

ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education



<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

パターンの科学に基づく
算数・数学教授学を志向した基礎的研究

前田 静香 *Shizuka Maeda*

vol.13, no.4

Jan. 2011

1.本研究の目的と方法

1.1. 本研究の目的

子どもたちは学習において、算数や数学をどのように捉えているのであろうか。数字や演算記号、表やグラフでもって表現されるもの、と捉えているのであろうか。はたまた、数学というものがどこかにあって、それを教師から教えてもらうものであると捉えているのであろうか。

本研究では、算数・数学を子どもたちが受動的に受け取るものではなく、子どもたちが学習や様々な活動、思考の経験を経て、自分の中に創り上げていくものとして捉えたい。子どもたちは学習における原初的な活動を通して、算数・数学の対象を規則性や法則性のあるもの、つまりパターンとして捉えられるようにさせたいのである。このように数学の対象を『パターン』として捉える教授・学習を提案することが本研究の目的である。

子どもたちが算数・数学を『パターン』として捉える見方・考え方を育てることを志向した本研究は、一方で、教師にとっての見方・考え方の一つとなるべきである。つまり、教師が授業を設計し、実践し、分析する時の判断材料として、有効にはたらくものとしての側面も同時に有するものでなければならない。

本稿では算数・数学教育において、パターンとして捉える教授・学習理論の構築において、その根幹をなす理論となる部分を明らかにすることが目的である。

1.2. 本研究の方法

まず、数学をパターンの科学であると捉えるときのパターン観を検証し、算数・数学教育の学習観からはどのように捉え直すことができるのかを明らかにする必要がある。そのため、

Lynn Arthur Steen 編

On the Shoulders of Giants

[世界は数理でできている。三輪辰郎訳(2000)]

Keith Devlin

MATHEMATICS The Science of Patterns

[数学：パターンの科学。山下純一訳(2005)]

を取り上げる。

Steen と Devlin のパターン観を比較検討することにより、3つの特性が得られた。さらにそれらはそれら3つの特性に沿って、パターンを認識し、数学化していく活動と、すでに数学として存在するものを、パターンとして再度探求し、捉え直す活動として見ることができる。これら2つは子どもの学習活動、教師の教材分析・授業設計に対して、重要な示唆を示すものである。

これらの活動は数学的な認識の高まりとして、どう説明づけられるものであるのか、その根拠を

Philip Kitcher

THE NATURE OF Mathematical Knowledge (1984)

から検討する。

そして、Steen, Devlin の活動を Kitcher の認識論から検討し得られた示唆をもとに、算数・数学を『パターン』として捉えることで、数学的な見方・考え方、また問題解決学習をどのように捉えなおすことができるかを検討する。

2. 「パターンの科学」としての数学

近年、数学はパターンの科学であるという定義が広まりつつある。そこでのパターン観、そしてパターンの科学としての数学とはどのようなものであるのかについて検討を行う。

2.1. Steen らのパターン観

Steen(2000)は1980年代から1990年代にかけて、アメリカにおける学校数学教育の状況に対する危機感を改善するために出された一連の報告の中の一つである。本書はSteenと5人の著者によって書かれたものであり、序においてSteenは“各著者は、現在の学校やカリキュラムの制限を心配することなく、数理科学に深い根拠をもつアイデアを探求するよう要請された。しかし、彼らは数多くの創造力に富む例を通して、数学的アイデアが形式的でない子供時代の探求から形式的な学校及び大学での学習を通して、どのように発展するかを示唆している”とし、“カリキュラムのための確定的な勧告としてではなく、可能性あるものを見本としてであり、数学の活力と効用を反映するような新しい創造力あふれたプログラムの開発に刺激をあたえるため”のものである(スティーン,2000,序iv-v)。そのことを踏まえたうえで、Steenがパターンの科学としての数学をどのように捉えているのかを明らかにする。

Steenは伝統的に人々が持ってきた数学を静的な学問としてみる見方は次のような事を原因として、生じていると捉えている。“伝統的な学校数学は、ごく少数の構成要素(たとえば算術、幾何、代数)を取り上げ、それを水平に配列してカリキュラムをつくってきた。まず算術、ついで簡単な代数、次に幾何、ついで進んだ代数、そしてあたかも数学的知識の総括であるかのように最後に微積分といった具合である。この層状のケーキのような数学教育へのアプローチは、数学の多種多様な根源からくる形式ばらない発展を妨げる効果を生んできた。”

Steenは学校教育における数学は次の学習のための学習ではなく、“数学の根源と子どもの教育経験における数学の各分野とのつながり”をつけたものとして、子どもに示されるべきであるとしている(スティーン,2000,p.6-7)。

学校教育への示唆として、Steenは“一般の人々の視界の外で、数学は急激な速さで成長し続け、新しい分野を生み、新しい応用を数多く作りつつある”ものとして着目した(スティーン,2000,p.2)。その本質はパターンに対する限りない探求としての数学という見方である。数学を生み出すための探求に着目し、数学者の特性を次のように記している。“隠されているパターンを明らかにすることは、数学者が最も得意とするところである。そして、大きな発見の一つひとつが、いっそう深い探求の可能性を秘めた豊かな新しい領域を開いていく”(スティーン,2000,p.1)。このような言葉からも分かるように、Steenはパターンの探求こそが数学を発展させていくものであると捉えている。

“人が数学の言語を使って行うのは、パターンを記述することである。数学は、あらゆる種類のパターン——自然界に現れるパターン、人間の精神によって発明されたパターン、ほかのパターンからつくられたパターン——を理解しようとする探求的科学である。”(スティーン,2000,p.13)

では、探求されたパターンを記述していくことについて、Steenらの具体例を通して見ていく。

2.1.1. 組み合わせを考える

注) 本項は本文の引用部分をゴシック体(パターン)で、筆者の補足部分を明朝体(パターン)で記している。

(本書はSteen と 5 人の著者によって書かれたものであり、本事例はSteen の考えに沿って Thomas Banchoff によって記されたものである)

<事例：辺の数を数える>

図 1 の図形について、辺の数がどのように変化するかを探求するものである。

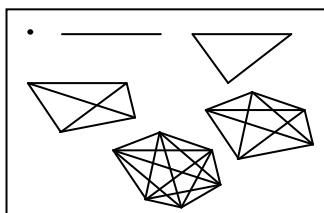


図 1

平面図形の場合、実際に作図を行うことで、頂点や辺の数を数え上げることが行われる。一方で、作図を行う手続きから、そこに潜むアルゴリズムを発見することもできる。

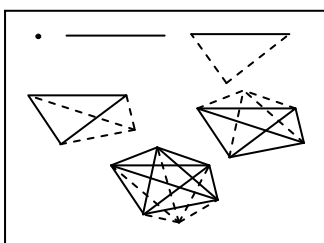


図 1

ある 1 点から出発し、他の 1 点を選びそれと結んで 1 つの辺を描く。また新しい点を選びその前の 2 点をつないで 2 つの辺、あわせて 3 つの辺が得られる。これで三角形が描かれたのである。さらに、新しい点を 1 つ選び前の 3 点をつないで 3 つの辺が得られ、辺はあわせて 6 つになる。(図 2)

この過程を繰り返して 5 点、6 点で決まる図形を描くことができる。これを「完全グラフ」と呼ぶ。この手続きから、どのようなパターンが姿を表すかを表にすると一目瞭然である。

・表 1

点の数	1	2	3	4	5	6
辺の数	0	1	3	6	10	15

<ここから読み取れるパターン>

1: 系列の組み立てに基づく、 n 番目の時の辺の数は n より小さい自然数の和に等しいことが分かる。たとえば、六点でつくられる辺の数は $1+2+3+4+5=15$ である。より形式化するなら、 n 個の自然数の和の公式

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

で表される。

2: 各段の辺の数は、その前の段の辺の数と頂点の数の和である。

<事例：三角形を数える>

「辺の数を数える」で得られた図形について、さらに三角形の個数について、先ほどの表を拡大して新しい情報を含むようにできる。

この時の三角形とは、頂点を結んでできる三角形の事を指し、対角線によってできた交点については含まないとする。つまり、三角形の数を数えることは、頂点 3 つ

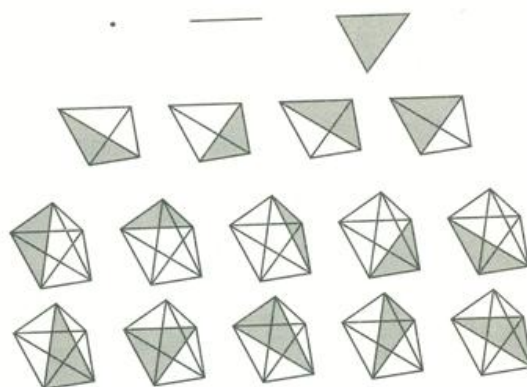


図 3

の組み合わせを数えることと同値であることを示している。図3で得られた情報を、表1を拡大して表すと、表2が得られる。

表2

点の数	1	2	3	4	5	6	...
辺の数	0	1	3	6	10	15	...
三角形の数	0	0	1	4	10	?	?

この表のパターンから推論して、欠けているところを埋めることにする。それは、辺と点に関係づけるやり方とよく似ていることが見えてくるだろう。

<ここから読み取れるパターン>

1: 頂点の3つの組合せの数と同じだけの三角形があるので、三角形の数はいくつかのものから3つを同時にとった組み合わせの数に等しい。

2: 漸化式の関係「ある段の三角形の数は、その直前の段の三角形の数と辺の数の和に等しい」

例えば、6点から作ることのできる三角形は20個である。一般に n 個の点に対する三角形の数は $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ である。

3: 代数を学べば、これらの数を二項係数に結び付けることができ、文字因数を取り去ると、パスカルの三角形を少しずらしたものが得られる。

$(a+b) = a+b$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$	⇒	<table style="border: none; width: 100%;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>4</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>10</td><td>10</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>15</td><td>20</td><td>15</td><td>6</td><td>1</td></tr> </table>	1	1					1	2	1				1	3	3	1			1	4	6	4	1		1	5	10	10	5	1	1	6	15	20	15	6	1
1	1																																						
1	2	1																																					
1	3	3	1																																				
1	4	6	4	1																																			
1	5	10	10	5	1																																		
1	6	15	20	15	6	1																																	

たとえば第4行は、4個の点から作られる完全グラフについて、 $n=0,1,2,3,4$ に対して順に、 n 個の頂点をもつ対象、つまり両端は空集合と全体集合($n=0$ と $n=4$)、そしてその間の数は点、直線、三角形の数をそれぞれ表す。

注意深い生徒は、もう一つの大切なパターン、つまり各行の和は2の累乗であることに気づくだろう。この観察を洗練された言い方で述べることができる。 n 次元単体のいろいろな次元の部分単体の数の総計は、もとの全単体と空単体を含めると 2^{n+1} である。この同じ関係は、二項展開の表で $a=1, b=1$ とおいてもわかるし、また二項係数を $n+1$ 個の要素から $k+1$ 個を同時にとるときの組み合わせと関係づけても分かる。この時起こりうる組み合わせの総数は 2^{n+1} で、これは $n+1$ 個の要素から選ばれた部分集合の数の総計である。

2.1.2 組み合わせを考えるー考察ー

事例における、パターンの探求の様相は、筆者により次のように認められる。

S1 対象をパターンとして捉える

対象はすでに存在しており、さまざまに捉えられる。パターンとして捉えるとはそこにアルゴリズムを認めることである。

本事例では、作図のアルゴリズムによって、図1の図形が図2のように生成されているパターンとして捉える事ができる。

S2 パターンの視覚化

視覚化とは、隠れたパターンを探すためにデータを視覚的に示すことであり、データ解析の第一歩である。例としては、いろいろな形のグラフが関数や関数を視覚的に表す事である。(スティーン,2000) 視覚化することによって得られたデータをより分析的にみることにより、それらのデータがどのように構成されたものであるかを明らかにするきっかけとなる。

ここでは、作図のアルゴリズムを表として表すことで、数値の変化を捉えようとする事である。

S3 形式化

形式化とは具体的な数値による演算の形式での表象や、より一般的な場合として演算の形式にすることである。形式化によってそのパターンの構造を明らかにする。

本事例では、 n 番目の辺の数を求めたり、 n 個の点に対する三角形の数などを表した式がそれにあたる。

S4 パターンの応用

パターンの応用とは、ある対象を捉えるときに用いたパターンを他の対象を捉えるときにも同様に用いることである。

本事例では、辺の数の増え方についての同様のパターンが、三角形の数の増え方についても認められるのではないかというところから、観察を始めている。

S5 パターンの拡張

パターンの拡張とは、パターンとして得られたものから新たなパターンを生み出すことである。

本事例では、表2で得られた数の変化を二項係数に結び付けることで得られたものから、さらに n 次元単体のいろいろな次元の部分単体の数の総計となるパターンが新たに得られた。

2.2. キース・デブリンのパターン観

「数学とは何か？」という問いは歴史とともに何度も生まれ変わってきたものであり、その中でもアメリカの数学者 Keith Devlin は「数学はパターンの科学である」という定義を採用している。数学のかなりの部分が物理的世界にその動機をもっているが、数学の中核を形成する部分のすべてが物理学的な世界に存在するわけではな

い。例えば、数や点、線などは物理的には存在せず、“人間の集団的な心の中のみ存在する抽象的なもの”(デブリン,2005,p.16)である。数学者はその抽象的なものの特性や規則性、法則性などをパターンとして捉え、科学することによって、それを数学と呼んでいると Devlin は捉えている。

偉大な数学者たちが築き上げてきた数学を Devlin は次のような言葉で表している。

“数学の新しい分野が開花する最初の段階というのは、あるパターンの同定から始まる。次にパターンを、自然数の概念とか三角形の概念といった、数学的な対象なり構造なりに抽象化する段階がやってくる。これらの抽象的な概念を研究した結果として、観察されたさまざまなパターンから公理が定式化されるのである。この段階までくると、最初の段階でこれらの公理を導くことになった現象についてそれ以上調べる必要がなくなる。ひとたび公理系が決まると、純粋に抽象的なセッティングの中で実行される理論的証明によってすべてが遂行できるようになる。

もちろん、この全プロセスを作動させる原材料ともいべきパターンは、日常的な世界の何かであるかもしれない。”(デブリン,2005, p.95)

ここでは、日常な世界を数学化していくことについて、Devlin の具体例をもとにみていく。

2.2.1. 有限算術

注) 本項は本文の引用部分をゴシック体(パターン)で、筆者の補足部分を明朝体(パターン)で記している。

たとえば、時計の針を考えてみよう。1時、2時、3時、……ときて、12時になると、そのあとはまた1時にもどる。分についても同じで、1分、2分、3分、……ときて、60分になると、そのあとはまた1分にもどる。

この日常的な事実を数学化しようとするれば、数え方を少し変えることが必要だ。0から数え始めるのである。つまり時刻でいえば、0時、1時、2時、……、11時と数えてこのあとまた0時にもどることにあたり、分の場合は、0分、1分、2分、……、59分と数えてこの後また0分にもどることにあたる。

<p><時計の短針(時)の算術> 例) 2時の3時間後は5時 $2+3=5$ 7時の6時間後は1時 $7+6=1$</p>
<p><時計の長針(分)の算術> 例) 45分の0分後は45分 $45+0=45$ 48分の12分後は0分 $48+12=0$</p>

通常の算術の規則の大半は有限算術についても成り立っていることが分かる。これはひとつの領域から別の領域へと数学的なパターンが移動する古典的な例でもある(通常の算術から有限算術へと数学的なパターンとしての「算術的構造」が移動するというわけだ)。

有限算術における加法を通常の算術の加法と区別するため、ガウスは等号を三本線の“ \equiv ”に置き換え、長針の算術の例を

$$2+3\equiv 5, \quad 7+6\equiv 1$$

とし、“ \equiv ”の「等しい」を示すものではなく、合同であることを示すためのものとして“ \equiv ”を用いた。

時計の算術を超えて、二つの数の積を取り上げる。時間と時間の積は意味がないが、数学的な観点からすれば、積にも完全な意味を与えることができる。その場合は、加法の場合と同じように、普通に積を作り、法 n で割った余りを考えればよいのである。例えば、法 7 については

$$2\times 3\equiv 6, \quad 3\times 5\equiv 1$$

となる。

ガウスによる合同数の概念は数学でよく利用され、場合によっては、同じところでいくつかの異なる法が出現することもある。そうした場合には、どういう法に関する議論なのかを明らかにするひつようがあるため、合同式は次のように示される。

$$a \equiv b \pmod{n}$$

ここで n は問題になっている法を示し、また、これが成立しているとき「 a と b は n を法として合同である」という。どのような法についても、足し算、引き算、かけ算は簡単である。

しかし、割算の場合には、不可能な場合が生じる事がある。たとえば、12 を法として 7 を 5 で割ることはでき、その答えは 11 になる。

$$7/5\equiv 11$$

これは両辺を 5 倍した

$$7\equiv 5\times 11$$

が成立することからわかる。5 \times 11=55 を 12 を法として考えると、55=4 \times 12+7、つまり、55 を 12 で割った余りが 7 になることから、7 \equiv 55 となるためである。しかし、12 を法とする場合、5 を 6 で割ることは不可能である。それは、1 から 11 までの数を 6 倍したもののの中に 12 で割って 5 余るものは存在しないからである。

しかし、法 n が素数の場合には、割り算は常に可能である。したがって、この場合の有限算術は有理数や実数とよく似た性質をもつ。数学者の言葉でいえば、素数を法とする有限算術は体であるということになる。ここにはまた、もうひとつのパターンがみられる。割り算が可能となるような有限算術が得られる素数に関するパターンである。

2.2.2. 有限算術 —考察—

事例における、パターン探求の様相は、筆者により次のように認められる。

D1 パターンの導出

パターンの導出とは、対象がどのような法則をもったものであるかを明らかにし、パターンとして捉えることである。

本事例では、時計の針が表す時間が周期的であることに着目したパターンが導出された。

D2 形式化

形式化とは、パターンとみなせたものを、表象することである。

本事例では、時計の算術から得られたものを有限算術として $a \equiv b \pmod{n}$ と表すことが挙げられる。

D3 新たなパターンの導出

対象から得られたパターンでは、対応しきれない範囲に対し、新たにその範囲を含め機能するようなパターンを導出することである。

本事例では、足し算、かけ算、ひき算では、有理数や実数とよく似た性質が認められる。しかし、割算の場合には適応できない場合が認められ、新たなパターンが導出された。

2.3. パターンの科学としての数学とは

2章では Steen と Devlin のパターン観について、パターン観の捉え方及び事例をもとにみてきた。パターンの科学としての数学について、その特性は以下の3点に集約されると認められる。

1: 万物が対象となること

対象が万物であるが、例え同じものを見たとしてもすべての人が全て同じパターンとしてみなすことはできないかもしれない。それはパターンが鋳型のように、すでに法則として存在するものがあり、それを万物に対してあてはめることによって、パターンであると捉えるものではないからである。我々が対象をみたときパターンとしてみなすことができ初めて、数学化する可能性が拓けるのである。

2: パターンとして捉えることだけでは、数学として成立しないこと

パターンは確かに万物を対象とするものであるが、パターンとして見ることもできても、それ自体が数学となるわけではない。

ある種のパターンに気づいたり、ある種のパターンを使っているという段階では、まだパターンを形式化したり、科学的な分析にかけるといったことと同じではない。数学として扱うためには、世界の中の新しいパターンを発見し、それらのパターンを分析、記述し、公理体系が構築される必要がある。(キッチャー,2005)

3: パターンから新しいパターンが生み出されること

パターンは個々に存在しているものではなく、構造化可能であったり、相互作用してはたらくものであること、また拡張・一般化が可能であることを含んでいる。

有限算術の例を見ると、条件が付加されているものの、通常四則演算のパターンと同様のパターンを得ることができた。

2.4. パターンの科学としての数学からの教育的示唆

Steen と Devlin のいうパターンとは、我々がある対象を見た時に見出すことができた規則性や法則性である。そして、パターンとして捉えられたものを探求していくことが数学であるとしている。

数学をパターンの科学とする両者の、探求活動としての数学には次の2つの側面があることが認められる。

まず一つ目として、新しい数学を生み出す事を前提とした「パターンの科学としての数学」である。“一般の人々の視界の外で、数学は急激な速さで成長し続け、新しい分野を生み、新しい応用を作りつつある。この成長を導くのは、計算や公式ではなくて、パターンに対する限りない探求である。”(Steen.2000.p.2)

これを学習観から捉えなおすと、子どもの学習活動への示唆が得られる。子どもの学習活動は子どもたちから見れば「新しい数学を生み出す」ことに他ならない。子どもたちにとって、数学はすでに存在するものではなく、自分たちで創り上げ、発展させていくものである。そうであれば、パターンとして捉え、探求する活動を数学として、学習活動が行われると言えるのではないだろうか。

二つ目として、すでに数学として存在するものを、捉えなおすことを前提とした「パターンの科学としての数学」である。Steen や Devlin の事例について、我々は示されたものを少なからず知っていたり、形式化されたものを理解できるであろう。しかし、数学的な記号で示されたものがどのようなパターンの探求の結果得られたものかその具体が示せたのではないだろうか。

これを教育観から捉え直せば、教師の教材分析及び、授業設計への示唆が得られる。教師にとっては、教材としての数学はすでに数学として存在するものである。つまり、分析の対象となるのである。教材の本質を明らかにするためには、どのように分析を行わなければならないのか、数学をどのように捉えなければならないのかが問題となるところである。さらに、それらの教材を用いて授業を設計するためには、どのような数学化が図られてきたのかを明確に捉える必要がある。パターンの科学として、数学を捉え直し、再構成していくプロセスは教材分析及び授業設計に対して有効な手立てとしての可能性があると考えられる。

3. 数学的認識の本性

子どもたちが数学を創り上げていくような学習を志向するとき、子どもたちの学習の前提にあるものとは何であり、どのように体系化されていくものであるのかを明らかにする必要がある。また、教師はすでに形式化された数学を多く知っているが、それらがどのように作られてきたのかを分析できることは、子どもたちの学習活動を設計する上で、大変重要である。

つまり、我々の体系的な数学に対する知識の根拠とは何であり、どのように推論を始めるのであろうか。そして、どのように数学として作り上げていくのかについて、数学的な認識の本性すなわち認識論的立場から議論されなければならない。

3.1. 歴史的発展

現代の個人の数学的認識を明らかにするとはどういうことか。Philip Kitcher は個人の数学的認識が歴史的にどのように発展したものであるかを捉えることによって、我々の数学的認識の根源を明らかにする。“ある世代の数学者の知識というのはその前の世代の知識を拡張することによって得られる”と Kitcher は捉えている。つまり、“個々人の認識は集団の権威の認識を基礎に置”いたものであるということである。(Kitcher, 1984,p.4-5) すなわち我々の認識について明らかにするためには、その集団の認識の由来が調べられなければ、個々の認識を説明することはできないのである。その要請に答えるためには、数学史という歴史的な要請が求められる。“多くの数理哲学者が数学史は認識とは無関係のものであるとみなしてきた”のは、“数学者は歴史的な過程を通して精巧に作り上げられてきた数学とは無関係に祖先によって我々に残された知識の主要な部分を推測することができる。そのため彼らは体系的な知識を完成することが困難であった歴史的な過程での具体例を挙げ

て示す推論のパターンを省みない事を支持する”からである。(Kitcher,1984,p.5)それは数学の特性として、認められるものである。しかし我々の認識は如何なるものであるかという問いに対しては、認識がどのような推論の出発点にたち、如何なる変遷をたどり進化してきたのかという問いに答えられなければならない。

Kitcher は数学的認識は認知によって獲得された基本的な知覚から生ずるとする。Kitcher がアプリアリに数学的認識を説明しきれないとするのは、これが大きく関わっているのである。“2~3 千年前に私達の先駆者はメソポタミアのどこかで算術や幾何学の幾つかの単純な事実を、現実的な経験の学習によって進取の口火を切ったのである。それらの質素な起こりの数学は性質を受け継ぐためのさい先のよいものとなり、認識の印象的な本体として花開いたのである。”(Kitcher,1984,p.5)この見解は大きな批判を受けるものであると予想される。それは、これらの経験的な事柄が我々に純粋な数学的認識を与える事ができるのかというものであろう。このことについては 3.2.認識の本性において詳述する。

3.2. 認識の本性

数学的認識がありふれた知覚から得られるとはどういうことであるのか。

Kitcher は我々の認識の根拠を生態学的実在論における「アフォーダンス」¹に求めたのである。アフォーダンスとは、J.J.Gibson によって提唱され、有機体(人間)が主に知覚するものはその環境からのアフォーダンスであるとするものです。つまり “数学は私達がどんな対象に関しても実行することができる収集や要請の活動”であり、“私(Kitcher:訳者注)は数学が対象に基づいて環境の中で行うことのできる活動を理想化した科学であると言う構成主義者の立場”をとると結論付けるのである。(Kitcher,1984,p.12)

数学的アプリアリ主義を Kitcher が拒否するのは数学的な認識が知覚の経験からは異なる根源から得られるとするのではなく、我々の認識が環境からのアフォーダンスによって知覚されたものであるとするからである。そしてそれらの知覚されたものを実験的に行ったり、観察の結果として認識が発達していくものであるとしている。つまり、“プロト(原始の)数学的な知識が世界を操って、操作を観察することによって得られることができるということである。これらの質素な始まりから、数学的な知識は、現代の理論の印象的なコーパス(主要部)に発達するのである。”(Kitcher,1984, p.148)

3.3. 数学的認識論から見た「パターンの科学としての数学」

2.4.でみたように、パターンの科学としての数学は2つの探求活動の様相を有したものである。それらは

- i)対象をパターンとみなすことで、新たな数学を生み出すこと
 - ii)すでに数学として存在するものをパターンとして捉え直すこと
- とまとめられる。

Kitcher の数学的認識論から見れば、「i)対象をパターンとみなすことで、新たな数学を生み出すこと」とは、認識の根源としての知覚を認め、どんな対象に関しても実行することのできる収集や要請の活動としての数学として、パターンの科学としての数学が認められることを意味する。さらに収集、要請された活動が理想化されて

¹ アフォーダンスとは、環境が動物に与える意味を表す造語である。動物(有機体)に対する刺激という知覚心理学の概念ではなく、動物(有機体)がその生活する環境を探索することによって獲得することができる意味・価値であると定義される。(ギブソン,1985)

いくことにより、数学として取り扱われ、構成的に拡大していくのである。

また「ii)すでに数学として存在するものをパターンとして捉え直すこと」とは、その数学的認識の本性を明らかにするための歴史的な過程へのアプローチであると換言できる。それにより、我々現代に生きる人々の数学的認識について明らかにすることができ、推論の出発点から、様々な推論のパターンを経て、現在の認識へと発展してきたという事を我々は知覚することができるのである。

4. 結語：「パターン」として算数・数学を捉える学習観と数学観の相互関係性

3.3.では数学認識論からパターンの科学としての数学がどのように捉えられるかを明らかにした。本章ではそれらの考えを我が国の算数・数学教育に取り込んだとき、数学的な見方・考え方、問題解決学習の捉え方について見通しを述べる。

4.1. 数学的な見方・考え方について

小・中学校学習指導要領で「数学的な考え方」が初めて示されたのは、昭和33年度の改訂においてである²。中島(1985)は子どもの算数・数学としてふさわしい創造的な活動(問題解決)が自主的にできる能力・態度を育む事をねらい、数学的な考え方の育成を目指そうと考えたのである。そして“「数学的な考え方」とは算数・数学で指導される基礎的な概念や原理、知識や技能、あるいはそれら进行操作する推論を含んだ一つの合目的な活動が全体としてできることを指したものである。その中で用いられているような特定の個々のアイディアや手法だけを指しているわけではない”(中島.1985.p6)のである。

平成20年度改訂の学習指導要領から、算数科及び数学科における算数的活動・数学的活動が内容として明記されている。筆者は算数的活動・数学的活動とは、子どもたちの数学的な見方・考え方が子どもたちの活動として表出されたものであるという立場である。

当然の議論として、算数・数学教育の中で、「数学的な考え方」とはどのようなものかという事が起こるのである。このことについて、昭和33年度の改訂で打ち出された「数学的な考え方」をいっそう充実させるために、昭和43年度の改訂では、集合の考えや関数の考えをもって数学的な創造活動の姿が具体的に示されたのである。この視点で平成20年度版の学習指導要領を見ると、算数・数学的活動が内容として明記されたことから、算数・数学的活動を重視しようとする事が読み取れる。しかし、算数・数学的活動を裏支えするはずの数学的な見方・考え方については、具体的な形で共通の理解が得られているとは言い難いのではないだろうか。

数学的な見方・考え方は曖昧なものであるが、子どもたちの創造的な算数・数学の学習活動を保証するものとして、具体的に示される必要があると筆者は考える。そこで2章、3章で検討してきたことをもとに、算数・数学をパターンの探求として捉えれば、数学的な見方・考え方は以下のように仮説が設定される。

[数学的な見方・考え方：仮説1]

認識がありふれた知覚によって、対象を捉える活動ならば、対象とするものをさまざまなパターンとして捉える見方・考え方となる。

²学習指導要領で「数学的な考え方」が初めて打ち出されたのは昭和31年度の高등학교学習指導要領においてである。

[数学的な見方・考え方：仮説 2]

パターンとして捉えた対象を数学化することにより，認識が構成されるならば，パターンを探求する見方・考え方となる。

[数学的な見方・考え方：仮説 3]

構成されたパターンが拡張され，あらたなパターンが構成されることにより，認識が発展していくならば，パターンを一般化・拡張する見方・考え方となる。

4. 2. 問題解決学習

問題解決学習は広く様々な場面で用いられる言葉であるが，問題解決学習は数学的な見方・考え方が反映されるものとする。本研究では問題解決学習を以下のように捉えることを前提として議論を進める。

まず，問題解決学習は教師，子ども，教材によって構成される営みであるとする。そして，教師は子どもの問題解決が行われるように環境を整える必要がある。問題解決授業がどのように展開されるかについては，次の枠組みによって示されるものを採用する。(溝口, 2007)

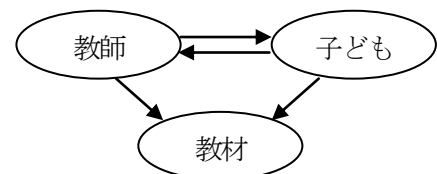


図 5: 教授学的三角形

(溝口,2007,p.21)

このような，問題解決を通して数学的な知識や概念を形成していく授業を行うためには，教師は良質な教材分析を行う必要がある。まず数学的な立場から教材を分析し，さらにそれを問題解決の立場から，子どもの学習において，どのような活動を設定するかが求められるのである。ところが，授業を設計するために，教材を分析し，子どもの活動を予想して授業を設計したにも関わらず，問題解決が思うように展開されないという話を聞く。その原因として，子どもが問題解決学習そのものに不慣れであるということも考えられるが，我々が問わなければならないのは，問題解決に対して妥当な教材分析が行われ授業の設計に反映されているかということである。(友定他,2006)

そのため，教材分析または授業設計における教師自身の判断材料として，パターンの科学としての数学を用いるならば，以下のように仮説が設定される。

[授業設計：仮説 1]

個々人の認識がそれ以前の集団の権威の認識を基礎に置いたものとし，認識の根拠を歴史的アプローチによって求めるならば，数学的な立場に立って教材を分析することで，その認識の発展をとらえなおす判断材料となりうる。



図 6: 算数・数学の問題解決授業モデル

(溝口,2007,p.21)

[授業設計：仮説 2]

認識がさまざまな知覚からくる収集や要請からくる活動であるとするならば、子どもたちに提示される問題について、知覚されることにより数学化されるにふさわしい対象となっているかの判断材料となりうる。

[授業設計：仮説 3]

認識が構成的であり、体系として構成されるまでにさまざまなパターンの推論を経たとするならば、子どもの期待される活動及び、知識や概念の形成についての判断材料となりうる。

5. 今後の課題

第4章では数学的な見方・考え方、問題解決学習を志向した教師の教材分析、授業設計に対する仮説が設定された。これらについて検討を行う必要がある。

引用・参考文献

- 友定章子、姫田恭江、溝口達也(2006). 授業設計における一般化と拡張を志向した算数的活動の構成の様相. 鳥取大学数学教育研究. Vol.9. No1.pp1-10
- 中島健三(1983).算数数学教育と数学的な考え方.金子書房
- 西田幾多郎(1953).哲学概論.岩波書店
- 溝口達也(2007). 算数・数学学習指導論. 鳥取大学数学教育学研究室
- 文部省(1973). 小学校算数指導資料 関数の考えの指導. 東京書籍株式会社.
- 文部科学省(2008). 小学校学習指導要領解説 算数編. 東洋館出版社.
- J.J.Gibson[古崎敬他共訳](1985). 生態学的視覚論：ヒトの知覚世界を探る. サイエンス社
- Keith Devlin [山下純一訳](1995).数学：パターンの科学.日経サイエンス社
- Lynn Arthur Steen [三輪辰郎訳](2000). 世界は数理でできている. 丸善株式会社
- PHILIP KITCHER(1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. OXFORD UNIVERSITY PRESS

鳥取大学数学教育研究 ISSN 1881-6134

Site URL : <http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 tsyabe@rstu.jp

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 mizoguci@rstu.jp

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
 - ・ 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
 - ・ 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
 - ・ 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
 - ・ その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101 (溝口)

<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/>