegende Auslegung korrekt ist, muss der Drehwegfehler verschwinden. Insbesondere die in Kapitel 3 ab S. 43 eingeführte mathematische Beschreibung der unregelmäßigen Verzahnungsgeometrie inäquidistanter Verzahnungen kann so validiert werden. Um den Drehwegfehler numerisch zu bestimmen, wird der ideale Drehwinkel des Antriebs aus dem (per Randbedingung vorgegebenen) Drehwinkel des Abtriebs  $\varphi_{II}$  und dem Übersetzungsverhältnis  $i$  errechnet und zu dem numerisch ermittelten lastfreien Drehwinkel des Antriebs  $\varphi_{I,0}$  addiert. Da das Übersetzungsverhältnis  $i$  bei Stirnradverzahnungen negativ ist, ergibt sich ein Differenzwinkel. Dieser wird in den translatorischen Drehwegfehler entlang der Eingriffslinie umgerechnet und ergibt schließlich den Drehwegfehler

$$x_f = (\varphi_{I,0} + i \varphi_{II}) \frac{d_{b,I}}{2}. \quad (4.10)$$

$x_f$	in m	Drehwegfehler	$\varphi_{I,0}$	in rad	Drehwinkel, Antrieb, lastfrei
$i$	in —	Übersetzungsverhältnis	$\varphi_{II}$	in rad	Drehwinkel, Abtrieb
$d_{b,I}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Antrieb			

Abbildung 4.25 zeigt die mittels numerischer Simulation errechneten Drehwegfehler für die geometrisch ideale äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung.



**Abbildung 4.25:** Drehwegfehler der geometrisch idealen äquidistanten und inäquidistanten Prüfverzahnungen (numerische Simulation)

---

Wie erwartet, sind die Drehwegfehler der beiden Prüfverzahnung sehr gering (Spitze-zu-Spitze Amplituden von weniger als  $0,1 \mu\text{m}$ ). Die minimalen Schwankungen sind auf numerische Approximations- und Rundungsfehler zurückzuführen. Dass der Drehwegfehler der inäquidistanten Prüfverzahnung in vergleichbaren Bereichen wie jener der äquidistanten Prüfverzahnung liegt, zeigt, dass durch die hergeleiteten Gleichungen für die geometrischen Unregelmäßigkeiten und die Kompatibilität das Verzahnungsgesetz eingehalten wird.

#### 4.4 Dynamische Modellierung

In der dynamischen Modellierung wird zunächst ein schwingfähiges Modell einer Stirnradpaarung aufgebaut. Das Modell soll das dynamische Verhalten der Prüfverzahnungen im in Abschnitt 4.1 ab S. 61 vorgestellten Getriebeprüfstand abbilden. Das Modell wird mit den Geometrien der Prüfverzahnungen, der Prüfstandsgeometrie, dem experimentell ermittelten Drehwegfehler der hergestellten Prüfverzahnungen und den in der elastostatischen Modellierung berechneten Verzahnungssteifigkeiten parametrisiert.

##### 4.4.1 Modellierung des dynamischen Modells

Als dynamisches Modell für die Prüfverzahnungen wird das in Abschnitt 2.4.4 ab S. 26 vorgestellte Ein-Masse-Modell verwendet. Das Modell zeichnet sich durch einen einfachen Aufbau, eine geringe Anzahl zu bestimmender Parameter und eine verhältnismäßig hohe Aussagekraft aus. Diese Vereinfachungen sind gültig, sofern die Gehäusestruktur, die Lagerungen und die Wellen so steif sind, dass sie als starr angenommen werden können. Für den vollständig aus Stahl aufgebauten Getriebeprüfstand mit einer Gehäusewandstärke von  $0,02 \text{ m}$  und Wellen mit Durchmessern von  $0,03 \text{ m}$  wird diese Bedingung als erfüllt betrachtet. Durch den Aufbau des Getriebeprüfstandes nach dem Verspannungsprinzip (siehe Abschnitt 4.1 ab S. 61) sind die beiden gleichen Getriebe durch torsionsweiche Wellen zwar statisch miteinander gekoppelt, können dynamisch jedoch als entkoppelt angesehen werden [30]. Es wird daher angenommen, dass das Ein-Masse-Modell das dynamische Verhalten der Prüfverzahnungen in einem der Gehäuse des Getriebeprüfstand ausreichend genau wiedergibt.

Die Bewegungsgleichung des Ein-Masse-Modells aus Abschnitt 2.4.4 ab S. 26 wird dahingehend angepasst, dass die Verzahnungssteifigkeit  $c_z$  durch die aus der Verzahnungssteifigkeit und den Radkörpersteifigkeiten bestehende Gesamtsteifigkeit  $c_{\text{ges}}$  ersetzt wird

$$m_{\text{red}} \ddot{x}_{\text{dyn}}(t) + d_z(t) (\dot{x}_{\text{dyn}}(t) + \dot{x}_f(t)) + c_{\text{ges}}(t) (x_{\text{dyn}}(t) + x_f(t)) = F_{t,\text{stat}} \quad (4.11)$$

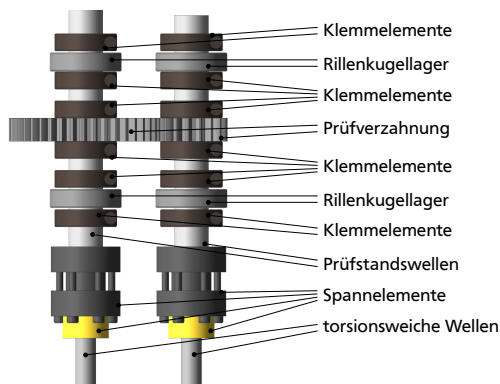
$m_{\text{red}}$	in kg	reduzierte Masse	$\ddot{x}_{\text{dyn}}$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Schwingbeschleunigung
$t$	in s	Zeit	$d_z$	in $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	Verzahnungsdämpfungskonstante
$\dot{x}_{\text{dyn}}$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schwingschnelle	$\dot{x}_f$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Ableitung des Drehwegfehlers
$c_{\text{ges}}$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Gesamtsteifigkeit	$x_{\text{dyn}}$	in m	Schwingweg
$x_f$	in m	Drehwegfehler	$F_{t,\text{stat}}$	in N	statische Vorlast

#### 4.4.2 Parametrierung des dynamischen Modells

Um das Ein-Masse-Modell vollständig zu parametrieren, werden die reduzierte Masse  $m_{\text{red}}$ , die veränderliche Gesamtsteifigkeit  $c_{\text{ges}}(t)$  (bestehend aus der Verzahnungssteifigkeit  $c_z(t)$  und den Radkörpersteifigkeiten  $c_{\text{rk}}$ ), die veränderliche Verzahnungsdämpfungskonstante  $d_z(t)$  und die in einer experimentellen Simulation ermittelten Drehwegfehler benötigt.

##### Bestimmung der reduzierte Masse

Nach Gleichung (2.21) auf S. 28 berechnet sich die reduzierte Masse aus den Grundkreisdurchmessern der beiden Zahnräder und deren beiden Massenträgheitsmomenten. Diese ergeben sich jedoch nicht aus jenen der Zahnräder alleine. Die Zahnräder sind mittels Klemmelementen mit den Prüfstandswellen verbunden, auf denen wiederum weitere Klemmelemente befestigt sind. Abbildung 4.26 zeigt einen Ausschnitt der Prüfstandswellen.



**Abbildung 4.26:** am Getriebeprüfstand verbaute Klemm- und Spannelemente, die als zusätzliche Massenträgheitsmomente beachtet werden müssen

Es wird angenommen, dass alle Massen, die mittels der Prüfstandswellen fest mit den Zahnrädern verbunden sind, beachtet werden müssen. Nicht mehr hinzuge-rechnet werden die torsionsweichen Wellen des Getriebeprüfstandes und alles, was sich daran anschließt. Alle Klemm- und Spannelemente sowie die Rillenkugel-lager bestehen aus Stahl. Zur Berechnung der Massenträgheitsmomente werden alle Maschinenelemente (Klemm- und Spannelemente sowie die Rillenkugella-ger) als homogene Zylinder mit einer Mittenbohrung mit dem Durchmesser der Prüfstandswellen modelliert. Die Zahnräder und die Prüfstandswellen werden als homogene Zylinder mit einem Außendurchmesser von  $d$  (Teilkreisdurchmesser) beziehungsweise dem Wellendurchmesser modelliert. Tabelle 4.5 zeigt die sich dar-aus ergebenden Massenträgheitsmomente der Zahnräder, der Prüfstandswellen und der Maschinenelemente.

**Tabelle 4.5:** Massenträgheitsmomente der Zahnräder, der Prüfstandswellen und der Ma-schinenelemente (gerundet)

Bezeichnung	Antrieb	Abtrieb
Zahnräder	$3,87 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$	$0,12 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Prüfstandswellen	$0,16 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$	$0,15 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Maschinenelemente	$1,18 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$	$1,18 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Summe	$\theta_I = 5,22 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$	$\theta_{II} = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

Daraus ergibt sich die reduzierte Masse der Prüfverzahnungen nach Gleichung (2.21) auf S. 28 zu

$$m_{\text{red}} = \frac{4 \theta_I \theta_{II}}{\theta_I d_{b,II}^2 + \theta_{II} d_{b,I}^2} = 0,8974 \text{ kg.} \quad (4.12)$$

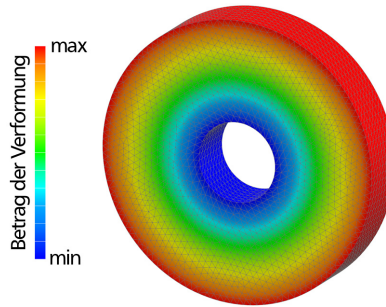
$d_{b,I}$	in m	Grundkreisdurchmesser, An-trieb	$d_{b,II}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Abtrieb
$\theta_I$	in $\text{kg m}^2$	Massenträgheitsmoment, Antrieb	$\theta_{II}$	in $\text{kg m}^2$	Massenträgheitsmoment, Abtrieb
$m_{\text{red}}$	in kg	reduzierte Masse			

### Bestimmung der veränderlichen Verzahnungssteifigkeit

Die veränderliche Verzahnungssteifigkeit ergibt sich aus den Berechnungen aus Abschnitt 4.3.1 ab S. 68. Jedoch wird dort die Steifigkeit des Radkörpers vernach-lässigigt. Der Radkörper verbindet den Zahnkranz mit der Prüfstandswelle. Durch



die an der Verzahnung anliegende Kraft wird der Radkörper in Umfangsrichtung rotatorisch verformt. Diese Belastungssituation kann idealisiert durch eine feste Lagerung in der Mitte und eine Belastung durch ein Drehmoment am äußeren Umfang des Radkörpers abgebildet werden. Abbildung 4.27 zeigt qualitativ die mittels Finite-Elemente-Methode berechnete Verformung des Radkörpers der Prüfverzahnung in tangentialer Richtung. Der Betrag der tangentialen Verformung ist farblich dargestellt.



**Abbildung 4.27:** tangentielle Verformung eines Radkörpers (Betrag der Verformung farblich dargestellt, qualitativ) (numerische Berechnung)

Aus der angelegten Kraft und der mittels Finite-Elemente-Methode berechneten Verformung lässt sich mittels des Hooke'schen Gesetzes die Radkörpersteifigkeit entlang der Eingriffslinie errechnen. Die Radkörper der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung haben die gleichen Abmessungen, weshalb sich die gleichen Radkörpersteifigkeiten ergeben. Tabelle 4.6 gibt die Radkörpersteifigkeiten für den Antrieb ( $c_{rk,I}$ ) und den Abtrieb ( $c_{rk,II}$ ) der Prüfverzahnungen an.

**Tabelle 4.6:** mittels Finite-Elemente-Methode berechnete Radkörpersteifigkeiten der Prüfverzahnungen

Bezeichnung	Antrieb	Abtrieb
Radkörpersteifigkeit	$c_{rk,I} = 1,912 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$	$c_{rk,II} = 155,521 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$

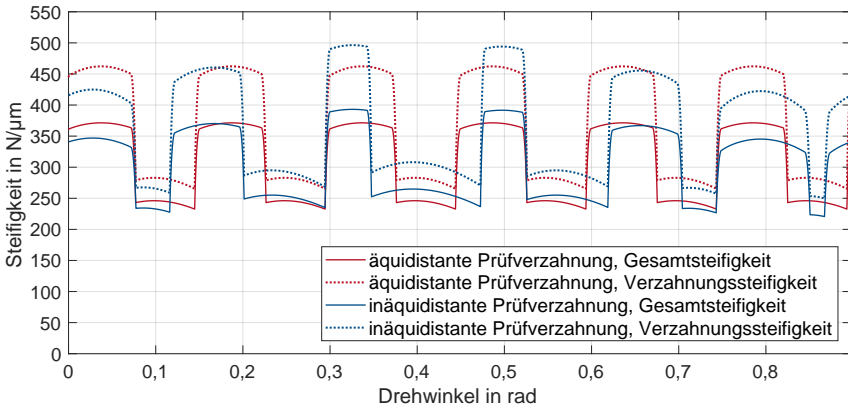
Die in das dynamische Modell eingehende Gesamtfedersteifigkeit ist eine Reihenschaltung der Radkörpersteifigkeiten des Antriebs  $c_{rk,I}$  und des Abtriebs  $c_{rk,II}$  einer

Verzahnung sowie der Verzahnungssteifigkeit  $c_z$ . Die Gesamtsteifigkeit  $c_{ges}$  ergibt sich zu

$$c_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{c_z} + \frac{1}{c_{rk,I}} + \frac{1}{c_{rk,II}}} \quad (4.13)$$

$c_{ges}$	in $\frac{N}{m}$	Gesamtsteifigkeit	$c_z$	in $\frac{N}{m}$	Verzahnungssteifigkeit
$c_{rk,I}$	in $\frac{N}{m}$	Radkörpersteifigkeit, Antrieb	$c_{rk,II}$	in $\frac{N}{m}$	Radkörpersteifigkeit, Abtrieb

Abbildung 4.28 zeigt den Verlauf der Verzahnungssteifigkeiten und der Gesamtsteifigkeiten der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung. Die



**Abbildung 4.28:** Verzahnungssteifigkeiten und Gesamtsteifigkeiten der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung (analytische Berechnung)

Gesamtsteifigkeit liegt durch die Reihenschaltung der Steifigkeiten merklich unter der Verzahnungssteifigkeit.

### Bestimmung der veränderlichen Verzahnungsdämpfungsconstante

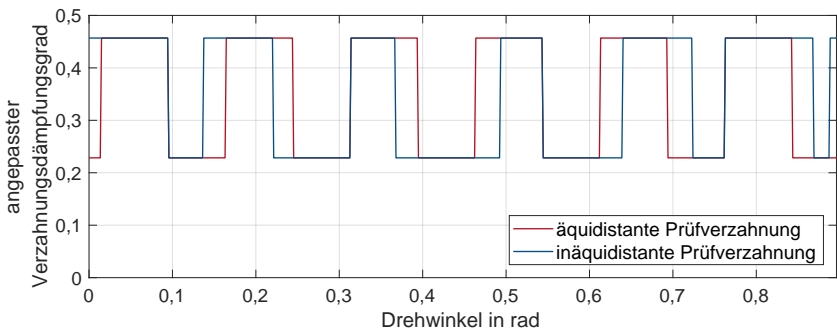
Der Zahnpaardämpfungsgrad  $D_{ze}$  wird anhand der von GERBER [55] gegebene Gleichung (2.24) auf S. 29, wie in Abschnitt 2.4.4 ab S. 26 beschrieben, berechnet. Der Achsabstand  $a_w$  des Getriebeprüfstandes liegt mit 0,095 m im Gültigkeitsbereich der Gleichung. Die dynamische Viskosität des in den experimentellen Simulationen verwendeten Schmieröls (Mannol 80W-90 GL-4) beträgt etwa 0,15 Pa s (bei 40 °C) [208]. Analog der Superposition der Zahnpaarsteifigkeiten  $c_{ze}$  zur Verzahnungssteifigkeit  $c_z$  werden die Zahnpaardämpfungsgrade  $D_{ze}$  entsprechend der zum

jeweiligen Zeitpunkt im Eingriff befindlichen Zahnpaare zum Verzahnungsdämpfungsgrad  $D_z$  summiert. GERBER [55] geht bei der Herleitung seiner Gleichung von konventionell gefertigten Verzahnungen mit geschliffenen Zahnflanken und einer Einspritzschmierung aus [55]. Die für die experimentellen Simulationen im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Zahnräder sind mittels 3D-Druck hergestellt und weisen im Vergleich zu konventionell gefertigten Zahnrädern eine erhöhte Oberflächenrauheit von etwa  $R_z \approx 30 \mu\text{m}$  auf. Das führt zu einer erheblichen Erhöhung der Reibung im Zahneingriff und somit zu einer höheren Dämpfung. Im Vergleich zu GERBER [55] wird statt einer Einspritzschmierung eine Tauchschmierung verwendet, was die Dämpfung weiter erhöht. Insgesamt werden zur Modellierung der Dämpfung am Getriebeprüfstand die nach GERBER [55] berechneten Zahnpaardämpfungsgrade mit dem Korrekturfaktor Zehn multipliziert, um, wie in der Literatur üblich [19], die Ergebnisse der Berechnung an die der experimentellen Simulation anzunähern. Die verhältnismäßig grobe Abschätzung des Korrekturfaktors ist als unkritisch anzusehen, da, wie von LINKE [19] beschrieben, selbst ungenaue Annahmen prinzipiell nicht zu falschen Berechnungsergebnissen führen. Es ergibt sich folgende angepasste Gleichung

$$D'_{ze} = 10 \cdot 2,2 \cdot 10^4 (a_w \cdot 10^3 - 23)^{0,55} \cdot (\eta \cdot 10^{-3} + 39)^{0,27} \cdot (\nu_t - 5)^{0,53} \quad (4.14)$$

$D'_{ze}$	in —	angepasster Zahnpaardämpfungsgrad	$a_w$	in m	Achsabstand
$\eta$	in Pa s	dynamische Viskosität des Öls	$\nu_t$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Umfangsgeschwindigkeit

Abbildung 4.29 zeigt den Verlauf des angepassten Verzahnungsdämpfungsgrades  $D'_{ze}$  für die Prüfverzahnungen bei einer Drehzahl von 1000 U/min.



**Abbildung 4.29:** angepasster Verzahnungsdämpfungsgrad der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; 1000 U/min (analytische Berechnung)

Durch den Wechsel zwischen einfachem und doppeltem Zahneingriff springt der angepasste Verzahnungsdämpfungsgrad zwischen dem Wert des angepassten Zahnpaardämpfungsgrades und dessen doppeltem Wert. Aufgrund des unregelmäßigen Zahneingriffs der inäquidistanten Prüfverzahnung ergibt sich auch ein unregelmäßiger Verlauf des angepassten Verzahnungsdämpfungsgrades. An dieser Stelle sei angemerkt, dass der durch den gewählten Korrekturfaktor von Zehn entstehende Wert von etwa 0,23 für den Zahnpaardämpfungsgrad im von LINKE [19] genannten typischen Bereich von 0,01 ... 0,4 liegt.

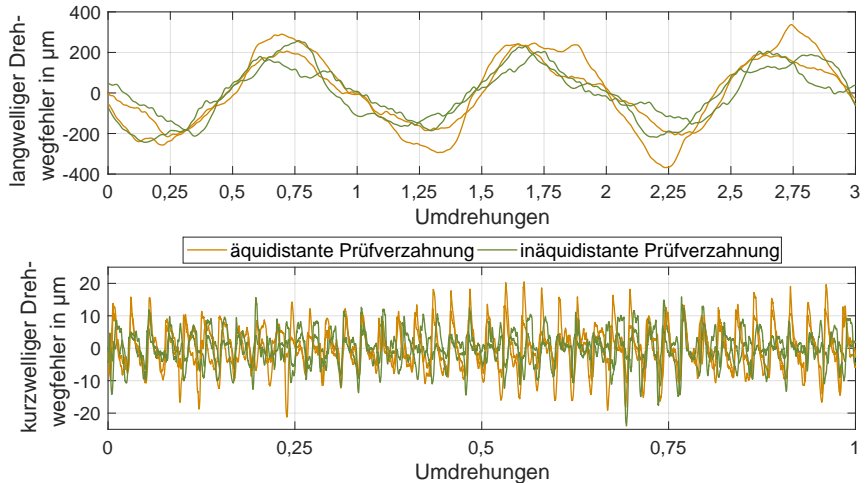
Die Verzahnungsdämpfungskonstante  $d_z$  kann schließlich aus dem angepassten Verzahnungsdämpfungsgrad  $D'_z$ , der reduzierten Masse  $m_{\text{red}}$  und dem Mittelwert der Gesamtsteifigkeit  $\bar{c}_{\text{ges}}$  berechnet werden

$$d_z = 2 D'_z \sqrt{\bar{c}_{\text{ges}} m_{\text{red}}} \quad (4.15)$$

$d_z$	in $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	Verzahnungsdämpfungskonstante	$D'_z$	in –	angepasster Verzahnungsdämpfungsgrad
$c_{\text{ges}}$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Gesamtsteifigkeit	$m_{\text{red}}$	in kg	reduzierte Masse

### Experimentelle Bestimmung der Drehwegfehler

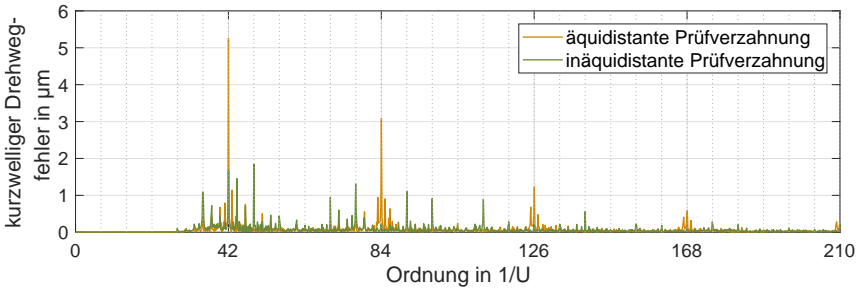
Sofern die Auslegung einer Verzahnung korrekt durchgeführt wird, ergibt sich der Drehwegfehler aus den Fertigungs- und Montageabweichungen. Um diese in der Berechnung berücksichtigen zu können, werden die Prüfverzahnungen einer Einflankenwälzprüfung nach VDI/VDE 2608 [87] unterzogen. Dazu werden die Zahnräder quasi-lastfrei und quasi-statisch bewegt. Mittels zweier hochauflösender inkrementeller Drehgeber werden die Drehwinkel der beiden Zahnräder experimentell bestimmt. Daraus wird der Drehwegfehler  $x_f$  als Differenz zwischen idealem und real gemessenem Drehweg entlang der Eingriffslinie bestimmt. Abbildung 4.30 zeigt die gemessenen Drehwegfehler der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnungen. Da von jeder Prüfverzahnung jeweils zwei Paare existieren, werden die Drehwegfehler für beide Paare, jedoch immer gleich gepaart, angegeben. Die Drehwegfehler sind jeweils in langwellige und kurzwellige Anteile aufgeteilt, wie in VDI/VDE 2608 [87] beschrieben. Bei den langwelligen Anteilen ergeben sich für alle untersuchten Verzahnungen ähnliche sinusförmige Verläufe der Drehwegfehler. Die Periodendauer beträgt eine Umdrehung des Rades, was zum Beispiel durch eine Exzentrizität des Rades verursacht werden könnte. Die Spitze-zu-Spitze-Werte betragen etwa 500  $\mu\text{m}$ . Es überlagern sich jedoch eine Vielzahl an verschiedenen Effekten, die zwar zu ähnlichen, aber im Detail doch individuellen Kurvenverläufen führt. Die kurzwelligen Anteile der Drehwegfehler aller Prüfverzahnungen weisen vergleichbare Amplituden auf. Bei den kurzwelligen Anteilen der Drehwegfehler bewegen sich alle Prüfverzahnun-



**Abbildung 4.30:** Drehwegfehler der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; positive Lastrichtung (experimentelle Simulation)

gen in ähnlichen Bereichen. Die Spitze-zu-Spitze-Werte betragen im Mittel etwa  $25 \mu\text{m}$ , schwanken jedoch im Verlaufe einer Umdrehung des Rades deutlich. Die Prüfverzahnungen werden anhand von DIN 3963 [89] in die Qualitätsstufen 8 bis 12 eingeteilt, was einer eher schlechten Verzahnungsqualität entspricht. Das ist der Fertigung mittels selektiven Lasersinterns geschuldet. Wie in Abschnitt 2.4.2 ab S. 24 beschrieben, erzeugen die kurzwelligen Anteile eine Anregung im Zahneingriff, während die langwelligen Anteile überwiegend zu Modulationen führen.

Das Ziel der Ermittlung der Drehwegfehler in einer experimentellen Simulation ist es, die Ergebnisse in der analytischen Berechnung berücksichtigen zu können. Die in Abbildung 4.30 dargestellten experimentellen Ergebnisse eignen sich jedoch nicht direkt dafür, da die Ergebnisse rausch- und messfehlerbehaftet sind. Außerdem können die gemessenen Werte nicht ohne Weiteres in der Berechnung an unterschiedliche Drehzahlen angepasst werden. Stattdessen wird ein Ansatz entwickelt, mit dem die gemessenen Drehwegfehler durch eine Reihe von Cosinus-Funktionen abgebildet werden können. Dazu werden zunächst die Spektren der Drehwegfehler gebildet. Abbildung 4.31 zeigt exemplarisch die Amplitudenspektren der kurzwelligen Drehwegfehler einer der beiden äquidistanten und einer der beiden inäquidistanten Prüfverzahnungen. Für die äquidistante Prüfverzahnung entstehen durch den regelmäßigen Zahneingriff der 42 Zähne Drehwegfehler vorwiegend bei der Ordnung  $\sigma = 42 \text{ 1/U}$  und den Harmonischen davon. Rund um die Peaks entstehen Seitenbänder, hervorgerufen durch die Modulationen



**Abbildung 4.31:** Amplitudenspektren der kurzwelligen Drehwegfehler der äquidistanten der inäquidistanten Prüfverzahnung (experimentelle Simulation)

aufgrund der langwelligen Drehwegfehler. Bei der inäquidistanten Prüfverzahnung entstehen aufgrund des unregelmäßigen Aufbaus weniger hohe Peaks bei  $o = 42 1/U$  und den Harmonischen davon. Stattdessen entstehen zusätzliche Peaks dazwischen.

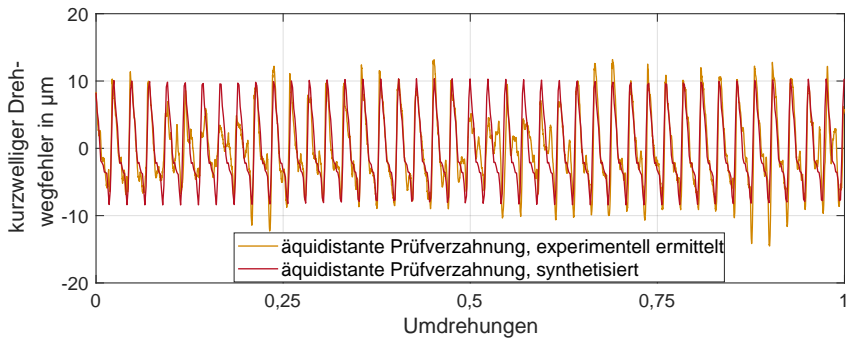
Aus den Spektren der kurzwelligen Drehwegfehler werden die Amplituden  $x_f(o)$  und die Phasenwinkel  $\varphi_f(o)$  bei den radbezogenen Ordnungen  $o$  ausgelesen und für die Synthese mittels Cosinus-Funktionen des für die Berechnung benötigten Drehwegfehlers  $x_f(t)$  genutzt. Um die Amplituden der unmodulierten Drehwegfehler zu erhalten, werden die Amplituden der modulationsbedingten Seitenbänder und die Amplituden der eigentlichen Peaks mittels pythagoreischer Addition (Wurzel aus der Summe der Quadrate) für die jeweiligen Peaks summiert. Für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung ergeben sich so ausschließlich Amplituden und Phasenwinkel bei den jeweiligen Zahneingriffsordnung und Vielfachen davon. Die so errechneten Amplituden und die bei diesen Peaks ausgelesenen Phasenwinkel werden in eine Reihe von Cosinus-Funktionen eingesetzt, um schließlich den mittels einer experimentellen Simulation ermittelten Drehwegfehler zu synthetisieren. Dabei werden die einzelnen Cosinus-Funktionen bei allen Ordnungen  $o$  zum Drehwegfehler  $x_f(t)$  superponiert

$$x_f(t) = \sum_{o=0}^{\infty} x_f(o) \cdot \cos(2 \pi o n t + \varphi_f(o)). \quad (4.16)$$

$x_f$	in m	Drehwegfehler	$t$	in s	Zeit
$o$	in $\frac{1}{U}$	Ordnung	$f$	in Hz	Frequenz
$n$	in $\frac{1}{s}$	Drehzahl	$\varphi_f$	in rad	Phase des Drehwegfehlers

In Anhang A.2 ab S. 151 sind die aus den Spektren der experimentell bestimmten Drehwegfehler ausgelesenen Ordnungen, Amplituden und Phasenwinkel der

äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnungen gegeben. Der Vollständigkeit halber sind dort auch die Drehwegfehler in negative Drehrichtung und die sich daraus ergebenden Ordnungen, Amplituden und Phasenwinkel gegeben. Abbildung 4.32 zeigt exemplarisch den experimentell bestimmten kurzwelligen Drehwegfehler einer äquidistanten Prüfverzahnung und den mittels superponierter Cosinus-Funktionen synthetisierten Drehwegfehler. Die Übereinstimmung



**Abbildung 4.32:** kurzwelliger Drehwegfehler der äquidistanten Prüfverzahnung (experimentelle Simulation und analytische Berechnung)

zwischen experimentell ermitteltem und synthetisiertem Drehwegfehler im zeitlichen Verlauf und bei den Amplituden ist als gut zu bezeichnen. Durch die Synthese gehen aperiodische und modulierte Anteile des Drehwegfehlers verloren. Jedoch bietet der synthetisierte Drehwegfehler in der analytischen Berechnungskette den großen Vorteil, dass er durch eine Anpassung der Drehzahl  $n$  in Gleichung (4.16) einfach an unterschiedliche Drehzahlen angepasst werden kann. Insbesondere instationäre Betriebspunkte, wie zum Beispiel ein Drehzahlhochlauf, lassen sich dadurch abbilden.

Das Ein-Masse-Modell hat als Eingangsgröße einen Drehwegfehler  $x_f(t)$ . Durch die Nutzung eines Getriebeprüfstandes nach dem Verspannungsprinzip (siehe Abschnitt 4.1 ab S. 61) werden jedoch immer zwei gleiche Verzahnungen zusammen in einer experimentellen Simulation untersucht. Die experimentell ermittelten Werte der Drehwegfehler beider äquidistanter und beider inäquidistanter Prüfverzahnungen werden daher jeweils gemittelt und gehen so in das Ein-Masse-Modell ein.

Analog der Synthese der kurzwelligen Drehwegfehler können auch die langwelligen Drehwegfehler mittels Cosinus-Funktionen synthetisiert werden. Der Verlauf der synthetisierten langwelligen Drehwegfehler wird zur Abbildung der Modulasi-

onseffekte in der analytischen Berechnung mittels Frequenzmodulationen genutzt. Das zu modulierende Signal wird als Trägersignal der Frequenzmodulation verwendet, während der synthetisierte Verlauf des langwelligen Drehwegfehlers als Signal der Frequenzmodulation dient. Das Ergebnis ist ein mittels langwelligem Drehwegfehler frequenzmoduliertes Signal.

### 4.4.3 Berechnung der dynamischen Zahnkraft

Die dynamische Zahnkraft  $F_{\text{dyn}}$  ist die Kraft, die im Zahneingriff zwischen den beiden Zahnrädern in Zahnnormalenrichtung entlang der Eingriffslinie wirkt [19, 29, 55]. Bei Schrägverzahnungen unterscheiden sich der Stirnschnitt und der Normalschnitt aufgrund des Schrägungswinkels  $\beta$ , weshalb gilt

$$F_{\text{dyn}}(t) = \frac{F_{\text{t,dyn}}(t)}{\cos \beta}. \quad (4.17)$$

$F_{\text{dyn}}$	in N	dynamische Zahnkraft	$t$	in s	Zeit
$F_{\text{t,dyn}}$	in N	dynamische Zahnkraft, Stirnschnitt	$\beta$	in rad	Schrägungswinkel

Die dynamische Zahnkraft im Stirnschnitt  $F_{\text{t,dyn}}$  setzt sich aus der dynamischen Federkraft  $F_{\text{c,dyn}}$  und der dynamischen Dämpferkraft  $F_{\text{d,dyn}}$  zusammen. Laut Gleichung (4.11) auf S. 87 ergeben sich die dynamische Federkraft zu

$$F_{\text{c,dyn}}(t) = c_{\text{ges}}(t) (x_{\text{dyn}}(t) + x_{\text{f}}(t)) \quad (4.18)$$

$F_{\text{c,dyn}}$	in N	dynamische Federkraft	$t$	in s	Zeit
$c_{\text{ges}}$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Gesamtsteifigkeit	$x_{\text{dyn}}$	in m	Schwingweg
$x_{\text{f}}$	in m	Drehwegfehler			

und die dynamische Dämpferkraft zu

$$F_{\text{d,dyn}}(t) = d_{\text{z}}(t) (\dot{x}_{\text{dyn}}(t) + \dot{x}_{\text{f}}(t)). \quad (4.19)$$

$F_{\text{d,dyn}}$	in N	dynamische Dämpferkraft	$t$	in s	Zeit
$d_{\text{z}}$	in $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	Verzahnungsdämpfungskonstante	$\dot{x}_{\text{dyn}}$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schwingschnelle
$\dot{x}_{\text{f}}$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Ableitung des Drehwegfehlers			

Der Drehwegfehler  $x_{\text{f}}$  wird mittels einer experimentellen Simulation bestimmt (siehe Abschnitt 4.4.2 ab S. 87).  $\dot{x}_{\text{f}}$  ergibt sich aus seiner zeitlicher Ableitung, welche aufgrund des Aufbaus von  $x_{\text{f}}$  aus superponierten Cosinus-Funktionen vollständig analytisch erfolgen kann. Der Schwingweg  $x_{\text{dyn}}$  und die Schwingschnelle  $\dot{x}_{\text{dyn}}$  werden mittels numerischer Lösung der Bewegungsgleichung (Gleichung (4.11)

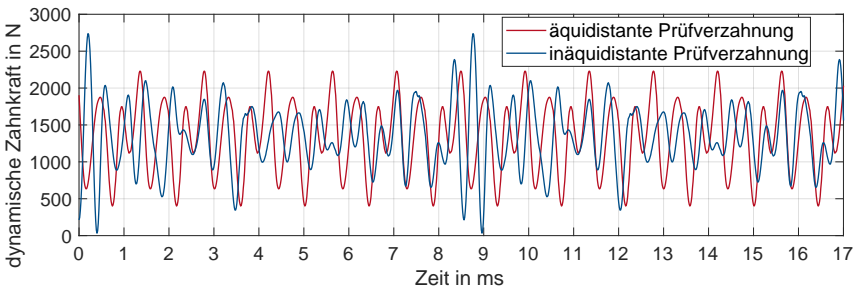


auf S. 87) gewonnen. Die dynamische Zahnkraft  $F_{\text{dyn}}$  ergibt sich schließlich unter Berücksichtigung des Schrägungswinkels  $\beta$  zu

$$F_{\text{dyn}}(t) = \frac{1}{\cos(\beta)} \left( c_{\text{ges}}(t) (x_{\text{dyn}}(t) + x_f(t)) + d_z(t) (\dot{x}_{\text{dyn}}(t) + \dot{x}_f(t)) \right). \quad (4.20)$$

$F_{\text{dyn}}$	in N	dynamische Zahnkraft	$\beta$	in rad	Schrägungswinkel
$t$	in s	Zeit	$c_{\text{ges}}$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Gesamtsteifigkeit
$x_{\text{dyn}}$	in m	Schwingweg	$x_f$	in m	Drehwegfehler
$d_z$	in $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	Verzahnungsdämpfungskonstante	$\dot{x}_{\text{dyn}}$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schwingschnelle
$\dot{x}_f$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Ableitung des Drehwegfehlers			

Abbildung 4.33 zeigt das Zeitsignal der analytisch berechneten dynamischen Zahnkräfte für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung. Beide



**Abbildung 4.33:** Zeitsignal der dynamischen Zahnkräfte für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung; 1000 U/min; 80 N m (analytische Berechnung)

dynamischen Zahnkräfte schwingen um die statische Vorlast von

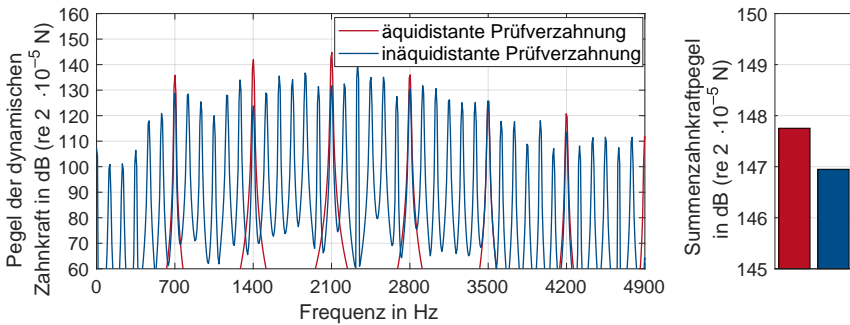
$$F_{t,\text{stat}} = \frac{2M}{d_{b,I}} = \frac{2 \cdot 80 \text{ N m}}{0,1184 \text{ m}} = 1351 \text{ N}. \quad (4.21)$$

$F_{t,\text{stat}}$	in N	statische Vorlast	$M$	in N m	Drehmoment
$d_{b,I}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Antrieb			

Bei der Drehzahl von 1000 U/min liegt die Zahneingriffsfrequenz laut Gleichung (2.14) auf S. 16 bei 700 Hz, wodurch etwa alle 1,43 ms ein Zahneintritt stattfindet. Bei der äquidistanten Prüfverzahnung entsteht bei jedem dieser Zahneingriffe die gleiche Anregung, was zu einem sich periodisch wiederholenden gleichen

Verlauf der dynamischen Zahnkraft führt. Bei der inäquidistanten Prüfverzahnung ist der Verlauf der dynamischen Zahnkraft aufgrund der unregelmäßigen Verzahnungsgeometrie unregelmäßig ausgeprägt. Zeitweise entstehen Amplituden, die höher als bei der äquidistanten Prüfverzahnung sind (beispielsweise bei 0,2 ms und 8,8 ms). In weiten Teilen liegen die Amplituden jedoch niedriger. Im Gegensatz zur äquidistanten Prüfverzahnung wiederholt sich der Verlauf der dynamischen Zahnkraft nicht nach einer Periodendauer von 1,43 ms (Dauer eines Zahneingriffes), sondern nach einer Periodendauer von 8,57 ms (Dauer des Zahneingriffes eines inäquidistanten Musters mit  $\Phi = 6$ ). Die Periodendauer der dynamischen Zahnkräfte verlängert sich bei inäquidistanten Verzahnungen somit um den Faktor  $\Phi$ .

Abbildung 4.34 zeigt das Spektrum der analytisch berechneten dynamischen Zahnkräfte für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung. Die äqui-



**Abbildung 4.34:** Spektrum der dynamischen Zahnkräfte für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung; 1000 U/min; 80 N m (analytische Berechnung)

distante Prüfverzahnung regt die dynamischen Zahnkräfte ausschließlich in der Zahneingriffsfrequenz (700 Hz) und deren Harmonischen an. Die Peaks sind sehr prominent, was auf einen ausgeprägten, tonhaltigen Charakter des Geräusches hinweist. Durch die um den Faktor  $\Phi = 6$  verlängerte Periodendauer bei der inäquidistanten Prüfverzahnung sinkt die Grundfrequenz der Anregung von 700 Hz auf 116,7 Hz. Es entstehen entsprechend sechsmal mehr Peaks im Spektrum, auf die sich die dynamische Zahnkraft verteilt. Jeder dieser Peaks (mit Ausnahme des Peaks bei 3500 Hz) weist eine geringere Amplitude auf als die entsprechenden Peaks der dynamischen Zahnkraft der äquidistanten Prüfverzahnung. Der Summenzahnkraftpegel der inäquidistanten Prüfverzahnung ist gegenüber der äquidistanten Prüfverzahnung um etwa 0,8 dB verringert.

---

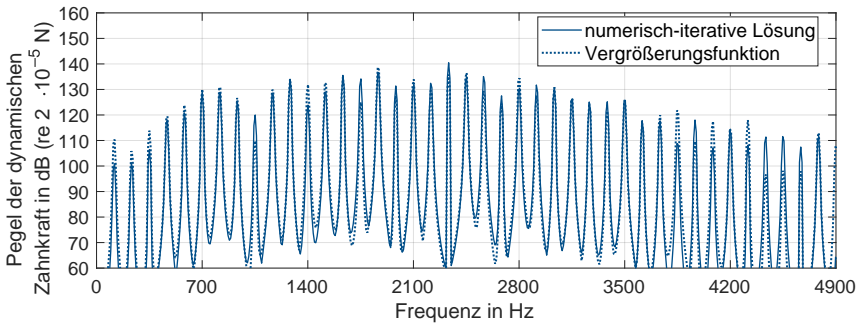
Diese Beobachtung ist bemerkenswert, da sich zum Beispiel bei Lüftern (wovon die Grundidee einer unregelmäßig ausgestalteten Verzahnung abgeleitet ist) der Summenschalldruckpegel durch eine unregelmäßige Ausgestaltung nicht ändert [15, 127, 128, 145, 146, 148]. Im Vergleich zu Lüftern entsteht bei der inäquidistanten Verzahnung neben einem unregelmäßigen zeitlichen Verlauf (unregelmäßige Zahnposition analog den unregelmäßigen Schaufelpositionen) auch ein unregelmäßiger Verlauf der Amplituden, bedingt durch die unregelmäßigen Zahndicken. Das kann zu einer Minderung des Summenzahnkraftpegels der Anregung führen.

### **Vereinfachte Berechnung der dynamischen Zahnkraft nach GEISER**

Die numerisch-iterative Lösung der Bewegungsgleichung mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens ist sehr zeitaufwändig. Insbesondere, wenn statt eines stationären Betriebspunktes ein Drehzahlhochlauf über mehrere Sekunden berechnet werden soll, kann die Lösung mehrere Minuten bis hin zu Stunden dauern. Wie in Abschnitt 2.4.4 ab S. 26 beschrieben, stellt GEISER [57] eine Vergrößerungsfunktion für das Ein-Masse-Modell auf (Gleichung (2.26) auf S. 30), indem er das Modell linearisiert und statt der Parametererregung aufgrund der wechselnden Verzahnungssteifigkeiten und Verzahnungsdämpfungen die Krafterregung nach Gleichung (2.25) auf S. 30 als Anregung nutzt. Statt der schwankenden Verzahnungssteifigkeiten und der schwankenden Verzahnungsdämpfungen gehen deren Mittelwerte in die Vergrößerungsfunktion ein.

Wird ein Hochlauf über einen bestimmten Drehzahlbereich berechnet, ergibt sich bei der Mittelung der Verzahnungsdämpfung eine Besonderheit. Wie in Abschnitt 4.4.2 ab S. 87 beschrieben, ändert sich die Verzahnungsdämpfung mit der Drehzahl. Würde die Verzahnungsdämpfung über den zu berechnenden Drehzahlbereich gemittelt werden, so ergäbe sich zum Beispiel bei einer Drehzahl von 1000 U/min eine unterschiedliche Dämpfung, je nachdem, ob ein Hochlauf von 0 bis 1000 U/min oder von 0 bis 2000 U/min berechnet würde. Entsprechend würden sich dabei die Werte der dynamischen Zahnkräfte unterscheiden. Um diese Inkonsistenz zu vermeiden, wird für die vereinfachte Berechnung der dynamischen Zahnkräfte bei einem Hochlauf die Verzahnungsdämpfung bei der (frei gewählten) Bezugsdrehzahl von 1000 U/min genutzt.

Die von GEISER [57] gegebene Vergrößerungsfunktion kann durch eine Multiplikation im Frequenzbereich (oder eine Faltung im Zeitbereich) auf die Krafterregung angewendet werden, was eine extrem schnelle Ermittlung der dynamischen Zahnkräfte auch für lange Zeitsignale ermöglicht (Berechnungsdauer in der Regel  $\ll 1$  s für Signallängen von mehreren Sekunden). Abbildung 4.35 zeigt die Spektren der Pegel der dynamischen Zahnkräfte, berechnet durch die numerisch-iterative Lösung der Bewegungsgleichung und durch Anwenden der Vergrößerungsfunktion nach GEISER [57] für die inäquidistante Prüfverzahnung. Insgesamt ergibt



**Abbildung 4.35:** Spektren der Pegel der dynamischen Zahnkräfte, berechnet durch die numerisch-iterative Lösung der Bewegungsgleichung und durch Anwenden der Vergrößerungsfunktion nach GEISER [55] für die inäquidistante Prüfverzahnung; 1000 U/min; 80 N m (analytische Berechnung)

sich eine gute Übereinstimmung zwischen den Spektren. Die größten Abweichungen ergeben sich im Bereich tiefer ( $< 400$  Hz) und hoher Frequenzen ( $> 3700$  Hz). Dazwischen ergeben sich (mit Ausnahme einzelner Frequenzen) vergleichbare Amplituden. Die Berechnungsdauer verringert sich für den stationären Betriebspunkt von 0,46 s für die numerisch-iterative Lösung der Bewegungsgleichung auf 0,01 s für die Anwendung der Vergrößerungsfunktion nach GEISER [57]. Der Geschwindigkeitsvorteil wird noch deutlicher, wenn zum Beispiel ein Drehzahlhochlauf mit einer Dauer von 1 s berechnet wird. Die Berechnungsdauer reduziert sich von 134,8 s auf 0,03 s. Insbesondere im Hinblick auf die große Anzahl der im Rahmen der durchzuführenden Optimierung von inäquidistanten Verzahnungen (siehe Kapitel 6 ab S. 134) zu berechnenden Geometriekombinationen ist die Berechnungsgeschwindigkeit ein entscheidender Faktor. Die geringfügigen Abweichungen von der numerisch-iterativen Lösung der Bewegungsgleichung werden daher in Kauf genommen.

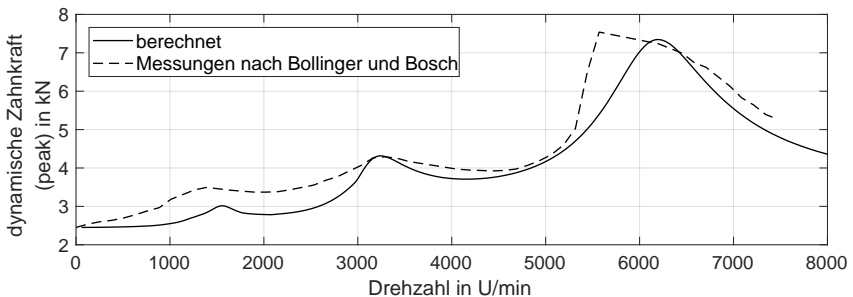
#### 4.4.4 Stabilitätsbetrachtung des dynamischen Modells

Auf die Stabilität des dynamischen Modells soll hier nur kurz eingegangen werden. Allgemein neigen Zahnradgetriebe aufgrund der Parametererregung durch die schwankende Verzahnungssteifigkeit und die schwankende Verzahnungsdämpfung zu Instabilitäten in ihrem dynamischen Verhalten. Durch die entstehende Selbstanfachung können die dynamischen Zahnkräfte bei unzureichender Dämpfung theoretisch über alle Grenzen ansteigen. In der Praxis verlieren die Zahnflanken ihren Kontakt, sobald die dynamische Zahnkraft deutlich größer als die statische Vorlast wird. Dies äußert sich durch ein lautes Rasseln des Getriebes. Durch die höheren Anregungsamplituden von Geradverzahnungen treten Instabilitäten vornehmlich dort auf. [19, 20, 30, 54, 209, 210]

Prinzipiell existieren Methoden, um das Stabilitätsverhalten von Zahnradgetrieben zu beschreiben [210]. Die Anwendung der Methoden überschreiten aufgrund des damit einhergehenden Aufwandes die Grenzen dieser Arbeit. Im Allgemeinen gilt jedoch, dass höhere Anregungsamplituden bei bestimmten Frequenzen eine größere Neigung zu Instabilitäten mit sich bringen. Wie Abbildung 4.34 auf S. 98 zu entnehmen ist, werden die dynamischen Zahnkräfte bei inäquidistanten Verzahnungen über mehr Frequenzen mit jeweils geringerer Amplitude verteilt. Es wird daher angenommen, dass inäquidistante Verzahnungen im Vergleich zu konventionellen äquidistanten Verzahnungen eine vergleichbare oder sogar geringere Neigung zu Instabilitäten aufweisen. Eigene Arbeiten zur Untersuchung des Dreh-schwingungsverhaltens von äquidistanten und inäquidistanten Verzahnungen stützen diese These [211].

#### 4.4.5 Validierung der dynamischen Zahnkraft mittels Literatur

Die dynamischen Zahnkräfte sind experimentell nur sehr schwer zugänglich, da sie einerseits im Betrieb und andererseits im entlang des Zahneingriffs wandernden Kontaktpunkt bestimmt werden müssen. In der Literatur sind entsprechend nur wenige Ergebnisse aus experimentellen Simulationen von dynamischen Zahnkräften verfügbar [27, 205, 212]. BOLLINGER und BOSCH [212] haben die dynamische Zahnkraft mittels seitlich auf den Zahn aufgebracht Dehnungsmessstreifen in einer experimentellen Simulation ermittelt. Die Daten der von BOLLINGER und BOSCH untersuchten Verzahnung werden genutzt, um das verwendete dynamische Modell zu validieren. Abbildung 4.36 zeigt die Messdaten der dynamischen Zahnkraft nach BOLLINGER und BOSCH im Vergleich zu den mit dem vorgestellten dynamischen Modell berechneten dynamischen Zahnkräften. Angesichts des



**Abbildung 4.36:** dynamische Zahnkraft nach BOLLINGER und BOSCH [212] im Vergleich zu den mit dem vorgestellten dynamischen Modell berechneten dynamischen Zahnkräften (experimentelle Simulation aus der Literatur und analytische Berechnung)

Aufwandes der experimentellen Simulationen und der zum Zeitpunkt der Veröffentlichung (im Jahre 1964) zur Verfügung stehenden Messmittel einerseits sowie der starken Vereinfachungen und Annahmen bei der dynamischen Modellierung andererseits ergeben sich sehr gute Übereinstimmungen zwischen den von BOLLINGER und BOSCH [212] experimentell ermittelten und den analytisch berechneten dynamischen Zahnkräften. Im Bereich der Hauptresonanz (bei etwa 6200 U/min) mussten BOLLINGER und BOSCH [212] die experimentelle Simulation aufgrund von Instabilitäten einschränken. Insgesamt zeigt der Vergleich, dass das genutzte dynamische Modell trotz aller Vereinfachungen und Annahmen in der Lage ist, das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben ausreichend genau zu modellieren. Die Daten der von BOLLINGER und BOSCH [212] genutzten Verzahnung sind in Tabelle 4.7 gegeben. Weiterhin sind die im Rahmen der Berechnung angepassten reduzierten Massen und die gewählte Verzahnungsdämpfung gegeben.

**Tabelle 4.7:** Verzahnungsdaten der von BOLLINGER und BOSCH [212] in einer experimentellen Simulation untersuchten Verzahnung

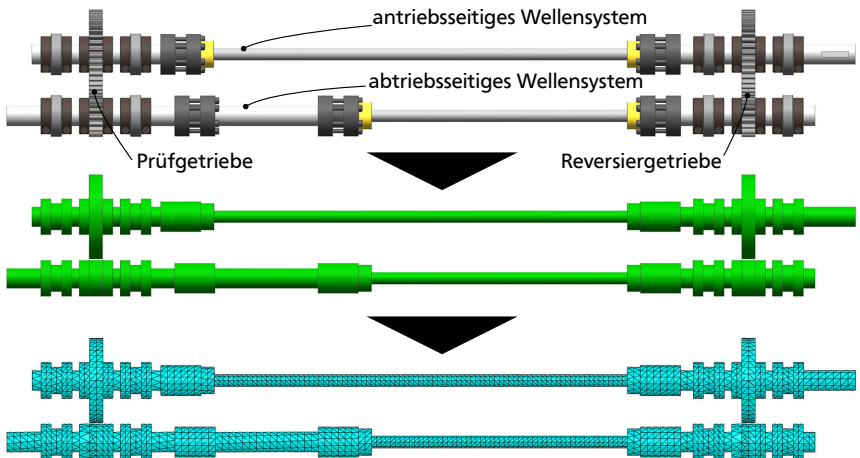
Bezeichnung	Variable	Einheit	Antrieb	Abtrieb
Zähnezahl	$z$	—	25	25
Normalmodul	$m_n$	m		0,005
Achsabstand	$a_w$	m		0,125
Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$	rad		0,341
Schrägungswinkel	$\beta$	rad		0
Zahnbreite	$b$	m	0,01	0,01
Lastmoment	$M$	N m		144
reduzierte Masse	$m_{red}$	kg		0,6681
Verzahnungsdämpfungsgrad	$D_z$	—		0,1

#### 4.4.6 Validierung der Torsionseigenfrequenzen mittels FE-Berechnung

Die Bestimmung der dynamischen Zahnkräfte mittels FE-Berechnung ist äußerst aufwändig, da einerseits das Netz an den Kontaktstellen sehr fein diskretisiert sein muss (siehe Abschnitt 4.3.4 ab S. 79) und andererseits ausreichend viele Zeitschritte berechnet werden müssen, um den Verlauf der dynamischen Zahnkraft auch im eingeschwungenen Zustand bestimmen zu können. Eine im Rahmen dieser Arbeit betreute Master-Thesis [213] kam zu dem Ergebnis, dass die Berechnung eines 0,75 s langen Signals der dynamischen Zahnkraft der äquidistanten Prüfverzahnung bereits eine Berechnungsdauer von weit über 100 Stunden (auf einer herkömmlichen Workstation) mit sich bringt und damit für die praktische Ausle-

gung zu zeitaufwändig ist. Da die Berechnung der dynamischen Zahnkräfte bereits mittels Literaturangaben validiert ist, soll hier lediglich die Torsionseigenfrequenz des dynamischen Modells anhand einer FE-Berechnung validiert werden.

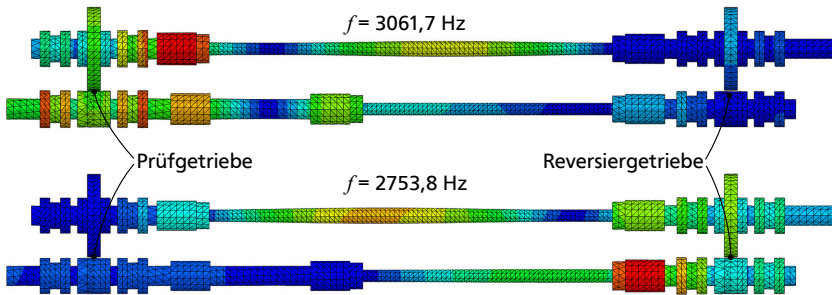
Der verwendete Getriebeprüfstand basiert auf dem Verspannungsprinzip und ist daher aus zwei gleichen Getrieben aufgebaut, die durch torsionsweiche Wellen gekoppelt sind. Mittels eines Vergleiches der anhand des vorgestellten dynamischen Modells analytisch berechneten Eigenfrequenzen und der numerisch berechneten Eigenfrequenz der im Getriebeprüfstand eingebauten Zahnradpaarungen soll eine Aussage darüber getroffen werden, inwieweit das Ein-Masse-Modell auch zur Modellierung der Dynamik eines Getriebeprüfstandes nach dem Verspannungsprinzip genutzt werden kann. Auf Basis des CAD-Modells des Getriebeprüfstandes wird das Wellensystem mitsamt aller Klemmelemente, Kugellager, Prüfstandswellen und torsionsweichen Wellen der numerischen Untersuchung unterzogen, siehe Abbildung 4.37. Das antriebsseitige und das abtriebsseitige Wellensystem des CAD-



**Abbildung 4.37:** CAD-Modell (oben), vereinfachtes Geometriemodell (Mitte) und FE-Modell (unten) des Wellensystems des Getriebeprüfstandes

Modells (oben) werden bei der Ableitung des vereinfachten Geometriemodells jeweils als ein durchgängiger Volumenkörper ohne weitere Fügstellen modelliert. Die Zahnräder der Prüfverzahnungen sind als Zylinderscheiben, analog Abschnitt 4.4.2 ab S. 87, modelliert. Das FE-Modell (unten) besteht aus einem Tetraeder-Gitter mit einer mittleren Kantenlänge von 10 mm und quadratischer Ansatzfunktion (C3D10-Elemente). Zwischen den Zahnradern wird die Verzahnungssteifigkeit als tangential am Umfang der Zahnradern wirkende linear-elastische Feder mit

der Federsteifigkeit  $\overline{c_{ges}} = 305 \cdot 10^6 \text{ N/m}$  modelliert. Die beiden Wellensysteme sind an den Stellen der Rillenkugellager in allen Freiheitsgraden bis auf die Torsionsrichtung der Wellen fest gelagert. Für die gesamte Geometrie werden die Materialkennwerte von Stahl zugrunde gelegt. Mittels einer numerischen Modalanalyse werden die Eigenfrequenzen des Wellensystems bestimmt. Abbildung 4.38 zeigt die beiden anhand einer FE-Berechnung ermittelten Eigenfrequenzen des Wellensystems, wobei die Beträge der Knotenauslenkungen farblich qualitativ dargestellt sind. Aufgrund des leicht asymmetrischen Aufbaus entstehen



**Abbildung 4.38:** mittels FE-Berechnung ermittelte Eigenfrequenzen des Wellensystems; farblich dargestellt sind die Beträge der Knotenauslenkungen (qualitativ)

zwei Eigenfrequenzen in Torsionsrichtung für die beiden Teilgetriebe. Im oberen Teil von Abbildung 4.38 schwingt vorrangig die Verzahnung des Prüfgetriebes bei einer Eigenfrequenz von 3061,7 Hz. Im unteren Teil der Abbildung schwingt vorrangig das Reversiergetriebe. Die Eigenfrequenz liegt etwas tiefer als beim Prüfgetriebe, was mit dem etwas längeren Wellenende auf der Antriebsseite begründet werden kann. In der analytischen Berechnung wird angenommen, dass alle Klemmringe, Lager und Getriebewellen konphas mit den Zahnrädern auf den jeweiligen Wellen schwingen, sodass deren Massenträgheitsmomente direkt zu jenen der Zahnräder addiert werden können. Die Massenträgheitsmomente der Torsionswellen werden hingegen vernachlässigt. Die FE-Berechnung zeigt zwar, dass die Trennung zwischen hinzugerechneten und vernachlässigten Massen nicht so scharf getroffen werden kann, sie zeigt jedoch ebenso, dass diese vereinfachte Annahme die Verhältnisse zumindest ausreichend genau annähert. Schwingen beispielsweise vorrangig die Zahnräder der Prüfverzahnung (Abbildung 4.38 oben), so schwingen auch die angebundenen Getriebewellen, Klemmringe, Lager und Spannhülsen mit – wenn auch nicht in gleichem Maße.



Aus der analytischen Berechnung ergibt sich aus der mittleren Gesamtsteifigkeit  $\overline{c_{\text{ges}}}$  und der reduzierten Masse  $m_{\text{red}}$  (Gleichung (4.12) auf S. 88) die Eigenfrequenz des Ein-Masse-Modells zu

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\overline{c_{\text{ges}}}}{m_{\text{red}}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{305 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0,8974 \text{ kg}}} = 2934 \text{ Hz.} \quad (4.22)$$

$f_0$	in Hz	Eigenfrequenz	$c_{\text{ges}}$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Gesamtsteifigkeit
$m_{\text{red}}$	in kg	reduzierte Masse			

Dieser Wert liegt etwa in der Mitte zwischen den beiden anhand der FE-Berechnung ermittelten Eigenfrequenzen des Wellensystems. Es wird daher angenommen, dass die hier vorgestellte dynamische Modellierung des Stirnradsystems als Ein-Masse-Modell die Dynamik – auch in einem Getriebeprüfstand nach dem Verspannungsprinzip – ausreichend genau abbildet.

## 4.5 Maschinenakustische Modellierung

Die maschinenakustische Grundgleichung (Gleichung (2.1) auf S. 6) beschreibt den Zusammenhang zwischen der Anregungskraft und der abgestrahlten Schallleistung bei Maschinen, siehe Abschnitt 2.1 ab S. 5. Während die Literatur sie in der Regel als Modellvorstellung zur qualitativen Beschreibung der Schallentstehung in Maschinen nutzt, wird sie in dieser Arbeit als Berechnungsgleichung zur quantitativen Ermittlung der Schallleistung genutzt. Im Folgenden werden die Anteile der Anregungskraft  $F$ , der Körperschallfunktion  $Sh_{\text{T}}^2$ , des Abstrahlgrades  $\sigma$  und der Schallkennimpedanz  $Z'_{\text{Med}}$  an der maschinenakustischen Grundgleichung für den Getriebeprüfstand hergeleitet.

### 4.5.1 Berechnung der Anregungskräfte am Getriebegehäuse

Die dynamische Zahnkraft wirkt zwischen den beiden im Eingriff stehenden Zahnradern normal zu deren Zahnflanken. Sie wird anhand des Schrägungswinkels  $\beta$  und des Normaleingriffswinkels  $\alpha_n$  in ihre Komponenten in horizontale ( $F_{L,y_G}$ ), vertikale ( $F_{L,z_G}$ ) und axiale ( $F_{L,x_G}$ ) Richtung zerlegt. Der Index G der Richtungen des Koordinatensystems steht für den Bezug zum Getriebe. Unter Vernachlässigung der Elastizitäten des Welle-Lager-Systems aufgrund des sehr steifen Aufbaus des Getriebeprüfstandes (siehe Abschnitt 4.1 ab S. 61) wirken diese Kraftkomponenten direkt auf die Lagersitze der Getriebegehäuse. Aufgrund der mittigen Position der Zahnräder zwischen deren beider Lagerungen im Gehäuse (siehe Abbildung 4.3 auf S. 62) wird angenommen, dass sich die Lagerkräfte jeweils gleichmäßig auf die beiden Lager aufteilen, sodass keine weitere Unterscheidung getroffen werden muss. Es entstehen somit sechs Lagerkräfte pro Getriebe (zwei Zahn-

räder mit jeweils drei Kraftkomponenten). Da der Getriebeprüfstand aus zwei gleichen Getrieben aufgebaut ist, entstehen an beiden Getrieben die gleichen Lagerkräfte. Die separate Betrachtung der Lagerkräfte beider Getriebe ist aufgrund der unterschiedlichen Anregungsorte am Getriebeprüfstand und der sich daraus ergebenden unterschiedlichen Körperschallfunktionen dennoch notwendig. Es entstehen somit insgesamt zwölf zu betrachtende Lagerkräfte.

Um die Anregung der Getriebegehäuse durch die Lagerkräfte den realen Gegebenheiten anzunähern, kann die dynamische Zahnkraft mit einem Rauschsignal überlagert werden. Diese *rauschartige Krafterregung* bildet näherungsweise die in der Realität am Getriebeprüfstand entstehenden Geräusche durch die Rillenkugellager, die schleifenden Dichtungen, den Lüfter des Frequenzumrichters und die Fluidanregungen durch das Ölbad ab. Um den breitbandigen Charakter der Anregung abzubilden wird sie als weißes Rauschen modelliert und der dynamischen Zahnkraft überlagert, wobei ihre Amplitude abhängig von der Drehzahl, der Last und einem zu wählenden Verstärkungsfaktor ist. Das Hinzufügen der rauschartigen Krafterregung ist im Hinblick auf spätere Hörversuche und psychoakustische Auswertungen wichtig, da das berechnete Geräusch weniger synthetisch klingt.

Die berechneten Lagerkräfte liegen als Zeitsignale vor. Die maschinenakustische Grundgleichung ist jedoch nur im Frequenzbereich definiert. Für die Berechnungen im Modellierungsschritt der maschinenakustischen Grundgleichung werden alle zwölf Lagerkräfte daher mittels schneller Fourier-Transformation (fast Fourier transform, FFT, Symbol  $\mathfrak{F}$ ) in den Frequenzbereich überführt. Der Betrag der dabei entstehenden komplexen Kräfte entspricht den Kraftamplituden in Abhängigkeit von der Frequenz. Alle Berechnungsschritte der maschinenakustischen Grundgleichungen werden anhand der Amplitudenspektren durchgeführt. Die mittels der FFT berechneten Phasenspektren werden nach vollständiger Anwendung der maschinenakustischen Grundgleichung für die Rücktransformation der Schalleistung in den Zeitbereich benötigt. Das in der maschinenakustischen Grundgleichung vorkommende effektive Kraftquadrat der Lagerkräfte berechnet sich zu

$$\tilde{F}_L^2(f) = \left( \frac{|\mathfrak{F}(F_L(t))|}{\sqrt{2}} \right)^2. \quad (4.23)$$

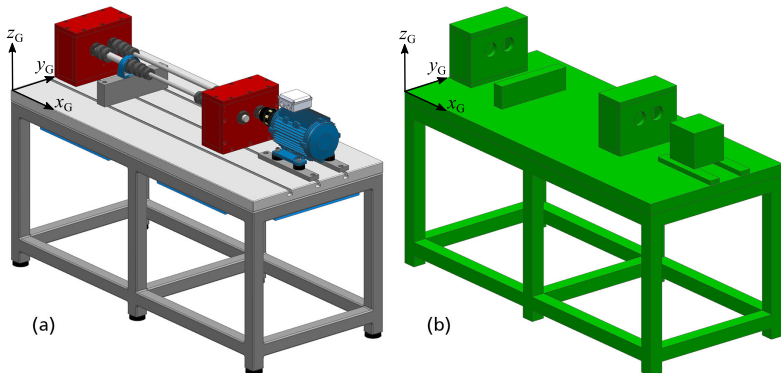
$F_L$	in N	Lagerkraft	$f$	in Hz	Frequenz
$t$	in s	Zeit			

#### 4.5.2 Modellierung der Körperschallfunktion

Die Körperschallfunktion  $Sh_T^2(f)$  beschreibt den Zusammenhang zwischen der Kraftanregung  $\tilde{F}^2(f)$  und der mittleren quadratischen Oberflächenschnelle in

Normalenrichtung  $\overline{\hat{v}^2(f)}$ , siehe Gleichung (2.3) auf S. 8. Die Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes wird mittels FE-Berechnung bestimmt. Dazu werden im Anschluss an eine numerische Modalanalyse harmonische Analysen nach dem Ansatz der modalen Superposition durchgeführt.

Die als detailliertes CAD-Modell vorliegende Geometrie des Getriebeprüfstandes wird vereinfacht. Relevant für die Bestimmung der Körperschallfunktion sind die großen Oberflächen, da diese maßgeblich den Schall abstrahlen. Teile des Getriebeprüfstandes mit kleinen Oberflächen, wie Bohrungen, Nuten und Fasen, können in der FE-Berechnung vernachlässigt werden, um das Berechnungsmodell zu vereinfachen. Das Wellensystem (siehe Abbildung 4.37 auf S. 103) wird vollständig entfernt, der Elektromotor wird als masseäquivalenter Quader vereinfacht. Abbildung 4.39 zeigt das CAD-Modell und das vereinfachte Geometriemodell des Getriebeprüfstandes. Das vereinfachte Geometriemodell wird



**Abbildung 4.39:** CAD-Modell (a) und vereinfachtes Geometriemodell (b) des Getriebeprüfstandes zur Berechnung der Körperschallfunktion

mit Tetraeder-Elementen mit quadratischer Ansatzfunktion (C3D10) und einer mittleren Kantenlänge von 0,02 m (Bestimmung der Elementgröße siehe Anhang A.3 ab S. 153) vernetzt.

Die Randbedingungen in der numerischen Simulation werden durch Federelemente an den sechs Tischbeinen und der Grundplatte abgebildet. Zusätzlich wird ein Federelement zwischen den beiden Getriebegehäusen eingefügt, um die Steifigkeit des vernachlässigten Wellensystems abzubilden. Die Steifigkeitswerte der Federelemente werden so gewählt, dass die Eigenfrequenzen der sechs Starrkörpermoden (Translation und Rotation jeweils in beziehungsweise um alle drei Raumrichtungen) und die der ersten Plattenmode in der numerischen Mo-

dalanalyse um weniger als 3 % von den in einer experimentellen Modalanalyse ermittelten Eigenfrequenzen abweichen.

In der experimentellen Modalanalyse wird der Prüfstand (Aufbauzustand wie in Abbildung 4.4 auf S. 63) mittels Modalhammer im Koordinatenursprung (siehe Abbildung 4.39) in allen drei Koordinatenrichtungen angeregt. Die Schwingungsantworten werden an insgesamt 16 Messpunkten auf der Grundplatte und an den Tischbeinen in jeweils allen drei Koordinatenrichtungen mittels Beschleunigungssensoren aufgenommen. Die Frequenzstützstellenzahl beträgt 25601, wodurch sich eine Frequenzauflösung von etwa 0,78 Hz ergibt. Tabelle 4.8 zeigt die mittels experimenteller und numerischer (unter Berücksichtigung der Randbedingungen durch die parametrisierten Federelemente) Modalanalyse ermittelten Eigenfrequenzen des Getriebeprüfstandes und deren Abweichungen voneinander. Die dazugehörigen Schwingformen sind in Anhang A.4 auf S. 155 dargestellt.

**Tabelle 4.8:** mittels experimenteller und numerischer Modalanalyse ermittelte Eigenfrequenzen des Getriebeprüfstandes

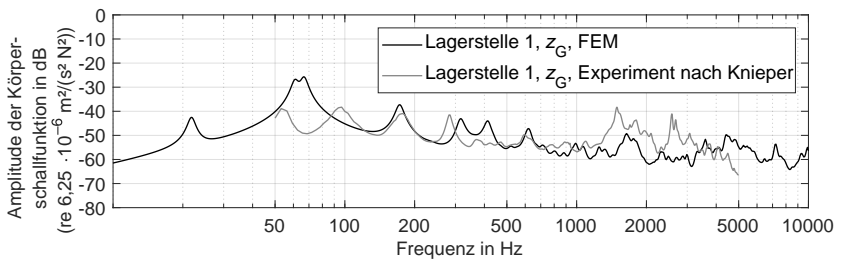
(Starrkörper-)Mode	Experiment	FEM	absolute Abweichung	relative Abweichung
$x_G$ -Richtung, Translation	21,7 Hz	21,8 Hz	-0,1 Hz	0,46 %
$y_G$ -Richtung, Translation	13,1 Hz	12,8 Hz	0,3 Hz	-2,34 %
$z_G$ -Richtung, Translation	61,2 Hz	60,9 Hz	0,3 Hz	-0,49 %
$x_G$ -Richtung, Rotation	109,3 Hz	109 Hz	0,3 Hz	-0,28 %
$y_G$ -Richtung, Rotation	67,1 Hz	66,6 Hz	0,5 Hz	-0,75 %
$z_G$ -Richtung, Rotation	31,4 Hz	31,4 Hz	0 Hz	0 %
1. Plattenmode	171 Hz	172,1 Hz	-1,1 Hz	0,64 %

Die Forderung nach einer relativen Abweichung der Eigenfrequenzen zwischen experimenteller und numerischer Simulation von weniger als 3 % kann durch die Parametrierung der Ersatzsteifigkeiten für alle betrachteten Moden erfüllt werden. Bei den meisten Moden ergeben sich Abweichungen von weniger als 1 %. Die Randbedingungen im FE-Modell des Getriebeprüfstandes sind somit anhand der Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse validiert.

Zur Ermittlung der Körperschallfunktion mittels FE-Modell werden an den Krafteinleitungsstellen der Gehäuse (Lagersitze) Einheitskräfte, modelliert als im Zentrum des Lagersitzes angreifende Punktkräfte, angebracht, die die Struktur zu Schwingungen anregen. Die von KNIEPER [214] experimentell ermittelten Werte der

Dämpfung werden für die FE-Berechnung übernommen. Die Schwingungsantworten des Prüfstandes werden mittels numerischer harmonischer Analyse nach modalem Ansatz (unter Beachtung der Residualmode) berechnet. Die harmonische Analyse wird an 1000 Frequenzstützstellen durchgeführt, welche logarithmisch im Bereich bis 10000 Hz verteilt sind. Nach Abschluss der Berechnungen werden die Schwingschnellen an den schallabstrahlenden Oberflächen in Normalenrichtung ausgelesen und quadratisch gemittelt. Die Körperschallfunktion berechnet sich mit der aus dem CAD-Modell ermittelten schallabstrahlenden Oberfläche von  $S = 5,96 \text{ m}^2$  anhand von Gleichung 2.3 auf S. 8. Für jede der zwölf Lagerkräfte wird eine Berechnung der Körperschallfunktion mit Anregung am jeweiligen Lagersitz durchgeführt, sodass insgesamt zwölf Körperschallfunktionen entstehen.

Die numerisch berechneten Körperschallfunktionen sollen anhand der experimentellen Ergebnisse von KNEIPER [214] validiert werden. Er nutzt in seinen Experimenten einen leicht veränderten Aufbau des Getriebeprüfstandes (Motor entfernt, Prüfstandswellen montiert), wodurch die Ergebnisse geringfügig abweichen können. Aufgrund messtechnischer Grenzen schränkt er den gültigen Messbereich auf 50 Hz bis 5000 Hz ein. Abbildung 4.40 zeigt exemplarisch die numerisch berechnete und die von KNEIPER [214] experimentell ermittelte Körperschallfunktion bei einer Anregung an Lagerstelle 1 in  $z_G$ -Richtung. Trotz



**Abbildung 4.40:** Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 1 in  $z_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach KNEIPER [214] und numerische Simulation)

der vielen Vereinfachungen und Annahmen in der numerischen Berechnung und der leicht veränderten Prüfstandskonfiguration bei den Experimenten von KNEIPER [214] ergibt sich in weiten Frequenzbereichen eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse. Zwischen 60 Hz und 70 Hz entstehen in der numerischen Berechnung deutlich höhere Werte für die Körperschallfunktion. In diesem Bereich liegen die Starrkörpermoden des Getriebeprüfstandes in translatorischer  $z_G$ -Richtung und rotatorischer  $y_G$ -Richtung (siehe Tabelle 4.8 auf S. 108), die durch

die mittels Ersatzfedersteifigkeiten dargestellten Randbedingungen entstehen. Die Ersatzfedersteifigkeiten haben keine dämpfenden Eigenschaften, weshalb bei den Starrkörpermoden die höheren Werte der Körperschallfunktion entstehen. Im mittleren Frequenzbereich (etwa 100 Hz bis 1000 Hz) sind die Übereinstimmungen sehr gut. Im höheren Frequenzbereich ergeben sich bei einigen Frequenzen Abweichungen von über 10 dB, was vermutlich auf die leicht unterschiedliche Prüfstandskonfiguration in der numerischen Simulation und der experimentellen Simulation von KNIEPER [214] zurückzuführen ist. In Anhang A.5 ab S. 157 sind die zwölf Körperschallfunktionen des Getriebeprüfstandes mit – soweit verfügbar – den experimentellen Ergebnissen nach KNIEPER [214] gegeben. Bei allen Körperschallfunktionen ergeben sich gute bis befriedigende Übereinstimmungen zwischen der numerischen und der experimentellen Simulation.

Wie in der maschinenakustischen Grundgleichung gefordert, werden die Quadrate der effektiven Anregungskräfte  $\tilde{F}_L^2(f)$  (im vorliegenden Fall die zwölf Lagerkräfte) im Frequenzbereich mit den jeweiligen numerisch berechneten Körperschallfunktionen  $Sh_T^2(f)$  multipliziert.

### 4.5.3 Modellierung der Schallabstrahlung

Für den Abstrahlgrad  $\sigma(f)$  wird die vereinfachte Annahme eines Kugelstrahlers 0. Ordnung getroffen. Diese Annahme ist für kompakte und dickwandige Strukturen in guter Näherung gültig [17, 18, 35, 36, 47]. Für den Getriebeprüfstand ist die Annahme einer dickwandigen Struktur aufgrund der Wandstärken von 50 mm für die Grundplatte und 20 mm für die Getriebegehäuse erfüllt. Aufgrund des Aufbaus des Getriebeprüfstandes auf einer Grundplatte kann die Forderung nach Kompaktheit nicht vollständig erfüllt werden. Jedoch kann der Getriebeprüfstand aufgrund des Tischgestells, der Getriebegehäuse und des Elektromotors auch nicht als Plattenstruktur (definiert als dünnwandige, flächige Struktur) interpretiert werden. Wie in Abschnitt 2.1.3 ab S. 8 beschrieben, unterscheiden sich die Abstrahlgrade des Kugelstrahlers 0. Ordnung und der Rechteckplatte hauptsächlich durch den akustischen Kurzschluss, der bei Plattenstrukturen unterhalb der Koinzidenzgrenzfrequenz  $f_g$  zu einer verringerten Schallabstrahlung führt [17, 18, 35]. Die Koinzidenzgrenzfrequenz der Grundplatte des Getriebeprüfstandes berechnet sich nach KOLLMANN [17] zu

$$f_g = \frac{c_L^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_P 12(1 - \nu_P^2)}{E_P h_P^2}} = \frac{(343 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2\pi} \sqrt{\frac{7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 12(1 - 0,3^2)}{210 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} (0,05 \text{ m})^2}} \approx 239,3 \text{ Hz.} \quad (4.24)$$

$f_g$	in Hz	Koinzidenzgrenzfrequenz	$c_L$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schallgeschwindigkeit, Luft
$\rho_P$	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte, Platte	$\nu_P$	in –	Querkontraktionszahl, Platte
$E_P$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Elastizitätsmodul, Platte	$h_P$	in m	Plattendicke

Für Frequenzen oberhalb von  $f_g$  unterscheiden sich die Abstrahlmodelle nicht, unterhalb überschätzt das Modell des Kugelstrahlers 0. Ordnung den Abstrahlgrad, wodurch eine konservative Abschätzung entsteht. Die schallabstrahlende Oberfläche des Getriebeprüfstandes beträgt  $S = 5,96 \text{ m}^2$ . Der Abstrahlgrad wird mittels Gleichung (2.6) auf S. 9 berechnet, wobei sich die Kugelstrahlereckfrequenz  $f_{K0}$  wie folgt berechnet [17, 18, 35]

$$f_{K0} = \frac{c_L}{\sqrt{\pi S}} = \frac{343 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{\pi 5,96 \text{ m}^2}} \approx 79,3 \text{ Hz.} \quad (4.25)$$

$f_{K0}$	in Hz	Kugelstrahlereckfrequenz	$c_L$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schallgeschwindigkeit, Luft
$S$	in $\text{m}^2$	schallabstrahlende Fläche			

Schließlich wird die Multiplikation mit der Schallkennimpedanz  $Z'_{\text{Med}}$  durchgeführt, um die maschinenakustische Grundgleichung zu vervollständigen. Da das Umgebungsmedium Luft ist, ergibt sich die Schallkennimpedanz zu [17, 18]

$$Z'_{\text{Med}} = Z'_L = \rho_L c_L = 1,204 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 343 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 413 \frac{\text{N s}}{\text{m}^3}. \quad (4.26)$$

$Z'_{\text{Med}}$	in $\frac{\text{N s}}{\text{m}^3}$	Schallkennimpedanz	$Z'_L$	in $\frac{\text{N s}}{\text{m}^3}$	Schallkennimpedanz, Luft
$\rho_L$	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte, Luft	$c_L$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schallgeschwindigkeit, Luft

Aufgrund der zwölf unterschiedlichen Anregungskräfte an den verschiedenen Lagersitzen und der Einschränkung, dass die maschinenakustische Grundgleichung nur bei einer Einzelkraftanregung gültig ist, entstehen insgesamt zwölf Schallleistungen. Die Schallleistungen werden superponiert, sodass sich eine resultierende Schallleistung für die simultane Anregung durch die zwölf Lagerkräfte ergibt.

Um quantitative Aussagen über den Schalldruck tätigen und psychoakustische Auswertungen durchführen zu können, wird die Schallleistung in den Schalldruck umgerechnet. Dafür wird die Gleichung für *ungerichtete Schallabstrahlungen von Punktquellen*, wie von MÖSER [109] beschrieben, genutzt

$$P(f) = \frac{1}{\rho_L c_L} (p_S(f))^2 4 \pi r_h^2. \quad (4.27)$$

$P$	in W	Schallleistung	$f$	in Hz	Frequenz
$\rho_L$	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte, Luft	$c_L$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schallgeschwindigkeit, Luft
$p_S$	in Pa	Schalldruck	$r_h$	in m	Radius der Hüllfläche

Die Gleichung dient zur Berechnung der abgestrahlten Schallleistung einer Maschine anhand von mehreren gemittelten Schalldruckmessungen auf einer kugelförmigen Hüllfläche um die Maschine (Radius  $r_h$ ). Der Zusammenhang ist nur bei einer Abstrahlung ins Freifeld (keine Reflexionen) und für ungerichtete Schallabstrahlungen gültig. [109] Die durchzuführende experimentelle Validierung der analytischen Modellierung wird im halbschalltoten Raum des Fachgebietes SAM durchgeführt, weshalb eine Schallabstrahlung in den Halbraum stattfindet. Durch den als akustische Spiegelquelle wirkenden schallharten Boden werden Schalldrücke mit der doppelten Amplitude (+6 dB) gemessen. Geht in Gleichung 4.27 nur die halbe Fläche der kugelförmigen Hüllfläche ein, wird dieser Effekt kompensiert. Mit diesen Annahmen ist eine bestmögliche Vergleichbarkeit mit den experimentellen Simulationen gewährleistet. Einsetzen der halben Fläche der kugelförmigen Hüllfläche in Gleichung (4.27) und Auflösen nach dem Schalldruck  $p_s(f)$  führt auf

$$p_s(f) = \sqrt{\frac{P(f) \rho_L c_L}{2 \pi r_h^2}}. \quad (4.28)$$

$p_s$	in Pa	Schalldruck	$f$	in Hz	Frequenz
$P$	in W	Schallleistung	$\rho_L$	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte, Luft
$c_L$	in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schallgeschwindigkeit, Luft	$r_h$	in m	Radius der Hüllfläche

Über den Radius der Hüllfläche  $r_h$  wird der Abstand von der Schallquelle festgelegt. Je größer der Abstand von der Schallquelle, desto geringer wird der Schalldruck bei gleicher Schallleistung.

Schließlich wird das im Frequenzbereich berechnete Amplitudenspektrum des Schalldruckes mittels der inversen Fourier-Transformation zurück in den Zeitbereich transformiert. Das dazu benötigte Phasenspektrum liefern die schnellen Fourier-Transformationen der Anregungskräfte, siehe Abschnitt 4.5.1 ab S. 105.

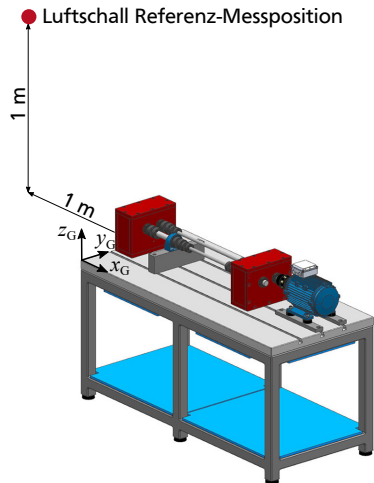
#### 4.6 Experimentelle Simulation der Prüfverzahnungen

In diesem Abschnitt wird die analytische Berechnungskette zur akustischen Auslegung inäquidistanter Verzahnungen, wie in Abbildung 4.1 auf S. 60 dargestellt, als Ganzes mittels experimenteller Simulationen validiert. Zunächst werden die hergestellten äquidistanten und inäquidistanten Prüfverzahnungen in den Getriebeprüfstand eingebaut und unter gleichen Betriebsbedingungen untersucht. Schließlich werden die Ergebnisse der experimentellen Simulation mit denen der analytischen Berechnung verglichen.



#### 4.6.1 Versuchsaufbau der experimentellen Simulationen

Der Getriebeprüfstand wird im halbschalltoten Raum des Fachgebiets SAM aufgebaut. Die Referenz-Messposition für die Untersuchungen des Luftschalls ist in 1 m Abstand zur Stirnseite des Prüfstandes (negative  $x_G$ -Richtung) und in 1 m Höhe über der Grundplatte (positive  $z_G$ -Richtung), siehe Abbildung 4.41. Das Verfahren



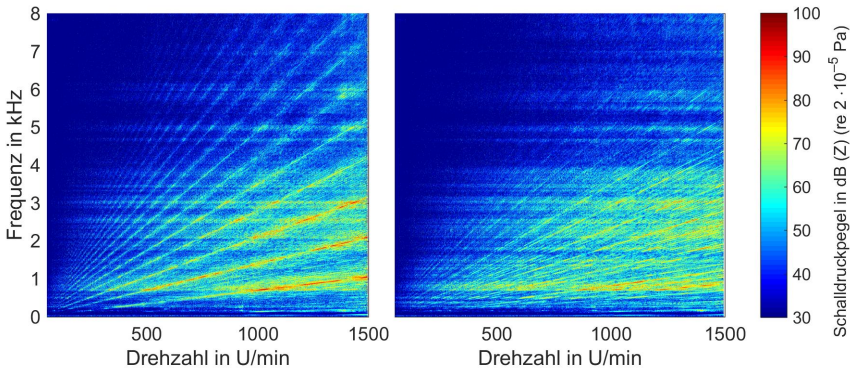
**Abbildung 4.41:** Referenz-Messposition für die experimentellen Untersuchungen des Luftschalls am Getriebeprüfstand

zur Ermittlung der Referenz-Messposition ist in Anhang A.6 ab S. 161 beschrieben. An der Referenz-Messposition wird ein Mikrofon (G.R.A.S. 46AE Messmikrofon mit Kugelcharakteristik) positioniert. Als Datenerfassungssystem wird ein Soundbook\_MK2 des Herstellers Sinus Messtechnik verwendet. Die Abtastrate beträgt 51,2 kHz bei einer Samplingtiefe von 24 bit.

Die Getriebegehäuse werden so hoch mit Öl befüllt, dass nur das größere Zahnrad an seinem unteren Rand im Ölbad eintaucht. Die Getriebe werden vor den experimentellen Simulationen auf Betriebstemperatur gebracht. Diese ist erreicht, wenn sich bei laufendem Betrieb ein stationärer Temperaturzustand einstellt, was bei etwa 30 °C der Fall ist. Der Elektromotor wird durch einen Frequenzumrichter angesteuert, dessen Modulationsfrequenzen je nach Drehzahl bei 8 kHz oder 16 kHz liegen.

## 4.6.2 Ergebnisse der experimentellen Simulationen

In mehreren Messreihen werden jeweils die beiden Paare der äquidistanten Prüfverzahnung oder die beiden Paare der inäquidistanten Prüfverzahnung in den Getriebeprüfstand eingebaut. Die Prüfverzahnungen werden unter vergleichbaren Bedingungen (Drehzahl, Last, Betriebstemperatur, Umgebungsbedingungen) untersucht. Bei gleichbleibender Last werden Hochläufe mit konstanter Beschleunigung mit Drehzahlen zwischen 0 U/min und 1500 U/min über eine Messdauer von zwei Minuten aufgezeichnet. Abbildung 4.42 zeigt die Campbell-Diagramme des Schalldruckes der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung. Mit

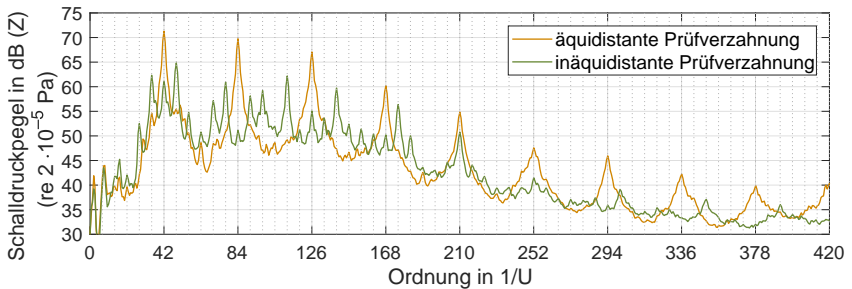


**Abbildung 4.42:** Campbell-Diagramme des Schalldruckes der äquidistanten (links) und der inäquidistanten (rechts) Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (experimentelle Simulation)

zunehmender Drehzahl steigen die Anregungsfrequenzen der Verzahnungen kontinuierlich an. Besonders hohe Amplituden entstehen, wenn die Anregungen auf eine Strukturresonanz (horizontale Linien) treffen. Die Torsionseigenfrequenzen des Wellensystems werden in der analytischen Berechnung zu etwa 2930 Hz bestimmt, mittels FE-Berechnung können zwei Eigenfrequenzen bei etwa 3060 Hz und 2750 Hz identifiziert werden (siehe Abschnitt 4.4.6 ab S. 102). Es wird angenommen, dass sich diese Eigenfrequenzen als die in den Campbell-Diagrammen angedeuteten horizontalen Linien bei etwa 3000 Hz und 2700 Hz äußern. Bei der äquidistanten Prüfverzahnung entstehen wenige, sehr dominante Anregungen. Diese bestehen aus der Zahneingriffsfrequenz und deren Harmonischen. Bei der inäquidistanten Prüfverzahnung entstehen deutlich mehr Anregungsfrequenzen. Wie bereits bei den dynamischen Zahnkräften beobachtet (Abschnitt 4.4.3 ab S. 96), werden aufgrund der inäquidistanten Musterlänge von  $\Phi = 6$  Zähnen

sechsmal so viele Frequenzen angeregt, über die der Schalldruck verteilt wird, wie bei der äquidistanten Prüfverzahnung.

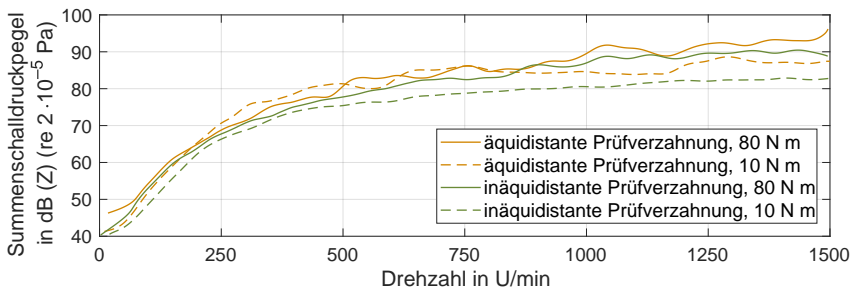
Im Folgenden werden die über den Drehzahlhochlauf gemittelten Schalldruckamplituden anhand von Ordnungsspektren analysiert. Abbildung 4.43 zeigt die Ordnungsspektren der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung. Die äquidistante Prüfverzahnung regt dominant die 42. Ordnung an, welche



**Abbildung 4.43:** Ordnungsspektren der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (experimentelle Simulation)

aufgrund der Zähnezahl des Antriebs von  $z_1 = 42$  der Zahneingriffsordnung entspricht. Zusätzlich werden deren Harmonische stark angeregt. Die wenigen Peaks im Ordnungsspektrum treten deutlich hervor. Bei der inäquidistanten Verzahnung werden, wie bereits im Campbell-Diagramm beobachtet, sechsmal so viele Ordnungen angeregt. Neben denjenigen Ordnungen, die auch durch die äquidistante Prüfverzahnung angeregt werden, werden zusätzlich jeweils fünf weitere Ordnungen zwischen den Peaks angeregt. Die Amplituden der Peaks bei der Zahneingriffsordnung und deren Harmonischen sind geringer als bei der äquidistanten Prüfverzahnung. Insgesamt weist das Ordnungsspektrum der inäquidistanten Prüfverzahnung weniger prominent hervorstechende Peaks auf und zeigt stattdessen eine gleichmäßigere Verteilung des Schalldruckes über die Ordnungen, verglichen mit der äquidistanten Prüfverzahnung.

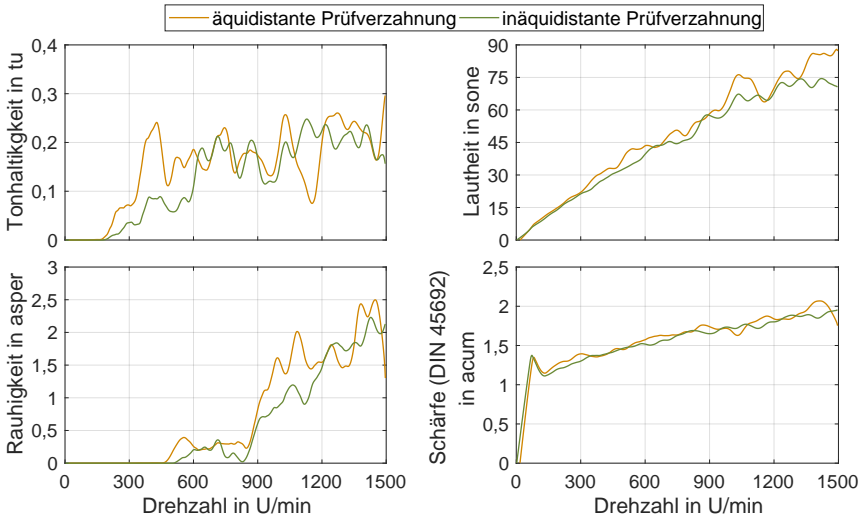
Auch der Summschalldruckpegel unterscheidet sich bei den beiden Prüfverzahnungen, siehe Abbildung 4.44. Beide Prüfverzahnungen weisen eine Zunahme des Summschalldruckpegels bei zunehmender Last und zunehmender Drehzahl auf. Der Kurvenverlauf des Summschalldruckpegels der inäquidistanten Prüfverzahnung ist glatter als der der äquidistanten Prüfverzahnung. Durch die gleichmäßigere Verteilung der Anregungen über mehrere Frequenzen entstehen weniger starke Anregungen von Strukturresonanzen. Bezogen auf das gleiche Drehmoment entsteht bei der inäquidistanten Prüfverzahnung bei nahezu allen



**Abbildung 4.44:** Summenschalldruckpegel der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; 10 N m und 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (experimentelle Simulation)

Drehzahlen ein um bis zu 6 dB geringerer Summenschalldruckpegel als bei der äquidistanten Prüfverzahnung. Das bestätigt die Beobachtung von geringeren dynamischen Zahnkräften bei der inäquidistanten Prüfverzahnung in Abschnitt 4.4.3 ab S. 96. Im Gegensatz zu den Geräuschminderungsmaßnahmen bei Lüftern und Pkw-Reifenprofilen, wo durch eine unregelmäßige Ausgestaltung der Geometrie lediglich eine Umverteilung der Anregung auf mehrere Frequenzen erfolgt [15, 127, 128, 145, 146, 148], kann durch inäquidistante Verzahnungen darüber hinaus auch der Summenschalldruckpegel reduziert werden. Das lässt sich dadurch erklären, dass bei inäquidistanten Verzahnungen nicht nur der zeitliche Verlauf, sondern auch die Amplituden der Anregung unregelmäßig ausgestaltet sind, siehe Abschnitt 4.4.3 ab S.96. Je nach Verlauf der Amplituden kann daher bei inäquidistanten Verzahnungen die Anregung geringer ausfallen als bei äquidistanten Verzahnungen.

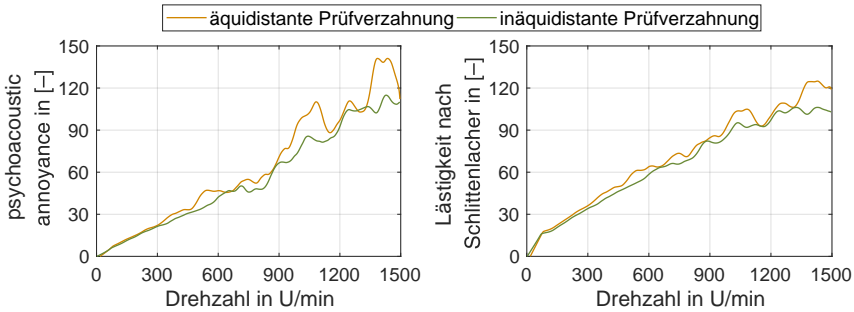
Die geräuschmindernde Wirkung von inäquidistanten Verzahnungen ist insbesondere im Hinblick auf das subjektive Lästigkeitsempfinden interessant, da die unregelmäßige Ausgestaltung der Verzahnungsgeometrie die Minderung der tonhaltigen, lästigen Geräuschanteile zum Ziel hat. In Abbildung 4.45 sind die psychoakustischen Größen der Tonhaltigkeit, der Lautheit, der Rauigkeit und der Schärfe der Geräusche der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung dargestellt. Über weite Drehzahlbereiche hinweg weist das Geräusch der inäquidistanten Prüfverzahnung tatsächlich eine verringerte Tonhaltigkeit auf. Jedoch existieren auch einige Drehzahlen (beispielsweise 1100 U/min), bei denen die inäquidistante Verzahnung aufgrund eines Einbruchs der Tonhaltigkeit der äquidistanten Prüfverzahnung im Vergleich einen höheren Wert aufweist. Bei der Lautheit, die das menschliche Lautstärkeempfinden abbildet, liegen die Werte der inäquidistanten Prüfverzahnung bei nahezu allen Drehzahlen – mit teilweise über 10 sone deutlich – unterhalb derer der äquidistanten Prüfverzahnung.



**Abbildung 4.45:** Tonhaltigkeit, Lautheit, Schärfe und Rauigkeit der Geräusche der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnungen; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (experimentelle Simulation)

Die Untersuchung der Lautheit attestiert der inäquidistanten Prüfverzahnung somit eine verringerte Lautstärke des erzeugten Geräusches im Vergleich zur äquidistanten Prüfverzahnung. Die Rauigkeit des Geräusches der inäquidistanten Prüfverzahnung ist ebenfalls über weite Drehzahlbereiche verringert. Bei der Schärfe unterscheiden sich die beiden Geräusche praktisch nicht.

Die Lästigkeit des Geräusches wird einerseits anhand der psychoacoustic annoyance nach FASTL und ZWICKER [115], als eine in der Literatur anerkannte Metrik zur Bewertung der Lästigkeit von Antriebsgeräuschen, bewertet, andererseits durch die von SCHLITTENLACHER et al. [10, 113, 132] erstellte Metrik zur Bewertung der Lästigkeit von Getriebegeräuschen. Abbildung 4.46 zeigt den Verlauf der psychoacoustic annoyance nach FASTL und ZWICKER [115] sowie der Lästigkeit nach SCHLITTENLACHER [10, 113, 132] des Geräusches der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnungen. Beide Lästigkeitsmetriken bestätigen, dass das Geräusch der inäquidistanten Prüfverzahnung bei nahezu allen Drehzahlen eine geringere Lästigkeit aufweist als das der äquidistanten Prüfverzahnung. Bei der psychoacoustic annoyance entstehen bei 650 U/min und 1300 U/min, bei der Lästigkeit nach SCHLITTENLACHER unterhalb von 100 U/min im Vergleich minimal höhere Lästigkeitswerte für die inäquidistante Prüfverzahnung, da die Werte der äquidistanten Prüfverzahnung kurzzeitig steil abfallen. Dies ist durch den Abfall der Lautheit bei diesen Drehzahlen zu erklären.

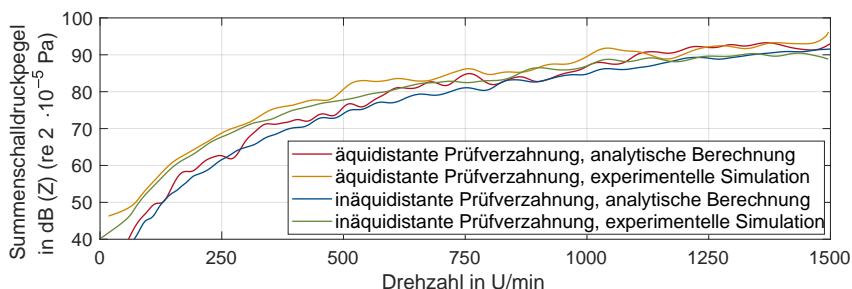


**Abbildung 4.46:** psychoacoustic annoyance nach FASTL und ZWICKER [115] und Lästigkeit nach SCHLITTENLACHER [10, 113, 132] des Geräusches der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnungen; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (experimentelle Simulation)

Insgesamt zeigen die experimentellen Simulationen der Prüfverzahnungen, dass das Ziel einer Geräuschminderung durch eine inäquidistante Verzahnung erreicht wird. Neben der Geräuschminderung auf Basis einer gleichmäßigeren Verteilung des Gesamtgeräusches über mehrere Frequenzen kann auch eine Geräuschminderung durch eine Verringerung des Summenschalldruckpegels durch inäquidistante Verzahnungen erreicht werden. Die psychoakustischen Untersuchungen zeigen, dass die Lästigkeit des Geräusches der inäquidistanten Prüfverzahnungen über nahezu alle untersuchten Drehzahlen geringer als die des Geräusches der äquidistanten Prüfverzahnung ist.

#### 4.6.3 Experimentelle Validierung der analytischen Berechnungskette für die geradverzahnten Prüfverzahnungen

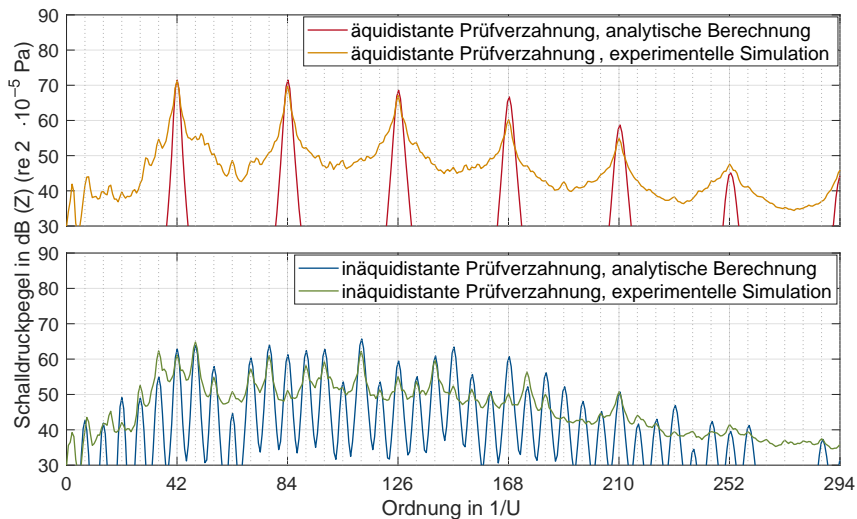
Die Geräusche der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung werden, wie in den Abschnitten 4.2 bis 4.5 ab S. 64 beschrieben, anhand der analytischen Berechnungskette ermittelt. In dieser sind die Prüfverzahnungen und der Getriebeprüfstand abgebildet, weshalb die Ergebnisse der analytischen Berechnung mit denen der experimentellen Simulation direkt verglichen werden können. Analog den experimentellen Simulationen werden in der analytischen Berechnung Hochläufe für Drehzahlen zwischen 0 U/min und 1500 U/min untersucht. Abbildung 4.47 zeigt den Vergleich zwischen den experimentell ermittelten und den analytisch berechneten Summenschalldruckpegeln der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung. Insgesamt weisen die Verläufe der Summenschalldruckpegel aus der analytischen Berechnung und der experimentellen Simulation eine gute Übereinstimmung auf. Die Differenzen zwischen den Summenschalldruckpegeln der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung verhalten sich über den gesamten Drehzahlbereich hinweg sehr ähnlich. Im Expe-



**Abbildung 4.47:** Summenschalldruckpegel der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (analytische Berechnung und experimentelle Simulation)

riment und in der Berechnung entstehen bei der inäquidistanten Prüfverzahnung bei nahezu allen Drehzahlen geringere Summenschalldruckpegel. Bei niedrigen Drehzahlen (unterhalb von 500 U/min) entstehen zwischen der experimentellen Simulation und der analytischen Berechnung teilweise deutliche Abweichungen von bis zu 10 dB. Diese entstehen durch Störgeräusche des Getriebeprüfstandes bei der experimentellen Simulation (Lager, schleifende Dichtungen, Lüfter des Frequenzumrichters etc.), die in der analytischen Berechnung nicht abgebildet sind. Zu höheren Drehzahlen hin nähern sich die Summenschalldruckpegel aus der experimentellen Simulation und der analytischen Berechnung einander an, bis sie schließlich ab etwa 1200 U/min nahezu gleich sind. Bei höheren Drehzahlen dominieren die Verzahnungsgeräusche das Gesamtgeräusch, während die genannten Störgeräusche des Getriebeprüfstandes in den Hintergrund rücken, weshalb die Ergebnisse bei höheren Drehzahlen besser vergleichbar sind. Die Ergebnisse zeigen somit, dass die Summenschalldruckpegel der Geräusche der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung, entstehend durch die Verzahnungsanregungen, mit der in Kapitel 4 ab S. 60 entwickelten analytischen Berechnungskette gut abgebildet werden können.

Im nächsten Schritt wird bewertet, inwieweit die Schalldruckspektren der analytischen Berechnung und der experimentellen Simulation vergleichbar sind. Für diesen Vergleich werden Ordnungsspektren herangezogen, siehe Abbildung 4.48. Bei der äquidistanten Prüfverzahnung ergeben sich zwischen der analytischen Berechnung und der experimentellen Simulation bei der Zahneingriffsordnung (42. Ordnung) und deren Harmonischen gute bis sehr gute Übereinstimmungen. Bei der 42., 84. und 126. Ordnung sind die Differenzen kleiner als 2 dB, weshalb die Abweichungen praktisch vernachlässigbar sind. Bei der 168. und der 210. Ordnung entstehen Abweichungen von etwa 6 dB beziehungsweise 4 dB. Da es sich bei diesen Ordnungen jedoch lediglich um Höherharmonische der Zahneingriffsordnung



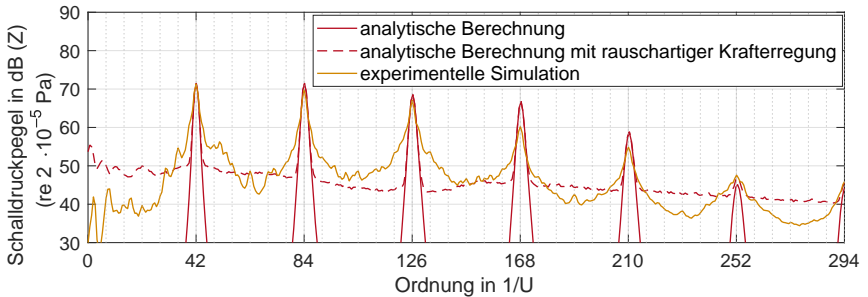
**Abbildung 4.48:** Ordnungsspektren der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (analytische Berechnung und experimentelle Simulation)

handelt und diese das Gesamtgeräusch aufgrund der geringeren Amplituden nur wenig beeinflussen, sind die Abweichungen von untergeordneter Bedeutung. Auch bei der inäquidistanten Prüfverzahnung sind die Übereinstimmungen zwischen der analytischen Berechnung und der experimentellen Simulation gut. Bei vielen Ordnungen entstehen Abweichungen im Bereich von 3 dB oder weniger. Bei einigen Ordnungen, wie zum Beispiel bei der 144. Ordnung oder der 168. Ordnung, entstehen Abweichungen von bis zu 10 dB. Diese, im Vergleich zur äquidistanten Prüfverzahnung, größeren Abweichungen sind auf den komplexeren geometrischen Aufbau und damit die komplexere Beschreibung der Geräuschenstehung bei inäquidistanten Verzahnungen zurückzuführen.

Zwischen den durch den Zahneingriff angeregten Ordnungen entsteht bei der experimentellen Simulation ein Ordnungsgemisch, das bei der analytischen Berechnung nicht auftritt. Dieses Ordnungsgemisch entsteht durch breitbandige Störgeräusche des Getriebeprüfstandes (Lager, schleifende Dichtungen, Lüfter des Frequenzumrichters etc.). In der analytischen Berechnung kann das breitbandige Ordnungsgemisch mittels einer Überlagerung der dynamischen Zahnkräfte mit der in Abschnitt 4.5.1 ab S. 105 beschriebenen rauschartigen Krafterregung näherungsweise abgebildet werden, siehe Abbildung 4.49. Der Verstärkungsfaktor der rauschartigen Krafterregung wird dabei so gewählt, dass die Schalldruckpegel der Ordnungsgemische in der analytischen Berechnung in etwa denen in



der experimentellen Simulation entspricht. Um einen realistischen Klangeindruck,

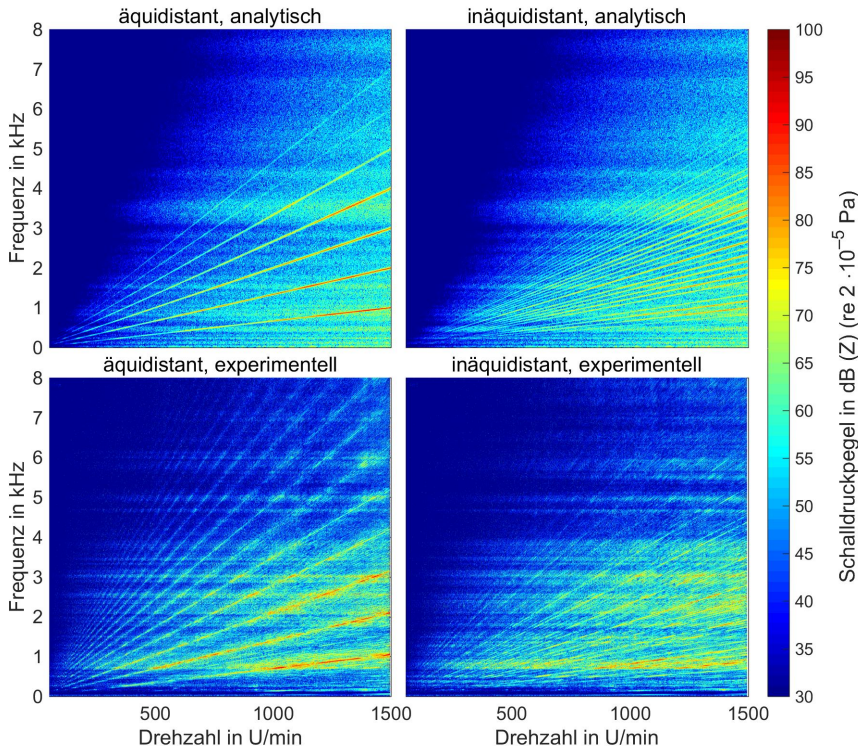


**Abbildung 4.49:** Ordnungsspektren der äquidistanten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (analytische Berechnung, mit und ohne rauschartige Krafterregung sowie experimentelle Simulation)

beispielsweise für die Durchführung von Hörversuchen, zu erzeugen, wird der beschriebene Ansatz der rauschartigen Krafterregung als zweckmäßig erachtet, für die analytische Berechnung des Zahneingriffsgeräusches spielt er jedoch eine untergeordnete Rolle.

Um einen Gesamteindruck von den Geräuschen der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung in Abhängigkeit von der Frequenz und der Drehzahl zu erhalten, sind in Abbildung 4.50 die Campbell-Diagramme der aus der analytischen Berechnung (mit rauschartiger Krafterregung) und der experimentellen Simulation ermittelten Schalldruckpegel dargestellt. Auf Basis der Verläufe der Anregungsordnungen (Ursprungsgeraden), der Amplituden (farblich dargestellt) und der Strukturresonanzen (horizontale Linien, beispielsweise bei etwa 900 Hz und 3,5 kHz) wird eine gute qualitative Übereinstimmung zwischen den aus der experimentellen Simulation und den aus der analytischen Berechnung gewonnenen Geräuschen festgestellt.

Die experimentelle Validierung der analytischen Berechnungskette für die geradzahnten Prüfverzahnungen im Drehzahlbereich zwischen 0 U/min und 1500 U/min und bei Lasten bis 80 N m ist erfolgreich durchgeführt. Sowohl beim Summenschalldruckpegel als auch im Ordnungsspektrum ergeben sich insgesamt gute Übereinstimmungen zwischen den Ergebnissen der analytischen Berechnung der experimentellen Simulation.

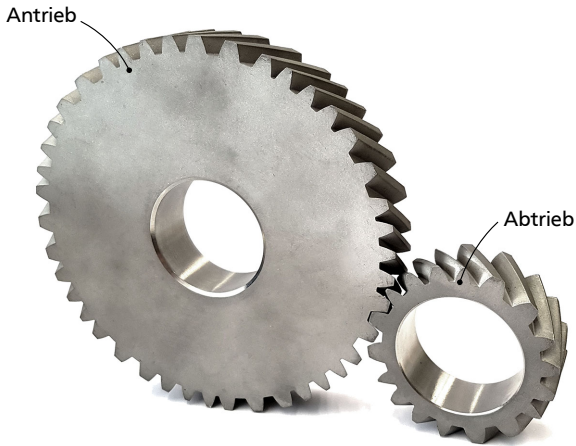


**Abbildung 4.50:** Campbell-Diagramme der Schalldruckpegel der geradverzahnten Prüfverzahnung; äquidistant (links), inäquidistant (rechts); analytische Berechnungen mit rauschartiger Krafterregung (oben), experimentelle Simulationen (unten); 80 N m, 0 U/min bis 1500 U/min

#### 4.6.4 Experimentelle Validierung der analytischen Berechnungskette für schrägverzahnte Prüfverzahnungen

Im Maschinenbau werden aus Gründen einer geringeren Geräuschanregung in der Regel Schräg- statt Geradverzahnungen eingesetzt. In diesem Abschnitt soll daher überprüft werden, inwiefern die hergeleitete, und für äquidistante und inäquidistante Geradverzahnungen erfolgreich validierte, analytische Berechnungskette auch zur Berechnung des Geräusches von Schrägverzahnungen genutzt werden kann. Im Gegensatz zu Geradverzahnungen muss bei Schrägverzahnungen die Schrägung über der Zahnbreite abgebildet werden (hier: mittels Scheibenmodell, siehe Abschnitt 2.4.1 ab S. 21 und Abschnitt 4.3.1 ab S. 68), wodurch Axialkräfte entstehen, die das Gehäuse zu zusätzlichen Schwingungen anregen.

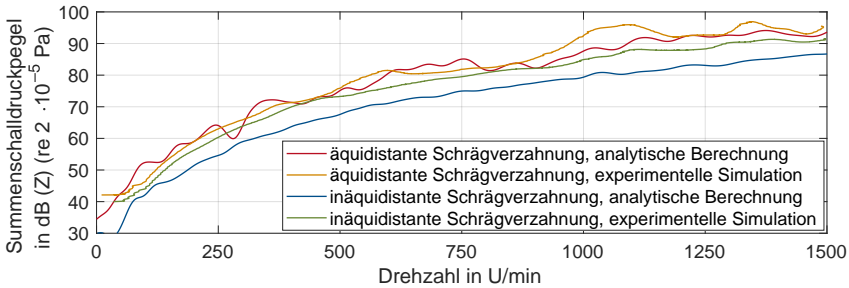
Auf Basis der äquidistanten geradverzahnten Prüfverzahnung wird eine äquidistante Schrägverzahnung (*äquidistante schrägverzahnte Prüfverzahnung*) mit dem Schrägungswinkel von  $\beta = 0,586$  rad ausgelegt, was einerseits einen gebräuchlichen Wert für Schrägverzahnungen darstellt, andererseits auf einen nach DIN 780-1 [51] zu bevorzugenden Normalmodul von  $m_n = 2,5$  mm führt. Zusätzlich wird daraus eine *inäquidistante schrägverzahnte Prüfverzahnung* mit zufällig gewählten Werten für die Zahndickenfaktoren  $\Delta s_{i,j}$  und die Zahnpositionsfaktoren  $\Delta Q_{i,j}$  abgeleitet. Die Verzahnungsdaten der schrägverzahnten Prüfverzahnungen sind in Tabelle A.4, die Inäquidistanz-Parameter in Tabelle A.5 auf S. 163 gegeben. Wie bei den geradverzahnten Prüfverzahnungen werden auch die schrägverzahnten Prüfverzahnungen mittels selektiven Laserschmelzens hergestellt, wodurch sich eine vergleichbare Fertigungsgenauigkeit ergibt. Abbildung 4.51 zeigt exemplarisch eine der gefertigten inäquidistanten schrägverzahnten Prüfverzahnungen. Mit der in Abschnitt 4.4.2 ab S. 87 beschriebenen Methode



**Abbildung 4.51:** mittels selektiven Lasersinterns hergestellte inäquidistante schrägverzahnung zur experimentellen Validierung der analytischen Berechnungskette für Schrägverzahnungen

wird der Drehwegfehler mittels einer experimentellen Simulation bestimmt, um ihn als Eingangsgröße in die analytische Berechnungskette nutzen zu können. Die experimentell ermittelten Drehwegfehler sind in Anhang A.7 auf S. 163 gegeben.

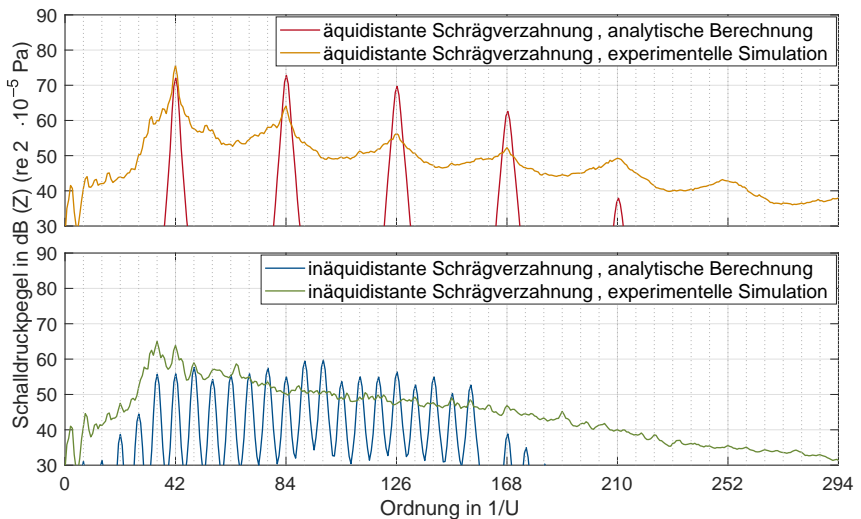
Abbildung 4.52 zeigt den Vergleich zwischen den analytisch berechneten und den experimentell ermittelten Summenschalldruckpegeln der äquidistanten und der inäquidistanten schrägverzahnten Prüfverzahnung. Für die äquidistante schräg-



**Abbildung 4.52:** Summenschalldruckpegel der äquidistanten und der inäquidistanten schrägverzahnten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (analytische Berechnung und experimentelle Simulation)

verzahnte Prüfverzahnung zeigen die Ergebnisse der experimentellen Simulation und der analytischen Berechnung überwiegend gute Übereinstimmungen, wobei die analytische Berechnung durchschnittlich geringfügig niedrigere Werte ergibt. Lediglich im Drehzahlbereich um 1000 U/min entstehen Abweichungen von bis zu 6 dB. Qualitativ stimmen die Kurvenverläufe der Summenschalldruckpegel für die inäquidistante schrägverzahnte Prüfverzahnung ebenfalls gut überein. Quantitativ ergibt sich jedoch über den gesamten Drehzahlbereich für die analytische Berechnung ein um etwa 5 dB geringerer Summenschalldruckpegel. Die vorgestellte analytische Berechnungskette kann aufgrund der dort getroffenen Annahmen den Schalldruckpegel von Schrägverzahnungen offenbar nur unzureichend genau abbilden. Ein Grund hierfür ist die vernachlässigte Stützwirkung zwischen den Scheiben des Scheibenmodells zur Berechnung der Verzahnungssteifigkeit von Schrägverzahnungen (siehe Abschnitt 2.4.1 ab S. 21). In der Realität stützen sich benachbarte Scheiben gegeneinander ab. Durch die Vernachlässigung dieses Effektes unterschätzt die analytische Modellierung die Verzahnungssteifigkeit, was zu einer unterschätzten Amplitude der Anregungskräfte führt. Ein anderer Grund könnte die vernachlässigte elastische Verformung des Welle-Lager-Systems in axialer Richtung sein, welches, anders als bei Geradverzahnungen, bei Schrägverzahnungen auch mit Axialkräften belastet wird. Durch die elastische Verformung wird der Zahneingriff gestört, was zu erhöhten Anregungen in der experimentellen Simulation führt, siehe Abschnitt 2.3.4 ab S. 19.

Abbildung 4.53 zeigt die Ordnungsspektren der äquidistanten und der inäquidistanten schrägverzahnten Prüfverzahnung für den analytisch berechneten und den experimentell bestimmten Schalldruckpegel. Für die äquidistante und die inäquidistante schrägverzahnte Prüfverzahnung ergeben sich deutlich stärkere Abweichungen zwischen der analytischen Berechnung und der experimentellen Simulation als bei den geradverzahnten Prüfverzahnungen (vergleiche Abbildung



**Abbildung 4.53:** Ordnungsspektren des Schalldruckes der äquidistanten und der inäquidistanten schrägverzahnten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (analytische Berechnung und experimentelle Simulation)

4.48 auf S. 120). Während für die äquidistante schrägverzahnte Prüfverzahnung die Abweichung bei der Zahneingriffsordnung (42. Ordnung) mit etwa 3 dB gering ausfällt, nehmen die Abweichungen für die Harmonischen der Zahneingriffsordnung mit bis zu 13 dB deutlich größere Werte an. Auch bei der inäquidistanten schrägverzahnten Prüfverzahnung entstehen bei vielen Ordnungen (zum Beispiel bei der 35. Ordnung und der 161. Ordnung) Abweichungen von 10 dB oder mehr. Insgesamt zeigen die analytischen Berechnungen und die experimentellen Simulationen im Ordnungsspektrum allenfalls eine qualitative Ähnlichkeit. Dies wird durch die genannten, für Schrägverzahnungen unzulässigen Annahmen bei der analytischen Berechnungskette erklärt.

## 4.7 Fazit zur Auslegung inäquidistanter Verzahnungen

In diesem Kapitel wird die analytische Berechnungskette zur akustischen Auslegung von inäquidistanten Verzahnungen vorgestellt, die sich in eine statische, elastostatische, dynamische und maschinenakustische Modellierung unterteilt.

In der statischen Modellierung werden eine äquidistante und eine inäquidistante Prüfverzahnung geometrisch vollständig ausgelegt und konstruiert. Weiterhin werden die zu untersuchenden Prüfverzahnungen mittels 3D-Druckverfahren (selektives Laserschmelzen) aus Stahl gefertigt und der Aufbau sowie die Funk-

---

tionsweise des genutzten Getriebeprüfstandes, konzipiert nach dem Verspannungsprinzip, werden vorgestellt.

In der elastostatischen Modellierung wird eine Methode entwickelt, mit der die Verzahnungssteifigkeit und die Überdeckungsvergrößerung von äquidistanten und inäquidistanten Verzahnungen analytisch berechnet werden kann. Die Berechnungsergebnisse werden einerseits anhand von Ergebnissen von experimentellen Simulationen aus der Literatur (Geradverzahnung von WINTER und PODLESNIK [69] sowie Schrägverzahnung von ZIEGLER [61]), andererseits anhand von Ergebnissen von FE-Berechnungen der Prüfverzahnungen erfolgreich validiert.

In der dynamischen Modellierung wird das aus der Literatur bekannte Ein-Masse-Modell angewendet und entsprechend den Prüfverzahnungen und dem Getriebeprüfstand parametrisiert. Weiterhin werden die Drehwegfehler der Prüfverzahnungen mittels Einflankenwälzprüfung experimentell ermittelt. Sie gehen als Eingangsgröße in das Ein-Masse-Modell ein. Die Berechnung der dynamischen Zahnkräfte wird anhand von experimentellen Ergebnissen aus der Literatur validiert. Die sich aus dem parametrisierten Ein-Masse-Modell ergebende Torsionseigenfrequenz wird mittels einer FE-Berechnung validiert.

In der maschinenakustischen Modellierung werden die Körperschallfunktionen des Getriebeprüfstandes mittels numerischer Simulationen bestimmt und anhand der experimentellen Ergebnisse nach KNIEPER [214] validiert. Als vereinfachtes Modell zur Schallabstrahlung wird der Kugelstrahler 0. Ordnung als konservative Abschätzung verwendet. Schließlich wird die sich aus der maschinenakustischen Grundgleichung ergebende Schallleistung in einen Schalldruck in einem definierten Abstand von der Schallquelle umgerechnet.

In experimentellen Simulationen werden die Schalldrucksignale, erzeugt durch die in den Getriebeprüfstand eingebauten äquidistanten und inäquidistanten Prüfverzahnungen, ermittelt. Die mittels experimenteller Simulationen ermittelten Ergebnisse zeigen, dass

1. inäquidistante Verzahnungen den Schalldruck über mehr Frequenzen gleichmäßiger verteilen, dass
2. inäquidistante Verzahnungen bei nahezu allen untersuchten Drehzahlen einen geringeren Summenschalldruckpegel und eine geringere Lautheit erzeugen und dass
3. inäquidistante Verzahnungen ein weniger lästiges Geräusch erzeugen (psychoacoustic annoyance nach FASTL und ZWICKER [115] sowie Lästigkeit nach SCHLITTENLACHER et al. [10, 113, 132]).

---

Die erste Hypothese dieser Arbeit

*Durch inäquidistante Verzahnungen kann das Zahneingriffsgeräusch von Zahnradgetrieben gemindert werden.*

ist somit bestätigt.

Anhand der mittels experimenteller Simulationen ermittelten Ergebnisse wird die analytische Berechnungskette zur akustischen Auslegung von inäquidistanten Verzahnungen für die Prüfverzahnungen im Drehzahlbereich zwischen 0 U/min und 1500 U/min und bei einer Last von 80 N m erfolgreich validiert. Aufgrund der guten Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der experimentellen Simulationen und der analytischen Berechnungen kann davon ausgegangen werden, dass mit der entwickelten analytischen Berechnungskette das Geräusch von äquidistanten und inäquidistanten geradverzahnten Stirnradpaaren mit guter Genauigkeit berechnet werden kann. Untersuchungen mit Schrägverzahnungen zeigen deutliche Abweichungen zwischen den analytischen Berechnungen und den experimentellen Simulationen.

Die zweite Hypothese dieser Arbeit

*Die Geräuschanregung von inäquidistanten Verzahnungen lässt sich mathematisch beschreiben.*

kann somit für Geradverzahnungen bestätigt werden, muss jedoch mit dem vorgestellten analytischen Berechnungsmodell für Schrägverzahnungen auf qualitative Aussagen beschränkt werden.



---

## 5 Geräuschbewertung von inäquidistanten Verzahnungen

---

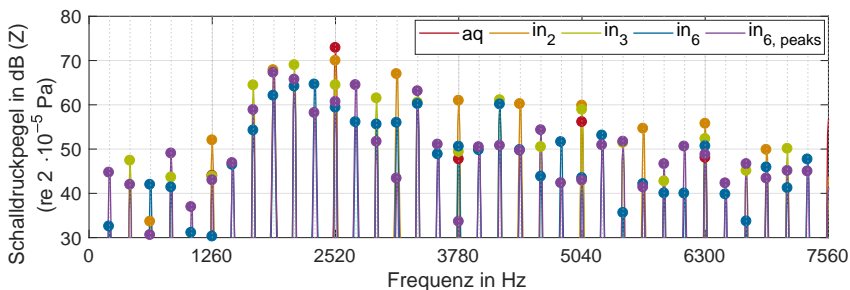
In Abschnitt 4.6.2 ab S. 114 wird gezeigt, dass das Geräusch der inäquidistanten Prüfverzahnung bei nahezu allen untersuchten Drehzahlen eine geringere Lästigkeit aufweist (geringere psychoacoustic annoyance nach FASTL und ZWICKER [115] sowie eine geringere Lästigkeit nach SCHLITTENLACHER et al. [10, 113, 132]) als das der äquidistanten Prüfverzahnung. Die verwendeten Lästigkeitsmetriken sind aufgrund ihres Aufbaus aus der Kombination verschiedener psychoakustischer Größen aufwändig zu berechnen und ihr genaues Verhalten ist für Geräusche mit unterschiedlichen Charakteren nur schwer nachvollziehbar. Beide Lästigkeitsmetriken werden von der Lautheit dominiert. Der Wert der Lautheit von tonhaltigen Geräuschen, wie zum Beispiel von Getriebegeräuschen, hängt jedoch stark davon ab, ob ein oder mehrere tonhaltige Geräuschanteile innerhalb einer kritischen Bandbreite liegen [115, 118, 119]. Verschieben sich die Frequenzen der Anregungen, zum Beispiel durch eine geringfügige Änderung der Drehzahl, kann das zu einer sich sprunghaft ändernden Lautheit führen. In diesem Kapitel wird daher ein Kriterium zur Bewertung des Geräusches von inäquidistanten Verzahnungen entwickelt, das auf den Ergebnissen eines von DRIESELNANN [215] durchgeführten Online-Hörversuches basiert. Das Kriterium soll die im Hörversuch gewonnenen Erkenntnisse aufgreifen, aber dennoch schnell zu berechnen und einfach nachvollziehbar sein. Im Rahmen einer in Kapitel 6 durchzuführenden Optimierung soll es als Optimierungskriterium dienen.

### 5.1 Online-Hörversuch von DRIESELNANN

In der im Rahmen dieser Arbeit betreuten Master-Thesis von DRIESELNANN [215] wurde ein Online-Hörversuch zur Geräuschbewertung von äquidistanten und inäquidistanten Verzahnungen durchgeführt [215, 216]. Der Online-Hörversuch zielte auf die subjektive *Lästigkeit* der dargebotenen Getriebegeräusche ab. Zusätzlich wurden die Attribute *laut*, *rauh*, *tonhaltig* und *scharf* abgefragt. Es wurden insgesamt fünf synthetische Getriebegeräusche erzeugt und als Reize für den Hörversuch zur Verfügung gestellt. Die Reize umfassten das Geräusch der äquidistanten Prüfverzahnung (aq), der inäquidistanten Prüfverzahnung mit  $\Phi = 6$  Zähnen ( $in_6$ ), einer inäquidistanten Verzahnung mit  $\Phi = 2$  Zähnen ( $in_2$ ) und einer inäquidistanten Verzahnung mit  $\Phi = 3$  Zähnen ( $in_3$ ). Weiterhin wurde eine inäquidistante Verzahnung mit  $\Phi = 6$  Zähnen so ausgelegt, dass die Amplituden der Peaks im Spektrum möglichst gleichmäßig verteilt sind ( $in_{6,peaks}$ ). Alle Geräusche wurden für das gleiche Drehmoment berechnet, um die Vergleichbarkeit sicherzustellen. Es wurden Hochläufe in zwei verschiedenen Drehzahlbereichen und ein stationärer Betriebspunkt berechnet. Abbildung 5.1 zeigt die Frequenzspektren der fünf als Reize im Online-Hörversuch genutzten synthetischen Getriebegeräusche an einem stationären Betriebspunkt mit



1800 U/min, wodurch sich eine Zahneingriffsfrequenz von 1260 Hz ergibt. Die Peaks sind durch Punkte markiert, um sie besser unterscheiden zu können. Wie aus



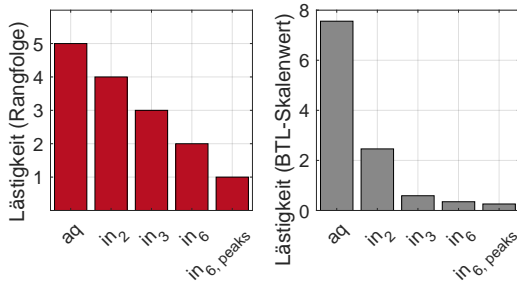
**Abbildung 5.1:** Frequenzspektren der fünf als Reize im Online-Hörversuch genutzten synthetischen Getriebegeräusche; 1800 U/min (Zahneingriffsfrequenz bei 1260 Hz); Peaks durch Punkte hervorgehoben (analytische Berechnung)

den experimentellen Simulationen (Abschnitt 4.6.2 ab S. 114) bekannt, entstehen bei äquidistanten Verzahnungen vorrangig Anregungen bei der Zahneingriffsfrequenz und deren Harmonischen, während bei inäquidistanten Verzahnungen Anregungen bei mehr Frequenzen entstehen. Je mehr Zähne die inäquidistante Musterlänge  $\Phi$  umfasst, auf desto mehr Frequenzen verteilt sich die gesamte Anregung. Bei der inäquidistanten Verzahnung mit dem Auslegungsziel möglichst gleichmäßiger Amplituden im Spektrum ( $in_{6,peaks}$ ) entstehen im Vergleich zur inäquidistanten Prüfverzahnung ( $in_6$ ) nur geringfügig gleichmäßiger verteilte Amplituden.

Am Hörversuch von DRIESELMANN [215] nahmen 61 Testpersonen teil, wovon die meisten Personen im Alter zwischen 20 und 29 Jahren waren und angaben, keine Höreinschränkung zu haben. Durch das Prinzip des Online-Hörversuches konnte die Versuchsumgebung, in der die Hörversuche durchgeführt wurden, und die Angaben der Versuchspersonen nicht kontrolliert werden. Dementsprechend konnte auch die Lautstärke, in der die Reize präsentiert wurden, nicht kontrolliert werden. Durch genaue Vorgaben und Erklärungen versuchte DRIESELMANN dennoch, möglichst vergleichbare Umgebungsbedingungen bei den Hörversuchen herzustellen. [215, 216]

DRIESELMANN [215] wertete die Ergebnisse des Online-Hörversuches unter anderem mittels des Bradley-Terry-Luce-Modells (BTL-Modell) [217] aus, wodurch die Lästigkeit der dargebotenen Reize einerseits anhand einer Rangfolge (qualitative Auswertung) und andererseits anhand von Skalenwerten (quantitative Auswertung) verglichen werden kann [215, 216]. Abbildung 5.2 zeigt exemplarisch das

Ergebnis des Online-Hörversuches für das Attribut *lästig* für einen Hochlauf mit Drehzahlen von 0 U/min bis 1200 U/min. Die Ergebnisse des Hörversuches zeigen,



**Abbildung 5.2:** Ergebnis des Online-Hörversuches für das Attribut *lästig*; synthetisch erzeugte Reize; Hochlauf; 0 U/min bis 1200 U/min (experimentelle Simulation nach DRIESELMANN [215])

dass das analytisch berechnete Geräusch der äquidistanten Prüfverzahnung als am lästigsten bewertet wurde (höchster Rang und höchster Skalenwert nach dem BTL-Modell). Jedes dargebotene Geräusch von inäquidistanten Verzahnungen wurde als weniger lästig bewertet. Besonders interessant ist die ermittelte Rangfolge, denn je mehr Zähne die inäquidistante Musterlänge  $\Phi$  umfasst und über je mehr Frequenzen der Schalldruck somit verteilt wird, desto geringer fällt die Lästigkeit aus. Weiterhin wurde das Geräusch der inäquidistanten Verzahnung mit dem Auslegungsziel möglichst gleichmäßiger Amplituden im Spektrum ( $in_{6,peaks}$ ) im Gegensatz zur inäquidistanten Prüfverzahnung ohne diese Nebenbedingung ( $in_6$ ) als weniger lästig bewertet. Das deutet auf einen Zusammenhang zwischen einer geringen Lästigkeit und gleichmäßigen Amplituden im Spektrum hin. Bei der quantitativen Auswertung der Ergebnisse des Hörversuches mithilfe des BTL-Modells entstehen sehr große Unterschiede in den Skalenwerten. Da die von den Testpersonen abgegebenen Bewertungen der Lästigkeit sehr einheitlich ausfielen, stößt das BTL-Modell hier an seine Grenzen. Es entstehen sogenannte *Extremwahrscheinlichkeiten*, die die quantitativen Zusammenhänge stark verzerren. [215] Es wird daher von einer quantitativen Auswertung der Ergebnisse des Hörversuches mittels Skalenwerten (grauen Balken in Abbildung 5.2) abgesehen und sich stattdessen ausschließlich auf die qualitativen Ergebnisse anhand der Rangfolge (rote Balken in Abbildung 5.2) beschränkt. Darüber hinaus konnte DRIESELMANN [215] den in der Literatur bekannten Zusammenhang zwischen einer hohen Lästigkeit und einer hohen Lautheit bestätigen.

Insgesamt deuten die Ergebnisse des von DRIESELMANN [215] durchgeführten Hörversuches drei wichtige Eigenschaften von Geräuschen inäquidistanter Verzahnungen an, die zu einer geringeren Lästigkeit führen. Das Geräusch von inäquidistanten Verzahnungen wird umso weniger lästig empfunden

1. je weniger laut das Geräusch ist,
2. über je mehr Frequenzen die Anregung verteilt ist und
3. je gleichmäßiger die im Spektrum entstehenden Amplituden sind.

Die drei ermittelten Eigenschaften bestätigen die Angaben aus der Literatur, dass eine geringe Lästigkeit eines Geräusches maßgeblich durch eine geringe Lautheit (Eigenschaft 1 und 2) sowie eine geringe Tonhaltigkeit (Eigenschaft 3) charakterisiert ist, siehe Abschnitt 2.6.2 ab S. 36.

## 5.2 Definition eines Optimierungskriteriums zur Geräuschbewertung

Um eine Optimierung des Geräusches von inäquidistanten Verzahnungen hinsichtlich einer geringen Lästigkeit durchzuführen, ist ein Optimierungskriterium notwendig, das die Geräuschqualität anhand eines Einzahlwertes beschreibt. Im Rahmen des zuvor beschriebenen Hörversuches werden drei Geräuscheigenschaften von inäquidistanten Verzahnungen beschrieben, die zu einer Verringerung der Lästigkeit führen.

Ein (1) *weniger lautes Geräusch* kann zum Beispiel durch eine geringe Lautheit des Geräusches sichergestellt werden. Die (2) *Verteilung der Anregung über möglichst viele Frequenzen* kann durch eine geringe Tonheit (siehe Abschnitt 2.6.1 ab S. 34) des Grundtons der Anregung bewertet werden. Möglichst (3) *gleichmäßige Amplituden im Spektrum* lassen sich zum Beispiel durch die Minimierung der Amplitudendifferenzen benachbarter Peaks bestimmen. Die jeweiligen Kriterien müssten anhand von zu bestimmenden Gewichtungsfaktoren zu einem Einzahlwert kombiniert werden. Es würde sich ein sehr komplexes Optimierungskriterium ergeben, dessen Wert nur schwer nachvollziehbar ist, weswegen dieser Ansatz nicht verfolgt wird. Stattdessen wird ein Optimierungskriterium  $K_{\max}$  definiert, das die Lästigkeit des Geräusches von inäquidistanten Verzahnungen ausschließlich anhand *des höchsten Peaks des Schalldruckpegels im Spektrum* bewertet

$$K_{\max} = \max(L_p(f)). \quad (5.1)$$

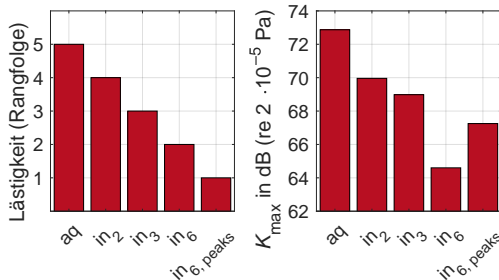
$K_{\max}$	in dB	Optimierungskriterium	$L_p$	in dB	Schalldruckpegel
$f$	in Hz	Frequenz			

Dieses Optimierungskriterium beschreibt näherungsweise die drei Geräuscheigenschaften. Eine Minimierung von  $K_{\max}$  – also eine Minimierung der höchsten Amplitude des Schalldruckpegels im Spektrum – signalisiert

1. eine geringe Lautstärke des Geräusches, da alle Schalldruckamplituden geringer als oder gleich  $K_{\max}$  sein müssen,
2. eine Verteilung der Anregung über viele Frequenzen, da sie sich nicht auf einzelne Frequenzbänder konzentriert und
3. gleichmäßige Schalldruckamplituden im Spektrum, da keine einzelnen Peaks prominent aus dem Spektrum hervorstechen.

Daher wird angenommen, dass  $K_{\max}$  ein geeignetes Kriterium ist, um die Lästigkeit des Geräusches von inäquidistanten Verzahnungen näherungsweise zu bewerten.

Abbildung 5.3 zeigt exemplarisch die von DRIESELMANN [215] ermittelte Rangfolge und die Werte des Optimierungskriteriums  $K_{\max}$  für die fünf in den Online-Hörversuchen als Reize verwendeten Geräusche. Die Rangfolge der Lästigkeit aus



**Abbildung 5.3:** Rangfolge (links) und Werte des Optimierungskriteriums  $K_{\max}$  (rechts) für die fünf in den Online-Hörversuchen als Reize verwendeten Geräusche (experimentelle Simulation nach DRIESELMANN [215] und analytische Berechnung)

den Hörversuchen kann mittels des Optimierungskriteriums  $K_{\max}$  für die betrachteten Geräusche fast korrekt abgebildet werden. Lediglich der Wert des Geräusches  $in_{6,peaks}$  (inäquidistante Verzahnung mit dem Auslegungsziel möglichst gleichmäßiger Amplituden im Spektrum) fällt höher aus als im Hörversuch. Das zeigt auch das Frequenzspektrum in Abbildung 5.1 auf S. 129. Diese Ungenauigkeit der Bewertung der Lästigkeit des Geräusches von inäquidistanten Verzahnungen mittels des Optimierungskriteriums  $K_{\max}$  wird an dieser Stelle hingenommen,

---

da die Vorteile des einfachen Aufbaus und der Möglichkeit der sehr schnellen Berechnung überwiegen.

Statt anhand der Schalldruckamplitude des höchsten Peaks im Frequenzspektrum bei stationären Betriebspunkten kann  $K_{\max}$  auch anhand des *höchsten Peaks des mittleren Schalldruckpegels im Ordnungsspektrum* bei instationären Betriebspunkten (zum Beispiel bei Drehzahlhochläufen) bestimmt werden. Selbstverständlich stellt dieses Optimierungskriterium nur *eine* Möglichkeit zur Bewertung des Geräusches dar. Eine Optimierung wäre auch hinsichtlich anderer Optimierungskriterien möglich.

### 5.3 Fazit zur Geräuschbewertung von inäquidistanten Verzahnungen

In diesem Kapitel wird der von DRIESELMANN [215] durchgeführte Online-Hörversuch zur Bewertung der Lästigkeit des Geräusches von inäquidistanten Verzahnungen vorgestellt. Die Ergebnisse des Hörversuches zeigen, dass die Geräusche als weniger lästig bewertet werden, wenn

1. diese leiser sind, wenn
2. die Anregungen über mehr Frequenzen verteilt sind und wenn
3. die Schalldruckamplituden im Spektrum gleichmäßig verteilt sind.

Diese drei Anforderungen können durch eine Minimierung des eingeführten Optimierungskriteriums  $K_{\max}$  näherungsweise erfüllt werden.  $K_{\max}$  ist definiert als der Wert des Schalldruckpegels des höchsten Peaks im Spektrum.  $K_{\max}$  kann für stationäre Betriebspunkte aus dem Frequenzspektrum oder für instationäre Betriebspunkte aus dem Ordnungsspektrum ermittelt werden. Mit  $K_{\max}$  als Optimierungskriterium kann das Geräusch von inäquidistanten Verzahnungen schnell und nachvollziehbar bewertet werden, sodass eine Optimierung der Verzahnungsgeometrie im Hinblick auf eine Minimierung der Lästigkeit des Geräusches möglich wird.

---

## 6 Geräuschoptimierung von inäquidistanten Verzahnungen

---

In diesem Kapitel wird eine inäquidistante Geradverzahnung, basierend auf der Geometrie der äquidistanten Prüfverzahnung, mittels der analytischen Berechnungskette (siehe Kapitel 4 ab S. 60) und des definierten Optimierungskriteriums (siehe Kapitel 5 ab S. 128) hinsichtlich einer minimalen Lästigkeit des Geräusches optimiert. Aufgrund der inäquidistanten Musterlänge von  $\Phi = 6$  Zähnen müssen sechs Zahndickenfaktoren  $\Delta s_{I,j}$  und fünf Zahnpositionsfaktoren  $\Delta Q_{I,j}$  ( $\Delta Q_{I,1} \stackrel{!}{=} 0$  als Bedingung zur Vermeidung redundanter Kombinationen) optimal ausgelegt werden.

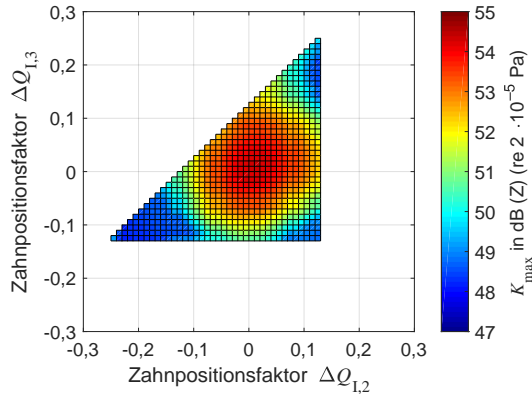
Die Berechnung des vollständigen Lösungsraumes würde eine enorme Rechenzeit erfordern. Bei elf Inäquidistanz-Parametern mit nur jeweils 11 Stufen (wenn zum Beispiel  $\Delta Q_{I,j}$  in Schritten von 0,1 von  $-0,5$  bis  $0,5$  variiert wird) ergäbe sich bei einer Berechnungsgeschwindigkeit von zehn Berechnungen pro Sekunde eine Gesamtberechnungsdauer von etwa 900 Jahren. Selbst bei parallelisierten Berechnungen auf Hochleistungsrechenclustern ist diese Berechnungsdauer für im Ingenieurbereich typische Entwicklungsprozesse indiskutabel – insbesondere im Hinblick auf die verhältnismäßig grobe Diskretisierung des Parameterraumes in diesem Beispiel. Daher ist die Anwendung von effizienten Optimierungsverfahren notwendig.

In Abschnitt 6.1 werden die Eigenschaften des Lösungsraumes untersucht und mögliche Optimierungsverfahren diskutiert. In Abschnitt 6.2 werden die in dieser Arbeit verwendete Optimierungsmethode vorgestellt, die Randbedingungen definiert und die Optimierung durchgeführt. Eine Diskussion der Optimierungsergebnisse findet in Abschnitt 6.3 statt. Das Kapitel endet mit Abschnitt 6.4 in Form eines Fazits.

### 6.1 Untersuchung des Lösungsraumes

Die Untersuchung des Lösungsraumes dient dem Verständnis darüber, wie sich der Wert des Optimierungskriteriums  $K_{\max}$  bei einer kontinuierlichen Veränderung der Inäquidistanz-Parameter verhält. So erfordern Optimierungsprobleme mit Unstetigkeitsstellen in deren Antwortfläche andere Algorithmen als Optimierungsprobleme mit stetigen Antwortflächen [218]. Da bei der Geräuschoptimierung von inäquidistanten Verzahnungen das Optimierungskriterium  $K_{\max}$  minimiert werden soll, sind die Anzahl und die Verteilung der lokalen Minima relevant. Alle Untersuchungen werden mit Drehzahlhochläufen über 3 s von 0 U/min bis 1500 U/min und bei einem Drehmoment von 80 N m durchgeführt. Abbildung 6.1 zeigt exemplarisch die Antwortfläche des Optimierungsproblems der zu optimierenden inäquidistanten Verzahnung. Aus Darstellungsgründen können lediglich zwei Parameter ( $\Delta Q_{I,2}$  und  $\Delta Q_{I,3}$ ) variiert werden, während die anderen neun

Parameter konstant zu null gesetzt werden. Die Inäquidistanz-Parameter  $\Delta Q_{I,2}$  und  $\Delta Q_{I,3}$  werden jeweils im Bereich von  $-0,3$  bis  $0,3$  variiert. Die Antwortfläche

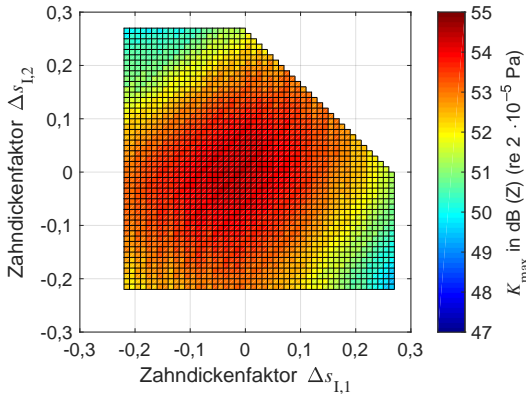


**Abbildung 6.1:** Antwortfläche des Optimierungsproblems; Variation der Inäquidistanz-Parameter  $\Delta Q_{I,2}$  und  $\Delta Q_{I,3}$ ; andere Parameter konstant null; Bewertung mittels des Optimierungskriteriums  $K_{\max}$ ; 0 U/min bis 1500 U/min; 80 N m (analytische Berechnung)

zeigt ein Maximum bei  $\Delta Q_{I,2} = \Delta Q_{I,3} = 0$ , was einer äquidistanten Auslegung entspricht, bei der alle Inäquidistanz-Parameter null sind. Rund um dieses Maximum entstehen mehrere lokale Minima, welche hauptsächlich am Rand der Antwortfläche liegen. Der Verlauf ist stetig. Die Antwortfläche wird durch die technische Darstellbarkeit der Verzahnungsgeometrie begrenzt und ist asymmetrisch. Für gleiche Werte von  $\Delta Q_{I,2}$  und  $\Delta Q_{I,3}$  (erster und dritter Quadrant in Abbildung 6.1) werden die Zähne gleichsinnig weiter nach vorne oder nach hinten verschoben. Eine technisch nicht darstellbare Geometrie entsteht erst, wenn Zahn zwei auf Zahn eins (bei einer Verschiebung nach vorne) oder Zahn drei auf Zahn vier trifft (bei einer Verschiebung nach hinten), was etwa bei  $\Delta Q_{I,2} \approx 0,14$  oder  $\Delta Q_{I,3} \approx -0,14$  der Fall ist. Für die Kombination von negativen Werten für  $\Delta Q_{I,2}$  und positiven Werten für  $\Delta Q_{I,3}$  (zweiter Quadrant in Abbildung 6.1) rücken die beiden Zähne näher zusammen, wodurch bereits sehr früh eine Kollision zwischen diesen beiden Zähnen und somit eine technisch nicht darstellbare Geometrie entsteht. Für den letzten Fall von positiven Werten für  $\Delta Q_{I,2}$  und negativen Werten für  $\Delta Q_{I,3}$  (vierter Quadrant in Abbildung 6.1) gelten die gleichen Beschränkungen wie bei der gleichsinnigen Verschiebung.

Abbildung 6.2 zeigt exemplarisch die Antwortfläche des Optimierungsproblems der zu optimierenden inäquidistanten Verzahnung bei Variation der Zahn-

dickenfaktoren  $\Delta s_{I,1}$  und  $\Delta s_{I,2}$  im Bereich von  $-0,3$  bis  $0,3$ , wobei die anderen Inäquidistanz-Parameter konstant zu null gesetzt werden. Analog den Beobach-



**Abbildung 6.2:** Antwortfläche des Optimierungsproblems; Variation der Inäquidistanz-Parameter  $\Delta s_{I,1}$  und  $\Delta s_{I,2}$ ; andere Parameter konstant null; Bewertung mittels des Optimierungskriteriums  $K_{\max}$ ; 0 U/min bis 1500 U/min; 80 N m (analytische Berechnung)

tungen bei der Variation der Zahnpositionen entsteht auch bei der Variation der Zahndicken ein Maximum bei  $\Delta s_{I,1} = \Delta s_{I,2} = 0$ , was der äquidistanten Auslegung entspricht. Von dort aus wird der Wert für  $K_{\max}$  in allen Richtungen geringer, wobei die Minima am Rand des technisch darstellbaren Lösungsraumes liegen. Die Verringerung von  $K_{\max}$  fällt bei der Variation der Zahndickenfaktoren geringer aus als bei der Variation der Zahnpositionsfaktoren. Wenn beide Zahndickenfaktoren große positive Werte annehmen, kommt es verhältnismäßig früh zu einer Kollision beider Zähne, weswegen der technisch darstellbare Lösungsraum im ersten Quadranten eingeschränkt wird. In den übrigen Quadranten werden die technisch darstellbaren Geometrien durch eine Kollision mit den benachbarten Zähnen begrenzt. Der Verlauf der Antwortfläche ist auch für die Variation der Zahndicken im untersuchten Bereich stetig.

Auf Basis des untersuchten Ausschnittes des Lösungsraumes wird angenommen, dass die Beobachtungen für den gesamten Lösungsraum, auch bei gleichzeitiger Variation aller Zahnpositionsfaktoren und Zahndickenfaktoren, gelten. Es wird daher davon ausgegangen, dass der gesamte Lösungsraum stetig ist und mehrere lokale Minima mit jeweils unterschiedlichen Werten aufweist.



---

## 6.2 Entwicklung und Anwendung einer Optimierungsmethode

Aufgrund der Annahme des stetigen Verlaufes des Lösungsraumes sind lokale Optimierungsverfahren, wie zum Beispiel gradientenbasierte Verfahren, prinzipiell einsetzbar. Deren Vorteil ist, dass ein lokales Minimum sehr genau ermittelt werden kann. Jedoch wird in der Regel nur das nächstgelegene Optimum gefunden. Da von einem Lösungsraum mit mehreren lokalen Minima ausgegangen wird, hängt das Optimierungsergebnis daher stark vom gewählten Startpunkt ab. Ein alternativer Ansatz sind rein zufallsbasierte Verfahren, bei denen in jedem Iterationsschritt voneinander unabhängige, zufällige Parameterkombinationen erzeugt und berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit, dabei ein Minimum tatsächlich zu treffen, ist jedoch gering.

In einer im Rahmen dieser Arbeit betreuten Master-Thesis untersucht DIEFENBACH [219] verschiedene Optimierungsmethoden um das Optimierungsproblem von inäquidistanten Verzahnungen effizient zu lösen. Er kommt zu dem Schluss, dass komplexe Optimierungsmethoden, wie beispielsweise die von ihm untersuchte *particle swarm optimization*, deutlich schneller als zufallsbasierte Methoden ein Minimum finden. Jedoch hängt das Ergebnis und die Performanz der Methode stark von den zu wählenden Startwerten ab. Für die grundlegende Methodentwicklung im Rahmen dieser Arbeit wird ein weniger komplexer zweistufiger Ansatz aus der Kombination eines zufallsbasierten und eines lokalen Optimierungsverfahrens genutzt.

### 6.2.1 Zufallsbasierte Optimierungsstufe

In der ersten Optimierungsstufe werden für alle elf Inäquidistanz-Parameter gleichverteilte Zufallszahlen (computerbasierte Pseudozufallszahlen) in den Bereichen

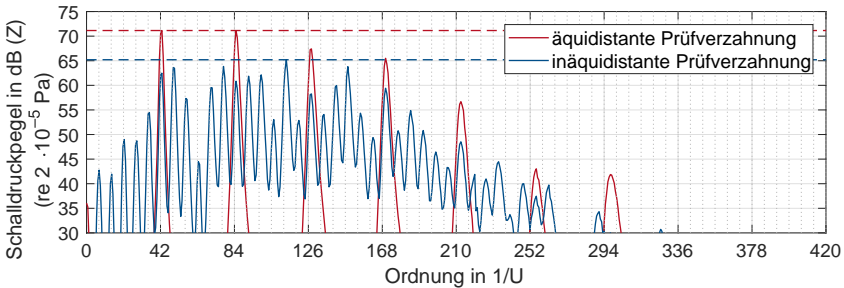
$$\begin{aligned}\Delta Q_{I,j} &= -0,5 \dots 0,5 \text{ und} \\ \Delta s_{I,j} &= -0,25 \dots 0,25\end{aligned}\tag{6.1}$$

$\Delta Q_{I,j}$	in	–	Zahnpositionsfaktor, Antrieb	$j$	in	–	Zahnnummer
$\Delta s_{I,j}$	in	–	Zahndickenfaktor, Antrieb				

generiert. Der Wertebereich wird bei den Zahnpositionsfaktoren größer gewählt als die größten in Abbildung 6.1 darstellbaren Werte, da sich aus der Kombination verschiedener Zahnpositionsfaktoren diese größeren Werte ergeben können. Für große positive Werte von  $\Delta Q_{I,2}$  und  $\Delta Q_{I,4}$  sind zum Beispiel für den dazwischen liegenden Zahn noch größere Werte für  $\Delta Q_{I,3}$  möglich. Bei den Zahndickenfak-

toren wird der Wertebereich mit  $-0,25 \dots 0,25$  eingeschränkt, um zu extreme Zahndicken zu vermeiden.

Für jede zufällig generierte Parameterkombination wird die analytische Berechnungskette vollständig ausgeführt, wobei technisch nicht darstellbare Geometrien automatisch erkannt und verworfen werden. Die Berechnung wird jeweils für einen Hochlauf mit Drehzahlen zwischen 0 U/min und 1500 U/min über eine Dauer von 3 s bei einem Drehmoment von 80 N m durchgeführt. Das Ordnungsspektrum des Geräusches wird über den gesamten Drehzahlhochlauf berechnet. Schließlich wird das Geräusch entsprechend der Definition von  $K_{\max}$  anhand der Amplitude des höchsten Peaks des Schalldruckpegels im Ordnungsspektrum bewertet. Abbildung 6.3 zeigt exemplarische Ordnungsspektren, die im Rahmen der Optimierung anhand von  $K_{\max}$  bewertet werden.

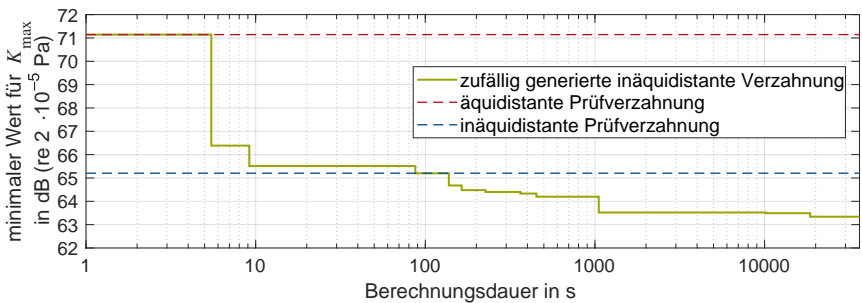


**Abbildung 6.3:** exemplarische Ordnungsspektren, die während der Optimierung berechnet werden; Bewertung mittels  $K_{\max}$  anhand des höchsten Peaks des Schalldruckpegels im Spektrum (gestrichelte Linien) (analytische Berechnung)

Im Rahmen der Optimierung wird die vereinfachte Berechnungsmethode nach GEISER [57], wie in Abschnitt 4.4.3 ab S. 96 beschrieben, angewendet, wodurch eine Iteration mit zufällig generierten Parametern, die auf eine technisch darstellbare Geometrie führt, auf einer herkömmlichen Workstation etwa 2,2 s dauert. Da aus den experimentellen Simulationen bekannt ist, dass der fertigungsbedingte Drehwegfehler einen großen Einfluss auf das Geräusch der Verzahnung hat, wird der für die inäquidistante Prüfverzahnung experimentell ermittelte Drehwegfehler (siehe Abschnitt 4.4.1 ab S. 86) als Eingangsgröße für die zu optimierende inäquidistante Verzahnung genutzt. Damit soll eine Vergleichbarkeit mit den bestehenden Ergebnissen der Prüfverzahnungen ermöglicht werden. Es sei darauf hingewiesen, dass zwischen der Verzahnungsgeometrie und dem tatsächlichen

fertigungsbedingten Drehwegfehler eine Wechselwirkung besteht, sodass die Annahme eines gleichen Drehwegfehlers ungenau ist.

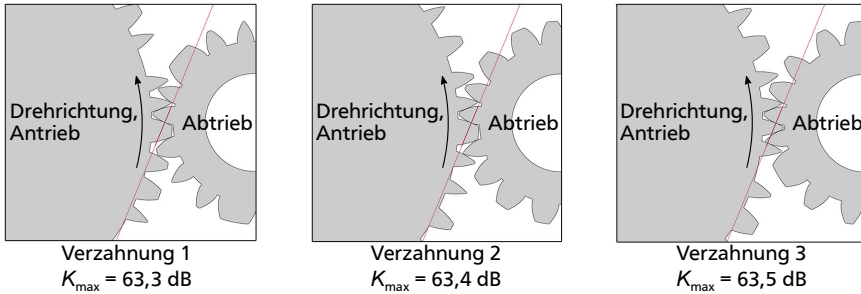
Im Zuge der ersten Optimierungsstufe werden eine Million inäquidistante Verzahnungen zufällig generiert und deren Geräusch mittels  $K_{\max}$  bewertet. Etwa 99,6 % der generierten Kombinationen führen zu technisch nicht darstellbaren Verzahnungsgeometrien und werden daher verworfen. Dieser sehr hohe Anteil an ungültigen Kombinationen verdeutlicht die geringe Effizienz eines rein auf Zufall basierenden Verfahrens. Die Berechnung dauert insgesamt etwa zehn Stunden (auf einer herkömmlichen Workstation) und bringt 4045 gültige Kombinationen hervor. Abbildung 6.4 zeigt den Wert des niedrigsten Wertes für  $K_{\max}$  in Abhängigkeit von der Berechnungsdauer. Zu Vergleichszwecken sind die Werte für die äquidistante (rot) und die inäquidistante Prüfverzahnung (blau) eingezeichnet.



**Abbildung 6.4:** niedrigster ermittelter Wert für  $K_{\max}$  in Abhängigkeit von der Berechnungsdauer; Berechnung von einer Million zufällig generierter inäquidistanter Verzahnungen (analytische Berechnung)

Mit zunehmender Berechnungsdauer werden mittels des zufallsbasierten Ansatzes in unregelmäßigen Abständen neue minimale Werte für  $K_{\max}$  gefunden. Bereits nach etwa 90 s wird eine Lösung gefunden, die einen gleichen Wert für  $K_{\max}$  erzeugt wie die inäquidistante Prüfverzahnung. Nach einer Berechnungsdauer von etwa 1000 s (etwa 17 Minuten) wird bereits eine Parameterkombination gefunden, die einen Wert von  $K_{\max} = 63,5$  dB erzeugt. Trotz über neun Stunden zusätzlicher Berechnungsdauer können nur minimale weitere Verbesserungen erreicht werden. Die zufallsbasierte Optimierungsstufe führt somit relativ schnell auf gute Ergebnisse. Es ist jedoch nicht prognostizierbar, wie lange die Berechnung fortgeführt werden muss, da das Verfahren kein Konvergenzverhalten aufweist. Ebenso ist unklar, wie dicht eine gefundene Lösung tatsächlich an einem lokalen Minimum liegt. Eine Lösung, die sich am Rande eines lokalen Minimums befindet, hat in Kombination mit einer weiteren Optimierungsstufe eventuell ein höheres

Potenzial für ein gutes Endergebnis als eine Lösung, die sich bereits dicht an einem lokalen Optimum befindet. Aus diesem Grund werden die drei besten Lösungen, die in der zufallsbasierten Optimierungsstufe gefunden werden, als Startpunkte für die zweite Optimierungsstufe genutzt. Abbildung 6.5 zeigt die Verzahnungsgeometrien der drei Lösungen mit ihrem jeweiligen Wert für  $K_{\max}$ . Alle drei Verzahnungen unterscheiden sich in der Geometrie deutlich voneinander,



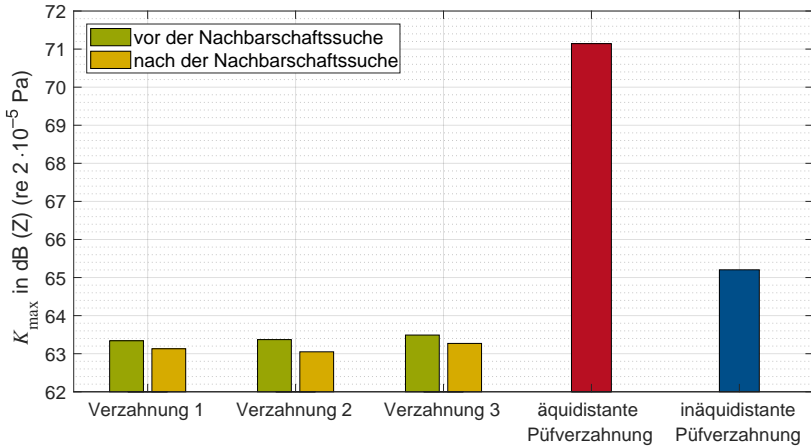
**Abbildung 6.5:** Darstellung der drei besten Lösungen, die mittels der zufallsbasierten Optimierungsstufe ermittelt wurden

sind jedoch durch überwiegend dünnere Zähne am Antrieb und dickere Zähne am Abtrieb gekennzeichnet. Verzahnung 1 und Verzahnung 3 weisen dabei sogar jeweils einen extrem dicken Zahn auf. Aus akustischer Sicht kann ein solch dicker Zahn womöglich sinnvoll sein, aus Sicht einer klassischen Verzahnungsauslegung ist das jedoch zu hinterfragen. Die Verzahnungsdaten und die Inäquidistanz-Parameter der drei Verzahnungen sind in Anhang A.8 ab S. 166 gegeben.

### 6.2.2 Nachbarschaftssuche

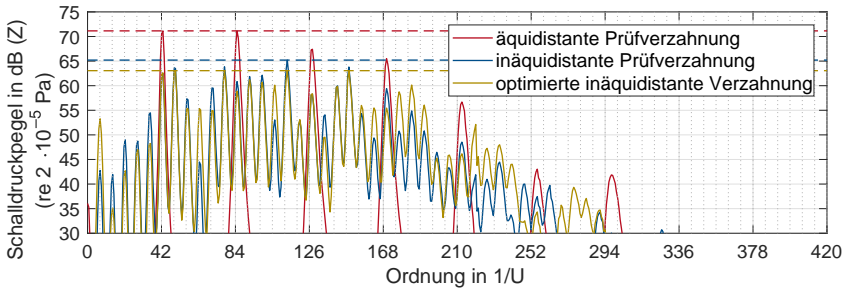
In der zweiten Optimierungsstufe wird eine Nachbarschaftssuche durchgeführt. Diese wird für jedes der drei Ergebnisse der zufallsbasierten Optimierungsstufe durchgeführt. Ausgehend von der jeweiligen Startlösung wird jeder Inäquidistanz-Parameter einzeln (*one factor at a time*) um ein Inkrement (0,01) vergrößert oder verkleinert. Insgesamt ergeben sich so aufgrund der elf zu variierenden Inäquidistanz-Parameter 22 Nachbarlösungen pro Iteration. Am Ende der Iteration wird geprüft, welche der berechneten Nachbarlösungen den geringsten Wert für  $K_{\max}$  aufweist. Diese Lösung wird als Startlösung für den nächsten Iterationsschritt definiert. Stellt sich am Ende einer Iteration heraus, dass keine der berechneten Nachbarlösungen einen geringeren Wert aufweist, so ist davon auszugehen, dass die aktuelle Startlösung bereits das lokale Minimum (im Rahmen der Diskretisierung des Lösungsraumes) darstellt.

Abbildung 6.6 zeigt die Werte von  $K_{\max}$  für die drei Verzahnungen vor und nach der Nachbarschaftssuche. Zusätzlich sind die Werte von  $K_{\max}$  für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung gegeben.



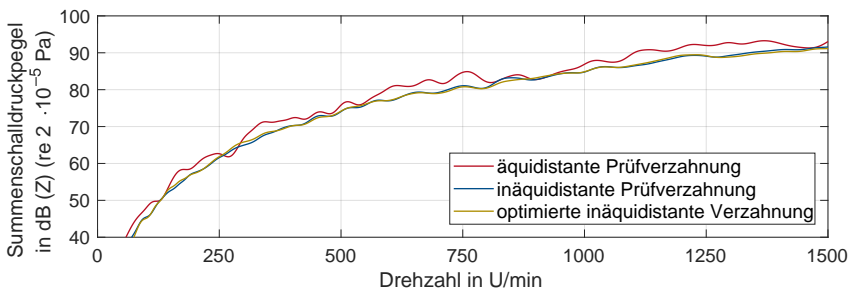
**Abbildung 6.6:** Werte von  $K_{\max}$  vor und nach der Nachbarschaftssuche für die drei Verzahnungen (analytische Berechnung)

Die für die Nachbarschaftssuche benötigte Berechnungsdauer hängt von der Anzahl der benötigten Iterationen ab und beträgt im vorliegenden Fall auf einer herkömmlichen Workstation zwischen 626 s für Verzahnung 1 mit 9 Iterationen und 1466 s für Verzahnung 2 mit 22 Iterationen. Die Verbesserungen durch die Nachbarschaftssuche sind gering. Während Verzahnung 1 vor der Nachbarschaftssuche den geringsten Wert von  $K_{\max}$  aufweist, zeigt Verzahnung 2 nach der Nachbarschaftssuche mit 63,05 dB den geringsten Wert. Die folgenden Erläuterungen beziehen sich daher auf Verzahnung 2, die nachfolgend als *optimierte inäquidistante Verzahnung* bezeichnet wird. Die Inäquidistanz-Parameter der optimierten inäquidistanten Verzahnung sind in Anhang A.8 auf S. 166 gegeben. Abbildung 6.7 zeigt das Ordnungsspektrum der optimierten inäquidistanten Verzahnung im Vergleich zu den Ordnungsspektren der beiden Prüfverzahnungen. Die jeweiligen Werte von  $K_{\max}$  (gestrichelte, horizontale Grenzlinien) nehmen, ausgehend von der äquidistanten Prüfverzahnung, über die inäquidistante Prüfverzahnung hin zur optimierten inäquidistanten Prüfverzahnung ab. Bei der äquidistanten Prüfverzahnung berühren zwei der Peaks (42. und 84. Ordnung) die Grenzlinie. Bei der inäquidistanten Prüfverzahnung liegt durch die Verteilung des Schalldruckes über mehrere Frequenzen der Wert von  $K_{\max}$  tiefer, wobei nur

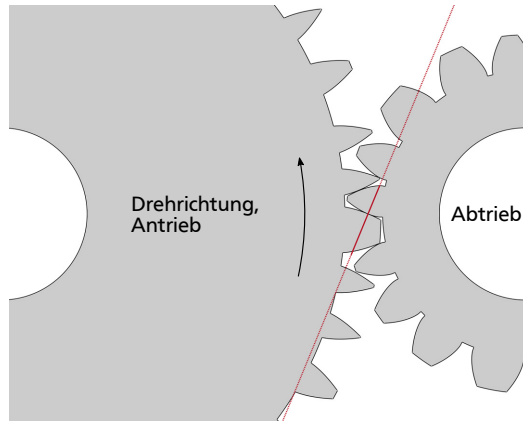


**Abbildung 6.7:** Ordnungsspektren der optimierten inäquidistanten Verzahnung und der beiden Prüfverzahnungen; Werte von  $K_{\max}$  gestrichelt; Hochlauf (Dauer 3 s); 0 U/min bis 1500 U/min; 80 N m (analytische Berechnung)

der Peak bei der 112. Ordnung die Grenzlinie berührt. Die anhand von Literaturangaben für optimale Positionen von Lüfterschaufeln ausgelegte inäquidistante Prüfverzahnung (siehe Abschnitt 4.2.1 ab S. 64) ist somit nicht optimal akustisch ausgelegt, denn einzelne, hervorstechende Peaks deuten auf eine erhöhte Tonhaltigkeit des Geräusches hin. Bei der optimierten inäquidistanten Prüfverzahnung ist der Wert für  $K_{\max}$  etwa 2,2 dB geringer als jener der inäquidistanten Prüfverzahnung. Weiterhin berühren insgesamt fünf Peaks die Grenzlinie (42., 49., 77., 112. und 147. Ordnung), was auf ein deutlich ausgewogeneres Spektrum mit geringerer Tonhaltigkeit hinweist. Abbildung 6.8 zeigt die Summenschalldruckpegel der beiden Prüfverzahnungen und der optimierten inäquidistanten Verzahnung in Abhängigkeit von der Drehzahl.



**Abbildung 6.8:** Summenschalldruckpegel der beiden Prüfverzahnungen und der optimierten inäquidistanten Verzahnung; Hochlauf (dauer 3 s); 0 U/min bis 1500 U/min; 80 N m (analytische Berechnung)



**Abbildung 6.9:** Geometrie der optimierten inäquidistanten Verzahnung

Wie bereits in Abschnitt 4.6.3 ab S. 118 beschrieben, weist die inäquidistante Prüfverzahnung über nahezu alle Drehzahlen hinweg einen geringeren Summenschalldruckpegel als die äquidistante Prüfverzahnung auf. Die Abweichung zwischen dem Summenschalldruckpegel der optimierten inäquidistanten Verzahnung und jenem der inäquidistanten Prüfverzahnung beträgt für alle Drehzahlen weniger als 1 dB. Die beiden Verzahnungen unterscheiden sich somit in ihrem Summenschalldruckpegel praktisch nicht, sondern überwiegend in der Verteilung des Schalldruckes im Spektrum. Es ist hervorzuheben, dass die in Abschnitt 4.2.1 ab S. 64 ausgelegte inäquidistante Prüfverzahnung – ohne Vorwissen im Bereich akustisch vorteilhafter Ausgestaltungen inäquidistanter Verzahnungen – bereits eine sehr gute erste Auslegung darstellt. Die Annahme, dass sich die unregelmäßig ausgestaltete Geometrie von Lüftern in erster Näherung auf Zahnräder übertragen lässt, erweist sich somit im Nachhinein als gültig.

### 6.3 Diskussion der Optimierungsergebnisse

In diesem Kapitel wird eine akustische Optimierung der inäquidistanten Verzahnung erfolgreich durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen erhebliche Verbesserungen in der spektralen Verteilung des Geräusches (Reduktion von  $K_{\max}$  um 8,1 dB) sowie deutliche Verbesserungen im Summenschalldruckpegel (durchschnittliche Reduktion um 2,1 dB für alle Drehzahlen) gegenüber der äquidistanten Prüfverzahnung. Im Vergleich zur inäquidistanten Prüfverzahnung fallen die Unterschiede deutlich geringer aus (Reduktion von  $K_{\max}$  um 2,2 dB, Reduktion des Summenschalldruckpegels um weniger als 1 dB). Insgesamt ist das Ziel einer akustisch optimierten inäquidistanten Verzahnung erreicht. Abbildung 6.9 zeigt die optimierte inäquidistante Verzahnung. Die dargestellte Verzahnungsgeometrie bringt neben den akustischen Vorteilen den Nachteil einer verringerten Tragfähigkeit aufgrund

---

einiger sehr dünner Zähne mit sich. Um solch extremen Verzahnungsgeometrien vorzubeugen, könnten die Grenzen der Parameterräume bei der Optimierung stärker eingeschränkt werden. Das würde jedoch voraussichtlich ebenfalls das Potenzial der Geräuschkürzung einschränken. Eine geräuschoptimale Auslegung von inäquidistanten Verzahnungen steht somit – zumindest teilweise – im Zielkonflikt mit den Grundregeln einer klassischen Verzahnungsauslegung, siehe Abschnitt 3.5 ab S. 58. Es muss daher im Einzelfall entschieden werden, ob und in welchem Maße inäquidistante Verzahnungen zur Geräuschkürzung an Zahnradgetrieben in einem konkreten Anwendungsfall eingesetzt werden können.

Die vorgestellte zweistufige Optimierungsmethode ist eine zweckmäßige Methode, mit der eine Optimierung von inäquidistanten Verzahnungen prinzipiell möglich ist. Jedoch bieten andere Verfahren, wie beispielsweise die von DIEFENBACH [219] untersuchte Optimierungsmethode, deutlich schnellere Berechnungen – jedoch bei einer höheren Komplexität des Verfahrens. Bei der Generierung der zufallsbasierten Lösungen in der ersten Optimierungsstufe könnten Methoden eingesetzt werden, mit denen nur technisch darstellbare Parameterkombinationen erzeugt werden, um die Berechnungsdauer zur Generierung und zum Ausschluss von ungültigen Kombinationen einzusparen. Weiterhin könnten statt der rein zufallsbasierten Generierung von Parameterkombinationen Pseudozufallszahlen, zum Beispiel anhand einer SOBOLOV-Sequenz [220], genutzt werden, um eine gleichmäßigere Abdeckung des gesamten Lösungsraumes sicherzustellen.

## 6.4 Fazit zur Geräuschoptimierung von inäquidistanten Verzahnungen

In diesem Kapitel wird eine zweistufige Optimierungsmethode, bestehend aus einem zufallsbasierten Ansatz und einer Nachbarschaftssuche, zur geräuschoptimierten Auslegung inäquidistanter Verzahnungen entwickelt. Als Optimierungskriterium dient das in Kapitel 5 ab S. 128 entwickelte Optimierungskriterium  $K_{\max}$ , das die Lästigkeit des Geräusches anhand des höchsten Peaks des Schalldruckpegels im Spektrum (Frequenzspektrum für stationäre Betriebspunkte und Ordnungsspektrum für instationäre Betriebspunkte) bewertet. Es wird angenommen, dass der Lösungsraum des Optimierungsproblems stetig ist und mehrere lokale Minima aufweist, welche sich häufig an den Rändern des technisch darstellbaren Versuchsraumes befinden.

Auf Basis der äquidistanten Prüfverzahnung wird mittels der Optimierungsmethode die optimierte inäquidistante Verzahnung ermittelt. In der ersten Optimierungsstufe wird jeder der elf Inäquidistanz-Parameter anhand von gleichverteilten Zufallszahlen individuell definiert. Die sich daraus ergebende Verzahnungsgeometrie wird zunächst auf die technische Darstellbarkeit (keine negativen Zahnkopfdicken und keine Zahnüberschneidungen) hin geprüft und im Falle einer



---

nicht darstellbaren Geometrie verworfen. Insgesamt werden innerhalb von etwa zehn Stunden eine Million Kombinationen berechnet, wovon nur 4045 Kombinationen technisch darstellbare Geometrien ergeben. An dieser Stelle besteht ein großes Potenzial zur Verringerung der Rechenzeit mittels eines a-priori-Kriteriums zur Vermeidung ungültiger Kombinationen. Für die drei besten zufallsbasierten Kombinationen werden in der zweiten Optimierungsstufe, die auf einer Nachbarschaftssuche basiert, jeweils die nächstgelegenen lokalen Minima bestimmt. Die sich daraus ergebende beste Lösung wird als *optimierte inäquidistante Verzahnung* bezeichnet und weist einen um 8,1 dB verringerten Wert für  $K_{\max}$  und einen um durchschnittlich 2,1 dB reduzierten Summenschalldruckpegel gegenüber der äquidistanten Prüfverzahnung auf.

Das Ziel der Entwicklung einer Methode zur akustischen Optimierung von inäquidistanten Verzahnungen ist erreicht, obgleich noch große Potenziale zur Verringerung der Rechenzeit bestehen. Die dritte Hypothese dieser Arbeit

*Es ist eine Methode entwickelbar, mit der ein Geräuschoptimum hinsichtlich eines zu bestimmenden Kriteriums ermittelt werden kann.*

ist somit bestätigt.

---

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

---

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Inhalte dieser Arbeit zusammengefasst (Abschnitt 7.1). Weiterhin werden an diese Arbeit angrenzende Themen benannt, bei denen weiterer Forschungsbedarf besteht (Abschnitt 7.2).

### 7.1 Zusammenfassung

Diese Arbeit beschreibt die Konzeption, die Auslegung und die Optimierung von inäquidistanten Verzahnungen zur Geräuschminderung an Zahnradgetrieben. Inäquidistante Verzahnungen sind durch eine unregelmäßige Verzahnungsgeometrie charakterisiert, wodurch die Periodizität der Geräuschanregung im Zahneingriff – die Ursache für das Getriebeheulen – minimiert wird.

Auf Basis der Literaturrecherche werden etablierte Methoden zur Berechnung des Geräusches von konventionellen Verzahnungen, psychoakustische Ansätze zur Bewertung von Geräuschen und Ansätze zur Geräuschminderung mittels unregelmäßiger Geometrien aus anderen Bereichen ermittelt. Eine Patentrecherche zeigt, dass in den vergangenen Jahrzehnten bereits ähnliche Ansätze zu inäquidistanten Verzahnungen patentiert wurden, jedoch sind dazu keine wissenschaftlichen Untersuchungen bekannt.

Bei der Konzeption inäquidistanter Verzahnungen werden diverse Möglichkeiten diskutiert, wie geometrische Unregelmäßigkeiten in Verzahnungen eingebracht werden können – unter anderem durch unregelmäßige Zahnpositionen, Zahndicken, Zahnkopfhöhen und Eingriffswinkel. Diese Arbeit beschränkt sich auf unregelmäßige Zahnpositionen, beschrieben durch zahnindividuelle Zahnpositionsfaktoren  $\Delta Q_j$ , und unregelmäßige Zahndicken, beschrieben durch zahnindividuelle Zahndickenfaktoren  $\Delta s_j$ . Es werden Kompatibilitätsgleichungen hergeleitet, mit denen zwei inäquidistante Zahnräder so aneinander angepasst werden können, dass trotz der unregelmäßigen Verzahnungsgeometrie theoretisch kein Drehwegfehler entsteht und das Verzahnungsgesetz eingehalten wird. Weiterhin wird der Aufbau von inäquidistanten Verzahnungen in Mustern beschrieben, wodurch eine Vielzahl an Übersetzungsverhältnissen möglich ist.

Mithilfe der entwickelten analytischen Berechnungskette, bestehend aus statischen, elastostatischen, dynamischen und maschinenakustischen Modellierungsschritten, kann das Geräusch von inäquidistanten Verzahnungen berechnet werden. Basierend auf einer konventionellen Verzahnung (*äquidistante Prüfverzahnung*) wird eine inäquidistante Verzahnung (*inäquidistante Prüfverzahnung*) ausgelegt, deren Geometrie von der unregelmäßigen Schaufelverteilung von Lüftern aus der Literatur abgeleitet wird. Die beiden Prüfverzahnungen werden mittels 3D-Druckverfahren (selektives Lasersintern) aus Stahl gefertigt. Weiter-

---

hin wird ein Getriebeprüfstand nach dem Spannungsprinzip zur akustischen Untersuchung der Prüfverzahnungen ausgelegt und aufgebaut. Die jeweiligen Berechnungsansätze der statischen, der elastostatischen und der dynamischen Modellierung sind auf inäquidistante Verzahnungen angepasste und weiterentwickelte Berechnungsmethoden von konventionellen Verzahnungen aus der Literatur. Jeder Modellierungsschritt wird numerisch, experimentell oder anhand von Literaturangaben validiert. Als Basis für die maschinenakustische Modellierung des Getriebeprüfstandes dient die maschinenakustische Grundgleichung. Mittels einer numerischen Bestimmung der Körperschallfunktionen des Getriebeprüfstandes und eines vereinfachten Abstrahlmodells (Kugelstrahler 0. Ordnung) wird die maschinenakustische Grundgleichung vollständig abgebildet. Es wird gezeigt, dass die in der Literatur häufig nur als Modellvorstellung genutzte maschinenakustische Grundgleichung auch für akustische Berechnungen von instationären Zeitsignalen mit guter quantitativer Aussagekraft genutzt werden kann.

Mithilfe des Getriebeprüfstandes werden die akustischen Eigenschaften der gefertigten Prüfverzahnungen in experimentellen Simulationen untersucht. Das Geräusch der inäquidistanten Prüfverzahnung weist geringere Werte für die Lautheit, die Tonhaltigkeit, die Rauigkeit und die Lästigkeit als das der äquidistanten Prüfverzahnung auf. Bemerkenswert ist die Erkenntnis, dass – anders als bei unregelmäßigen Lüftern und unregelmäßigen Reifenprofilen – der Summenschalldruckpegel durch inäquidistante Verzahnungen verringert werden kann.

Auf Basis der experimentellen Simulationen wird die analytische Berechnungskette validiert, wobei sich für Geradverzahnungen gute bis sehr gute Übereinstimmungen zwischen experimenteller Simulation und analytischer Berechnung ergeben. Bei einer untersuchten Schrägverzahnung fallen die Übereinstimmungen lediglich befriedigend aus.

Auf Basis der von DRIESELMANN [215] durchgeführten Hörversuche werden drei Kriterien abgeleitet, anhand derer die Lästigkeit des Geräusches von Verzahnungen beschrieben werden kann. Das Optimierungskriterium  $K_{\max}$  fasst die drei Kriterien zu einem Wert zusammen, indem die Lästigkeit des Geräusches näherungsweise anhand des höchsten Peaks des Schalldruckpegels im Spektrum bewertet wird.

Mithilfe einer zweistufigen Optimierungsmethode, bestehend aus einem zufallsbasierten Optimierungsschritt und einer Nachbarschaftssuche, wird eine geräuschoptimierte inäquidistante Verzahnung ermittelt. Diese *optimierte inäquidistante Verzahnung* weist eine um 8,1 dB verringerte Maximalamplitude des Schalldruckpegels im Spektrum und einen um durchschnittlich 2,1 dB reduzierten Summenschalldruckpegel im Vergleich zur äquidistanten Prüfverzahnung auf.

Die zu Beginn dieser Arbeit gestellte Forschungsfrage

---

## *Wie lässt sich ein Stirnradgetriebe mithilfe der inäquidistanten Verzahnung hinsichtlich des Geräusches optimieren?*

ist somit durch die vorgestellte Konzeption von inäquidistanten Verzahnungen, die analytische Berechnungskette, das Optimierungskriterium  $K_{\max}$  und die zweistufige Optimierungsmethode beantwortet. Die drei aufgestellten Hypothesen

1. Durch inäquidistante Verzahnungen kann das Zahneingriffsgeräusch von Zahnradgetrieben gemindert werden.
2. Die Geräuschanregung von inäquidistanten Verzahnungen lässt sich mathematisch beschreiben.
3. Es ist eine Methode entwickelbar, mit der ein Geräuschoptimum hinsichtlich eines zu bestimmenden Kriteriums ermittelt werden kann.

werden jeweils bestätigt.

## **7.2 Ausblick**

In weiterführenden Arbeiten sollte die bisher nur virtuell existierende optimierte inäquidistante Verzahnung gefertigt und in einer experimentellen Simulation akustisch untersucht werden, um eine experimentelle Validierung der Optimierungsergebnisse aus Kapitel 6 ab S. 134 zu ermöglichen.

Das Ergebnis der akustischen Optimierung von inäquidistanten Verzahnungen hängt maßgeblich vom gewählten Optimierungskriterium ab. Das in dieser Arbeit gewählte Optimierungskriterium  $K_{\max}$  bildet die Ergebnisse des von DRIESELNANN [215] durchgeführten Hörversuches näherungsweise ab, kann diese jedoch nicht exakt wiedergeben, siehe Kapitel 5 ab S. 128. Es wird daher empfohlen, ausführliche psychoakustische Hörversuche durchzuführen, um aus den Ergebnissen ein aussagekräftigeres Optimierungskriterium abzuleiten.

Um auch inäquidistante Schrägverzahnungen geräuschoptimal auslegen zu können, sollten die erarbeiteten Methoden im Hinblick auf Schrägverzahnungen erweitert werden. Insbesondere die Ergebnisqualität des Scheibenmodells zur Berechnung der Verzahnungssteifigkeit von Schrägverzahnungen sollte kritisch hinterfragt werden, siehe Abschnitt 4.6.4 ab S. 122.

Neben den in dieser Arbeit detailliert betrachteten unregelmäßigen Zahnpositionen und Zahndicken sollten weitere Inäquidistanz-Parameter, wie zum Beispiel unregelmäßige Eingriffswinkel oder unregelmäßige Zahnkopfhöhen, untersucht werden. Es besteht die Möglichkeit damit den Zielkonflikt zwischen einer akustisch vorteilhaften inäquidistanten Verzahnungen und einer hohen Tragfähigkeit (siehe Kapitel 3.5 auf S. 58) zu verringern oder ganz aufzulösen.

---

Statt der Anwendung von Optimierungsverfahren zur Ermittlung des Geräuschoptimums (siehe Kapitel 6 ab S. 134) würde eine wissensbasierte Auslegung von inäquidistanten Verzahnungen einen großen Mehrwert in der Verzahnungsauslegung darstellen. Könnte ein Verständnis über den Zusammenhang zwischen der Variation der einzelnen Inäquidistanz-Parameter und dem sich daraus ergebenden Geräusch erlangt werden, wäre eine direkte, wissensbasierte Auslegung von inäquidistanten Verzahnungen – auch unter Beachtung anwendungsspezifischer Randbedingungen – möglich. Aufgrund der hohen Komplexität des Optimierungsproblems stellt das jedoch eine enorme Herausforderung dar. Eventuell können diese Zusammenhänge mittels Methoden des maschinellen Lernens identifiziert werden. Die dafür notwendigen Datensätze können mittels der analytischen Berechnungskette erzeugt werden.

Um die akustisch vorteilhaften inäquidistanten Verzahnungen in die Anwendung überführen zu können, müssen die Herausforderungen der wirtschaftlichen Fertigung, des Verschleißverhaltens und der Tragfähigkeit (siehe Abschnitt 3.5 ab S. 58) in weiteren Schritten adressiert werden.

Offen bleibt die Frage, wie sich inäquidistante Verzahnungen im Kontext von realen komplexen Getriebesystemen mit nachgiebigen Gehäusen, mehreren Zahnradstufen und Schaltelementen akustisch auswirken. Erste eigene Untersuchungen, basierend auf der Anwendung der analytischen Berechnungskette auf eine Getriebestufe eines elektrischen Pkw-Antriebsstranges, waren erfolgreich [221]. Dieser Ansatz sollte in Form von detaillierten rechnerischen und experimentellen Simulationen weiter verfolgt werden.

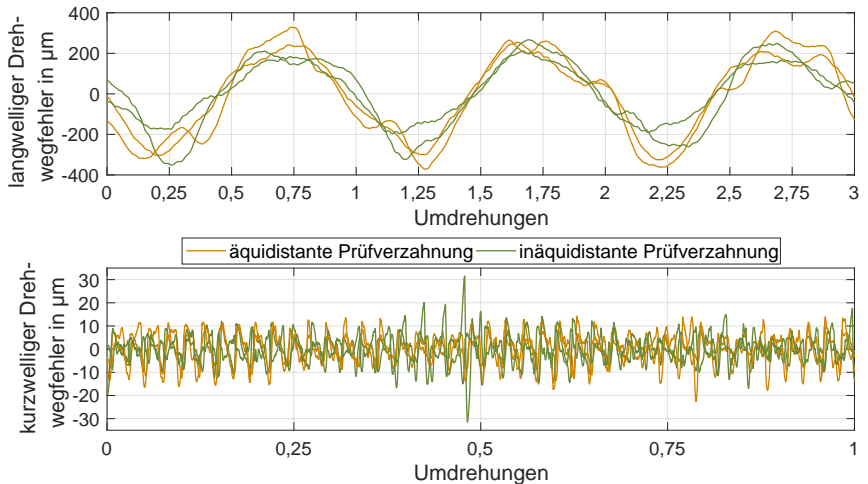
## A Anhang

### A.1 Absolute Zahnpositionen und Zahndicken der Prüfverzahnungen

**Tabelle A.1:** absolute Zahnpositionen und Zahndicken der Prüfverzahnungen

$j$	$Q_{I,j,aq}$ in m	$Q_{I,j,in}$ in m	$Q_{II,j,aq}$ in m	$Q_{II,j,in}$ in m	$S_{t,I,j,aq}$ in m	$S_{t,I,j,in}$ in m	$S_{t,II,j,aq}$ in m	$S_{t,II,j,in}$ in m
1	0	0	0	-0,001	0,00493	0,00414	0,00559	0,00479
2	0,3864	0,3877	0,1602	0,1610	0,00493	0,00483	0,00559	0,00479
3	0,3770	0,3779	0,1508	0,1521	0,00493	0,00583	0,00559	0,00548
4	0,3676	0,3667	0,1414	0,1414	0,00493	0,00583	0,00559	0,00648
5	0,3581	0,3560	0,1320	0,1302	0,00493	0,00483	0,00559	0,00648
6	0,3487	0,3471	0,1225	0,1205	0,00493	0,00414	0,00559	0,00548
7	0,3393	0,3393	0,1131	0,1123	0,00493	0,00414	0,00559	0,00479
8	0,3299	0,3311	0,1037	0,1045	0,00493	0,00483	0,00559	0,00479
9	0,3204	0,3214	0,0943	0,0956	0,00493	0,00583	0,00559	0,00548
10	0,3110	0,3102	0,0848	0,0849	0,00493	0,00583	0,00559	0,00648
11	0,3016	0,2995	0,0754	0,0737	0,00493	0,00483	0,00559	0,00648
12	0,2922	0,2906	0,0660	0,0639	0,00493	0,00414	0,00559	0,00548
13	0,2827	0,2827	0,0566	0,0558	0,00493	0,00414	0,00559	0,00479
14	0,2733	0,2746	0,0471	0,0479	0,00493	0,00483	0,00559	0,00479
15	0,2639	0,2648	0,0377	0,0390	0,00493	0,00583	0,00559	0,00548
16	0,2545	0,2536	0,0283	0,0283	0,00493	0,00583	0,00559	0,00648
17	0,2450	0,2429	0,0189	0,0171	0,00493	0,00483	0,00559	0,00648
18	0,2356	0,2340	0,0094	0,0074	0,00493	0,00414	0,00559	0,00548
19	0,2262	0,2262			0,00493	0,00414		
20	0,2168	0,2180			0,00493	0,00483		
21	0,2074	0,2083			0,00493	0,00583		
22	0,1980	0,1971			0,00493	0,00583		
23	0,1885	0,1864			0,00493	0,00483		
24	0,1791	0,1775			0,00493	0,00414		
25	0,1697	0,1697			0,00493	0,00414		
26	0,1602	0,1615			0,00493	0,00483		
27	0,1508	0,1517			0,00493	0,00583		
28	0,1414	0,1405			0,00493	0,00583		
29	0,1320	0,1298			0,00493	0,00483		
30	0,1225	0,1209			0,00493	0,00414		
31	0,1131	0,1131			0,00493	0,00414		
32	0,1037	0,1049			0,00493	0,00483		
33	0,0943	0,0952			0,00493	0,00583		
34	0,0848	0,0840			0,00493	0,00583		
35	0,0754	0,0733			0,00493	0,00483		
36	0,0660	0,0644			0,00493	0,00414		
37	0,0566	0,0566			0,00493	0,00414		
38	0,0471	0,0484			0,00493	0,00483		
39	0,0377	0,0387			0,00493	0,00583		
40	0,0283	0,0274			0,00493	0,00583		
41	0,0189	0,0167			0,00493	0,00483		
42	0,0094	0,0078			0,00493	0,00414		

## A.2 Experimentell ermittelte Drehwegfehler der Prüfverzahnungen



**Abbildung A.1:** Drehwegfehler der beiden äquidistanten und der beiden inäquidistanten Prüfverzahnungen; negative Lastrichtung (experimentelle Simulation)

**Tabelle A.2:** Amplituden und Phasenwinkel der experimentell ermittelten langwelligeren Drehwegfehler für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung

$o$ in $1/U$	äquid. positiv		inäquid. positiv		äquid. negativ		inäquid. negativ	
	$x_{f,1}(o)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_{f,1}(o)$ in rad	$x_{f,1}(o)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_{f,1}(o)$ in rad	$x_{f,1}(o)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_{f,1}(o)$ in rad	$x_{f,1}(o)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_{f,1}(o)$ in rad
1	235,429	1,5401	169,705	1,6543	272,848	1,571	217,5	1,7169
2,333	34,989	1,0856	39,649	2,04	47,21	1,8592	35,586	2,0608

**Tabelle A.3:** Amplituden und Phasenwinkel der experimentell ermittelten kurzwelligen Drehwegfehler für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung

$o$ in $1/U$	äquid. positiv		inäquid. positiv		äquid. negativ		inäquid. negativ	
	$x_f(o)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_f(o)$ in rad	$x_f(o)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_f(o)$ in rad	$x_f(o)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_f(o)$ in rad	$x_f(o)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_f(o)$ in rad
7	0	0	1,3416	-2,9223	0	0	0,9237	-2,2089
14	0	0	0,8567	0,6121	0	0	0,8007	0,2995
21	0	0	1,5649	-2,0447	0	0	0,969	-0,7388
28	0	0	2,8486	0,2715	0	0	1,6644	1,4723
35	0	0	3,1053	3,0059	0	0	4,3414	-1,0086
42	8,1677	-1,9081	3,4049	-2,6516	7,6098	2,9042	4,4528	-2,7994
49	0	0	3,5072	1,9574	0	0	3,3198	2,9365
56	0	0	1,5848	1,176	0	0	1,0823	1,8328
63	0	0	0,554	2,5056	0	0	0,858	-2,1293
70	0	0	1,7365	-1,3717	0	0	1,6559	0,3426
77	0	0	2,2837	1,7942	0	0	2,8262	-2,8533
84	4,3094	0,9231	0,517	2,1544	4,1643	1,8868	0,7504	-0,8514
91	0	0	0,979	0,657	0	0	1,9701	2,1616
98	0	0	1,1022	-0,4979	0	0	1,1292	0,6381
105	0	0	0,8047	2,3467	0	0	1,465	0,3687
112	0	0	1,2333	-2,742	0	0	0,885	-0,1751
119	0	0	0,4513	-0,2805	0	0	0,5541	2,2455
126	1,871	0,4496	0,4102	-1,7631	1,6393	-1,0332	0,7097	1,6739
133	0	0	0,3964	2,2293	0	0	0,3348	0,8578
140	0	0	0,6992	-0,1061	0	0	0,2628	-0,1332
147	0	0	0,5031	-1,9576	0	0	1,01	-0,6528
154	0	0	0,4689	-3,1351	0	0	0	0
161	0	0	0,1758	1,178	0	0	0	0
168	0,8069	-1,6026	0,2623	-2,12	0,5818	2,4303	0,3739	0,5859
175	0	0	0,3946	-2,8813	0	0	0	0
182	0	0	0,3395	3,1005	0	0	0,1901	2,339
189	0	0	0,1788	0,8193	0	0	0,3047	-1,5876
196	0	0	0,1698	-1,9494	0	0	0,2725	-2,1319
203	0	0	0,076	0	0	0	0	0
210	0,3527	2,992	0,2208	-1,0368	0,2698	-1,6045	0,1533	-0,6097
217	0	0	0,0732	1,4886	0	0	0	0
224	0	0	0,0853	-2,6804	0	0	0	0
231	0	0	0,1089	-0,1973	0	0	0	0
238	0	0	0,0727	-0,7373	0	0	0,1788	2,8174
245	0	0	0,1845	1,5291	0	0	0	0



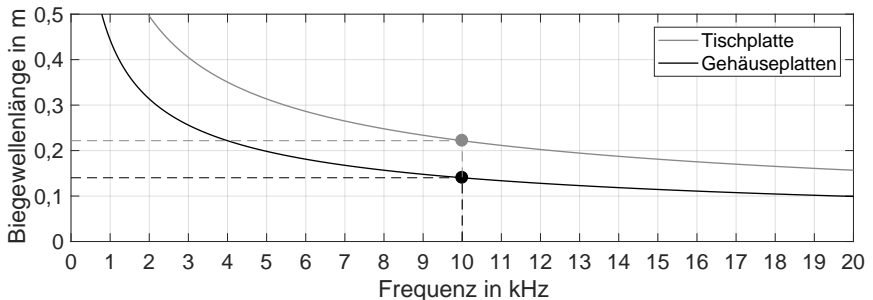
### A.3 Elementgröße in der FE-Simulation der Körperschallfunktion

Als Grundregel für die Feinheit der Vernetzung von FE-Modellen wird in der Praxis oft der Wert von mindestens sechs Elementen pro Biegewellenlänge genannt. LANGER et al. [222] hingegen fordern mindestens 20 Elemente mit quadratischer Ansatzfunktion pro Biegewellenlänge, um einen relativen Fehler der Eigenfrequenzen von < 1 % im Vergleich zur konvergierten Lösung sicherzustellen. Für sechs Elemente pro Biegewellenlänge mit quadratischer Ansatzfunktion ermitteln sie einen relativen Fehler der Eigenfrequenzen von < 7 %. Die benötigte Feinheit der Vernetzung kann auf Basis dieser Angaben bestimmt werden. KOLLMANN et al. [18] geben eine Berechnungsgleichung für die Biegewellenlänge in Plattenstrukturen an:

$$\lambda_B = \frac{2 \pi}{\sqrt{\omega}} \sqrt[4]{\frac{E_P h_P^2}{12(1 - \nu_P^2) \rho_P}} \quad (1.1)$$

$\lambda_B$	in m	Biegewellenlänge	$\omega$	in $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Kreisfrequenz
$E_P$	in $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Elastizitätsmodul, Platte	$h_P$	in m	Plattendicke
$\nu_P$	in —	Querkontraktionszahl, Platte	$\rho_P$	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte, Platte

Für die Grundplatte (Dicke 0,05 m) und die Platten der Gehäuse (Dicke 0,02 m), die jeweils aus Stahl gefertigt sind, werden die frequenzabhängigen Biegewellenlängen anhand von Gleichung (1.1) berechnet, siehe Abbildung A.2. Die Körperschall-



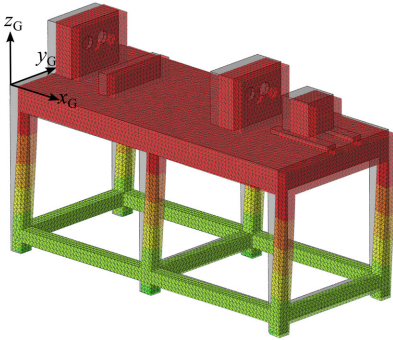
**Abbildung A.2:** Biegewellenlängen der Grundplatte und der Platten der Gehäuse des Getriebeprüfstandes in Abhängigkeit von der Frequenz

funktionen sollen bis 10 kHz numerisch ermittelt werden. Für höhere Frequenzen steigt der Berechnungsaufwand aufgrund der zunehmenden Modendichte und der Notwendigkeit einer feineren Vernetzung zu stark an. Bei 10 kHz ergibt sich für die Grundplatte eine Biegewellenlänge von 0,22 m und für die Platten der

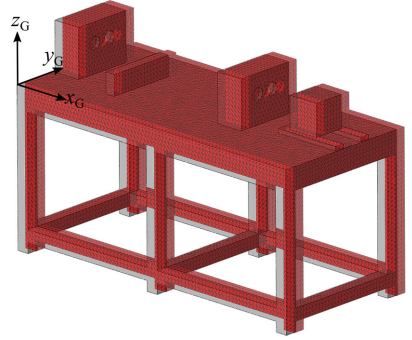
---

Gehäuse 0,14 m. Anhand der Forderung von LANGER et al. [222] nach mindestens 20 Elementen pro Biegewellenlänge, um einen relativen Fehler der Eigenfrequenzen von  $< 1\%$  im Vergleich zur konvergierten Lösung sicherzustellen, würde sich so eine Kantenlänge der Elemente von 0,011 m für die Grundplatte und 0,007 m für die Platten der Gehäuse ergeben. Aufgrund des damit einhergehenden Berechnungsaufwandes wird ein größerer Fehler bei den Eigenfrequenzen zugelassen. Die Forderung nach mindestens sechs Elementen pro Biegewellenlänge führt auf eine Kantenlänge der Elemente von 0,037 m für die Grundplatte und 0,023 m für die Platten der Gehäuse. Die mittlere Kantenlänge der Elemente wird für den gesamten Getriebeprüfstand schließlich zu 0,02 m gewählt. Am oberen Rand des Bereiches der untersuchten Frequenzen ergibt sich somit ein abgeschätzter relativer Fehler von  $< 7\%$ . Zu tieferen Frequenzen hin wird der relative Fehler aufgrund der höheren Anzahl an Elementen pro Biegewellenlänge deutlich kleiner.

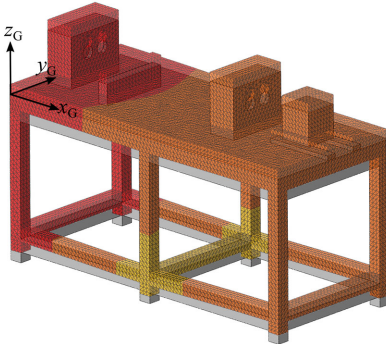
## A.4 Numerisch berechnete Schwingformen des Getriebeprüfstandes



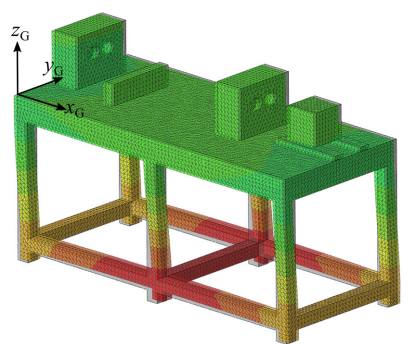
$x_G$ -Richtung, Translation, 21,8 Hz



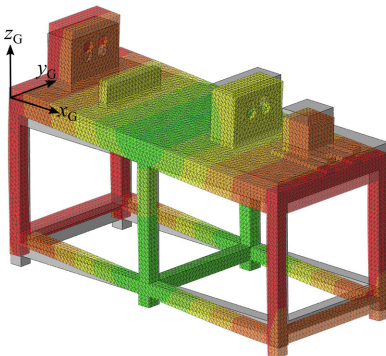
$y_G$ -Richtung, Translation, 12,8 Hz



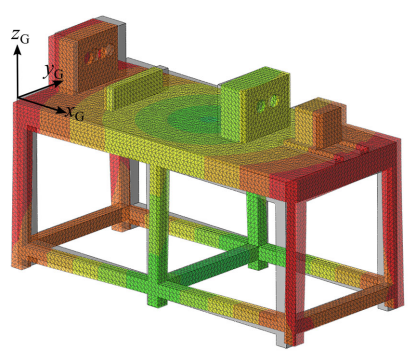
$z_G$ -Richtung, Translation, 60,9 Hz



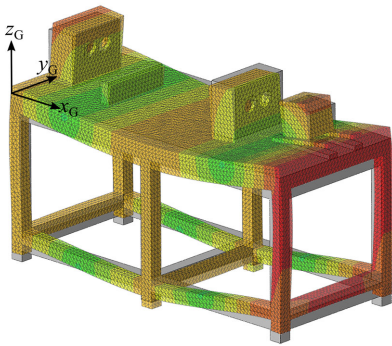
$x_G$ -Richtung, Rotation, 109 Hz



$y_G$ -Richtung, Rotation, 66,6 Hz



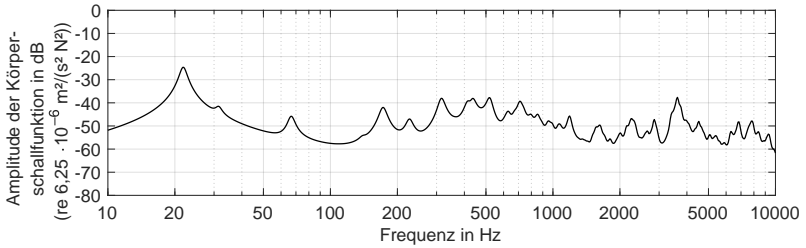
$z_G$ -Richtung, Rotation, 31,4 Hz



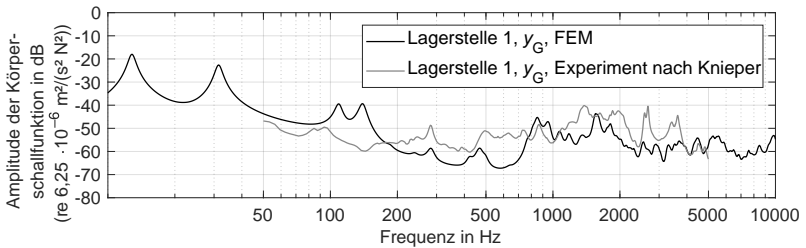
1. Plattenmode, 172,1 Hz

**Abbildung A.3:** mittels numerischer Simulation berechnete Schwingformen der sechs Starrkörpermoden und der ersten Plattenmode des Getriebeprüfstandes; unverformter Zustand (grau) und Betrag der Auslenkung (farblich, qualitativ)

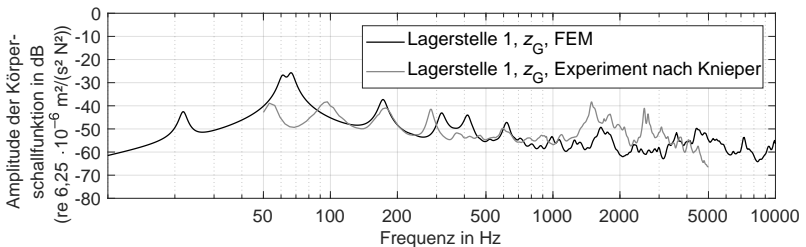
## A.5 Körperschallfunktionen des Getriebeprüfstandes



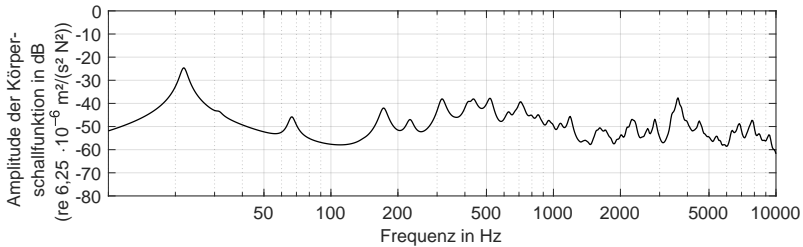
**Abbildung A.4:** Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 1 in  $x_G$ -Richtung (numerische Simulation)



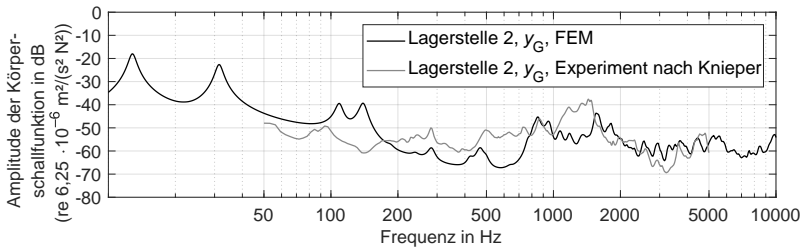
**Abbildung A.5:** Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 1 in  $y_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach Knieper [214] und numerische Simulation)



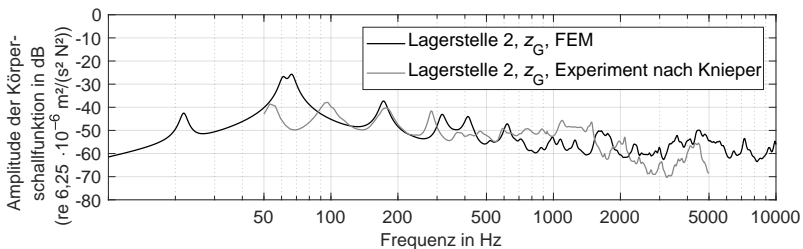
**Abbildung A.6:** Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 1 in  $z_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach Knieper [214] und numerische Simulation)



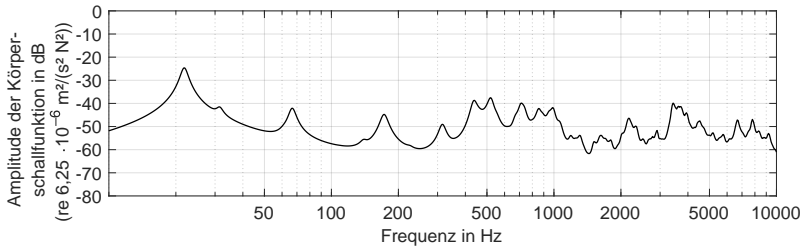
**Abbildung A.7:** Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 2 in  $x_G$ -Richtung (numerische Simulation)



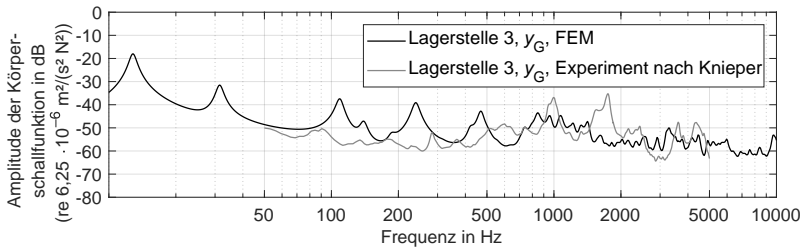
**Abbildung A.8:** Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 2 in  $y_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach Knieper [214] und numerische Simulation)



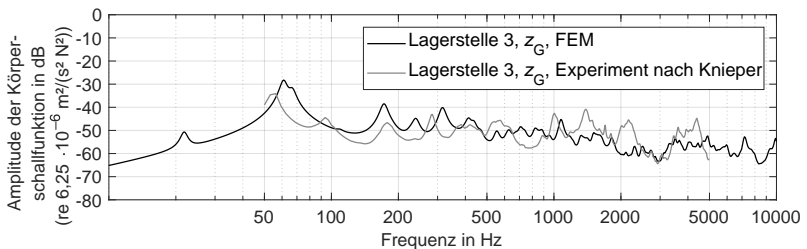
**Abbildung A.9:** Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 2 in  $z_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach Knieper [214] und numerische Simulation)



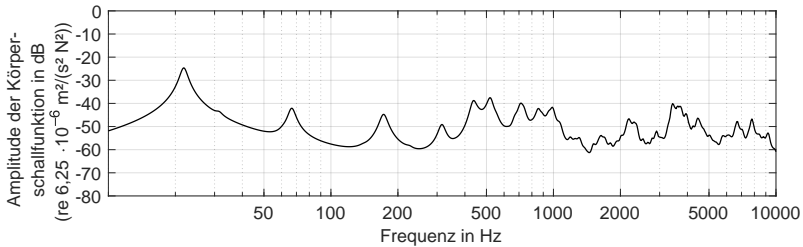
**Abbildung A.10:** Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 3 in  $x_G$ -Richtung (numerische Simulation)



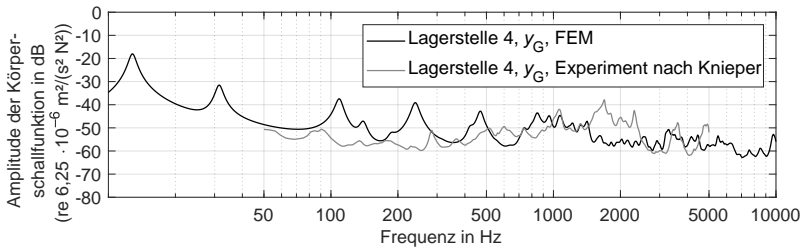
**Abbildung A.11:** Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 3 in  $y_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach Knieper [214] und numerische Simulation)



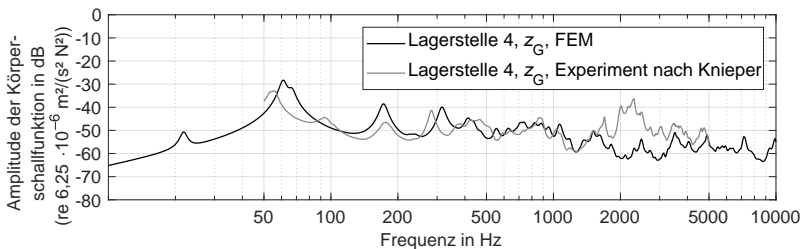
**Abbildung A.12:** Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 3 in  $z_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach Knieper [214] und numerische Simulation)



**Abbildung A.13:** Körperschallfunktion des Getriebepfribstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 4 in  $x_G$ -Richtung (numerische Simulation)



**Abbildung A.14:** Körperschallfunktion des Getriebepfribstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 4 in  $y_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach Knieper [214] und numerische Simulation)

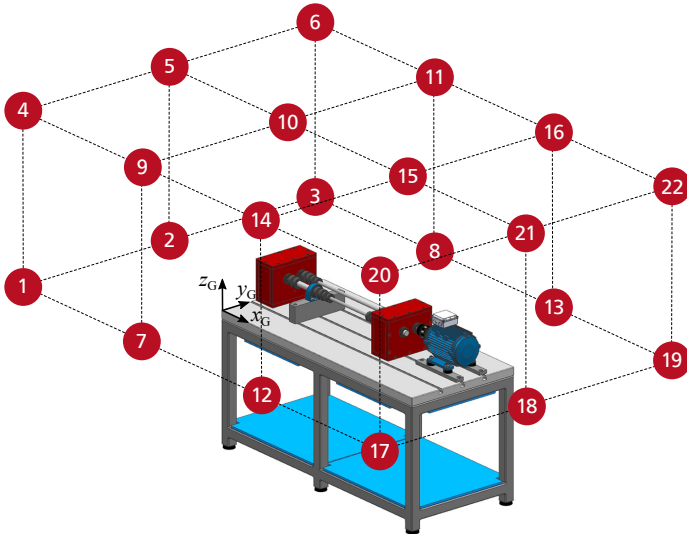


**Abbildung A.15:** Körperschallfunktion des Getriebepfribstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 4 in  $z_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach Knieper [214] und numerische Simulation)



## A.6 Bestimmung der Referenz-Messposition

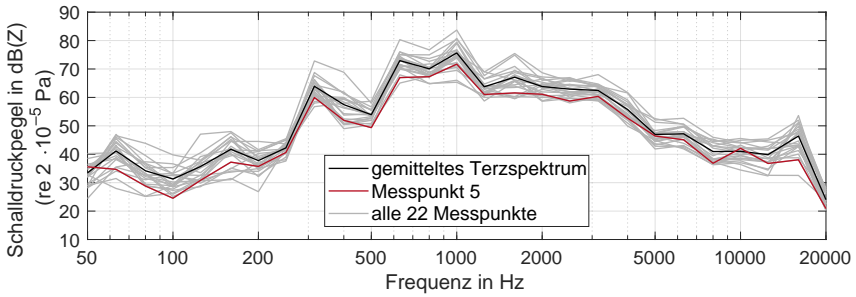
Da davon auszugehen ist, dass die Schallabstrahlung des Getriebeprüfstandes eine gewisse Richtwirkung aufweist, soll jener Messpunkt bestimmt werden, der als Einzelpunkt am repräsentativsten für den mittleren abgestrahlten Schalldruck über alle Frequenzen steht. Dafür wird die äquidistante Prüfverzahnung in den Getriebeprüfstand eingebaut. Dieser wird an einem stationären Betriebspunkt (500 U/min, 10 N m) betrieben. In der Praxis hat sich ein Messabstand von 1 m bewährt, da dies einen guten Kompromiss zwischen Platzbedarf und Genauigkeit darstellt. Daher wird im Abstand von 1 m rund um den Getriebeprüfstand ein Messgitter mit insgesamt 22 Mikrofönen (ROGA MI-17 Messmikrofone mit Kugelcharakteristik) aufgespannt, siehe Abbildung A.16. Um die



**Abbildung A.16:** Messgitter, bestehend aus 22 Messpositionen, in 1 m Abstand rund um den Getriebeprüfstand

gemessenen Schalldrücke spektral vergleichen zu können, wird von den 22 aufgezeichneten Schalldrucksignalen (Messsystem Soundbook\_MK2 des Herstellers Sinus Messtechnik, Abtastrate 51,2 kHz, Samplingtiefe 24 bit) jeweils ein Terzspektrum gebildet. Weiterhin wird ein über der gesamten Hüllfläche gemitteltetes Terzspektrum berechnet. Dieses gemittelte Terzspektrum stellt den mittleren abgestrahlten Schalldruck dar. Über die Methode der kleinsten Fehlerquadrate wird der Messpunkt bestimmt, dessen Terzspektrum am wenigsten vom gemittelten Terzspektrum abweicht. Abbildung A.17 zeigt die Terzspektren aller 22 Messpunk-

te, das gemittelte Terzspektrum sowie das Terzspektrum des Messpunktes 5 mit der geringsten mittleren quadratischen Abweichung. Dieser Messpunkt repräsentiert



**Abbildung A.17:** gemitteltes Terzspektrum, Terzspektrum des Messpunktes mit der geringsten quadratischen Abweichung (Messpunkt 5) und Terzspektren aller 22 Messpunkte auf der Hüllfläche (experimentelle Simulation)

tiert somit den mittleren abgestrahlten Schalldruck am besten und wird daher als Referenz-Messpunkt für die experimentellen Simulationen des Schalldruckes definiert.

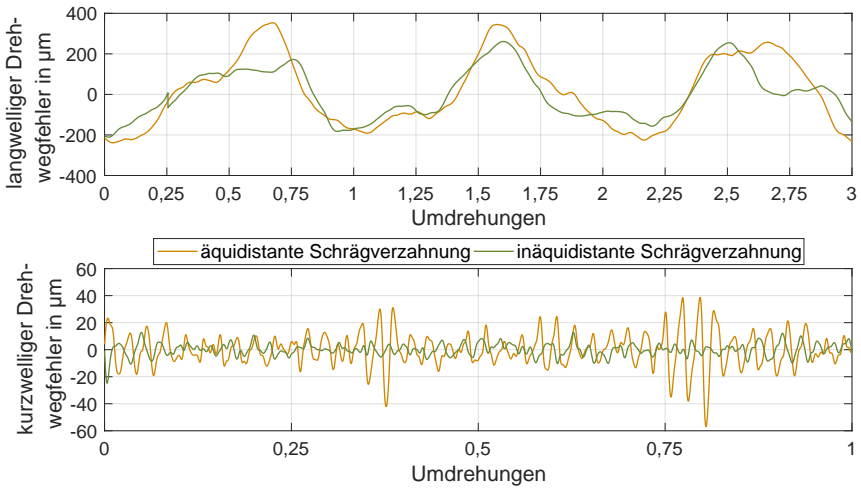
## A.7 Daten und Drehwegfehler der schrägverzahnten Prüfverzahnung

**Tabelle A.4:** Verzahnungsdaten der schrägverzahnten Prüfverzahnung

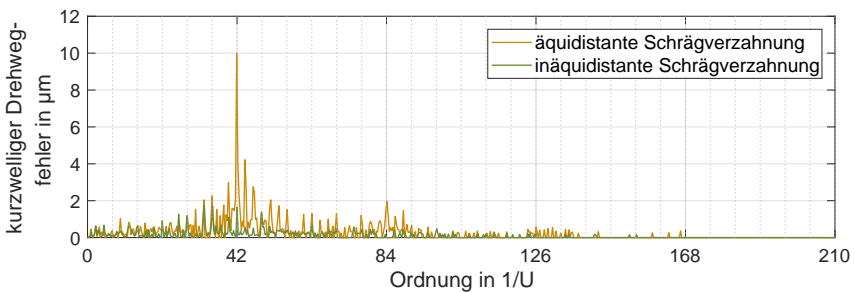
Bezeichnung	Variable	Einheit	Antrieb	Abtrieb
Bezugsprofil			DIN 867	
Normalmodul	$m_n$	m	$2,5 \cdot 10^{-3}$	
Zähnezahl	$z$	—	42	18
inäquidistante Musterlänge	$\Phi$	—	6	
Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$	rad	0,3491	
Achsabstand	$a_w$	m	$91,5 \cdot 10^{-3}$	
Zahnbreite	$b$	m	$20 \cdot 10^{-3}$	
Kopfspiel	$c_p$	m	$0,25 \cdot 10^{-3}$	
Schrägungswinkel	$\beta$	rad	0,586	
Profilverschiebung	$x m_n$	m	$0,25 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
Elastizitätsmodul	$E$	$\frac{N}{m^2}$	$210 \cdot 10^9$	
Querkontraktionszahl	$\nu$	—	0,3	
Dichte	$\rho$	$\frac{kg}{m^3}$	7850	

**Tabelle A.5:** Inäquidistanz-Parameter der schrägverzahnten Prüfverzahnung

Variable	Einheit	Zahnnummer $j$					
		1	2	3	4	5	6
$\Delta s_{I,j}$	—	-0,082	0,011	0,131	0,104	0,027	-0,082
$\Delta Q_{I,j}$	—	0	0,082	0,141	-0,087	-0,299	-0,1
$\Delta s_{II,j}$	—	-0,018	-0,047	-0,13	0,11	0,147	-0,172
$\Delta Q_{II,j}$	—	-0,05	0,064	0,141	0,021	-0,212	-0,226



**Abbildung A.18:** Drehwegfehler der äquidistanten und der inäquidistanten Schrägverzahnung; positive Lastrichtung (experimentelle Simulation)



**Abbildung A.19:** Amplitudenspektren der kurzwelligen Drehwegfehler der äquidistanten und der inäquidistanten Schrägverzahnung (experimentelle Simulation)

**Tabelle A.6:** Amplituden und Phasenwinkel der experimentell ermittelten langwelligen Drehwegfehler für die schrägverzahnte äquidistante und die schrägverzahnte inäquidistante Prüfverzahnung

$\sigma$ in 1/U	äquid. positiv		inäquid. positiv		äquid. negativ		inäquid. negativ	
	$x_{f1}(\sigma)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_{f1}(\sigma)$ in rad	$x_{f1}(\sigma)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_{f1}(\sigma)$ in rad	$x_{f1}(\sigma)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_{f1}(\sigma)$ in rad	$x_{f1}(\sigma)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_{f1}(\sigma)$ in rad
1	242,1359	2,6309	159,4221	1,8556	192,7122	0,7635	136,746	1,1188
2,333	59,5393	2,6079	70,7242	0,5427	62,6734	0,8677	68,38	2,7769

**Tabelle A.7:** Amplituden und Phasenwinkel der experimentell ermittelten kurzwelligen Drehwegfehler für die schrägverzahnte äquidistante und die schrägverzahnte inäquidistante Prüfverzahnung

$\sigma$ in 1/U	äquid. positiv		inäquid. positiv		äquid. negativ		inäquid. negativ	
	$x_f(\sigma)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_f(\sigma)$ in rad	$x_f(\sigma)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_f(\sigma)$ in rad	$x_f(\sigma)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_f(\sigma)$ in rad	$x_f(\sigma)$ in $\mu\text{m}$	$\varphi_f(\sigma)$ in rad
7	0	0	1,0647	2,3503	0	0	1,6749	1,1251
14	0	0	1,593	0,7009	0	0	2,6499	-1,7589
21	0	0	1,3718	-2,9091	0	0	2,9024	-2,6961
28	0	0	2,1863	2,1674	0	0	4,5658	-0,6811
35	0	0	3,3227	0,8445	0	0	5,9315	0,1565
42	15,6989	-0,8089	2,2301	1,6548	7,9553	1,0343	5,7259	-0,8238
49	0	0	2,0743	1,7721	0	0	2,779	1,8922
56	0	0	1,2281	2,066	0	0	2,2491	-2,4985
63	0	0	1,0287	0,0707	0	0	1,6156	1,0737
70	0	0	0,9415	0,2036	0	0	1,508	2,1086
77	0	0	1,0827	1,2924	0	0	1,1081	-1,0635
84	5,5325	-1,8533	0,6206	1,7419	3,4521	1,0545	1,188	0,1629
91	0	0	0,8412	2,0372	0	0	1,0138	-1,4782
98	0	0	0,7432	1,9893	0	0	0,7709	1,8606
105	0	0	0,4399	0	0	0	0,4184	0
112	0	0	0,4071	1,9986	0	0	0,6233	-0,2746
119	0	0	0,3282	0	0	0	0,2844	-2,1674
126	1,8494	2,5382	0,3584	0	1,8841	2,2084	0,4286	2,5164
133	0	0	0,2057	0	0	0	0,3036	-0,8531
140	0	0	0,2379	0	0	0	0,3695	0,2511
147	0	0	0,1096	0	0	0	0,2192	0,0648
154	0	0	0,1576	0	0	0	0,2392	-0,1684
161	0	0	0	0	0	0	0,2237	1,2687
168	0,5237	0	0	0	0,7118	-1,1114	0,2061	0,7824
175	0	0	0	0	0	0	0	0
182	0	0	0	0	0	0	0,0946	-2,6694
189	0	0	0	0	0	0	0	0
196	0	0	0	0	0	0	0	0
203	0	0	0	0	0	0	0	0
210	0	0	0	0	0,2404	0	0	0
217	0	0	0	0	0	0	0,1547	-2,285
224	0	0	0	0	0	0	0	0
231	0	0	0	0	0	0	0	0
238	0	0	0	0	0	0	0	0
245	0	0	0	0	0	0	0	0

## A.8 Inäquidistanz-Parameter der optimierten inäquidistanten Verzahnung

**Tabelle A.8:** Verzahnungsdaten der optimierten inäquidistanten Verzahnung (entspricht den Verzahnungsdaten der Prüfverzahnungen)

Bezeichnung	Variable	Einheit	Antrieb	Abtrieb
Bezugsprofil			DIN 867	
Normalmodul	$m_n$	m	$3 \cdot 10^{-3}$	
Zähnezahl	$z$	—	42	18
inäquidistante Musterlänge	$\Phi$	—	6	
Normaleingriffswinkel	$\alpha_n$	rad	0,3491	
Achsabstand	$a_w$	m	$91,5 \cdot 10^{-3}$	
Zahnbreite	$b$	m	$20 \cdot 10^{-3}$	
Kopfspiel	$c_p$	m	$0,3 \cdot 10^{-3}$	
Schrägungswinkel	$\beta$	rad	0	
Profilverschiebung	$x m_n$	m	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
Elastizitätsmodul	$E$	$\frac{N}{m^2}$	$210 \cdot 10^9$	
Querkontraktionszahl	$\nu$	—	0,3	
Dichte	$\rho$	$\frac{kg}{m^3}$	7850	

**Tabelle A.9:** Inäquidistanz-Parameter der mittels zufallsbasierter Optimierungsmethode ermittelten Verzahnung 1

Variable	Einheit	Zahnnummer $j$					
		1	2	3	4	5	6
$\Delta s_{I,j}$	—	0,111	-0,293	0,089	-0,207	-0,181	-0,2
$\Delta Q_{I,j}$	—	0	-0,081	-0,008	0,074	-0,404	-0,114
$\Delta s_{II,j}$	—	-0,069	0,04	-0,102	-0,023	0,672	-0,1
$\Delta Q_{II,j}$	—	0,021	-0,075	-0,015	-0,041	-0,159	-0,264

**Tabelle A.10:** Inäquidistanz-Parameter der mittels zufallsbasierter Optimierungsmethode ermittelten Verzahnung 2

Variable	Einheit	Zahnnummer $j$					
		1	2	3	4	5	6
$\Delta s_{I,j}$	-	0,184	-0,168	-0,216	-0,013	-0,124	-0,195
$\Delta Q_{I,j}$	-	0	0,073	0,105	-0,041	-0,23	-0,048
$\Delta s_{II,j}$	-	-0,043	-0,081	0,16	0,26	0,257	-0,022
$\Delta Q_{II,j}$	-	0,071	-0,051	0,077	0,082	-0,164	-0,157

**Tabelle A.11:** Inäquidistanz-Parameter der mittels zufallsbasierter Optimierungsmethode ermittelten Verzahnung 3

Variable	Einheit	Zahnnummer $j$					
		1	2	3	4	5	6
$\Delta s_{I,j}$	-	-0,145	-0,185	-0,141	0,166	-0,17	-0,219
$\Delta Q_{I,j}$	-	0	0,273	-0,145	-0,274	-0,349	-0,233
$\Delta s_{II,j}$	-	-0,051	-0,108	0,581	0,116	0,077	0,079
$\Delta Q_{II,j}$	-	-0,098	0,126	0,075	-0,133	-0,395	-0,303

**Tabelle A.12:** Inäquidistanz-Parameter der optimierten inäquidistanten Verzahnung

Variable	Einheit	Zahnnummer $j$					
		1	2	3	4	5	6
$\Delta s_{I,j}$	-	0,184	-0,178	-0,206	-0,063	-0,174	-0,195
$\Delta Q_{I,j}$	-	0	0,033	0,105	-0,001	-0,23	-0,068
$\Delta s_{II,j}$	-	-0,063	-0,036	0,12	0,24	0,347	0,023
$\Delta Q_{II,j}$	-	-0,06	-0,074	0,062	0,087	-0,144	-0,155

## A.9 Bezugswerte zur Pegelbildung

Tabelle A.13: in dieser Arbeit genutzte Bezugswerte zur Pegelbildung

Bezeichnung	Bezugswert
Kraft	$F_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N}$
Schalldruck	$p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$
Schalleistung	$P_0 = 10^{-12} \text{ W}$
Körperschallfunktion	$Sh_{T,0}^2 = 6,25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^4}{\text{N}^2 \text{s}^2}$
Schallkennimpedanz	$Z'_{\text{Med},0} = 413 \frac{\text{N s}}{\text{m}^3}$
Abstrahlgrad	$\sigma_0 = 1$



---

---

## Abbildungsverzeichnis

---

1.1	fehlende Maskierung durch den Verbrennungsmotor führt zu erhöhter Wahrnehmbarkeit von Getriebegeräuschen . . . . .	1
2.1	direkte und indirekte Geräusentstehung in Maschinen . . . . .	5
2.2	mittels dynamischer Zahnkräfte angeregte Maschine am Beispiel eines Zahnradgetriebes . . . . .	6
2.3	maschinenakustischen Grundgleichung als Superposition der Spektren der einzelnen Anteile . . . . .	7
2.4	anhand dreier Modelle errechneter Abstrahlgrad $\sigma(f)$ : ERP, Kugelstrahler 0. Ordnung und Rechteckplatte . . . . .	10
2.5	geometrische Parameter an einem evolventischen geradverzahnten Stirnrad mit Außenverzahnung . . . . .	11
2.6	Stirnschnitt (parallel zur Stirnfläche des Zahnrades) und Normalschnitt (normal zu den schräg gestellten Zähnen) eines schrägverzahnten evolventischen Stirnrades mit Außenverzahnung . . . . .	12
2.7	Bezugsprofil eines evolventischen Stirnrades . . . . .	13
2.8	Profilverschiebung bei evolventischen Stirnrädern . . . . .	14
2.9	charakteristische Kreise, Eingriffslinie und Eingriffsstrecke einer Stirnradpaarung . . . . .	15
2.10	innere und äußere Geräuschanregungsmechanismen in Zahnradgetrieben, absteigend sortiert nach deren Relevanz in der Literatur . . . . .	17
2.11	qualitativer Verlauf der Verzahnungssteifigkeit für eine Gerad- und eine Schrägverzahnung . . . . .	18
2.12	elastische Verformungen unter Last führen zu einer Überdeckungsvergrößerung durch frühzeitigen Zahneintritt und verspäteten Zahnaustritt . . . . .	19
2.13	zur Berechnung der Zahnnachgiebigkeit nach WEBER und BANASCHEK [67] notwendige Größen . . . . .	21
2.14	Modellierung einer Schrägverzahnung durch Zerschneiden und Verdrehen einer Geradverzahnung . . . . .	23
2.15	verbessertes Federmodell nach ZIEGLER [61] zur Beschreibung der elastischen Kopplung benachbarter Zähne auf einem gemeinsamen elastischen Radkörper . . . . .	24
2.16	prinzipieller Messaufbau bei der Einflankenwälzprüfung . . . . .	25
2.17	Ein-Masse-Modell zur Berechnung des dynamischen Verhaltens einer Stirnradpaarung (a) und als Vereinfachung zum Einmassenschwinger (b) . . . . .	27
2.18	regelmäßig (a) und unregelmäßig (b) aufgebauter Lüfter zur Minderung tonhaltiger Geräuschkomponenten . . . . .	38

2.19	asymmetrische Verzahnung mit unterschiedlichen Eingriffswinkeln auf der Links- und Rechtsflanke, um eine erhöhte Tragfähigkeit in eine bevorzugte Lastrichtung zu erreichen . . . . .	41
3.1	Konvention zur Nummerierung der Zähne, Zahnlückengründe und Zahnmittenteilungen . . . . .	44
3.2	Effekte der Positionsveränderung eines Zahnpaars auf den Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit (analytische Berechnung) . . . . .	45
3.3	unregelmäßige Zahnpositionen ( $\Delta Q_2 = 0,15$ und $\Delta Q_3 = -0,15$ ); durch die Verschiebung der Zähne ändern sich die Zahndicken nicht . . . . .	47
3.4	Effekt eines unterschiedlich dick ausgeführten Zahnes am Antrieb auf den Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit (analytische Berechnung) . . . . .	47
3.5	unregelmäßige Zahndicken ( $\Delta s_2 = 0,15$ und $\Delta s_3 = -0,15$ ); durch die unterschiedlichen Zahndicken ändern sich die Zahnpositionen nicht . . . . .	49
3.6	Effekt eines unterschiedlich hoch ausgeführten Zahnes am Antrieb auf den Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit (analytische Berechnung) . . . . .	49
3.7	Effekt eines unterschiedlich tief ausgeschnittenen Zahnlückengrundes am Antrieb auf den Verlauf der Zahnpaarsteifigkeit (analytische Berechnung) . . . . .	50
3.8	Zahndicken des Abtriebs ergeben sich aus den Verschiebungen der angrenzenden Zahnflanken des Antriebs . . . . .	52
3.9	Zahnpositionen des Abtriebs ergeben sich aus der mittleren Verschiebung der angrenzenden Zahnflanken des Antriebs . . . . .	54
3.10	Zahndickenhalbwinkel $\Psi_y$ und Evolventenfunktion des Winkels $\alpha_{y,t}$ für beliebige Durchmesser $d_y$ . . . . .	55
3.11	Winkel zwischen benachbarten Zähnen . . . . .	57
3.12	in einem Muster mit $\Phi = 5$ Zähnen aufgebaute inäquidistante Zahnradpaarung; die Muster wiederholen sich fünf- beziehungsweise dreimal entlang des Umfangs . . . . .	58
4.1	analytische Berechnungskette zur akustischen Auslegung inäquidistanter Verzahnungen . . . . .	60
4.2	äquidistante Prüfverzahnung, CAD-Modell . . . . .	62
4.3	Aufbau eines Getriebeprüfstandes nach dem Verspannungsprinzip . . . . .	62
4.4	im Rahmen dieser Arbeit aufgebauter Getriebeprüfstand; CAD-Modell (a) und real aufgebauter Prüfstand (b) . . . . .	63
4.5	Übertragung der Lüfterteilungen von MELLIN und SOVRAN [128] auf die Linksflankenteilung eines Zahnrades . . . . .	65
4.6	Zahndicken, Zahnpositionen und Stirnteilung an einem Zahnrad . . . . .	66
4.7	inäquidistante Prüfverzahnung, CAD-Modell . . . . .	68

4.8	mittels selektiven Laserschmelzens hergestellte Prüfverzahnungen; äquidistante Prüfverzahnung (a) und inäquidistante Prüfverzahnung (b) . . . . .	68
4.9	nach dem Ansatz von WEBER und BANASCHEK [67] berechnete Einzelzahnsteifigkeiten der Prüfverzahnungen (analytische Berechnung)	69
4.10	nach dem Ansatz von WEBER und BANASCHEK [67] berechnete theoretische Zahnpaarsteifigkeiten der Prüfverzahnungen (analytische Berechnung) . . . . .	70
4.11	Berechnung der theoretischen Verzahnungssteifigkeit durch Superposition der als lineare Federn modellierten theoretischen Zahnpaarsteifigkeiten . . . . .	71
4.12	theoretische Verzahnungssteifigkeit der äquidistanten Prüfverzahnung für mehrere Iterationen bei der Berechnung der Lastverteilung (analytische Berechnung) . . . . .	72
4.13	Verzahnungssteifigkeit der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; bei der inäquidistanten Prüfverzahnung hat die Lastrichtung einen deutlichen Einfluss auf den Verlauf der Verzahnungssteifigkeit (analytische Berechnung) . . . . .	73
4.14	unterschiedliche kraftübertragenden Zahnpaare bei unterschiedlichen Lastrichtungen . . . . .	73
4.15	durch das Scheibenmodell berechnete Zahnpaarsteifigkeit einer Schrägverzahnung (analytische Berechnung) . . . . .	74
4.16	ideale Distanzen beim Zahneintritt und beim Zahnaustritt . . . . .	75
4.17	Verzahnungssteifigkeiten mit und ohne Überdeckungsvergrößerung; 200 N m am Antrieb (analytische Berechnung) . . . . .	76
4.18	von WINTER und PODLESNIK [69] in einer experimentellen Simulation ermittelte Zahnpaarsteifigkeit einer Geradverzahnung im Vergleich zu den mit der hier vorgestellten Methode berechneten Ergebnissen (experimentelle Simulation aus der Literatur und analytische Berechnung) . . . . .	77
4.19	von ZIEGLER [61] in einer experimentellen Simulation ermittelte Zahnpaarsteifigkeit einer Schrägverzahnung im Vergleich zu den mit der hier vorgestellten Methode berechneten Ergebnissen (experimentelle Simulation aus der Literatur und analytische Berechnung)	78
4.20	Unterteilung in Radkörper und Zahnkranz; die für die numerischen Untersuchungen zu beachtende Zahnkranzdicke beträgt $3 m_t$ . . . . .	80
4.21	für die numerische Berechnung der Verzahnungssteifigkeit genutztes Netz an der inäquidistanten Prüfverzahnung . . . . .	81
4.22	Verzahnungssteifigkeiten der äquidistanten Prüfverzahnung; 50 N m und 1250 N m (numerische Simulation und analytische Berechnung) . . . . .	82

4.23	Verzahnungssteifigkeiten der inäquidistanten Prüfverzahnung; positive Lastrichtung; 50 N m und 1250 N m (numerische Simulation und analytische Berechnung) . . . . .	83
4.24	Verzahnungssteifigkeiten der inäquidistanten Prüfverzahnung; negative Lastrichtung; 50 N m und 1250 N m (numerische Simulation und analytische Berechnung) . . . . .	84
4.25	Drehwegfehler der geometrisch idealen äquidistanten und inäquidistanten Prüfverzahnungen (numerische Simulation) . . . . .	85
4.26	am Getriebeprüfstand verbaute Klemm- und Spannelemente, die als zusätzliche Massenträgheitsmomente beachtet werden müssen	87
4.27	tangentiale Verformung eines Radkörpers (Betrag der Verformung farblich dargestellt, qualitativ) (numerische Berechnung) . . . . .	89
4.28	Verzahnungssteifigkeiten und Gesamtsteifigkeiten der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung (analytische Berechnung)	90
4.29	angepasster Verzahnungsdämpfungsgrad der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; 1000 U/min (analytische Berechnung) . . . . .	91
4.30	Drehwegfehler der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; positive Lastrichtung (experimentelle Simulation) . . . . .	93
4.31	Amplitudenspektren der kurzwelligen Drehwegfehler der äquidistanten der inäquidistanten Prüfverzahnung (experimentelle Simulation) . . . . .	94
4.32	kurzwelliger Drehwegfehler der äquidistanten Prüfverzahnung (experimentelle Simulation und analytische Berechnung) . . . . .	95
4.33	Zeitsignal der dynamischen Zahnkräfte für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung; 1000 U/min; 80 N m (analytische Berechnung) . . . . .	97
4.34	Spektrum der dynamischen Zahnkräfte für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung; 1000 U/min; 80 N m (analytische Berechnung) . . . . .	98
4.35	Spektren der Pegel der dynamischen Zahnkräfte, berechnet durch die numerisch-iterative Lösung der Bewegungsgleichung und durch Anwenden der Vergrößerungsfunktion nach GEISER [55] für die inäquidistante Prüfverzahnung; 1000 U/min; 80 N m (analytische Berechnung) . . . . .	100
4.36	dynamische Zahnkraft nach BOLLINGER und BOSCH [212] im Vergleich zu den mit dem vorgestellten dynamischen Modell berechneten dynamischen Zahnkräften (experimentelle Simulation aus der Literatur und analytische Berechnung) . . . . .	101
4.37	CAD-Modell (oben), vereinfachtes Geometriemodell (Mitte) und FE-Modell (unten) des Wellensystems des Getriebeprüfstandes . .	103

4.38	mittels FE-Berechnung ermittelte Eigenfrequenzen des Wellensystems; farblich dargestellt sind die Beträge der Knotenauslenkungen (qualitativ) . . . . .	104
4.39	CAD-Modell (a) und vereinfachtes Geometriemodell (b) des Getriebeprüfstandes zur Berechnung der Körperschallfunktion . . . . .	107
4.40	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 1 in $z_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach KNIEPER [214] und numerische Simulation) . . . . .	109
4.41	Referenz-Messposition für die experimentellen Untersuchungen des Luftschalls am Getriebeprüfstand . . . . .	113
4.42	Campbell-Diagramme des Schalldruckes der äquidistanten (links) und der inäquidistanten (rechts) Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (experimentelle Simulation) . . . . .	114
4.43	Ordnungsspektren der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (experimentelle Simulation) . . . . .	115
4.44	Summenschalldruckpegel der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; 10 N m und 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (experimentelle Simulation) . . . . .	116
4.45	Tonhaltigkeit, Lautheit, Schärfe und Rauigkeit der Geräusche der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnungen; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (experimentelle Simulation) . . . . .	117
4.46	psychoacoustic annoyance nach FASTL und ZWICKER [115] und Lästigkeit nach SCHLITTENLACHER [10, 113, 132] des Geräusches der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnungen; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (experimentelle Simulation) . . . . .	118
4.47	Summenschalldruckpegel der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (analytische Berechnung und experimentelle Simulation) . . . . .	119
4.48	Ordnungsspektren der äquidistanten und der inäquidistanten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (analytische Berechnung und experimentelle Simulation) . . . . .	120
4.49	Ordnungsspektren der äquidistanten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (analytische Berechnung, mit und ohne rauschartige Krafterregung sowie experimentelle Simulation) . . .	121
4.50	Campbell-Diagramme der Schalldruckpegel der geradverzahnten Prüfverzahnung; äquidistant (links), inäquidistant (rechts); analytische Berechnungen mit rauschartiger Krafterregung (oben), experimentelle Simulationen (unten); 80 N m, 0 U/min bis 1500 U/min	122

4.51	mittels selektiven Lasersinterns hergestellte inäquidistante schrägverzahnte Prüfverzahnung zur experimentellen Validierung der analytischen Berechnungskette für Schrägverzahnungen . . . . .	123
4.52	Summenschalldruckpegel der äquidistanten und der inäquidistanten schrägverzahnten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (analytische Berechnung und experimentelle Simulation)	124
4.53	Ordnungsspektren des Schalldruckes der äquidistanten und der inäquidistanten schrägverzahnten Prüfverzahnung; 80 N m; 0 U/min bis 1500 U/min (analytische Berechnung und experimentelle Simulation) . . . . .	125
5.1	Frequenzspektren der fünf als Reize im Online-Hörversuch genutzten synthetischen Getriebegeräusche; 1800 U/min (Zahneingriffsfrequenz bei 1260 Hz); Peaks durch Punkte hervorgehoben (analytische Berechnung) . . . . .	129
5.2	Ergebnis des Online-Hörversuches für das Attribut <i>lästig</i> ; synthetisch erzeugte Reize; Hochlauf; 0 U/min bis 1200 U/min (experimentelle Simulation nach DRIESELNANN [215]) . . . . .	130
5.3	Rangfolge (links) und Werte des Optimierungskriteriums $K_{\max}$ (rechts) für die fünf in den Online-Hörversuchen als Reize verwendeten Geräusche (experimentelle Simulation nach DRIESELNANN [215] und analytische Berechnung) . . . . .	132
6.1	Antwortfläche des Optimierungsproblems; Variation der Inäquidistanz-Parameter $\Delta Q_{I,2}$ und $\Delta Q_{I,3}$ ; andere Parameter konstant null; Bewertung mittels des Optimierungskriteriums $K_{\max}$ ; 0 U/min bis 1500 U/min; 80 N m (analytische Berechnung) . . . . .	135
6.2	Antwortfläche des Optimierungsproblems; Variation der Inäquidistanz-Parameter $\Delta S_{I,1}$ und $\Delta S_{I,2}$ ; andere Parameter konstant null; Bewertung mittels des Optimierungskriteriums $K_{\max}$ ; 0 U/min bis 1500 U/min; 80 N m (analytische Berechnung) . . . . .	136
6.3	exemplarische Ordnungsspektren, die während der Optimierung berechnet werden; Bewertung mittels $K_{\max}$ anhand des höchsten Peaks des Schalldruckpegels im Spektrum (gestrichelte Linien) (analytische Berechnung) . . . . .	138
6.4	niedrigster ermittelter Wert für $K_{\max}$ in Abhängigkeit von der Berechnungsdauer; Berechnung von einer Million zufällig generierter inäquidistanter Verzahnungen (analytische Berechnung) . . . . .	139
6.5	Darstellung der drei besten Lösungen, die mittels der zufallsbasierten Optimierungsstufe ermittelt wurden . . . . .	140

6.6	Werte von $K_{\max}$ vor und nach der Nachbarschaftssuche für die drei Verzahnungen (analytische Berechnung) . . . . .	141
6.7	Ordnungsspektren der optimierten inäquidistanten Verzahnung und der beiden Prüfverzahnungen; Werte von $K_{\max}$ gestrichelt; Hochlauf (Dauer 3 s); 0 U/min bis 1500 U/min; 80 N m (analytische Berechnung) . . . . .	142
6.8	Summenschalldruckpegel der beiden Prüfverzahnungen und der optimierten inäquidistanten Verzahnung; Hochlauf (dauer 3 s); 0 U/min bis 1500 U/min; 80 N m (analytische Berechnung) . . . . .	142
6.9	Geometrie der optimierten inäquidistanten Verzahnung . . . . .	143
A.1	Drehwegfehler der beiden äquidistanten und der beiden inäquidistanten Prüfverzahnungen; negative Lastrichtung (experimentelle Simulation) . . . . .	151
A.2	Biegewellenlängen der Grundplatte und der Platten der Gehäuse des Getriebeprüfstandes in Abhängigkeit von der Frequenz . . . . .	153
A.3	mittels numerischer Simulation berechnete Schwingformen der sechs Starrkörpermoden und der ersten Plattenmode des Getriebeprüfstandes; unverformter Zustand (grau) und Betrag der Auslenkung (farblich, qualitativ) . . . . .	156
A.4	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 1 in $x_G$ -Richtung (numerische Simulation) . . . . .	157
A.5	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 1 in $y_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach KNIEPER [214] und numerische Simulation) . . . . .	157
A.6	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 1 in $z_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach KNIEPER [214] und numerische Simulation) . . . . .	157
A.7	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 2 in $x_G$ -Richtung (numerische Simulation) . . . . .	158
A.8	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 2 in $y_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach KNIEPER [214] und numerische Simulation) . . . . .	158
A.9	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 2 in $z_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach KNIEPER [214] und numerische Simulation) . . . . .	158
A.10	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 3 in $x_G$ -Richtung (numerische Simulation) . . . . .	159
A.11	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 3 in $y_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach KNIEPER [214] und numerische Simulation) . . . . .	159

---

A.12	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 3 in $z_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach KNIEPER [214] und numerische Simulation) . . . . .	159
A.13	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 4 in $x_G$ -Richtung (numerische Simulation) . . . . .	160
A.14	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 4 in $y_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach KNIEPER [214] und numerische Simulation) . . . . .	160
A.15	Körperschallfunktion des Getriebeprüfstandes bei einer Anregung an Lagerstelle 4 in $z_G$ -Richtung (experimentelle Simulation nach KNIEPER [214] und numerische Simulation) . . . . .	160
A.16	Messgitter, bestehend aus 22 Messpositionen, in 1 m Abstand rund um den Getriebeprüfstand . . . . .	161
A.17	gemitteltetes Terzspektrum, Terzspektrum des Messpunktes mit der geringsten quadratischen Abweichung (Messpunkt 5) und Terzspektren aller 22 Messpunkte auf der Hüllfläche (experimentelle Simulation) . . . . .	162
A.18	Drehwegfehler der äquidistanten und der inäquidistanten Schrägverzahnung; positive Lastrichtung (experimentelle Simulation) . . .	164
A.19	Amplitudenspektren der kurzwelligen Drehwegfehler der äquidistanten und der inäquidistanten Schrägverzahnung (experimentelle Simulation) . . . . .	164



---

---

## Tabellenverzeichnis

---

2.1	primäre und sekundäre sowie aktive und passive Geräuschminderungsmaßnahmen an Maschinen . . . . .	31
4.1	Verzahnungsdaten der äquidistanten Prüfverzahnung . . . . .	61
4.2	Inäquidistanz-Parameter der inäquidistanten Prüfverzahnung . . . . .	67
4.3	Verzahnungsdaten der von WINTER und PODLESNIK [69] in einer experimentellen Simulation untersuchten Verzahnung . . . . .	77
4.4	Verzahnungsdaten der von ZIEGLER [61] in einer experimentellen Simulation untersuchten Verzahnung . . . . .	78
4.5	Massenträgheitsmomente der Zahnräder, der Prüfstandswellen und der Maschinenelemente (gerundet) . . . . .	88
4.6	mittels Finite-Elemente-Methode berechnete Radkörpersteifigkeiten der Prüfverzahnungen . . . . .	89
4.7	Verzahnungsdaten der von BOLLINGER und BOSCH [212] in einer experimentellen Simulation untersuchten Verzahnung . . . . .	102
4.8	mittels experimenteller und numerischer Modalanalyse ermittelte Eigenfrequenzen des Getriebeprüfstandes . . . . .	108
A.1	absolute Zahnpositionen und Zahndicken der Prüfverzahnungen . . . . .	150
A.2	Amplituden und Phasenwinkel der experimentell ermittelten langwelligen Drehwegfehler für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung . . . . .	151
A.3	Amplituden und Phasenwinkel der experimentell ermittelten kurzwelligen Drehwegfehler für die äquidistante und die inäquidistante Prüfverzahnung . . . . .	152
A.4	Verzahnungsdaten der schrägverzahnten Prüfverzahnung . . . . .	163
A.5	Inäquidistanz-Parameter der schrägverzahnten Prüfverzahnung . . . . .	163
A.6	Amplituden und Phasenwinkel der experimentell ermittelten langwelligen Drehwegfehler für die schrägverzahnte äquidistante und die schrägverzahnte inäquidistante Prüfverzahnung . . . . .	165
A.7	Amplituden und Phasenwinkel der experimentell ermittelten kurzwelligen Drehwegfehler für die schrägverzahnte äquidistante und die schrägverzahnte inäquidistante Prüfverzahnung . . . . .	165
A.8	Verzahnungsdaten der optimierten inäquidistanten Verzahnung (entspricht den Verzahnungsdaten der Prüfverzahnungen) . . . . .	166
A.9	Inäquidistanz-Parameter der mittels zufallsbasierter Optimierungsmethode ermittelten Verzahnung 1 . . . . .	166
A.10	Inäquidistanz-Parameter der mittels zufallsbasierter Optimierungsmethode ermittelten Verzahnung 2 . . . . .	167

---

A.11	Inäquidistanz-Parameter der mittels zufallsbasierter Optimierungsmethode ermittelten Verzahnung 3 . . . . .	167
A.12	Inäquidistanz-Parameter der optimierten inäquidistanten Verzahnung	167
A.13	in dieser Arbeit genutzte Bezugswerte zur Pegelbildung . . . . .	168

---

---

## Abkürzungsverzeichnis

---

<b>Abkürzung</b>	<b>Bezeichnung</b>
BTL	Bradley-Terry-Luce
CAD	computer-aided design
CVT	continuously variable transmission
ERP	equivalent radiated power
FE	Finite-Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
FFT	fast Fourier transform
Pkw	Personenkraftwagen

---

## Symbolverzeichnis

### Lateinische Buchstaben

Variable	Einheit	Bezeichnung
$a_w$	in m	Achsabstand
$b$	in m	Zahnbreite
$c_{ges}$	in $\frac{N}{m}$	Gesamtsteifigkeit
$c_L$	in $\frac{m}{s}$	Schallgeschwindigkeit, Luft
$c_{Med}$	in $\frac{m}{s}$	Schallgeschwindigkeit
$c_p$	in m	Kopfspiel
$c_p^*$	in —	Kopfspielfaktor
$c_{p,j}^*$	in —	inäquidanter Kopfspielfaktor
$c_{rk}$	in $\frac{N}{mm}$	Radkörpersteifigkeit
$c_{rk,I}$	in $\frac{N}{mm}$	Radkörpersteifigkeit, Antrieb
$c_{rk,II}$	in $\frac{N}{mm}$	Radkörpersteifigkeit, Abtrieb
$c_z$	in $\frac{N}{mm}$	Verzahnungssteifigkeit
$c_{z,th}$	in $\frac{N}{mm}$	theoretische Verzahnungssteifigkeit
$c_{ze}$	in $\frac{N}{mm}$	Zahnpaarsteifigkeit
$c_{ze,th,j}$	in $\frac{N}{mm}$	theoretische Zahnpaarsteifigkeit
$d$	in m	Teilkreisdurchmesser
$d_I$	in m	Teilkreisdurchmesser, Antrieb
$d_{II}$	in m	Teilkreisdurchmesser, Abtrieb
$d_a$	in m	Kopfkreisdurchmesser
$d_b$	in m	Grundkreisdurchmesser
$d_{b,I}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Antrieb
$d_{b,II}$	in m	Grundkreisdurchmesser, Abtrieb
$d_f$	in m	Fußkreisdurchmesser
$d_{f,j}$	in m	inäquidanter Fußkreisdurchmesser
$d_y$	in m	beliebiger Durchmesser am Zahnrad
$d_z$	in $\frac{kg}{s}$	Verzahnungsdämpfungskonstante
$D_z$	in —	Verzahnungsdämpfungsgrad
$D'_z$	in —	angepasster Verzahnungsdämpfungsgrad
$D_{ze}$	in —	Zahnpaardämpfungsgrad
$e$	in m	Lückenweite
$e_n$	in —	Lückenweite, Normalschnitt

$e_t$	in	—	Lückenweite, Tangentialschnitt
$E$	in	$\frac{N}{m^2}$	Elastizitätsmodul
$E_p$	in	$\frac{N}{m^2}$	Elastizitätsmodul, Platte
$f$	in	Hz	Frequenz
$f_0$	in	Hz	Eigenfrequenz
$f_g$	in	Hz	Koinzidenzgrenzfrequenz
$f_{K0}$	in	Hz	Kugelstrahlereckfrequenz
$f_z$	in	Hz	Zahneingriffsfrequenz
$F$	in	N	Kraft
$F_{dyn}$	in	N	dynamische Zahnkraft
$F_{c,dyn}$	in	N	dynamische Federkraft
$F_{d,dyn}$	in	N	dynamische Dämpferkraft
$F_{t,dyn}$	in	N	dynamische Zahnkraft, Stirnschnitt
$F_L$	in	N	Lagerkraft
$F_{t,stat}$	in	N	statische Vorlast
$F_{ze}$	in	N	Zahnkraft
$F_{ze,j}$	in	N	Kraft am Zahnpaar
$f'_k$	in	m	Einflanken-Wälzabweichung, kurzwellige Anteile
$f'_l$	in	m	Einflanken-Wälzabweichung, langwellige Anteile
$F'_i$	in	m	Einflanken-Wälzabweichung
$h$	in	m	Zahnhöhe
$h_{aP}$	in	m	Kopfhöhe des Bezugsprofils
$h_{fP}$	in	m	Fußhöhe des Bezugsprofils
$h_{H,I}$	in	m	Kraftangriffsabstand, Antrieb
$h_{H,II}$	in	m	Kraftangriffsabstand, Abtrieb
$h_j$	in	m	inäquidistante Zahnhöhe
$h_p$	in	m	Plattendicke
$i$	in	—	Übersetzungsverhältnis
$j$	in	—	Zahnnummer
$k$	in	—	Kopfhöhenänderungsfaktor
$k_j$	in	—	inäquidistanter Kopfhöhenänderungsfaktor
$K_{max}$	in	dB	Optimierungskriterium
$L_F$	in	dB	Kraftpegel
$L_p$	in	dB	Schalldruckpegel
$L_P$	in	dB	Schalleistungspegel
$L_{Sh^2_T}$	in	dB	Pegel der Körperschallfunktion

$L_{Z'}'$	in	dB	Pegel der Schallkennimpedanz
$L_{\sigma}$	in	dB	Pegel des Abstrahlgrades
$M$	in	N m	Drehmoment
$M_I$	in	N m	Drehmoment, Antrieb
$M_{II}$	in	N m	Drehmoment, Abtrieb
$m$	in	m	Verzahnungsmodul
$m_n$	in	m	Normalmodul
$m_{\text{red}}$	in	kg	reduzierte Masse
$n$	in	$\frac{1}{s}$	Drehzahl
$n_I$	in	$\frac{1}{s}$	Drehzahl, Antrieb
$n_{II}$	in	$\frac{1}{s}$	Drehzahl, Abtrieb
$n_{\text{wdh}}$	in	—	Anzahl der Wiederholungen
$o$	in	$\frac{1}{U}$	Ordnung
$p$	in	m	Teilung
$P$	in	W	Schallleistung
$p_m$	in	m	Zahnmittenteilung
$p_n$	in	m	Teilung, Normalschnitt
$p_s$	in	Pa	Schalldruck
$p_t$	in	m	Teilung, Stirnschnitt
$p_{t,\text{aq}}$	in	m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt
$p_{t,I,\text{aq}}$	in	m	äquidistante Teilung, Stirnschnitt, Antrieb
$p_{t,I,j}$	in	m	inäquidistante Teilung, Stirnschnitt, Antrieb
$p_{t,m,j}$	in	m	Zahnmittenteilung, Stirnschnitt
$Q_j$	in	m	inäquidistante Zahnposition
$Q_{\text{aq},j}$	in	m	äquidistante Zahnposition
$Q_{I,j}$	in	m	inäquidistante Zahnposition, Antrieb
$Q_{II,j}$	in	m	inäquidistante Zahnposition, Abtrieb
$r_h$	in	m	Radius der Hüllfläche
$r_{H,I}$	in	m	Krümmungsradius, Antrieb
$r_{H,II}$	in	m	Krümmungsradius, Abtrieb
$s$	in	m	Zahndicke
$s_n$	in	m	Zahndicke, Normalschnitt
$s_t$	in	m	Zahndicke, Stirnschnitt
$s_{t,\text{aq}}$	in	m	äquidistante Zahndicke, Stirnschnitt
$s_{t,I,\text{aq}}$	in	m	äquidistante Zahndicke, Antrieb, Stirnschnitt
$s_{t,II,\text{aq}}$	in	m	äquidistante Zahndicke, Abtrieb, Stirnschnitt

---

$s_{t,j}$	in	m	inäquidistante Zahndicke, Stirnschnitt
$s_{t,I,j}$	in	m	inäquidistante Zahndicke, Antrieb, Stirnschnitt
$s_{t,II,j}$	in	m	inäquidistante Zahndicke, Abtrieb, Stirnschnitt
$S$	in	$m^2$	schallabstrahlende Fläche
$Sh_T^2$	in	$\frac{m^4}{N^2 s^2}$	Körperschallfunktion
$t$	in	s	Zeit
$T_v$	in	—	Körperschalltransferfunktion
$v$	in	$\frac{m}{s}$	Oberflächenschnelle
$v_t$	in	$\frac{m}{s}$	Umfangsgeschwindigkeit
$V$	in	—	Vergrößerungsfunktion
$w$	in	m	Zahnverschiebung
$w_I$	in	m	Zahnverschiebung, Antrieb
$w_{II}$	in	m	Zahnverschiebung, Abtrieb
$w_H$	in	m	HERTZ'sche Abplattung
$x_{m_n}$	in	m	Profilverschiebung
$x_{abw}$	in	m	lastbedingte Drehwegabweichung
$x_{dyn}$	in	m	Schwingweg
$\dot{x}_{dyn}$	in	$\frac{m}{s}$	Schwingschnelle
$\ddot{x}_{dyn}$	in	$\frac{m}{s^2}$	Schwingbeschleunigung
$x_f$	in	m	Drehwegfehler
$\dot{x}_f$	in	$\frac{m}{s}$	Ableitung des Drehwegfehlers
$x_{stat}$	in	m	statische Auslenkung
$x_z$	in	m	x-Koordinate am Zahn
$y_F$	in	m	Kraftangriffshöhe am Zahn
$y_z$	in	m	y-Koordinate am Zahn
$z$	in	—	Zähnezahl
$z_I$	in	—	Zähnezahl, Antrieb
$z_{II}$	in	—	Zähnezahl, Abtrieb
$Z$	in	bark	Tonheit
$Z_E$	in	$\frac{N s}{m}$	Eingangsimpedanz
$Z'_L$	in	$\frac{N s}{m^3}$	Schallkennimpedanz, Luft
$Z'_{Med}$	in	$\frac{N s}{m^3}$	Schallkennimpedanz

---

## Griechische Buchstaben

Variable	Einheit	Bezeichnung
$\alpha_{a,t}$	in rad	Stirnprofilwinkel, Kopfkreis
$\alpha_n$	in rad	Normaleingriffswinkel
$\alpha_p$	in rad	Profilwinkel
$\alpha_t$	in rad	Stirnprofilwinkel
$\alpha_{y,t}$	in rad	Stirnprofilwinkel bei $d_y$
$\alpha'$	in rad	Kraftangriffswinkel am Zahn
$\beta$	in rad	Schrägungswinkel
$\Delta p_{I,j}$	in –	Zahnteilungsfaktor, Antrieb
$\Delta p_{II,j}$	in –	Zahnteilungsfaktor, Abtrieb
$\Delta Q_j$	in –	Zahnpositionsfaktor
$\Delta Q_{I,j}$	in –	Zahnpositionsfaktor, Antrieb
$\Delta Q_{II,j}$	in –	Zahnpositionsfaktor, Abtrieb
$\Delta s_j$	in –	Zahndickenfaktor
$\Delta s_{I,j}$	in –	Zahndickenfaktor, Antrieb
$\Delta s_{II,j}$	in –	Zahndickenfaktor, Abtrieb
$\Delta \varphi$	in –	Modulationsinkrement
$\varepsilon_\gamma$	in –	Gesamtüberdeckung
$\eta$	in Pa s	dynamische Viskosität des Öls
$\theta_I$	in kg m <sup>2</sup>	Massenträgheitsmoment, Antrieb
$\theta_{II}$	in kg m <sup>2</sup>	Massenträgheitsmoment, Abtrieb
$\nu$	in –	Querkontraktionszahl
$\nu_P$	in –	Querkontraktionszahl, Platte
$\rho$	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte
$\rho_L$	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte, Luft
$\rho_{Med}$	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte
$\rho_P$	in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte, Platte
$\sigma$	in –	Abstrahlgrad
$\sigma_{ERP}$	in –	Abstrahlgrad bei der ERP
$\sigma_{KO}$	in –	Abstrahlgrad beim Kugelstrahler
$\varphi$	in rad	Drehwinkel
$\varphi_I$	in rad	Drehwinkel, Antrieb



---

$\varphi_{II}$	in	rad	Drehwinkel, Abtrieb
$\varphi_{\text{abs},j}$	in	rad	Abstandswinkel
$\varphi_f$	in	rad	Phase des Drehwegfehlers
$\varphi_j$	in	rad	inäquidistanter Zahnpositionswinkel
$\varphi_{I,0}$	in	rad	Drehwinkel, Antrieb, lastfrei
$\varphi_{I,j}$	in	rad	inäquidistanter Zahnpositionswinkel, Antrieb
$\varphi_{II,j}$	in	rad	inäquidistanter Zahnpositionswinkel, Abtrieb
$\varphi_{j,\text{aq}}$	in	rad	äquidistanter Zahnpositionswinkel
$\varphi_{L,j}$	in	rad	regelmäßiger Schaufelwinkel
$\varphi'_{L,j}$	in	rad	unregelmäßiger Schaufelwinkel
$\Phi$	in	—	inäquidistante Musterlänge
$\Psi_j$	in	rad	Zahndickenhalbwinkel, Teilkreis
$\Psi_{a,j}$	in	rad	Zahndickenhalbwinkel, Kopfkreis
$\Psi_{b,j}$	in	rad	Zahndickenhalbwinkel, Grundkreis
$\Psi_y$	in	rad	Zahndickenhalbwinkel bei $d_y$

---

### Mathematische Operatoren (am Beispiel der Variable $x$ )

---

Operator	Beschreibung
$\tilde{x}$	Effektivwert
$\bar{x}$	Mittelwert
$\underline{x}$	komplexe Größe
$\mathfrak{F}(x)$	schnelle Fourier-Transformation

---

---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] **Gwinner, P., Stahl, K., Rupp, S. und Strube, A. (2017):** Innovatives Hochdrehzahl-Antriebsstrangkonzept für hocheffiziente elektrische Fahrzeuge. In: *ATZ – Automobiltechnische Zeitschrift*. 119. Jahrgang, S. 72–75.
- [2] **Sedlmair, M., Fischer, P. D. und Stahl, K. (2017):** Innovatives Super-Hochdrehzahl-Mehrgang-Konzept für den elektrifizierten automobilen Antriebsstrang für höchste Effizienz und höchsten Komfort, Teilprojekt Hochdrehzahl-Getriebe. In: *Schlussbericht des Forschungsprojektes Speed2E, gefördert durch das Bundesministeriums für Wirtschaft und Energie*.
- [3] **Gwinner, P. (2017):** Schwingungsarme Achsgetriebe elektromechanischer Antriebsstränge. Disserationsschrift, TU München.
- [4] **Fischer, J., Behrendt, M., Lieske, D. und Albers, A. (2014):** Measurement and analysis of the interior noise and the transfer path of acoustic phenomena into the driver cabin of a battery electric vehicle. In: *Proceedings of the 43rd International Congress on Noise Control Engineering, Inter-Noise, 16.–19.11.2014, Melbourne, Australien*.
- [5] **Albers, A., Fischer, J., Behrendt, M. und Lieske, D. (2014):** Identification and definition of acoustic relevant limit values for electric vehicles. In: *Tagungsband des 14. Internationalen Stuttgarter Symposiums, 18.–19.03.2014 in Stuttgart, S. 533–548*.
- [6] **Genuit, K. (2010):** Sound-Engineering im Automobilbereich – Methoden zur Messung und Auswertung von Geräuschen und Schwingungen. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [7] **Tschöke, H. (2015):** Die Elektrifizierung des Antriebsstrangs. Springer Fachmedien, Wiesbaden.
- [8] **Albers, A., Fischer, J., Behrendt, M. und Lieske, D. (2014):** Messung und Interpretation der Wirkkette eines akustischen Phänomens im Antriebsstrang eines Elektrofahrzeugs. In: *ATZ – Automobiltechnische Zeitschrift*. 116. Jahrgang, S. 68–75.
- [9] **Hofacker, A. (2015):** Akustik für Fahrzeuge mit elektrifiziertem Antrieb. In: *ATZ – Automobiltechnische Zeitschrift*. 117. Jahrgang, S. 8–12.
- [10] **Schlittenlacher, J., Ellermeier, W., Chen, J. und Moritz, K. (2014):** Psychoakustische Lästigkeit von Getriebegeräuschen. In: *Tagungsband der 40. Jahrestagung für Akustik, DAGA 2014, 10.–13.03.2014, Oldenburg, S. 339–340*.
- [11] **Lennström, D., Agren, A. und Nykänen, A. (2011):** Sound quality evaluation of electric cars – preferences and influence of the test environment.

- 
- In: *Tagungsband des Aachener Akustik Kolloquiums 2011, 21.–23.11.2011, Aachen*, S. 95–100.
- [12] **König, R. und Rinderknecht, S. (2017)**: Innovatives Super-Hochdrehzahl-Mehrgang-Konzept für den elektrifizierten automobilen Antriebsstrang für höchste Effizienz und höchsten Komfort, Teilprojekt Fahrstrategie und Getriebesteuerung. In: *Schlussbericht des Forschungsprojektes Speed2E, gefördert durch das Bundesministeriums für Wirtschaft und Energie*.
- [13] **Brecher, C., Brumm, M. und Carl, C. (2012)**: Psychoakustische Bewertung der Geräuschanregung von Verzahnungen. In: *Tagungsband der 38. Jahrestagung für Akustik, DAGA 2012, 19.–22.03.2012, Darmstadt*, S. 35–36.
- [14] **Corves, B., Deters, L., Dietz, P., Dilger, K., Höhn, B. R., Kaßner, M., Kerle, H., Liebich, R., Mertens, H., Motz, H. D., Peeken, H., Poll, G., Ruge, J., Thomas, K., Winter, H., Wohlfahrt, H. und Wösle, H. (2011)**: Kap. Mechanische Konstruktionselemente. In: *Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 23. Auflage.
- [15] **Crocker, M. J. (2007)**: *Handbook of Noise and Vibration Control*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, USA.
- [16] **VDI 3720:1990-01**: Lärmarm konstruieren – Leistungsgetriebe – Minderung der Körperschallanregung im Zahneingriff.
- [17] **Kollmann, F. G. (2000)**: *Maschinenakustik – Grundlagen, Meßtechnik, Berechnung, Beeinflussung*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage.
- [18] **Kollmann, F. G., Schösser, T. F. und Angert, R. (2006)**: *Praktische Maschinenakustik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [19] **Linke, H. (2010)**: *Stirnradverzahnung – Berechnung – Werkstoffe – Fertigung*. Carl Hanser Verlag, München, Wien, 2. Auflage.
- [20] **Dresig, H. und Fidlin, A. (2014)**: *Schwingungen mechanischer Antriebssysteme – Modellbildung, Berechnung, Analyse, Synthese*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 3. Auflage.
- [21] **Klingelberg, J. (2008)**: *Kegelräder – Grundlagen, Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [22] **Lachenmeier, S. (1983)**: Geräuschuntersuchungen an Leistungsgetrieben. In: *Forschungsberichte der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (Forschungsvorhaben Nr. 484 III, Heft Nr. 1126)*.
- [23] **Kruk, R., Joostberens, J. und Wieczorek, A. (2006)**: Lärm- und Schwingungsminderung durch Änderung der Zahnhöhe in Stirnzahnradgetrieben. In: *IMW – Institutsmittteilung des Instituts für Maschinenwesen, Nr. 31, TU Clausthal*.
- [24] **Haberhauer, H. und Bodenstern, F. (2014)**: *Maschinenelemente – Gestaltung, Berechnung, Anwendung*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 17. Auflage.

- 
- [25] **Niemann, G. und Winter, H. (2003):** Maschinenelemente – Band 2: Getriebe allgemein, Zahnradgetriebe – Grundlagen, Stirnradgetriebe. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage.
- [26] **Böge, A. (2007):** Vieweg Handbuch Maschinenbau – Grundlagen und Anwendungen der Maschinenbau-Technik. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden.
- [27] **Steinhilper, W. und Sauer, B. (2012):** Konstruktionselemente des Maschinenbaus 2 – Grundlagen von Maschinenelementen für Antriebsaufgaben. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 7. Auflage.
- [28] **Nauheimer, H., Bertsche, B. und Lechner, G. (2007):** Fahrzeuggetriebe – Grundlagen, Auswahl, Auslegung und Konstruktion. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [29] **Klocke, F. und Brecher, C. (2017):** Zahnrad- und Getriebetechnik – Auslegung – Herstellung – Untersuchung – Simulation. Carl Hanser Verlag, München.
- [30] **Heider, M. K. (2012):** Schwingungsverhalten von Zahnradgetrieben – Beurteilung und Optimierung des Schwingungsverhaltens von Stirnrad- und Planetengetrieben. Dissertationsschrift, TU München.
- [31] **Radev, S. (2006):** Einfluss von Flankenkorrekturen auf das Antriegsverhalten gerad- und schrägverzählter Stirnradpaarungen. Dissertationsschrift, TU München.
- [32] **Brecher, C., Löpenhaus, C. und Knecht, P. (2016):** Design of acoustical optimized bevel gears using manufacturing simulation. In: *Proceedings of the 48th CIRP Conference on Manufacturing Systems, CIRP CMS 2015, 24.–26.06.2015, Neapel, Italien*, S. 902–907.
- [33] **Strunk, S. (2017):** Surface structure shift for ground bevel gears. In: *Gear Technology*. Juni 2017, S. 54–65.
- [34] **Knecht, P., Löpenhaus, C. und Brecher, C. (2016):** Influence of topography deviations on the psychoacoustic evaluation of ground bevel gears. In: *Gear Technology*. Nov./Dez. 2016, S. 84–95.
- [35] **Hanselka, H. und Bös, J. (2014):** Kap. O3 Maschinendynamik. In: *Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 24. Auflage.
- [36] **Gacka, A. M. (2012):** Entwicklung einer Methode zur Abbildung der dynamischen Zahneingriffsverhältnisse von Stirn- und Kegelradsätzen. Dissertationsschrift, RWTH Aachen.
- [37] **Rautert, J. (1990):** Untersuchung der Körperschallübertragung und Schallabstrahlung von Getrieben. In: *Forschungsberichte der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V.* (Forschungsvorhaben Nr. 130, Heft Nr. 311).

- 
- [38] **Knabel, W. (1977):** Geräusche und Schwingungen an Stirnradgetrieben, Untersuchungen geometrischer Einflüsse bei hohen Drehzahlen und Belastungen. Dissertationsschrift, TU München.
- [39] **Sattelberger, K. (1997):** Schwingungs- und Geräuschanregung bei ein- und mehrstufigen Strinradgetrieben. Dissertationsschrift, TU München.
- [40] **Griggel, T. (2011):** Einfluss von Korrekturen und Fertigungsabweichungen auf die Schwingungsanregung von Stirnrädern. Dissertationsschrift, TU München.
- [41] **Weber, W. (1987):** Akustische Modellgesetze für die Schallleistung von Getriebebaureihen. Dissertationsschrift, TH Darmstadt.
- [42] **Storm, R. (1980):** Untersuchung der Einflussgrößen auf das akustische Übertragungsverhalten von Maschinenstrukturen. Dissertationsschrift, TH Darmstadt.
- [43] **Müller, R. (1990):** Schwingungs- und Geräuschanregung bei Stirnradgetrieben. Dissertationsschrift, TU München.
- [44] **DIN 45630-1:1971-12:** Grundlagen der Schallmessung – Physikalische und subjektive Größen von Schall.
- [45] **Zeller, P. (2018):** Handbuch Fahrzeugakustik – Grundlagen, Auslegung, Berechnung, Versuch. Springer Fachmedien, Wiesbaden, 3. Auflage.
- [46] **Schaal, C. (2018):** Entwicklung von Modifikationsregeln zur Reduktion der Schallabstrahlung dünnwandiger Strukturen im Entwicklungsprozess. Dissertationsschrift, TU Darmstadt.
- [47] **Moritz, K. (2017):** Luftschall- und körperschallbasierte psychoakustische Analyse von Getriebegeräuschen. Dissertationsschrift, TU Darmstadt.
- [48] **DIN ISO 21771:2014-08:** Zahnräder – Zylinderräder und Zylinderradpaare mit Evolventenverzahnung – Begriffe und Geometrie.
- [49] **DIN 3960:1987-03:** Begriffe und Bestimmungsgrößen für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung.
- [50] **DIN 867:1986-02:** Bezugsprofile für Evolventenverzahnungen an Stirnrädern (Zylinderrädern) für den allgemeinen Maschinenbau und Schwermaschinenbau.
- [51] **DIN 780-1:1977-05:** Modulreihe für Zahnräder, Teil 1: Modulreihe für Stirnräder.
- [52] **DIN 3992:1964-03:** Profilverzahnung bei Stirnrädern mit Außenverzahnung.
- [53] **Pflüger, M., Brandl, F., Bernhard, U. und Feitzelmayer, K. (2010):** Fahrzeugakustik. Springer, Wien, New York.
- [54] **Diekhans, G. (1981):** Numerische Simulation von parametererregten Getriebschwingungen. Dissertationsschrift, RWTH Aachen.

- 
- [55] **Gerber, H. (1984):** Innere dynamische Zusatzkräfte bei Stirnradgetrieben – Modellbildung, innere Anregung und Dämpfung. Dissertationsschrift, TU München.
- [56] **Bosch, M. (1965):** Über das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben unter besonderer Berücksichtigung der Verzahnungsgenauigkeit. Dissertationsschrift, RWTH Aachen.
- [57] **Geiser, H. (2002):** Grundlagen zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von Stirnrädern. Dissertationsschrift, TU München.
- [58] **Nguyen, P. D. (2002):** Beitrag zur Diagnostik der Verzahnungen in Getrieben mittels Zeit-Frequenz-Analyse. Dissertationsschrift, TU Chemnitz.
- [59] **Opitz, H. (1968):** Noise of gears. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.* 263 (1142), S. 369–390.
- [60] **DIN 3961:1978-08:** Toleranzen für Stirnradverzahnungen.
- [61] **Ziegler, H. (1971):** Verzahnungsteifigkeit und Lastverteilung schrägverzahnter Stirnräder. Dissertationsschrift, RWTH Aachen.
- [62] **DIN 4760:1982-06:** Gestaltabweichungen, Begriffe, Ordnungssystem.
- [63] **Opitz, H. (1970):** Moderne Produktionstechnik – Stand und Tendenzen. Verlag W. Girardet, Essen.
- [64] **Dale, A. K. (1987):** Gear noise and the sideband phenomenon. In: *Gear Technology.* Jan/Feb 1987, S. 26–33.
- [65] **Thoma, F. A. (2011):** Lastübertragung im verformten System Lager-Welle-Zahnrad. Dissertationsschrift, TU München.
- [66] **Langhart, J. und Zotos, I. (2017):** Einfluss der Gehäusesteifigkeit auf die Verzahnungslaufeigenschaften. In: *Konstruktion.* März 2017, S. 75–79.
- [67] **Weber, C. und Banascheck, K. (1953):** Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnenden Rädern. In: *Schriftenreihe Antriebstechnik.* Heft 11, S. 1–88.
- [68] **Winter, H. und Podlesnik, B. (1983):** Zahnfedersteifigkeit von Stirnradpaaren – Teil 1: Grundlagen und bisherige Untersuchungen. In: *Antriebstechnik.* 22 (3), S. 39–42.
- [69] **Winter, H. und Podlesnik, B. (1983):** Zahnfedersteifigkeit von Stirnradpaaren – Teil 2: Einfluß von Verzahnungsdaten, Radkörperform, Linienlast und Wellen-Naben-Verbindung. In: *Antriebstechnik.* 22 (5), S. 51–57.
- [70] **Winter, H. und Podlesnik, B. (1983):** Zahnfedersteifigkeit von Stirnradpaaren – Teil 3: Einfluß der Radkörperform auf die Verteilung der Einzelfedersteifigkeit und der Zahnkraft längs der Zahnbreite. In: *Antriebstechnik.* 23 (11), S. 43–49.
- [71] **DIN 3990-1:1987-12:** Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern, Teil 1: Einführung und allgemeine Einflußfaktoren.

- 
- [72] **Schmidt, G. (1973):** Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. Dissertationsschrift, TU München.
- [73] **Otto, M. (2010):** Lastverteilung und Zahnradtragfähigkeit von schrägverzahnten Stirnrädern. Dissertationsschrift, TU München.
- [74] **Baethge, J. (1969):** Drehwegfehler, Zahnfederhärte und Geräusch bei Stirnrädern. Dissertationsschrift, TH München.
- [75] **Mahr, B. und Kissling, U. (2016):** Vergleich der Resultate verschiedener kommerzieller Programme für die Kontaktanalyse von Stirnrädern. In: *technischer Bericht der KISSsoft AG*.
- [76] **Wikidal, F. (1997):** Berechnung der Flankenpressung gerad- und schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung last- und fertigungsbedingter Abweichungen. Dissertationsschrift, TU München.
- [77] **Schinagl, S. (2002):** Zahnfußtragfähigkeit schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. Dissertationsschrift, TU München.
- [78] **Dresig, H. und Holzweißig, F. (2007):** Maschinendynamik. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 8. Auflage.
- [79] **Küçükay, F. (1987):** Dynamik der Zahnradgetriebe – Modelle, Verfahren, Verhalten. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo.
- [80] **Özgüven, H. N. und Houser, D. R. (1988):** Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error. In: *J. Sound Vib.* 125 (1), S. 71–83.
- [81] **Özgüven, H. N. und Houser, D. R. (1988):** Mathematical models used in gear dynamics – a review. In: *J. Sound Vib.* 121 (3), S. 383–411.
- [82] **Özgüven, H. N. (1991):** A non-linear mathematical model for dynamic analysis of spur gears including shaft and bearing dynamics. In: *J. Sound Vib.* 145 (2), S. 239–260.
- [83] **Parker, R. G., Vijayakar, S. M. und Imajo, T. (2000):** Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparison. In: *J. Sound Vib.* 237 (3), S. 435–455.
- [84] **Kahraman, A. und Singh, R. (1990):** Non-linear dynamics of a spur gear pair. In: *J. Sound Vib.* 142 (1), S. 49–75.
- [85] **Fernández-del-Rincón, A., Iglesias, M., de-Juan, A., Diez-Ibarbia, A., García, P. und Viadero, F. (2016):** Gear transmission dynamics: Effects of index and run out errors. In: *Applied Acoustics.* 108 (2016), S. 63–83.
- [86] **Röthlingshöfer, T. (2012):** Auslegungsmethodik zur Optimierung des Einsatzverhaltens von Beveloidverzahnungen. Dissertationsschrift, RWTH Aachen.

- 
- [87] **VDI/VDE 2608:2001-03:** Einflanken- und Zweiflanken-Wälzprüfung an Zylinderrädern, Kegelrädern, Schnecken und Schneckenrädern.
- [88] **DIN 21772:2012-07:** Zahnräder – Zylinderräder und Zylinderradpaare mit Evolventenverzahnungen – Definition der Abweichungen.
- [89] **DIN 3963:1978-08:** Toleranzen für Stirnradverzahnungen – Toleranzen für Wälzabweichungen.
- [90] **DIN 3962-1:1978-08:** Toleranzen für Stirnradverzahnungen, Teil 1: Toleranzen für Abweichungen einzelner Bestimmungsgrößen.
- [91] **DIN 3962-2:1978-08:** Toleranzen für Stirnradverzahnungen, Teil 2: Toleranzen für Flankenlinienabweichungen.
- [92] **DIN 3962-3:1978-08:** Toleranzen für Stirnradverzahnungen, Teil 3: Toleranzen für Teilungs-Spannenabweichungen.
- [93] **Niemann, G. und Rettig, H. (1957):** Dynamische Zahnkräfte – Teil 1: Versuchsergebnisse über den Einfluß von Geschwindigkeit, Belastung, Zahnfehlern und Masse auf die zusätzliche dynamische Zahnkraft. In: *VDI Zeitschrift*. 99 (3), S. 89–96.
- [94] **Rettig, H. (1957):** Dynamische Zahnkräfte. Dissertationsschrift, TH München.
- [95] **Niemann, G. und Baethge, J. (1970):** Drehwegfehler, Zahnfederhärte und Geräusch bei Stirnrädern – Einfluß der Zahnform und der Zahnfehler bei Belastung nach Theorie und Versuch, Teil 1. In: *VDI-Zeitschrift*. 112 (4).
- [96] **Niemann, G. und Baethge, J. (1970):** Drehwegfehler, Zahnfederhärte und Geräusch bei Stirnrädern – Einfluß der Zahnform und der Zahnfehler bei Belastung nach Theorie und Versuch, Teil 2. In: *VDI-Zeitschrift*. 112 (8).
- [97] **Velex, P. und Ajmi, M. (2006):** On the modelling of excitations in geared systems by transmission errors. In: *J. Sound Vib.* 290 (2006), S. 882–909.
- [98] **Donin, R. und Silbernagel, C. (2003):** Optimierte Verzahnungsgeometrien leistungsübertragender Zahnräder für die umformtechnische Herstellung. In: *Forschungsberichte der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V.* (Forschungsvorhaben Nr. 12198N, Heft Nr. 178).
- [99] **Korka, Z. (2007):** An overview of mathematical models used in gear dynamics. In: *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*. 4 (01/2007), S. 43–50.
- [100] **Bös, J. und Hanselka, H. (2018):** Kap. I.12 Maschinenakustik. In: *Handbuch Konstruktion*. Carl Hanser Verlag, München, 2. Auflage.
- [101] **Attia, A. Y. (1971):** Effect of change of pitch on gear noise. In: *J. Sound Vib.* 18 (1), S. 129–137.
- [102] **Gill-Jeong, C. (2010):** Numerical study on reducing the vibration of spur gear pairs with phasing. In: *J. Sound Vib.* 329 (2010), S. 3915–3927.



- 
- [103] **Kang, M. R. und Kahraman, A. (2015):** An experimental and theoretical study of the dynamic behavior of double-helical gear sets. In: *J. Sound Vib.* 350 (2015), S. 11–29.
- [104] **DE69110594T2:** „Getriebe“. Anmeldetag: 04.04.1991.
- [105] **DE102013003795A1:** „Bearbeitungsverfahren zum Hartfeinbearbeiten von geräuschoptimierten Verzahnungen auf einer Verzahnmaschine“. Anmeldetag: 05.03.2013.
- [106] **Dennig, H.-J. und Höner, S. (2012):** Konstruktion und Entwicklung von Kunststoffgetrieben im Automobilbau. In: *Tagungsband des Schweizer Maschinenelemente Kolloquiums, 20.–21.11.2012, Rapperswil, Schweiz*, S. 261–271.
- [107] **Rösler, J. (2005):** Zur Tragfähigkeitssteigerung thermoplastischer Zahnräder mit Füllstoffen. Dissertationsschrift, TU Berlin.
- [108] **Heine, B. (2016):** Werkstoffwahl für technische Anwendungen – Grundlagen und Beispiele. Carl Hanser Verlag, München.
- [109] **Möser, M. (2015):** Technische Akustik. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 10. Auflage.
- [110] **TA Lärm:** Sechste Allgemeine Verwaltungsvorschrift zum Bundes-Immissionsschutzgesetz – Technische Anleitung zum Schutz gegen Lärm – vom 26.08.1998.
- [111] **Lütkehus, I., Salecker, H. und Adlunger, K. (2013):** Potenziale der Windenergie an Land – Studie zur Ermittlung des bundesweiten Flächen- und Leistungspotenzials der Windenergienutzung an Land. In: *Bericht des Umweltbundesamtes*.
- [112] **Moritz, K., Ochs, S., Bös, J. und Melz, T. (2014):** Variation, Erfassung und Auswertung von Getriebegeräuschen im Hinblick auf die Kundenakzeptanz – Nutzung von Psychoakustik und statistischer Versuchsplanung in der Maschinenakustik. In: *6. VDI-Fachtagung Maschinenakustik, 12.–13.11.2014, Karlsruhe*, S. 185–196.
- [113] **Moritz, K. und Schlittenlacher, J. (2016):** Entwicklung der psychoakustischen Analysen von Luftschall und Übertragung auf Körperschallsignale in der Antriebstechnik. In: *Forschungsberichte der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V.* (Forschungsvorhaben Nr. 679 I, Heft Nr. 1192).
- [114] **Möser, M. (2010):** Messtechnik der Akustik. Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York.
- [115] **Fastl, H. und Zwicker, E. (2007):** Psychoacoustics – Facts and Models. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3. Auflage.
- [116] **Kalivoda, M. T. und Steiner, J. W. (1998):** Taschenbuch der Angewandten Psychoakustik. Springer-Verlag, Wien, Österreich.

- 
- [117] **Brecher, C., Gorgels, C., Carl, C. und Brumm, M. (2011):** Benefit of psychoacoustic analyzing methods for gear noise investigation. In: *Gear Technology*. August 2011, S. 49–55.
- [118] **DIN 45631:1991-03:** Berechnung des Lautstärkepegels und der Lautheit aus dem Geräuschspektrum – Verfahren nach E. Zwicker.
- [119] **DIN 45631/A1:2010-03:** Berechnung des Lautstärkepegels und der Lautheit aus dem Geräuschspektrum - Verfahren nach E. Zwicker, Änderung 1: Berechnung der Lautheit zeitinvarianter Geräusche.
- [120] **Rossing, T. D. (2014):** Springer Handbook of Acoustics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage.
- [121] **Müller, G. und Möser, M. (2013):** Handbook of Engineering Acoustics. Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London.
- [122] **DIN 45692:2009-08:** Messtechnische Simulation der Hörempfindung Schärfe.
- [123] **DIN 45645-2:2012-09:** Ermittlung von Beurteilungspegeln aus Messungen, Teil 2: Ermittlung des Beurteilungspegels am Arbeitsplatz bei Tätigkeiten unterhalb des Pegelbereiches der Gehörgefährdung.
- [124] **Maue, J. H. (2011):** Lästig und störend?! Neue DIN 45645-2: Geräusche am Arbeitsplatz beurteilen. In: *Sicherheitsingenieur*. 04/2011, S. 2–6.
- [125] **DIN 45681:2005-03:** Akustik – Bestimmung der Tonhaltigkeit von Geräuschen und Ermittlung eines Tonzuschlages für die Beurteilung von Geräuschmissionen.
- [126] **Kryter, K. D. und Pearsons, K. S. (1963):** Some effects of spectral content and duration on perceived noise level. In: *J. Acoust. Soc. Am.* 35 (6), S. 866–883.
- [127] **Carolus, T. (2013):** Ventilatoren – Aerodynamischer Entwurf, Schallvorhersage, Konstruktion. Vieweg+Teubner Verlag, Springer Fachmedien Wiesbaden.
- [128] **Mellin, R. C. und Sovran, G. (1970):** Controlling the tonal characteristics of the aerodynamic noise generated by fan rotors. In: *J. Basic Eng.* 03/1970, S. 143–154.
- [129] **Zwicker, E. und Terhardt, E. (1980):** Analytical expressions for critical-band rate and critical bandwidth as a function of frequency. In: *J. Acoust. Soc. Am.* 68 (1980), S. 1523–1525.
- [130] **Aures, W. (1984):** Berechnungsverfahren für den Wohlklang beliebiger Schallsignale, ein Beitrag zur gehörbezogenen Schallanalyse. Dissertationsschrift, TU München.
- [131] **McDermott, J. H. (2012):** Kap. Auditory Preferences and Aesthetics: Music, Voices, and Everyday Sounds. In: *Neuroscience on preference and choice*. Elsevier, London, Waltham, San Diego.

- 
- [132] **Schlittenlacher, J. und Ellermeier, W. (2013):** Psychoacoustic evaluation of gear noise using category ratings of multiple attributes. In: *Proceedings of the 42nd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering, Inter-Noise 2013, 15.–18.09.2013, Innsbruck, Österreich.*
- [133] **Di, G.-Q., Chen, X.-W., Song, K., Zhou, B. und Pei, C.-M. (2016):** Improvement of Zwickers psychoacoustic annoyance model aiming at tonal noises. In: *Applied Acoustics.* 105 (2016), S. 164–170.
- [134] **Beidl, C. V. und Stücklschwaiger, W. (1997):** Application of the AVL-Annoyance Index for engine noise quality development. In: *Acta Acustica united with Acustica.* 83 (1997), S. 789–795.
- [135] **Hussain, M., Göllés, J., Ronacher, A. und Schiffbänker, H. (1991):** Statistical evaluation of an annoyance index for engine noise recordings. In: *SAE 1991 Transactions – Passenger Car.* 100 (6), S. 359–367.
- [136] **Schiffbänker, H., Brandl, F. K. und Thien, G. (1991):** Development and application of an evaluation technique to assess the subjective character of engine noise. In: *SAE Technical Paper 911081.*
- [137] **Disch, T. M. (1995):** Optimizing the sound quality of air cooled engine fans using synthesized noise sources. In: *SAE Transactions, Journal of Passenger Cars.* 104 (6), S. 2318–2323.
- [138] **Cattanei, A., Ghio, R. und Bongiovi, A. (2007):** Reduction of the tonal noise annoyance of axial flow fans by means of optimal blade spacing. In: *Applied Acoustics.* 68 (2007), S. 1323–1345.
- [139] **Mohr, C., Schmid, P. und Vietoris, A. (2003):** Eins aus 10 hoch 23 – über die Akustikoptimierung des derzeit leistungsstärksten PKW-CVT-Getriebes. In: *Tagungsband der 29. Jahrestagung für Akustik, DAGA 2003, 18.–20.03.2003, Aachen, S. 300–301.*
- [140] **Boys, J. T. und Handley, P. G. (1992):** Spread spectrum switching: low noise modulation technique for PWM inverter drives. In: *IEE Proceedings-B.* 139 (3), S. 252–260.
- [141] **Bech, M. M., Pedersen, J. K. und Blaabjerg, F. (2001):** Field-oriented control of an induction motor using random pulsewidth modulation. In: *IEEE Transactions on Industry Applications.* 37 (6), S. 1777–1785.
- [142] **Segawa, Y., Shiohata, K. und Fujisawa, F. (1983):** Method of calculating optimum angular blade pitches in fan with unequally pitched blades. In: *Bulletin of the JSME.* 26 (213), S. 351–355.
- [143] **Ewald, D., Pavlovic, A. und Bollinger, J. G. (1971):** Noise reduction by applying modulation principles. In: *J. Acoust. Soc. Am.* 49 (5), S. 1381–1385.
- [144] **Anghinolfi, D., Canepa, E., Cattanei, A. und Paolucci, M. (2016):** Psychoacoustic optimization of the spacing of propellers, helicopter rotors, and axial fans. In: *J. Propul. Power.* 32 (6), S. 1422–1432.

- 
- [145] **Léwy, S. (1992):** Theoretical study of the acoustic benefit of an open rotor with uneven blade spacings. In: *J. Acoust. Soc. Am.* 92 (4), S. 2181–2185.
- [146] **Jiang, B., Wang, J., Yang, X., Wang, W. und Ding, Y. (2019):** Tonal noise reduction by unevenly spaced blades in a forward-curved-blades centrifugal fan. In: *Applied Acoustics*. 146 (2019), S. 172–183.
- [147] **Fiagbedzi, Y. A. (1982):** Reduction of blade passage tone by angle modulation. In: *J. Sound Vib.* 82 (1), S. 119–129.
- [148] **Boltezar, M., Mesaric, M. und Kuhelj, A. (1998):** The influence of uneven blade spacing on the SPL and noise spectra radiated from radial fans. In: *J. Sound Vib.* 216 (4), S. 697–711.
- [149] **Dobrzynski, W. (1993):** Propeller noise reduction by means of unsymmetrical blade-spacing. In: *J. Sound Vib.* 163 (1), S. 123–136.
- [150] **US3989780:** „Modulating noise produced by rotating bodies“. Anmelde-tag: 05.05.1975.
- [151] **Tsutsumi, K., Miura, Y. und Kageyama, Y. (2017):** New hybrid genetic algorithm for pitch sequence optimization of CVT variator chain. In: *SAE Int. J. Veh. Dyn., Stab., and NVH*. 1 (2), S. 137–144.
- [152] **Habetler, T. G. und Divan, D. M. (1991):** Acoustic noise reduction in sinusoidal PWM drives using a randomly modulated carrier. In: *IEEE Transactions on Power Electronics*. 6 (3), S. 356–363.
- [153] **Mokdad, B. und Henninger, C. (2017):** Irregularity instead of harmony – ways to improve torsional performance of a V20. In: *Proceedings of the Torsional Vibration Symposium 2017, 17.–19.05.2017, Salzburg, Österreich*.
- [154] **Towfighian, S., Behdinin, K., Papini, M., Saghiri, Z., Zalzal, P. und de Beer, J. (2008):** Finite element modelling of low-speed femur reaming using reamers with irregular tooth spacing. In: *J. Sound Vib.* 318 (2008), S. 868–883.
- [155] **DE102010018653A1:** „Schwingungsoptimiertes Kugellager“. Anmelde-tag: 28.04.2010.
- [156] **DE102014206982A1:** „Bauteil sowie Wälzlager“. Anmelde-tag: 11.04.2014.
- [157] **DE2844359A1:** „Lenkgetriebe mit variabler Übersetzung“. Anmelde-tag: 11.10.1978.
- [158] **EP47017B1:** „Variable ratio rack and pinion steering gear for vehicles“. Anmelde-tag: 01.09.1981.
- [159] **GB951562A:** „Improvements in or related to variable ratio steering gears“. Anmelde-tag: 30.08.1961.
- [160] **DE2604741A1:** „Zahnradgetriebe“. Anmelde-tag: 06.02.1976.
- [161] **EP11127B1:** „Unidirectional gear transmission“. Anmelde-tag: 08.10.1979.
- [162] **US4223528A:** „Unidirectional gear transmission“. Anmelde-tag: 31.10.1978.

- 
- [163] **US2399925A**: „Unidirectional gear drive“. Anmeldetag: 20.12.1943.
- [164] **DE69902990T2**: „Hemmung für Zeitmesser“. Anmeldetag: 31.03.1999.
- [165] **Ingeli, J. und Brumm, M. (2015)**: Untersuchung des Einflusses von asymmetrischen Zahn­lückengeometrien auf das Laufverhalten von Stirnrad­Verzahnungen. In: *Forschungsberichte der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V.* (Forschungsvorhaben Nr. 55, Heft Nr. 119).
- [166] **Fröh, A. und Otto, M. (2015)**: Normberechnung der Geometrie und Tragfähigkeit von asymmetrischen Verzahnungen. In: *Forschungsberichte der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V.* (Forschungsvorhaben Nr. 241 X, Heft Nr. 1142).
- [167] **Kapelevich, A. (2011)**: Designing asymmetric gears. In: *Gearsolutions*. Sept. 2011, S. 36–51.
- [168] **CN202048161U**: „Unequal tooth profile curved surface pressure angles on both sides of a tooth“. Anmeldetag: 07.03.2011.
- [169] **DE397039A**: „Zahnradgetriebe“. Anmeldetag: 23.06.1924.
- [170] **DE102015223120A1**: „Verzahnung mit chaotischen Eingriffen“. Anmeldetag: 23.11.2015.
- [171] **JPH09152014A**: „Helical gear“. Anmeldetag: 30.11.1995.
- [172] **US020080163502A1**: „Rotary position transducer“. Anmeldetag: 19.12.2007.
- [173] **DE102006034364A1**: „Kettenrad mit alternierenden Teilungsabständen“. Anmeldetag: 25.07.2006.
- [174] **DE102007032440A1**: „Kettentrieb“. Anmeldetag: 10.07.2007.
- [175] **DE102009017455A1**: „Zahnrad für eine Kette“. Anmeldetag: 07.04.2009.
- [176] **JP2005163806A**: „Roller chain transmission“. Anmeldetag: 28.11.2003.
- [177] **JP2009275788A**: „Sprocket for chain“. Anmeldetag: 14.05.2008.
- [178] **US020100137085A1**: „Timing chain drive system“. Anmeldetag: 11.11.2009.
- [179] **DE102015218544A1**: „Planetengetriebe mit Planetenrädern mit unterschiedlichen Schrägungswinkeln“. Anmeldetag: 28.09.2015.
- [180] **CN103727206A**: „Elliptical toothed-trace cylindrical gear and processing method thereof“. Anmeldetag: 20.01.2014.
- [181] **JP2006242325A**: „Gear and gearing device“. Anmeldetag: 04.03.2005.
- [182] **WO2012019897A2**: „Asymmetric toothing“. Anmeldetag: 22.07.2011.
- [183] **GB995092A**: „Toothed meshing gears“. Anmeldetag: 14.11.1961.
- [184] **DE102010038443A1**: „Asymmetrische Verzahnung“. Anmeldetag: 27.07.2010.
- [185] **DE3533743A1**: „Verzahn­te Maschinenelemente zur Übertragung von Drehbewegungen“. Anmeldetag: 21.09.1985.

- 
- [186] **Lange, B. und Neubauer, P. (23.01.2018)**: persönliches Gespräch am Fachgebiet SAM der TU Darmstadt über die inäquidistante Verzahnung und die Patentanmeldung DE3533743A1.
- [187] **Amtliches Kennzeichen der Patentanmeldung 10 2017 129 735.9**: „Verzahntes Maschinenelement und Zahnradgetriebe“. Anmeldetag: 13.12.2017.
- [188] **PCT-Aktenkennzeichen PCT/EP2018/083161**: „Verzahntes Maschinenelement und Zahnradgetriebe“. Anmeldetag: 30.11.2018.
- [189] **Fees, H. (2002)**: Computergestützte Auslegung von Zahnradgetrieben mit nicht konstanter Übersetzung. In: *Antriebstechnik*. 1/2002, S. 18–23.
- [190] **DIN 3990-3:1987-12**: Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern, Teil 3: Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit.
- [191] **Desch, N. (2018)**: Entwicklung einer Methode zur Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit inäquidistanter Verzahnungen. Bachelor-Thesis, TU Darmstadt, Fachgebiet SAM.
- [192] **KISSsoft AG. (2019)**: Zähnezahlen mit gemeinsamen Vielfachen. In: Onlinequelle, Zugriff am 14.05.2019. URL: <https://www.kisssoft.ch/Manual/de/10247.htm>.
- [193] **Ruge, J. und Wohlfahrt, H. (2013)**: Technologie der Werkstoffe – Herstellung, Verarbeitung, Einsatz. Springer Fachmedien, Wiesbaden, 9. Auflage.
- [194] **DIN 51354-1:1977-08**: Mechanische Prüfung von Schmierstoffen in der FZG-Zahnrad-Verspannungs-Prüfmaschine, Teil 1: Allgemeine Arbeitsgrundlagen.
- [195] **DIN 51354-2:1984-11**: FZG-Zahnrad-Verspannungs-Prüfmaschine, Teil 2: Prüfverfahren A/8,3/90 für Schmieröle.
- [196] **DIN ISO 14635-1:2006-05**: Zahnräder – FZG-Prüfverfahren, Teil 1: FZG-Prüfverfahren A/8,3/90 zur Bestimmung der relativen Fresstragfähigkeit von Schmierölen.
- [197] **Basedow, G. (1983)**: Prüfstände mit verspannten Getrieben. In: *Antriebstechnik*. 22 (10), S. 32–38.
- [198] **Hoffmann, K. (1987)**: Eine Einführung in die Technik des Messens mit Dehnungsmessstreifen. Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstadt.
- [199] **Ziegler, H. (1972)**: Messung der Verzahnungssteifigkeit schrägverzahnter Stirnräder. In: *Industrieanzeiger*. 16, S. 330–335.
- [200] **Kiekbusch, T., Sappok, D., Sauer, B. und Howard, I. (2011)**: Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two- and three-dimensional parametrical FE models. In: *J. Mech. E.* 57 (11), S. 810–818.
- [201] **Wang, J. und Howard, I. (2004)**: The torsional stiffness of involute spur gears. In: *J. Mech. Eng. Sc.* 218, S. 131–142.

- 
- [202] **Lee, C. H. (2009)**: Non-Linear contact analysis of meshing gears. Master-Thesis, California Polytechnic State University, San Luis Obispo.
- [203] **Liang, X., Zhang, H., Liu, L. und Zuo, M. J. (2016)**: The influence of tooth pitting on the mesh stiffness of a pair of external spur gears. In: *Mechanism and Machine Theory*. 106 (2016), S. 1–15.
- [204] **Liang, X., Zhang, H., Zuo, M. J. und Qin, Y. (2018)**: Three new models for evaluation of standard involute spur gear mesh stiffness. In: *Mechanical Systems and Signal Processing*. 101 (2018), S. 424–434.
- [205] **Hohrein, A. und Senf, M. (1977)**: Untersuchungen zur Last- und Spannungsverteilung an schrägen Stirnrädern. Dissertationsschrift, TU Dresden.
- [206] **Schmitt, F. (1975)**: Einspannungseinfluß bei Zug- und Biegestäben. In: *Konstruktion*. 27 (1975), S. 48–54.
- [207] **Löffler, D. (2017)**: Entwicklung einer Methode zur numerischen Bestimmung der Verzahnungssteifigkeit von Stirnradpaaren. Bachelor-Thesis, TU Darmstadt, Fachgebiet SAM.
- [208] **SCT Lubricants. (2018)**: Sicherheitsdatenblatt Mannol 80W-90 GL-4. In: Onlinequelle, Zugriff am 14.05.2019. URL: [https://mannol.de/imgbank/Image/public/images/bilder\\_chemie/msds/MN8107\\_Universal\\_Getriebeoel\\_DE.pdf](https://mannol.de/imgbank/Image/public/images/bilder_chemie/msds/MN8107_Universal_Getriebeoel_DE.pdf).
- [209] **Ghosh, S. S. und Chakraborty, G. (2015)**: Parametric instability of a multi-degree-of-freedom spur gear system with friction. In: *J. Sound Vib.* 354 (2015), S. 236–253.
- [210] **Kücükay, F. (1981)**: Über das dynamische Verhalten von einstufigen Zahnradgetrieben. Dissertationsschrift, TU München.
- [211] **Neubauer, P., Bös, J. und Melz, T. (2017)**: Torsional vibrations of inequidistant gears. In: *Proceedings of the Torsional Vibration Symposium 2017, 17.–19.05.2017, Salzburg, Österreich*.
- [212] **Bollinger, J. G. und Bosch, M. (1964)**: Ursachen und Auswirkungen dynamischer Zahnkräfte in Stirnradgetrieben. In: *Industrie-Anzeiger, Essen*. 86 (19), S. 319–326.
- [213] **Herbert, S. (2016)**: Numerische und experimentelle Untersuchung von Zahneingriffsschwingungen. Master-Thesis, TU Darmstadt, Fachgebiet SAM.
- [214] **Knieper, J. (2018)**: Entwicklung einer Methode zur mathematischen Abbildung der maschinenakustischen Eigenschaften eines Getriebepfufstandes. Master-Thesis, TU Darmstadt, Fachgebiet SAM.
- [215] **Drieselmann, C. (2017)**: Entwicklung einer Methode zur Geräuschbewertung von periodisch randomisierten Anregungssignalen. Master-Thesis, TU Darmstadt, Fachgebiet SAM.

- 
- [216] **Neubauer, P., Bös, J. und Melz, T. (2018):** Online listening test to evaluate the gear mesh noise of inequidistant gearings. In: *Tagungsband der 44. Jahrestagung für Akustik DAGA, 19.–22.03.2018, München*, S. 1065–1068.
- [217] **Bradley, R. A. und Terry, M. E. (1952):** Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons. In: *Biometrika*. 39 (3-4), S. 324–345.
- [218] **Rao, S. S. (2009):** Engineering Optimization – Theory and Practice. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 4. Auflage.
- [219] **Diefenbach, H. (2018):** Entwicklung einer Methode zur Optimierung einer inäquidistanten Verzahnung hinsichtlich des erzeugten Zahneingriffsgeräuschs. Master-Thesis, TU Darmstadt, Fachgebiet SAM.
- [220] **Sobol', I. M. (1967):** On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. In: *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 7 (4), S. 784–802.
- [221] **Neubauer, P., Bös, J. und Melz, T. (2018):** Evaluation of the noise reduction potential of an inequidistant gearing applied to an electric drive train. In: *Tagungsband des Aachener Akustik Kolloquiums 2018, 26.–28.11.2018, Aachen*, S. 71–81.
- [222] **Langer, P., Maeder, M., Guist, C., Krause, M. und Marburg, S. (2017):** More than six elements per wavelength: the practical use of structural finite element models and their accuracy in comparison with experimental results. In: *J. Comput. Acoust.* 25 (4), S. 1750025–1–1750025–23.