数学的活動のレイヤー論に基づく学習指導計画の開発

中田幸一 *・山脇雅也 **・小出智栄子 ***
鳥取大学附属中学校　数学科
*E-mail：nakatak@fuzoku.tottori-u.ac.jp
**E-mail：yamawaki_ms@fuzoku.tottori-u.ac.jp
***E-mail：koide_ci@fuzoku.tottori-u.ac.jp

Koichi Nakata, Masaya Yamawaki, and Chieko Koide (Tottori University Junior High School)：**Trials in development of a scheme of the educational guidance based on “the Layer model of mathematical activities”.**

要旨 —　これまで数多く用いられてきた「数学的活動」について，本校における視点で再考するとともに，新しく改訂される学習指導要領に示される指導内容についても検討する。その具体として教科書の構成を「数学的活動のレイヤー論」の視点で捉え直す。これまで一つの単元で構成されがちであったカリキュラム設計を，単元や領域の枠を超えて組み直すことで，課題に対し様々なアプローチを可能とし，より深化した数学的活動を目指すこととなる。本年度は模索しながらもその実践を繰り返すことで数学的活動をどのように捉え直すことができるかを考え，その成果と課題について考察した。

キーワード —　数学的活動，問題解決，カリキュラム，一次関数，重心

Abstract —　While reviewing various traditionally used “mathematical activities” from a viewpoint shared in our junior high school, we examined teaching contents exhibited by Education Ministry Guidelines which are supposed to be newly revised. As a result of the review, we propose a revision of composition of math textbooks in terms of the “Layer model of mathematical activities”. We also provide more elaborated mathematical activities that enable various approaches to a problem, by restructuring curriculum designs, that have been often structured by a single course unit, beyond the frames of course units or disciplines. In this paper we also discuss results and problems emerged from our trials and practices of these improved mathematical activities.

Key words —mathematical activities, problem solving, curriculum, linear function, application of educational materials, center of gravity

1. はじめに

平成 33 年度実施の学習指導要領（以下，次期学習指導要領と示す）において,「数学的に考える資質・能力を育成する観点から現実の世界と数学の世界における問題発見・解決の過程を学習過程に反映させることを意図として数学的活動の一層の充実を図った」と明記されている。しかし，数学的活動という用語は，広範囲かつ多様な文脈で使われており，使う人や場面によってその意「数学的活動」とは，学習者が問題の解決や数学的に探究する行為であり，よってそこには何らかの数学的価値が明確に負荷されている活動であるとする。これまでに，数学的活動の様相を明らかにしたり，分類したりする試みも多くなされてきた。このような取り組みの中で，数学的活動の動機や支えなどの内在的特徴が明らかにされている。しかしながら，領域を超えた見解や知識と生徒の学び方の繋がりなど理論的，包括的な議論については検討の余地があり，数学的活動によってカリキュラム全体を構成する提案や組織的・計画的な指導の提案が求められる。このことから，教育課程，あるいは教科書の順番や内容，単体の領域の中で数学的活動を規定してカリキュラムを設定する場合，あらかじめ定められた領域を超えた発想などが求められる。つまりは，特にそれ

自体においては完結していた単元を通して培う数学的活動も，単元間の結びつきや学習者の探求プログラムを表現したものとなり得ていないのではないかと考える。

そこで，本研究では学習指導要領の具体として教科書の構成を，「数学的活動のレイヤー論」の視点で捉え，カリキュラムを設計することにより，単に学習目標で規定されるカリキュラムを生徒の数学的知識の結びつきや探求過程についても規定することを提案する。これによって，特に単元を通して培う数学的活動の広がりを可能にできると考える。さらにはその達成は単一授業における数学的活動から単元，カリキュラム全体のつながりを生み出し，単元や領域の制限を超え，学習のみならずこれらの社会で利用される知識や力となり，数学的活動をさらに深化させることができると期待する。

2.　研究の目的と方法

本研究では ,7 月の研究大会に第１学年で「資料（データ）の活用」と第２学年「１次関数」の学習計画を示すことを中心に研究を進めることとした。

まず数学的レイヤー論を枠組みとして数学的活動で記述することによって，学習目標に不十分または欠落しているとみなされる数学的活動を明らかにした。今回はどちらの単元においても「単元を通して培う活動（MAU)」に課題を見つけることができた。したがって，単元の目標達成において期待される活動（MAU）を規定し，それに合わせて当該授業の問題解決において期待される数学的活動（MAL）を規定することによって，単元全体が一貫性を有し，整合性を保つように学習計画を具体的に示すことを目指すこととする。

3.　数学的活動のレイヤー論とは

数学的活動を３つのレイヤー（授業，単元，カリキュラム）に基づいて整理をしていく（図１）。各レイヤー上の数学的活動は異なる性質を有しており，そのレイヤーの性質上，自ずと包含関係を有する。数学的活動の諸相を，それぞれ授業，単元，カリキュラムというレイヤーで規定し，そのネットワークによってカリキュラムの実現可能性を示すことと妥当性を評価する方法である。より下位のレイヤーの数学的活動は，より上位の活動の実現可能性を保証するもの（上向きの矢印）でなければならない。その一方で，より上位のレイヤーは下位の数学的活動が妥当であるのか検証・評価する役割（下向きの矢印）を果たしている。

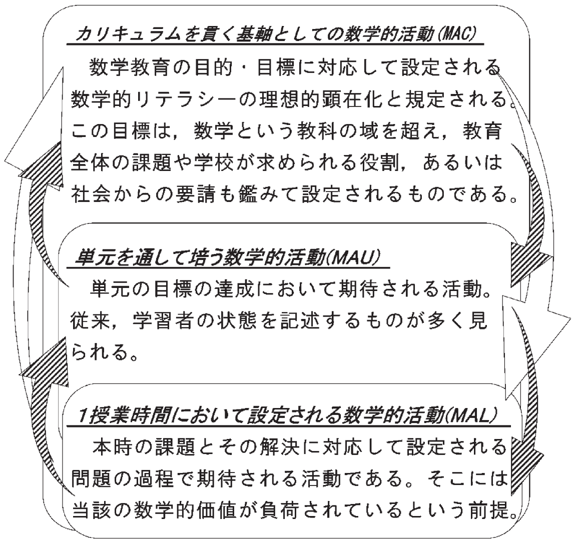


図１

4.1.　第２学年における授業設計

様々なメディアやテクノロジーが急速に発展していく世の中で，これから必要とされる能力や資質は，単一の領域を超え，どの知識，技能を使うかを場面から判断し，必要な情報を取り出すことが前提となると考えられる。さらにはそれらの様々要素をを組み合わせ，筋道立てて解決する力であることと考えられる。その視点でこれまでの指導や教科書の内容を振り返ると，例えば１次関数の学習内容では事象から関数関係を見いだしたり，式やグラフなどを活用し解決したりすることが主体となってきた。そこには図形領域の要素や論証部分と関連づけた学習内容が極端に少なく，指導にかける時間も限られているのではないだろうか。また，現状

では中学校卒業後，高等学校での指導内容では解析幾何学的な指導内容は数多くありながらも中学校ではそのような捉え方はあまりなされていない。だからこそ，一見図形の領域と１次関数は別の領域であるようだが，問題場面における図形を座標やグラフなどを活用して問題解決することで，新たな見方や発見ができ，直観的な見方をより精度を高め，正確な表現や処理などができるものとして考えられるのではないだろうか。図形における頂点が座標で位置を示すことや，辺が１次関数の式で表され頂点を直線の交点と見なすことは生徒にとって思考を深める重要な要素になり得るのではないだろうか。このような領域を超えた指導内容を複合的に組み合わせた活動を通して，１次関数から図形へ，図形から１次関数へとつながりを持って問題場面を捉え，より思考を広げ深めるような学習へとつなげられるよう位置づけを考えた。このように，これまでの固定化された単元構成にとらわれることなく，さまざまな単元・領域での関連を見いだし，授業設計を行うこととした。

4.2.　第２学年の取り組み

事例　座標を利用して三角形の重心を求める

関数的な見方や考え方には，事象に関係する変量の関数関係を見出し，その関係を用いて問題解決を図ろうとすることが含まれる。これは関数領域の中ではぐくまれる見方や考え方ではあるが，関数領域を超えすべての領域ではぐくむべき見方・考え方といえるのではないだろうか。また，グラフ上で変化の割合を考え，その後，グラフのかき方として傾きや切片などを用いて学習するなど，その指導の中でスキルの習得に追われることが多く，それぞれの持つ意味をじっくりと考え，その活用について深めることが不十分であるように思われる。つまり，１次関数ではないかという予想のもと考えを推し進めていくことになりがちであり，これだけでは十分な活動とはいえないかもしれない。

一方，図形の領域における問題場面では，具体的な操作ができることや視覚的に捉えられることから直観に頼りがちでも解決に導く方向付けがしやすいことも多くある。さらにその根拠を明らかにすることで筋道を立て，論理的に説明することで，より考えを明確に他へ伝えることとができるようになる。

図形で指導される論証が証明に代表される「論証指導」で終わるのではなく，その根本にある「論理的に思考したり，他者に説明したりする力」としてとらえれば，図形領域だけでなく，様々な領域でもその根本となる力を有効に活用し，さらに力を伸ばせるのではないかと考え，次のようなねらいで問題場面を設定した。

ねらい：三角形の重心を，座標平面上で表すことにより，一次関数を利用してその座標を求めることができる。また，各頂点と重心の座標との関係について探る

（1）提示された図形を座標平面上で捉える

三角形の重心の問題を提示するが，従来の指導においては，３年生の図形の学習で，三角形の３本の中線が１点で交わることを示すことが多い。「三角形の２つの中線の交点がＧと頂点Ａを結んだ半直線が辺BC上のどこを通るか」（図２）といった問いから中点連結定理を使ってのように四角形BPCGが平行四辺形（図３）であることを根拠に，三角の３本の中線が１点で交わることを明らかにしていく。さらにこの重心が中線のどの位置にあるかを調べ，２：１に分ける点であることを導くことになる。

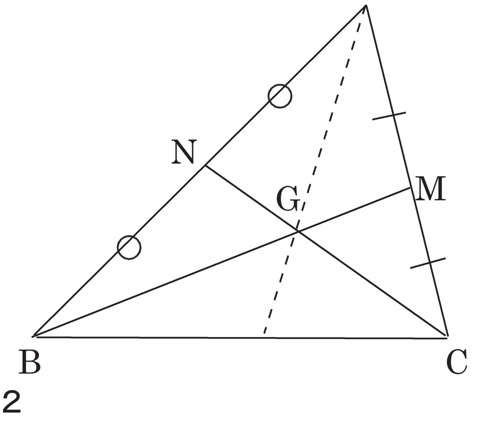


図２

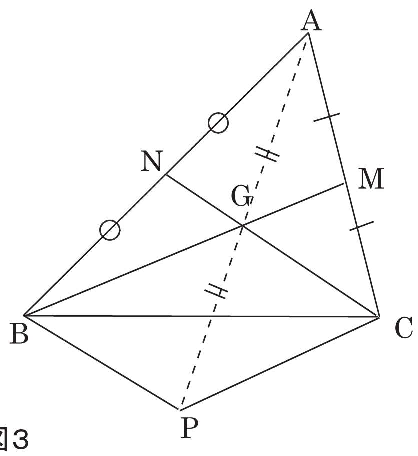


図３

この証明でも十分ではあるが，三角形を座標平面上で表す（図４）ことにより，その３つの頂点と重心の位置が決められることになる。そうすることにより，１点で交わることを，３本の中線を各頂点と中点との２点を結ぶ直線と考え，その３直線が１点で交わることで証明できることになる。その証明の根拠となるが一次関数であり，３本の直線の交点を示すことが可能となる。授業では，前時までにも同様に図形を座標平面上に表すことで問題を解決することを数時間行っており，その経験をもとに三角形を座標平面上で表すといった流れにつなげている。

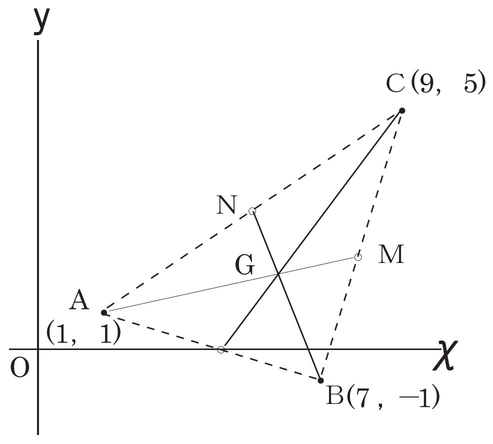


図４

（2）座標平面上で考えることで見つかる重心の新たな捉え方

座標平面上に表わすことにより，３本の中線は一次関数として表すことができ，その交点を求めることで正確に重心の座標を知ることができる。実際の生徒の活動としては，３本の中線を一次関数で表すことに多少の困難があり，多くの時間を要することとなった。ただ，その中でも計算によって正確に重心の座標が求められるといった考え方は納得しやすいようで，それぞれが効率よく計算することができた。また，求めた重心は単に計算で求めた３直線の交点といった結果を表すだけでなく，三角形の３つの頂点との関係を探るよう助言することで，重心を新たな捉え方ができるように方向づけた。

（3）重心の新たな捉え方をもとに，図形の見方を広げる

重心の座標と三角形の３つの頂点の座標を比較する活動を通して，大半の生徒は重心が３つの頂点の平均であることに気づいた。授業ではこの交点を単に「三角形の重心」と定義するのではなく，３つの頂点との関係性を見いだすようにした。この場合，座標で表したことのより交点（重心）は３つの頂点の座標の平均として考えることができる。そこからさらに図形三角形の３点から２点に置き換えれば２点間の中点は，２点の平均として考えることができる。そして４点ならば四角形の４頂点の平均が交点（重心）となるなど，考えを広げるようにした。この考え方も，座標との比較から多くの生徒は気づくことができ，三角形だけにとどまることなく他の図形への発展につなげることができた。

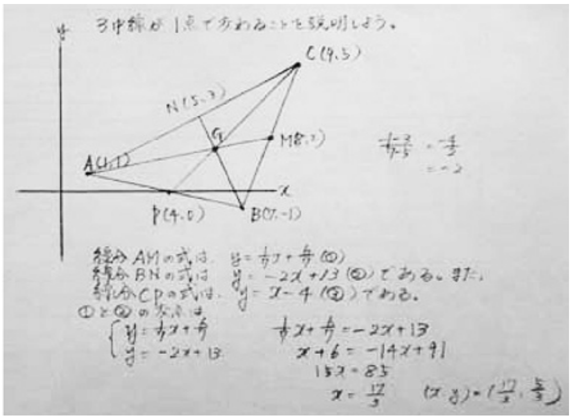


図５　生徒のノートより 三角形の重心を座標平面上に表す

つまり，単に重心を「三角形の重心」とか，質量的なバランスを取る点といった捉え方とは違

い，それぞれの図形における各頂点の平均としての考え方を広げていくことになり，このような関連付けにより，図形を座標やグラフなどを活用して問題解決することで，直観的な見方をより精度を高め，正確な表現や処理などができ，さらに新たな見方や発見ができるようになった。

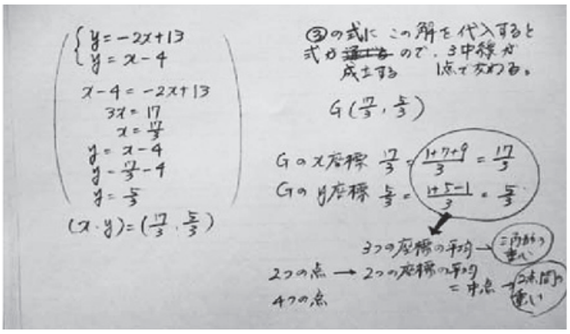


図６　生徒のノートより 一次関数で重心を求める頂点と重心の座標の関連を探る

この学習をもとにし，座標平面上で図形を表すことで，これまでの図形による説明だけでなく，頂点が座標平面上で点となることで位置を示すことや，辺や線分を直線の式で表すことでその傾き具合や交点など，より位置関係を深く考察できる場面がいくつか現れるようになった。

5．第２学年の実践の考察

本時はこの学習の位置づけにおいて３時間目となる授業であるが，１時間目は直線の傾きを用いて説明する内容である。図形を組み替えることで生じたすき間の説明を座標平面上に図形をおくことで，直線の式によりその説明を行った。2時間目は長方形と円を組み合わせた図形の面積の二等分する直線の式をどのように考えるかである。図形の対称性を根拠に，直線の通る２点をどのように決定づけるかによって学習を深めてきた。

このような学習を通して，単に図形の問題を図形として捉えて終わるのではなく，座標平面上で表し，解決することでよりさらに発展・深化させようとする生徒が多く表れた。一つの単元でくくられた学習内容としての枠を超え，既習の学習内容に結びつけることでも解決でき，さらには広がりを感じることができているようである。ただ，実際の授業では三角形を座標平面上で表すといった発想が一部の生徒から出たに過ぎず，その必然性をどうやって感じさせ発想させるかが課題である。このような他の領域と関連させた学習内容を繰り返すことが既習の学習内容「活用する」ことにつながっていくのではないだろうか。

実際，他の場面において図形の角度を求める問題では，自ら連立方程式を立て解決しようとするなど（実際には解けなかったこともたくさんあったが），方程式にも考えを広げ（**図７**）生徒も現れるようになった。

もちろん，このような思考を行うには基本的な技能の習熟が必要でもあり，また思考の時間をより多く確保し，さらにはそれを共有する場面が多くあることが望ましいと感じる。

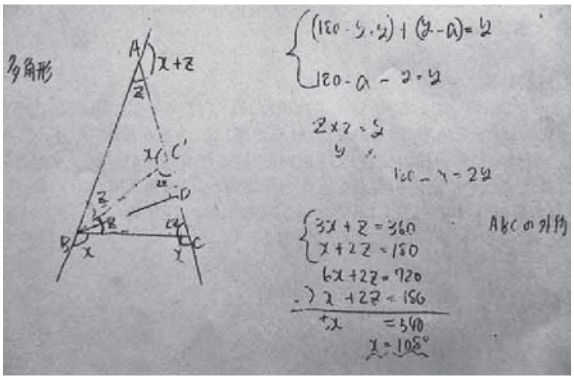


図７　生徒のノートより ３元１次方程式で図形問題を解く

１次関数の単元を中心に，連立方程式や図形論証といった他の領域との関連を深めていくことを中心に研究を進めていったが，３つのレイヤー（授業，単元，カリキュラム）をより明確にすることは今後の課題であると感じる。実践を通しながら，生徒の取り組み方や思考の変化をよく把握しながら，より深めていければと思う。本校が過去数年間取り組んできた「関数と方程式」のように複数の単元どうしのつながりを新たに構成し，グラフなど関数を用いて解決するなど，これまでの単元のくくりを超えた発想，活用がさらに表れるように問題設定や活動内容の見直しが必要であり，今後もさらに実践を重ね検討していくようにしていきたい。

資料1
（公開授業Ⅰ）

第2学年　数学科学習指導案

1. 単元名　一次関数　図形から学ぶ～多様な考えとその広がりを求めて～

2. 研究の背景とこれまでの研究

本校では，一昨年度から「自立し、つながり、探求し、創造する力の育成」を研究主題として取り組んでおり，本年度はその3年目となる。主題のような力を育成するためにも必要不可欠なものは，やはり柔軟な思考であり，課題に対して多面的に考えることや発想すること，そして適切な方法で処理していくことである。この根幹となるのは，論理的思考力であるが，この力こそが数学を学ぶことを通して身につけさせたい力であり，課題解決への大きな鍵となるのである。課題に直面したとき，分類や，比較したり，関連付けたりすることを日頃から積み重ねる中で，次への思考となるようさらに類推し，構想することでより主題のような力を伸ばしたいと考えている。

生徒は，課題から共通点や相違点を見つけるといった「比較する」ことや結論を予想する「類推する」ことにより考え方を深め活動できるようになってきた。しかし，「構想した」ことを根拠を明らかにすることで筋道立てて他者へ説明することがまだ不十分な場面も多く見られる。他者に対し，しっかりとした根拠で説明をすることや，それを軸としてお互いの意見を深めあうことで，さらなる高まりを目指すことが必要である。

3. 授業構成

(1) 教材に対する反省と新しい提案

関数的な見方や考え方には，事象に関係する変量の関数関係を見出し，その関係を用いて問題解決を図ろうとすることが含まれる。これは関数領域の中ではぐくまれる見方や考え方ではあるが，関数領域を超えすべての領域ではぐくむべき見方・考え方といえるのではないだろうか。また，関数では図，表，式，グラフなど多様な表現方法を用いることができ，それによって事象の変化の様子をイメージできることものぞまれる。逆に事象から表，式，グラフををイメージすることも大切にすべきである。

一次関数の指導においては，従来から傾きや切片の意味やその求め方，グラフで表された直線の式を求めることなど数多くの形式的に処理する場面が多くなり，生徒にとっては苦手意識が強くなる傾向があると思われる。

啓林館「未来へひろがる2」では，まずは対応表を用いて変化の割合を考え，その後，グラフのかき方として傾きや切片などを用いて学習し，その逆の操作としてグラフ上の座標から一次関数の式を求めることが指導の中心となっている。その指導の中で生徒はどうしてもスキルの習得に追われることが多く，それぞれの持つ意味をじっくりと考え，その活用について深めることが不十分であるように思われる。

これまでも，この単元において問題解決学習に取り組んできたが，決まった領域の中で知識を構成し技能を高め，問題解決する力がつくよう指導するにとどまっていた。そうする中で，生徒は予め一次関数として設定された場面の中で問題解決することにより，一次関数ではないかという予想のもと考えを推し進めていくことになるが，これだけでは十分な活動とはいえないかもしれない。

一方，図形の領域における問題場面では，具体的な操作ができることや視覚的に捉えられることから直観に頼りがちでも解決に導く方向付けがしやすいことも多くある。さらにその根拠を明らかにすることで筋道を立て，論理的に説明することで，より考えを明確に他へ伝えることとができるようになる。

図形で指導される論証が証明に代表される「論証指導」で終わるのではなく，その根本にある「論理的に思考し

たり，他者に説明したりする力」としてとらえれば、図形領域だけでなく，様々な領域でもその根本となる力を有効に活用し，さらに力を伸ばせるのではないかと考える。

そこで，一次関数は論証するうえで，必要な技能でもあり，考え方にもなりうるのではないだろうか。図形を座標平面上に表わすことで，図形の性質だけでは見つけられなかった新たな性質に気づき，その性質を明らかにすることもできる。そして，座標であり，一次関数の式がその証明として活用されるのである。さらに言えば一次関数で考えを進めていき，解決することそのものが論証の1つにもなっていくわけである。

これからの社会で求められるのは，領域を超え，どの知識，技能を使うかを場面から判断し，必要な情報を取り出すことで，様々なものを組み合わせ，筋道立てて解決する力であることと考えられる。その視点でこれまでの指導や教科書の内容を振り返ると，一次関数の学習内容における図形領域の要素や論証部分と関連づけた学習内容が極端に少なく，指導にかける時間も限られているのではないだろうか。また，現状では中学校卒業後，高等学校での指導内容では解析幾何学的な指導内容は数多くありながらも中学校ではそのような捉え方はあまりなされていない。だからこそ，一見図形の領域と一次関数は別の領域であるようだが，問題場面における図形を座標やグラフなどを活用して問題解決することで，新たな見方や発見ができ，直観的な見方をより精度を高め，正確な表現や処理などができるものとして考えられるのではないだろうか。図形における頂点が座標で位置を示すことや，辺が一次関数の式で表され頂点を直線の交点と見なすことは生徒にとって思考を深める重要な要素になり得るのではないだろうか。このような領域を超えた指導内容を複合的に組み合わせた活動を通して，一次関数から図形へ，図形から一次関数へとつながりを持って問題場面を捉え，より思考を広げ深めるような学習へとつなげられるよう位置づけを考えた。

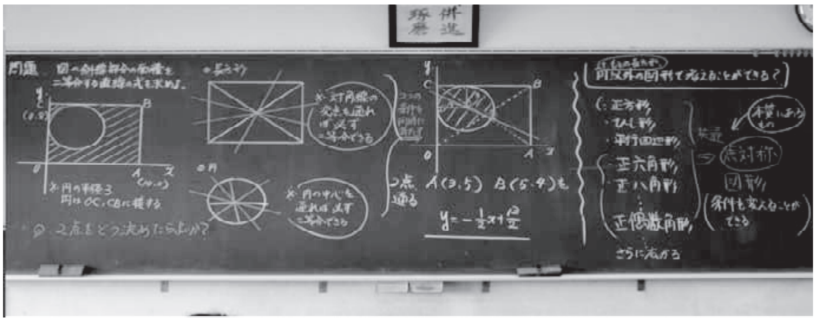
(2) 子どもたちの学びの実態と期待する学び方

生徒は1年の平面図形の学習において，作図することを中心に図形の性質を学んできている。そこでは作図の方法を単に結果として技術の習得に終わるのではなく，作図の方法そのものを根拠を示すものとして捉えるようにしている。作図方法を論証の一部として捉え、その思考過程から発見される新たな性質を分類し説明してきている。その中で「試行錯誤」の段階での直観的な部分をもとに，既習事項を関連づけて考え，問題を解決する「論理的思考」の部分を大切にしている。また，「新たな場面への活用」として，考察過程で発見した新たな性質や規則性を，他の場面で活用するようにしてきている。

この学習をもとにし，座標平面上で図形を表すことで，これまでの図形による説明だけでなく、頂点が座標平面上で点となることで位置を示すことや，辺や線分を直線の式で表すことでその傾き具合や交点など，より位置関係を深く考察できるようになると考える。

本時はこの学習の位置づけにおいて3時間目となる授業であるが，1時間目は直線の傾きを用いて説明する内容である。図形を組み替えることで生じたすき間の説明を座標平面上に図形をおくことで，直線の式によりその説明を行った。

2時間目は長方形と円を組み合わせた図形の面積の二等分する直線の式をどのように考えるかである。図形の対称性を根拠に，直線の通る2点をどのように決定づけるかによって学習を深めてきた。

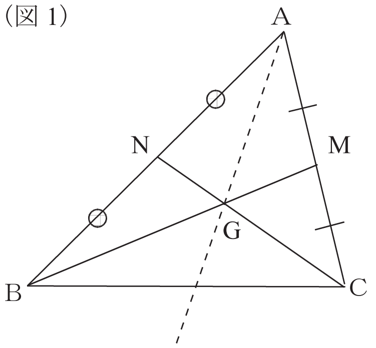


2時間目実践の板書　図形の性質の利用

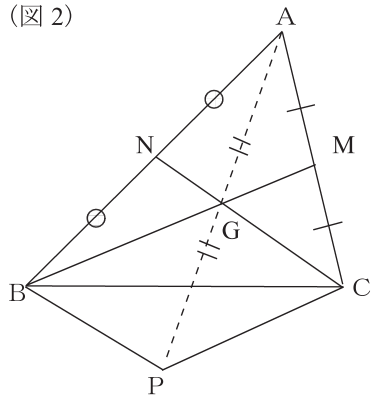
(3) 本時の学習に向けた教材研究

本時では三角形の重心を扱うわけであるが，従来の指導においては，3年生の図形の学習で指導されることが中心であると思われる。三角形の3本の中線が1点で交わることを啓林館「未来へひろがる3」では(図1)のように，「三角形の2つの中線の交点がGと頂点Aを結んだ半直線が辺BC上のどこを通るか」といった問題で提示し，これを中点連結定理を使って(図2)のように四角形BPCGが平行四辺形であることを根拠に，三角形の 3 本の中線が1点で交わることを明らかにしていく。さらにこの重心が中線のどの位置にあるかを調べ，2:1に分ける点であることを導くことになる。

（図 1）

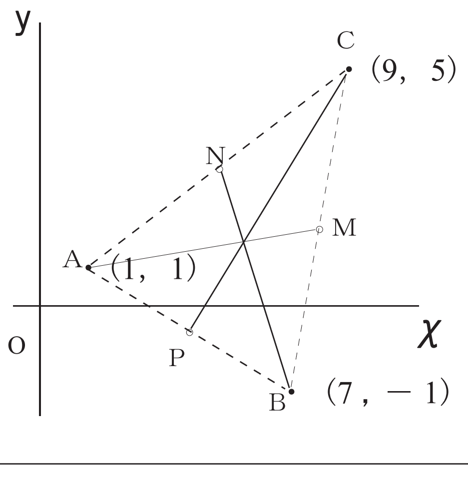


（図 2）



この証明でも十分に三角形の重心について深めることができているが，本時においては三角形を座標平面上で表すことにより，その3つの頂点と重心の位置が決められる(図3)ことになる。そうすることにより，1点で交わることを，3本の中線を各頂点と中点との2点を結ぶ直線と考え，その3直線が1点で交わることで証明できることになる。その証明の根拠となるが一次関数であり，3本の直線の交点を示すことが可能となる。

（図 3）



○一次関数による３直線が１点で交わること（論証）

【一次関数による論証１】

３つの中線の式から２つを組み合わせた連立方程式を２通り解き，その解が一致することで１点で交わることを説明する。

中線ＡＭの式　$y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$　…①

中線ＢＮの式　$y = -2x + 13$　…②

中線ＣＰの式　$y = x - 4$　…③

①と②を組み合わせた連立方程式

$y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$

$y = -2x + 13$

解$(x, y) = (\frac{17}{3}, \frac{5}{3})$…㋐

②と③を組み合わせた連立方程式

$y = -2x + 13$

$y = x - 4$

解$(x, y) = (\frac{17}{3}, \frac{5}{3})$…㋑

㋐，㋑が一致することより３本の中線は１点で交わるといえる。

【一次関数による論証２】

３つの中線の式のうち，２つを連立方程式として解き，その解を残りの１つの中線の式に代入し，成り立つことで説明する。

$y = -2x + 13$

$y = x - 4$

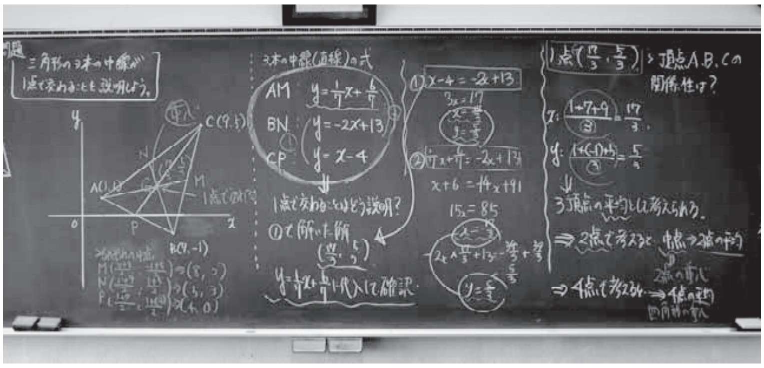
解$(x, y) = (\frac{17}{3}, \frac{5}{3})$

この解を残りの式　$y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$　に代入して成り立つことを確認する。

$x = \frac{17}{3}$を代入して，

$y = \frac{1}{7} \times \frac{17}{3} + \frac{6}{7} = \frac{35}{21} = \frac{5}{3}$

２中線の交点を他の中線が通ることですべての中線は１点で交わるといえる。



○他クラスでの実践･板書

このように，三角形の3中線が1点で交わることを一次関数を利用して明らかにできるわけであるが，ここではさらに，その交点を単に「三角形の重心」と定義するのではなく，3つの頂点との関係性を見いだすようにする。この場合，座標で表したことのより交点（重心）は3つの頂点の座標の平均として考えることができる。そこからさらに図形を2点に置き換えれば2点間の中点は，2点の平均として考えることができる。そして4点ならば四角形の4頂点の平均が交点（重心）となるなど，考えを広げるようにする。単に重心を「三角形の重心」とか，質量的なバランスを取る点といった捉え方とは違い，それぞれの図形における各頂点の平均としての考え方を広げていくことになる。

4. 単元目標

◎　身のまわりには一次関数とみなせる事象が多くあることに気づき，その事象について調べることを通して一次関数関数について理解する。また，そこから関数関係を見出し考察できるようにする。

(1) 具体的な事象を，2つの数量を取り出すことで，その変化の様子や対応から一次関数の関係を見出し，表現考察できるようにする。

ア　事象の中から2つの数量関係に関心を持ち，その関係を調べることを通して，その中には一次関数としてとらえられるものがあることを知る。

イ　一次関数について，表やグラフについての特徴をとらえ，その関係を説明できる。

ウ　いろいろな事象の中には，関数関係があることを理解し，その中から1次関数とみなすことで，変化の様子や対応の様子について調べ，予測することができる。

(2)　二元一次方程式および連立方程式について理解し，グラフと関連づけて考察することができる。

ア　二元一次方程式と一次関数を関連づけてとらえ，その式やグラフについて理解する。

イ　二元一次方程式のグラフから連立方程式の解の意味を理解し，2直線の交点の座標からよみとったり，座標平面上の2直線の交点の座標を連立方程式を解いて求めることができる。

(3)　図形の性質を座標平面上で捉え，一次関数での考え方が論証であるとし，その性質を明らかにする。

ア　図形を座標平面上で表すことにより，条件を満たす点を一次関数を利用して求めることができる。

イ　図形の性質を座標平面上考えることで，点や直線の位置関係など，新たな捉え方ができる。

ウ　一次関数での説明が論証することと捉え，図形の性質を根拠を持ち説明する。

5. 学習計画（総時間数　18時間）

第1次　1次関数とグラフ　　（10時間）

　第1時　1次関数

　第2時　変化の割合

　第3時　1次関数のグラフ

　第4時　1次関数の式を求めること(本時　3/4)　図形の性質を一次関数を用いて論証する

第2次　1次関数と方程式　　（4時間）

第3次　いろいろな事象と1次関数　　（4時間）

6. 本時の学習

(1)　本時目標

・三角形の3中線が1点で交わることを1次関数を論証の根拠として説明する。

・三角形の重心を3頂点の平均と定義づけることで，他の図形へその定義の考えを広げ考察する。

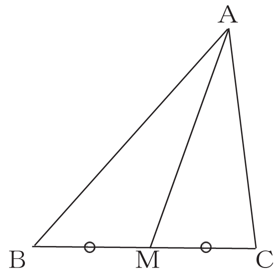
(2)期待する数学的活動(その価値付け)

数学的活動A　中線を2点を通る直線として考え，その式を求めることができる。
数学的活動B　3つの中線が1点で交わることを1次関数の式を利用して説明する。(論証)
数学的活動C　3つの中線の交点と3頂点との関係性について考える。(定義づけ)
数学的活動N　3頂点平均が三角形の重心であることより，2点間の中点など他の図形にその考えを広げ，深める。(さらなる広がりへ)

(3)　本時の展開

問題提示前の準備段階

中線の確認
○右図の３点Ａ，Ｂ，Ｃを結んでできる三角形ＡＢＣにおいて，点Ａと２点Ｂ，Ｃの中点Ｍとを結ぶ線分のことを中線という。



※実際に中点Ｍを求め点Ａと結ぶ線分(直線)を引いて確認する。

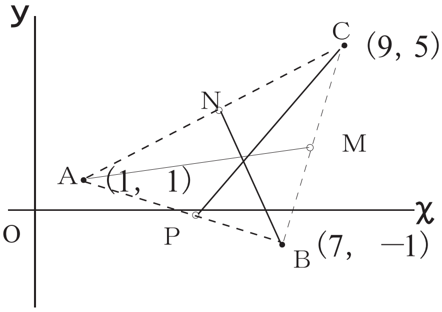
自分で３点を決めて，実際に３本の中線を引いてみよう

※様々な三角形で図をかいても，ほぼ１点で交わることを確認する。

【問題の提示】

問題　図の三角形で，3本の中線が1点で交わることを説明しよう。

Ａ，Ｂ，Ｃの座標を決めた三角形で考える。　(図１)
※実際に中線を３本引き，その図をもとにして見通しを立てる。



３つの中点の座標

$$M\left(\frac{7+9}{2},\ \frac{-1+5}{2}\right)=(8,\ 2)$$

$$N\left(\frac{1+9}{2},\ \frac{1+5}{2}\right)=(5,\ 3)$$

$$P\left(\frac{1+7}{2},\ \frac{1+(-1)}{2}\right)=(4,\ 0)$$

支１　２点を通ることから直線の式を求められないか？

【自力解決A】座標を利用して，中線の式を求めることができる。

通る２点が分かることより，中線(直線)の式をつくり，その中線の交点を求めることができる。

中線ＡＭの式　$y=\frac{1}{7}\chi+\frac{6}{7}$
中線ＢＮの式　$y=-2\chi+13$
中線ＣＰの式　$y=\chi-4$

※この段階での式を求めることは重要な要素なので，しっかりと確認する。

支１ 中線の式を利用して，交点を求めてよう。

支２ １点で交わるとは，連立方程式の解がどうなればよいだろうか？

【自力解決B】3本の中線の交点は，3つの中線の式の連立方程式としてとらえることで，その解であることを利用して求める。

【自力解決B1】

３つの中線の式から２つを組み合わせた連立方程式を２通り解き，その解が一致することで１点で交わることを説明する。

中線ＡＭの式　$y=\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$　…①

中線ＢＮの式　$y=-2x+13$　…②

中線ＣＰの式　$y=x-4$　…③

①と②を組み合わせた連立方程式

$y=\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$

$y=-2x+13$

解 $(x, y)=(\frac{17}{3}, \frac{5}{3})$ …㋐

②と③を組み合わせた連立方程式

$y=-2x+13$

$y=x-4$

解 $(x, y)=(\frac{17}{3}, \frac{5}{3})$ …㋑

㋐,㋑が一致することより３本の中線は１点で交わるといえる。

【自力解決B2】

３つの中線の式のうち，２つを連立方程式として解き，その解を残りの１つの中線の式に代入し,成り立つことで説明する。

$y=-2x+13$

$y=x-4$

解 $(x, y)=(\frac{17}{3}, \frac{5}{3})$

この解を残りの式　$y=\frac{1}{7}x+\frac{6}{7}$ に代入して成り立つことを確認する。

$x=\frac{17}{3}$ を代入して，

$y=\frac{1}{7}\times\frac{17}{3}+\frac{6}{7}=\frac{35}{21}=\frac{5}{3}$

２中線の交点を他の中線が通ることですべての中線は１点で交わるといえる。

支１ 中線の交点と三角形の３つの頂点にどんな関係がするだろう？

支１ ３点を，２点や４点に変えるとどうなるだろう？

【自力解決C】課題を通して，新たな課題との出会いと解決

３本の中線（直線）の交点が１点で交わることをもとに，その座標から新たな性質を見つけ出す。交点の座標と三角形の３つの頂点A, B, Cの座標との関係を探る。

Ｇの座標　$(x, y)=(\frac{17}{3}, \frac{5}{3})$

x座標 $=\frac{1+7+9}{3}$

y座標 $=\frac{1+(-1)+5}{3}$　と表すことができる。

【自力解決N】交点の座標が3点Ａ,Ｂ,Ｃの座標の平均であることを説明し，明らかにする。

○さらに，３点の場合だけでなく，２点の場合や４点の場合についても考え方を広げていく。

Ｇのx座標＝（Ａのx座標＋Ｂのx座標＋Ｃのx座標）÷３
Ｇのy座標＝（Ａのy座標＋Ｂのy座標＋Ｃのy座標）÷３

→　Ｇの座標は三角形の３つの頂点Ａ，Ｂ，Ｃの座標の平均として捉えることができる。

→　２点で考えると，２点の平均が中点であり，その点が２点の重心として考えることができる。

→　４点で考えると，四角形の重心は４つの頂点の平均として求められるのではないかと推測する。

【練り上げ１】
○活動Ａの考えを板書し，その図をもとに活動Ｂの式で考え方を深める。

中線ＡＭの式　$y=\frac{1}{7}\chi+\frac{6}{7}$　…①
中線ＢＮの式　$y=-2\chi+13$　…②
中線ＣＰの式　$y=\chi-4$　…③

（考え方1）
活動 B1 の説明をさせる。
中線ＡＭの式　$y=\frac{1}{7}\chi+\frac{6}{7}$　…①
中線ＢＮの式　$y=-2\chi+13$　…②
中線ＣＰの式　$y=\chi-4$　…③

①と②を組み合わせた連立方程式
$y=\frac{1}{7}\chi+\frac{6}{7}$
$y=-2\chi+13$
解$(\chi, y)=(\frac{17}{3}, -\frac{5}{3})$…㋐
②と③を組み合わせた連立方程式
$y=-2\chi+13$
$y=\chi-4$
解$(\chi, y)=(\frac{17}{3}, -\frac{5}{3})$…㋑
㋐,㋑が一致することより 3 本の中線は 1 点で交わるといえる。
※上記以外の組み合わせについても同様のことがいえることを確認する。

（考え方2）
活動 B2 の説明をさせ，B1 の考え方と比較し，深める。
$y=-2\chi+13$
$y=\chi-4$

解$(\chi, y)=(\frac{17}{3}, -\frac{5}{3})$
この解を残りの式　$y=\frac{1}{7}\chi+\frac{6}{7}$ に
代入して成り立つことを確認する。

$\chi=\frac{17}{3}$を代入して，

$y=\frac{1}{7}\times\frac{17}{3}+\frac{6}{7}=\frac{35}{21}=\frac{5}{3}$

2 中線の交点を他の中線が通ることですべての中線は 1 点で交わるといえる。

※どちらの考え方においても，1 点で交わることを 1 次関数の式を利用することで明らかにできたことを確認し，その考え方そのものが論証をしていることとして感得させたい。
○この3つの中線の交点のことを重心であることを伝え，活動Cの考えをもとに深めていく。

この重心の座標は三角形の3つの頂点A,B,Cの座標とどんな関係があるだろうか？

Ｇの座標　$(\chi, y)=(\frac{17}{3}, \frac{5}{3})$ は

χ座標 $=\frac{1+7+9}{3}$　　y座標 $=\frac{1+(-1)+5}{3}$　と考えることができる。

Ｇのχ座標＝（Ａのχ座標＋Ｂのχ座標＋Ｃのχ座標）÷3
Ｇのy座標＝（Ａのy座標＋Ｂのy座標＋Ｃのy座標）÷3
と表される。

このことより3点の平均が三角形の重心として捉えることができる。
※今回は，一般化することに対して詳しくは説明することはせず，具体的な例のみで考え方が広がるようにする。
※ 2 点の場合について考える。
→ 2 点の平均は中点なので，中点は線分の重心として考えることができる。
4 点の場合について考える。
→ 4 点の平均が四角形の重心として考えられる。※ 5 点，6 点，…ｎ点と考えを広げ一般化する。
※図形の性質を，一次関数によって説明**（論証）**することで，三角形の 3 点の平均がその図形の重心であると考えられる。**（定義）**さらに他の図形の場合（線分の中点など）考えを深める。**（次への広がり）**