数学教育学における協同的問題解決の学習（第２次研究）
－協同的な学びの「対話の様相」に焦点を当てて－

矢部敏昭＊・西山章＊＊・藤田綾＊＊＊・河上英仁＊＊＊＊

A Research on Cooperative Problem Solving Learning in Mathematics Education
: Aspects of Analysis about Representation in Constructive interaction

YABE Toshiaki[*], NISHIYAMA Akira[**], FUJITA Aya[***], KAWAKAMI Hidehito[****]

キーワード　：　協同的問題解決, 学びが起こる学習の状況, 建設的相互作用（対話）の様相
Key Words　:　Cooperative Problem Solving, Situation of Learning Conditions, Representation of Constructive interaction

Ⅰ．協同的問題解決の学習

１．問題解決を通した授業　-Via Problem Solving-

現在，算数・数学教育において広く行われている学習様式は問題解決であり，この問題解決の学習様式は，1980 年代に米国より提案[1)]され，その後我が国をはじめ，世界的に広まっているものである。この問題解決の学習指導の目的は，基礎的・基本的な内容の獲得とその学習過程で特に個々の学習者にもたらされる知る方法(a way of knowing)，考える方法(a way of thinking)のそれ自体を学び・身に付け得る学習方法として, また, これらの基礎的・基本的な内容が応用される場を学習者に対して積極的に与え, そこで駆使される数学的な表現や手法の用いられるよさを学習者に感得させる（鑑賞する）ことであった。つまり, 算数・数学の学習内容の獲得に増して, 良き問題解決者の育成が最終的な目的であった[2)～3)]のである。

言い換えれば, 学校で展開される問題解決の学習は, 新しい学習内容の理解に向けて既習の内容である知識・技能を駆使して解決の筋道を立て, その遂行過程では問題自体の把握の仕方, 解決に向けた見通しの立て方，その見通しに即して解決を遂行する仕方等，知り方それ自体や考え方それ自体を学ぶにふさわしい学習様式であると言える。なぜならば，問題解決の学習過程は各過程において物事の知り方それ自体を学ぶ機会となり，物事の見方や考え方それ自体が算数・数学的活動を伴う問題解決行動の中で経験として積み重ねられ学習者に身に付け得ると考えるものだからである。しかし，ここで言うところの問題解決の各学習過程は，実際の学習において形式的に位置づけられるものではなく，問題解決者の解決行動を指導の立場から考察するとき分析的に分類しているものであり, 実際の学習者の問題解決行動は一連の算数・数学的活動として連続していることは留意したい。

したがって，問題解決の学習は，問題解決の学習過程を通して，物事の知り方それ自体を知り，物事の見方や考え方それ自体を身に付け，学習内容のよりよい理解が図られるとともに, 良き問題

＊鳥取大学地域学部地域教育学科　＊＊鳥取大学大学院地域学研究科教育専攻２年生　＊＊＊鳥取大学大学院地域学研究科教育専攻２年生，＊＊＊＊鳥取大学大学院地域学研究科教育専攻１年生

解決者の育成がその目的なのである。ここに，問題解決の学習を通したより良き問題解決者としての将来に生きる人間の育成を目指す学習様式であると言われる所以である。

２．協同的な学びが起こる「学習の状況」に関して
－学習の状況が意味するもの－

前論文（2013. 矢部）の一次研究において提出した「協同的な学びが起こる学習の状況」[4)] は，集団を基本とした学びにおいて，個々の学習者が他者を必要とする状況や他者との対話を望む状況として，また，個々の学習者内に生起する良き問題解決者としての心的状況や学習態度等から検討を加えるとともに，全国 25 校の実践協力校による実践から導出したものである。これら“５つの学習の状況”は，ただ単にその状況の場がそのまま協同的な学びとしての対話や学び合いの場であることに止まらず，“人はいかに学ぶのか”をここで改めて問い続けるためである。

例えば，「1）個々の学習者が解決の行き詰まりや，解決の見通しが立たない状況」は，学習の成立において不可欠であり，この状況に直面した学習者のみならず，学習に参加しているすべての学習者にとって意味ある状況である。なぜならば，この状況に直面した学習者にとっては問題の状況から自らの課題を見出す場となり，運よく解決の見通しが立てられた学習者にとってはその見通しがいかに立てられ得たか，その見通しは最善のものであるかを検討する場となり得るからである。「2）学習者自身が得た答えや解決の仕方に，不安や確信が持てない状況」もまた，学習の成立において不可欠である。なぜならば，自ら得た答えや解決の仕方に不安や確信が持てない学習者にとっては，その不安を解消すべく，あるいは得た答えに確信を得るために次なる行動に移すことが，良き問題解決者の行動としてふさわしいと言えるからである。解決に用いた手続きを振り返ることなく，また，その答えの正しさを検証することなく確信を抱くようでは良き問題解決者とは呼べないからである。

言い換えれば，今日の一斉的な学習において，個々の学習者の解決の行き詰まりや見通しの立たない状況に対する対応が，指導の立場にある教師のみに依存しているところに改善の視点を感じるとともに，学習の成果としての評価の対象が学習の結果としての産物（知識や理解）に向けられている点も改善すべき問題と思われる。評価の対象が，学習の成果に関して学習の過程に向けられるならば，その具体的な評価は個々の学習者がいかに解決の行き詰まりに対して乗り越えるすべを獲得しつつあるか，解決の見通しはどのような思考と行為によって立てられるようになるかを学びつつ，どの程度の見通しが個々の学習者に対して徐々に立てられつつあるか等，学習者の現在の学びの姿が評価の対象になるものと考えるからである。

また，「3）個々の学習者の解決の仕方や答えが，他者のそれと異なる状況」や，「4）学習者自身が答えの正しさを表現したり，解決の根拠を探ったりする状況」は，良き問題解決者の行動を促す場として良い機会となり得る。なぜならば，算数・数学という教科に限られたことではないが，算数・数学の学習で世界的に展開されている問題解決の学習は，ただ単にその問題の解決ができることを目的としたものではなく，よりよく問題解決に取り組み，その過程においてはより簡潔で明瞭な，しかも一般的に成り立つ解法を追求するとともに，学習者自身によりよい解法であることの判断や価値づけが求められるからである。つまり，本稿で以下に提出する協同的問題解決の学習過程は，“人がいかに問題を解決するか”ではなく，“人はいかに学ぶか”に着目するところの，新たな学習様式なのである。

さらに，「5）未知なる問題に向けて，新たな次なる課題を設定する状況」もまた，学ぶという行為に

おいて不可欠な要因の１つと言えよう。それは, 学習者にとって問題を解決しているときには問題の解決に専念するあまり生まれてこない心的状況であるかも知れないが, 問題の解決後はどうであろうか。算数・数学の学習を通して学習者に獲得させたい知識・技能や数学的態度は, 単にそれを知っている・できるという知識・技能ではなく, 状況に応じて次の行動を促すものであり, 学習は“知って・分かる”世界が拡がると同時に, “未だ知らない・未知の世界”が拡がるところに学ぶ醍醐味がある。つまり, 私たちが学習者に期待する知識をはじめ, 表現・処理や学習態度は発展性を内蔵しながらも, 未来を志向し未知の世界へと誘うものである。

以下の章においては, 従来の学習様式では観ることのできない学習者間の対話を取り上げ, 協同的問題解決の学習様式の一端を考究するものである。

Ⅱ．実践事例にみる対話の様相

１．授業構成案の作成に当たって

授業構成案の作成に当たっては, 期待する数学的活動（３水準）の設定, 教師の支援, 及び対話が起こる学習状況の三者の視点から教材の研究を行ったものである。特に, 数学的活動の３水準に関しては図１に, 数学的活動の水準と対話の起こる学習状況の関連に関しては図２に示すものである。

1.1 本単元、及び本時の目標

中学校第２学年「式の計算」の単元における目標は, 文字を用いた式を活用することのよさを実感し, それを用いて数量や数量の間の関係を的確に表現し, 説明しようとする能力と態度を養う。また, いくつかの文字を含む四則計算ができるようにすることである。本時は第２次「文字式の利用」の 4/4 時であり, 目標は「円０の中に直径が等しい円をいくつか描くとき, 円の内部に存在するいくつかの円の周の長さの和についてどのような数学的な関係が成り立つかを考え, 文字式を用いた式を活用してその関係が成り立つ理由を説明できること」である。

1.2 期待する数学的活動（3 水準の設定）

水準Ａ：直径 AB の長さを 12cm としてそれぞれの円周の和を求め, 12π になることを表し, なぜ 12π になるかを説明する。

水準Ｂ：直径 AB の長さを d(cm) としてそれぞれの円周の長さを求め, πd(cm) になることを表し, 直径 AB が何 cm であっても直径 AB×π になることを説明する。

水準Ｃ：直径 AB の長さを d(cm), 円の内部に存在する円の数を n(個) として, πd(cm) になることを表し, 直径 AB の長さや内部の円の数が変化しても直径 AB×π になることを説明する。

２．実践事例にみる対話の様相

2.1 観察の方法

対話の起こる学習状況、及び対話を記録するため, 4 人に 1 台のミーティング・レコーダーを用意し, 対話の起こりと対話の様相を記録した。学級全体で 8 台のミーティング・レコーダー[註1] を設定し, 4 人の対話の様相を映像と音声で収録した。以下で取り上げる対話の様相は, 授業後の記録再生に基づくものである。

【問題提示】中心O，直径ABの円Oがあります。円Oの中に直径が等しい円をかいていきます。円Oの中にいくつかの円をかくとき，中の円の周の長さの和にはどのような関係があるでしょうか。また，直径ABの長さを12cm[(d cm)]，円Oの中にかく円の個数をn(個)として，その関係が成り立つ理由を説明しましょう。

【水準A】

直径ABの長さを12cmとして，すべて$12\pi(cm)$になることを表し，なぜ12πになるのかを説明している。

CLaa-1:解決方法の模索(状況1・2)

【SA-1】$12\times\pi=12\pi$ (1個)，$12\div2=6$，$6\times\pi\times2=12\pi$ (2個)，…

【SA-2】$2\pi\times6=12\pi$ (1個)，$12\div2\div2=3$，$2\pi\times3\times2=12\pi$ (2個)，…

CLaa-2:12πとなる根拠の探究(状況5)

・中の円の直径の和，直径ABへの着目

・$12\times1=12$,
$6\times2=12$,
$4\times3=12$,…中の円の直径の和が12になる。

・太線 $=12\div$個数$\times\pi\times$個数
$=$中の円の直径$\times\pi\times$個数
$=$中の円の直径$\times$個数$\times\pi$
$=$中の円の直径の和$\times\pi$
$=$直径$AB\times\pi(=12\pi)$

【水準B】

直径ABの長さを$d(cm)$として，すべて$\pi d(cm)$になることを表し，直径ABが何cmであっても直径$AB\times\pi$になることを説明している。

CLbb-1:解決方法の模索(状況1・2)

【SB-1】$d\times\pi=\pi d$ (1個)，$d\div2=\frac{d}{2}$，$\frac{d}{2}\times\pi\times2=\pi d$ (2個)…

【SB-2】$d\div2=\frac{d}{2}$，$2\times\pi\times\frac{d}{2}=\pi d$ (1個)，$d\div2\div2=\frac{d}{4}$，$2\pi\times\frac{d}{4}\times2=\pi d$ (2個)，…

【水準C】

直径ABの長さを$d(cm)$，中にかく円の数をn(個)として，$\pi d(cm)$になることを表し，ABの長さや中にかく円の数が変化しても直径$AB\times\pi$になることを説明している。

【SC-1】$d\div n=\frac{d}{n}$，$\frac{d}{n}\times\pi\times n=\pi d$，

【SC-2】$d\div n\div2=\frac{d}{n}\times\frac{1}{2}=\frac{d}{2n}$，$2\pi\times\frac{d}{2n}\times n=\pi d$

CLcc-1:中の円の直径をそれぞれ違う長さにした場合の考察(状況6)　【活用題】

・中に円を3つかくとすると，

$2\pi+6\pi+4\pi=(2+6+4)\pi=12\pi$

$\pi a+\pi b+\pi c=(a+b+c)\pi=\pi d$

中の円の直径の和が直径ABになるとき，中の円の直径がそれぞれ違う長さになっても，直径$AB\times\pi$になる。

<留意点>中の円の直径の和が直径ABになることが根拠(CLaa-2)であることを活用

期待される数学的活動(水準A，B，C)

各水準内における協同的な学び

<記号の意味>CL:協同的な学び(Cooperative Learning)，aa:水準Aの生徒同士，-1:場面番号，(例)「CLaa-1」：水準Aの生徒同士が行うことが期待される協同的な学びの場面1

図1　期待される生徒の数学的活動(水準A，B，C)と各水準内において予想される協同的な学び

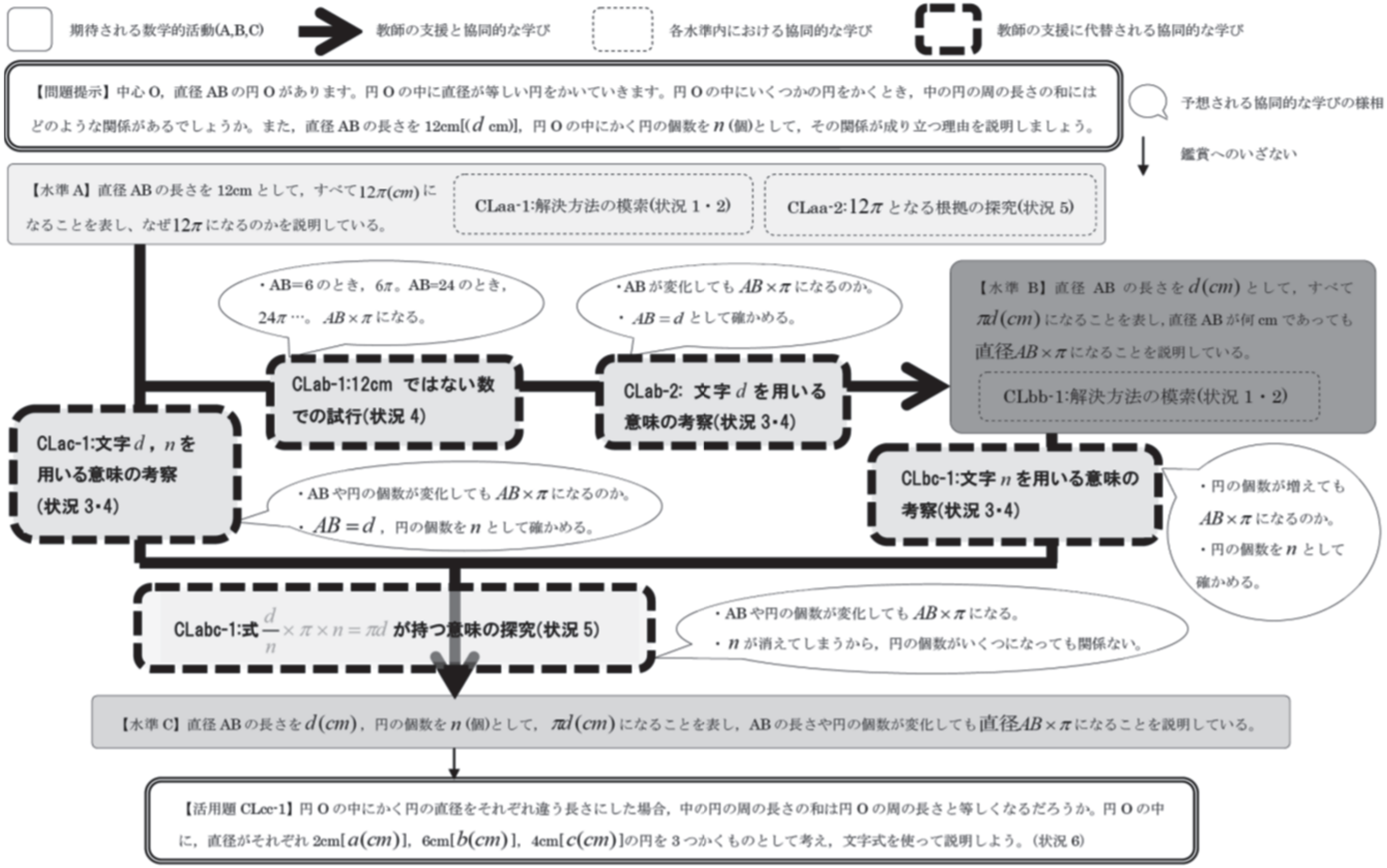


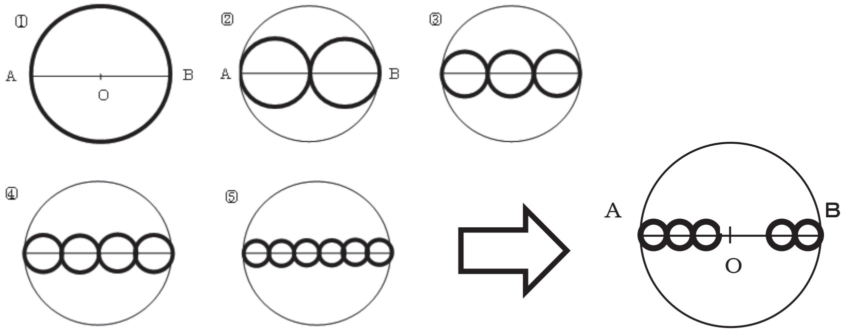
図 2　教師の支援と予想される協同的な学び

2.2 対話の様相

本文の中で用いる記号は,MR1-8 は Meeting Recorder の番号を表し,教師の支援を T,生徒の発言を A,B,C,D で表すものである。平成 26 年 5 月 26 日　鳥取市ＴＭ中学校にて授業実践を実施。

【問題】円Ｏの中にいくつかの円を描きます。このとき、内部にある円の周の和にはどのような関係があるでしょう。
また、直径 AB の長さを 12cm(dcm)、円Ｏの内部に描く円の個数を n(個)として、その関係が成り立つ理由を説明しましょう。

MR360
録画 AVI　録音 WAV



様相１：MR1 による再生･･･授業開始後　4’05”

A: 意味がわからん。何をしたらいいんだ。意味がわからない。太線の円周を求めるってことか。　B: うん　A: どうしたらいい　B: 周の長さを求める。

A: 周の長って、直径×π？　B: 2πr　A: えっ、r って何?　B: r は半径

A: じゃ 1/AB　B: 直径×πだ　A: AB×πだろ

対話の解説　：生徒ＡとＢは,問題の条件について対話し,生徒Ｂは円周を半径を用いて表し 2πr としたが,生徒Ａとの対話を通して,直径を用いて AB×πと表すに達している。

様相２：MR1 による再生･･･授業開始後　8’24”

B: 全部 ABπだ　A: 円が 3 個のときは、直径は 1/3 ？　B: 3 分の？

A: ３分のか？　B: ３で割る　A: わかった,了解

B: あれ,ちがった　3/AB でない　A: AB/3 ×3　円が 2 個なら,AB/2 ×2

B/A ：わかった,わかった。

対話の解説　：生徒ＡとＢは、内部にできる円が 3 個の場合について、AB/3 ×3 の式に至る過程が対話から読み取ることができる。

様相３：MR2 による再生･･･授業開始後　12’34”

T: 12cm になった。では,直径を d(cm)にしたら。

B: はい　A: d ってこと？　B: d,d,d,d　A: じゃ dπ　A/B ：dπだ

B: 円の個数を n にすると?　A: それを n にする？　B: うん,n にする

A: d/n ×π×n は,　え〜,　これが式になる？

D: なんで, そんなになる？　　　A: え～　　D: なんでそんなになる？

A: この数字があるときに求めた式がこれだろ, この式にｎをはめた。

対話の解説　：教師の支援により, 直径を文字ｄを用いて表す方向に向かう。生徒ＡとＢの対話に、生徒Ｄが加わる。AB/2 ×π×2, AB/3 ×π×3, ･･･　の式に, AB をｄに, 円の個数をｎに置き換える。生徒Ｂに問い続けていた生徒Ａは、生徒Ｄの質問に答える立場に代わっている。

様相４：MR3 による再生･･･授業開始後　18’50”

S1 の説明　：d/2 ×π×2　　　S2 の説明　：12/n ×π×n

S3 の説明　：文字 d, n を使う意味を話す, また, どんな数でも代入できること。

S4 の説明　：d/n ×π×n（前に出て, 板書しながら解説する）

T: 円周の和が 12πになる根拠は？

C: 3000πか？　　A: 3000π　　C/A: わかった？説明できる？

C: わかった。みんなの説明のおかげかな。　　A: だろうな。

C: あの S4 君のでわかった。

対話の解説　：円０の内部にいくつの円を描いても, 常に円周の和が 12πになる理由を問う教師に対して, 生徒ＡとＣは口を揃えて 3000πと答える。そして、その理由を S4 の説明された式 d/n ×π×n より理解したことが推測される。

Ⅲ. 学習者間の「対話」がもたらす学習様式

集団を基本とした学びの様式は, 学習を共にする学習者がわかりかけた知識を他者と対話し互いの思考過程を問い合うとともに, 算数･数学の学習の中で用いられる思考の手段としての図や式で理解し合うことを期待し, かつ, 問題解決のすべての学習過程で学習者一人ひとりに他者との学びを奨励するものであった。また, 集団で学ぶ中で学習者の“わからない”ということを大事にしつつ, 知識獲得の手立てそれ自体を学ぶ機会を保障する考え方に立つものでもあった。さらに, この学習者から発せられる“わからない”は主体的な学習を成立させる重要な要因であり, 学び続ける原動力であることは既に指摘した通りである。

１. 学習評価の目的適合性の視点から

Ｉ.２ において前述した通り, 学習成果としての評価の対象が学習過程に向けられるならば, その具体的な評価は学習が進行している状況において, 学習者の数学的な見方・考え方をはじめ, 数学的な態度や“知の技法”[註2]が対象となり得る[5)]。言い換えれば, 協同的問題解決の学習過程に即した評価の対象は, 1)「問題の構成」の過程では問題状況に出会い, 既知の数量と未知の数量を分析するとともに, 未知の数量を導き出す学習者の数学的活動とその様相である。2)-1「解決の見通し」の過程では問題の条件に着目し, 解の存在と大きさを見積もり, 特に条件を減らしたり数値を変えたりする数学的活動とその様相である。2)-2「解決の遂行」の過程では解決の見通しに沿って手続きを進め, 特に絵や図に表し, 見出した解の正しさを追求する数学的活動とその様相である。3)「解決と結果の共有」の過程では用いた手続きの意味が検討され根拠が明らかにされるとともに, 解の正しさが保証される数学的活動とその様相である。4)「解決と結果の議論」の過程では初めの問題の条件や数値を変えて検討されるとともに, 問題の構造を保持しながらも場面を変え適用範囲を広げる数学

的活動とその様相である。そして，最後の学習過程である 5)「活用と評価」の過程は前過程で議論された解決と結果を新たな事象において活用する数学的活動とその様相である。

言い換えるならば，本論で主張する評価の目的は，学習者の自己認識を促し動機付けするところの，自己追求活動における自己調整機能としての判断・価値づけであり，また評価の手段，基準及び尺度は学習が進行している状況で，その都度価値を見出すように設定されるものと言えるのである。ここに，学習評価の対象は学習の成果としての結果・産物ではなく，学習の過程である。つまり、知識獲得の手立てそのものを習得することや知識を実践に結び付けること，さらに，人間の態度や行動に関わる能力等が学習者にもたらされる学習の過程そのものであり，まさに，学習様式の転換である。

2．算数･数学の学習を通して育てたい資質と能力から

算数・数学の学習を通して学習者に育てたい資質や能力は何か。長崎氏（2001）はこの問いに関して，数学で用いられる方法的側面と社会が必要とする数学的な方法の側面，さらに経済協力開発機構(OECD)等における算数・数学の力に関する研究成果を踏まえ，以下に示す 4 つの方法的側面を特定した[6)]。前章で取り上げた対話の様相１から４を，この視点から分析するならば，様相１は数学を創り出す方法としてとらえることができ，とりわけ算数･数学を生み出す力における条件を吟味･確認し，前提をもとに確かめる対話の様相と言える。様相２は数学を社会に応用する方法として，算数・数学を使う力における解決に向けて構想を立てる力，きまりに従って処理する力と言える。また、様相３は数学で表現する方法として，算数･数学で表す力における式に表す力，式をよむ力と言え，様相４は数学の言語的側面と社会における話し合いの方法として，算数･数学で考え合う力における解釈する力，説明できる力と言えるのである。

“意味がわからない”と何度も繰り返し，“どうしたらいい”と問い続ける対話の様相１からは，学習者のわかりたい，解決したいという学ぶ意欲を読み取ることができるとともに，個々の学習者の分かり方の多様性を保証する学習様式と解釈できるのである。なぜならば，従来の一斉の学習においては教師の個に応じる支援は施されつつも，何度も同じ問いを繰り返すことはまれだからである。また、様相２からは聞き手と話し手が時に入れ替わり，試行錯誤しながら現時点の理解に至っている。つまり，聞き手は話し手のアイディアを理解しながら適用を試み，話し手は表現しながら学び直す，ということを繰り返していることがわかる。この対話の様相は建設的相互作用と呼ぶに値しよう。文字式に表すことへと進展する様相３からは，“これが式になる”と式化の過程と式に対する認識の変容を観ることができ，様相４では理解が困難で複雑な数量関係にとらえられていた文字式が，より一般的な関係を表す式として，式の簡潔性や明瞭性の理解へと促しつつ学習内容の理解に至っていることが読み取れるのである。

３．“何を学ぶか”から“いかに学ぶか”へ

今日，我が国の学校教育においては学ぶ内容は全国一律である。しかし，学習集団を構成する学び手は一人として同じ学び手はいないのである。学習者一人ひとりの分かり方が異なるならば，学ぶ過程でつまずいたり試行錯誤したりすることを当然のこととして受け止め，かつ，わからないことをわからないと自然に言える学習様式が必要なのではないかと思われる。つまり，数量化された情報に基づいて，問題状況から具体的な課題や問題を設定し，問題解決に向けて主体的にその対象に働きかけ，試行錯誤しながらもその課題や問題を解決するために考えるすべを身に付け，考えること自体を学

び続ける過程こそが“人はいかに学ぶか”なのである。言い換えれば, 学校教育において算数・数学の学習が社会の中でよりよく生きる縮図であるととらえるならば, そして, 学ぶことや社会の一員として努めること, 人と一緒に何かを生み出せる人間の教育を志向するならば, 算数・数学の学習は集団を基本とした学びの様式への転換が望まれるのである。これまで当たり前と思われてきた事柄がすべて疑われる今日の時代だからこそ, 根拠に基づいた確かな知識や学びが求められるのである。人と人との関わりの中で思考し, 行動する人間の育成, その学習の在り方への一つの学習様式が協同的問題解決の学習なのである。

註１）KING GIM MR360, 録画 AVI(Motion JPEG 形式),録音 WAV(リニア PCM 形式)

註２）知の技法としての評価の対象は, 理解の手段を獲得するための「知ることを学ぶ」：a way of knowing であり, 創造的に行動するための「為すことを学ぶ」：a way of doing であり, 社会の営みに参画し協同するための「他者と共に学ぶ」：a way of cooperative である。
本論文ではこれらを総称して「知の技能」と呼び, 知ることを学ぶは単にマニュアル化され体系化された知識, 技能を獲得するのではなく, 知識獲得の手立てそのものを習得すること。為すことを学ぶは前述と不可分であるが, 知識を実践に結び付けること, 人間の態度や行動に関わる能力を意味すること。そして, 他者と共に学ぶことは今日の学校教育においての最重要課題であり,「人はいかに学ぶか」の協同的問題解決の学習における対話と議論であり, かつ, 他者との違いよりも共通性に学習者の思考と心的状況の方向性を意味するものである。

引用・参考文献

1) AN AGENDA FOR ACTION, National Council Teachers of Mathematics. Recommendations for School Mathematics of the 1980s.
2) Problem Solving in School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics. 1980Year Book.
3) The Agenda in Action. National Council of Teachers of Mathematics. 1983YearBook.
4) 2013 Yabe, A Research on Cooperative Problem Solving Learning in Mathematics Education. Regional Studies(Tottori University, Journal of the Faculty of Regional Sciences). Vol.10 / No.2
5) 2001 矢部，数学教育における子どもの自己評価能力の形成に関する実証的研究, －評価の解釈と自己目標の分類に向けて－，第 34 回数学教育論文発表会論文集, 187-192.
6) 2007 長崎栄三　研究代表者，算数・数学において育成する諸能力とその系列に関する研究, 文部科学省科学研究費補助金, 特定領域研究・新世紀型理数科系教育の展開研究，課題番号 17011071.

(2015 年 1 月 30 日受付，2015 年 2 月 4 日受理)