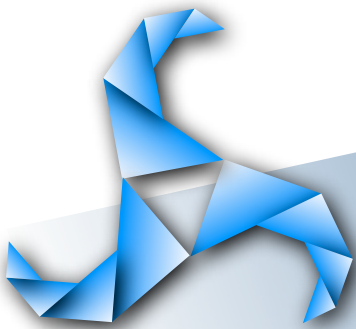


ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education



www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

協同的授業設計による
因数分解の学習指導の開発研究

溝口達也・山脇雅也・田中慎一

vol.11, no.3

Nov. 2008

協同的授業設計による因数分解の学習指導の開発研究¹

溝口 達也
鳥 取 大 学

山脇 雅也
鳥取市立青谷中学校

田中 慎一
鳥取県立智頭農林高等学校

本研究は、鳥取数学教育研究会（Lapinの会）によって展開された、因数分解の学習指導の授業設計の記述を通して、教師集団と研究者による協同的な開発研究における授業設計（協同的授業設計）の2つの過程を反省的に抽出する。これらは、「活動からのアプローチ」及び「課題からのアプローチ」と呼ばれ、授業設計の有効な視点となり得ることが示唆される。

また、因数分解の学習指導においては、「因数分解の一意性」を生徒が経験し得るための数学的活動を開発し、これらを組織することによって因数分解の過程に数学的価値を実現することを図った。

キーワード：協同的授業設計，活動からのアプローチ，課題からのアプローチ

1. はじめに：教師と研究者の連携による協同的実践研究の必要性

学習指導要領の改訂や、全国学力・学習状況調査の実施等、学校教育を取り巻く動きが活発である。学校教育に対する社会的な関心の高さと見てもよいだろう。一方で、学校教育に携わる者として見れば、一連の「動き」は、決して「取り巻き」ではなくまさにその一部として受け止めるべきものである。すなわち、そのような取り組みは、等しく学校改善を意図するものであるが、その実現のためには、学校教育の主たる目的かつ方法である授業を改善することこそが要請されるものである(鳥取県検証改善委員会, 2008)。

こうした授業改善は、一人一人の教師による日々の取り組みがその基本となることは言うまでもないが、より組織的に実施することを考えるとき、教師集団の基本単位としての学校による(授業改善の)取り組みがあげられ、通常《(校内)授業研究会》として実施される。多くの場合、当該学校の構成員としての教師集団による「同僚性」に訴えるこ

¹ 本稿は、日本数学教育学会 第41回数学教育論文発表会 論文集に掲載された稿を加筆・修正したものである。

とで、各々の目的の達成を図ろうとし、またこのことが推奨される傾向にもある。(浅井, 他, 2007)

「同僚性」そのものは否定されるものではない。しかしながら、一連のこうした取り組みにおける決定的な問題は、《教材の本性》に対する認識の希薄さとして顕在化する。いかなる教科の学習においても、授業を設計する上で{教師, 子ども, 教材}のどの変数も無視することはできない。(Mizoguchi, 2008)さらに、実際の授業を研究対象とするとき、教師の教授行為や子どもの学習活動は、当該授業の教材を視点として吟味される必要がある。

上述の通り「同僚性」が否定されるものではないのは、こうした教材の視点から一つの授業を検討するという営みが、そこにおいて実現可能性を有しているからこそである。逆に言えば、そうした授業研究が実現されてこそ初めて「同僚性」が機能したと言える。しかしながら、そこには当該授業に関わる教科教育学としての高度な専門性が要請される。すなわち「同僚性」が高まるとは、こうした教科教育学的知識が授業研究会の参加者によって共有され、かつ創造されることにある。換言すれば、真に「同僚性」を問題としたいならば、そのような「参加」を可能にするために、各々の教師の「教材研究力」と呼び得るものが先ず要請されなければならない。

こうした教材に関わる専門性の開発 *professional development*(NCTM, 1991; 溝口, 他, 2008)は、にもかかわらず、常に「同僚」によって保証されるわけではない。このとき、教師と(教科教育学の専門家としての)研究者による連携が機能することになる。学校の教師集団に研究者が加わり、かつ比較的継続的な協同的実践研究の営みがそれである。このような協同においては、授業実践者と研究者の相互作用に基づく、単なる経験性を超えた(教科教育学としての)科学性を伴う授業設計とその実践を期待するのである。すなわち、個別特殊な問題を対象とする「実践」と、普遍妥当を問題とする「理論」の緊張関係が、新たな教科教育学的知識の創造へと駆り立てていくのである。本研究は、まさにこうした状況に照らして、鳥取数学教育研究会(Lapinの会)(溝口, 2006)において教師と研究者との連携による実践の部分的な営みである。

本研究の目的は、協同的実践研究において、いかなる授業設計の過程(協同的授業設計)が営まれるかを、因数分解の学習指導を事例として反省的に抽出することである。

2. 数学的活動を基にした問題解決授業の設計

我々は、日々学習指導を通して生徒に望ましい人間性を形成してほしいと期待する。そのために我々は、数学学習を通して生徒の思考がそれまでよりも高次のものへと発展することを期待する。しかし、生徒は「学習」しようとして学習するわけではない。ある活動を経たとき、結果としてそれが、教師の視点から見れば「学習」であると映るのである。このとき生徒が行うことは、ある場面に直面して何らかの問題を意識し、それを解決しようとすることである。そうした問題は、しばしば生徒の直面する困難として生じ

る。生徒が困難に直面し努力する必要があるような場合「学習」が成立するのである。(溝口, 1995)

これまで学習指導要領は数回の改訂を経てきた。そこにおいて数学科の教科としての目標の変遷を見た。そのそれぞれに固有の特徴があり、常に我々の教育実践を方向づけてきたことは否定されるものではない。しかしながら、そこに一貫して脈々と流れる数学教育の目的として、我々は《数学的な見方・考え方の育成》を見ることができる。数学的な見方・考え方は、文字通り「見方・考え方」であり、それ自体我々にとって観察不可能である。このとき、数学的な見方・考え方が生きて働く場として、我々は問題解決をおくのである。すなわち、問題解決における活動を通して、生徒の数学的な見方・考え方を顕在化させ、これをもって観察可能な対象とすることを意図するのである。このことは、評価の問題とも不可分な関係にあり、我々は目標として数学的な見方・考え方を掲げる以上、これを評価する必要がある。上述の通り、観察不可能な対象を評価するにあたり、観察可能な問題解決における生徒の活動を通してこれを評価することを考えたのである。従って、次に問題とされるのは、問題解決における生徒の活動であり、我々は、以下に述べるようにこれを「数学的活動」として位置付けたいと考えるのである。

目標に対する(方向づけられた)評価の対象としての活動は、従って、教師の目から見たときにそこに数学的価値の備わったものとして認められる必要がある、この意味で「数学的活動」は理論負荷的な対象である。そして、そのことは教師側に終始してよいとされるものではなく、次には生徒自身がそのことを自覚的に行うことを目指したい。すなわちこうした考えの基に、「数学的活動」は、生徒が数学の問題解決において、合目的的に行う活動であり、そこには当該の数学的価値が負荷されていると見なされるのである。それゆえ「数学的活動」は、生徒がそのようにするであろうと《予想される》対象ではなく、まさに《期待される》それとして位置付けられることが要請される。

3. 因数分解の授業設計

(1) 因数分解の学習の意義

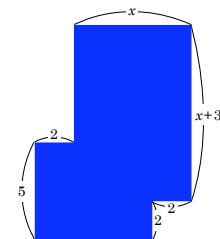
因数分解は、通常、整式の展開の逆操作として、あるいは2次方程式の解法として等、手段として大きな位置を占めることが多い。しかし、因数分解の価値を考えると、因数分解する過程に価値をみたい。すなわち、よりよく因数分解を使える、できるということではなく、因数分解で何か生み出すような視点を当てられないか、換言すれば、学習の過程を通してどんな新しい知識を生み出していけるのか、という点を大切にしたい。

このとき、多くの教科書において、因数分解は素因数分解の後に位置付けられるが、必ずしも両者が関連したものとなっていないことに授業設計上の手がかかりがあるのではないかと考えた。

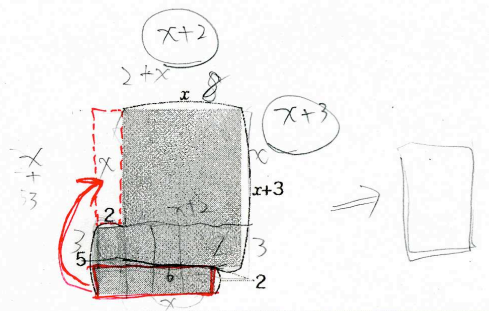
(2)問題の開発

教科書では、第1時に図的操作を通して因数分解のイメージを達成し、第2時以降で、具体的な個々の因数分解を扱うこととされている。しかしながら、因数分解の式の意味をわかる上で、因数が何を意味しているのかをわかっていないならば真の意味で式の意味がわかっているとは言えない。従って、どのような式の読み方をしなければならないのかについて、学習の中で検討する必要がある。これは、同じ面積を持つものはいくらでも作ることができるが、この長方形が意味するものとは何かということに他ならない。すなわち、ある特定の x だけでなく、 x がどんな値であってもこの長方形になることの意味である。

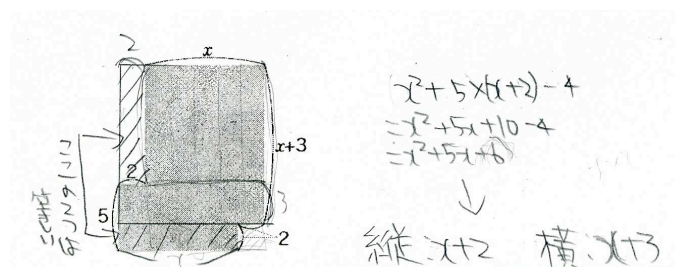
そこで、図1に示されるような図形を基にして、因数分解はデコボコした図形を長方形と見ることと捉えられることを基本的な問題場面とすることとした。これにより、学習の展開が「面積をシンプルに表す」ことに対して、因数分解は「形をシンプルに表す」と位置付けられる。(図2a~b参照)



[図1 問題の図]



[図2a 生徒の数学的活動A]



[図2b 生徒の数学的活動A]

このことは、直接的ではないが《因数分解の一意性》に着目することを意味する。すなわち、一つの長方形に決まることを、問題の図形を分割し、動かしたりすることを通して、因数分解を表すという新たな式の操作として、その価値を考えさせたいのである。具体的には、 x に特殊な値を代入することにより、多様な長方形が生成される。にもかかわらずそこに、 $(x+2)(x+3)$ で表される長方形は、どの場合においても1つしかないこ

とを追求させたいと考えるのである。(資料参照)

(3)問題解決過程：数学的活動の設定

生徒がこの一意性に気づくためには、具体的な数値を代入しそこから現れるパターンを見つけ出すことによって、それがどんな場合でも一意に定まることに気づくような活動を構成する必要がある。

例えば、 $x=1$ のとき、図形の面積は式 x^2+5x+6 から12となり、そのような長方形は、(縦, 横)=(2, 6), (3, 4)が考えられる。ここで、 $x=1$ として元の式を変形すると、

$$(2, 6)のとき, (x+1)(x+5)=x^2+6x+5$$

$$(3, 4)のとき, (x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$

となり、(2, 6)の組み合わせでは、文字 x を用いた式で表される面積と異なる面積となることに気づくことが可能である。また、この活動は、式の展開という既習事項のみで解決が可能であることから、既習事項の活用という点から期待する数学的活動として位置付けることが可能である。

さらに、下のような表(表1)を作り、その中に共通して現れる組み合わせ(網掛部分)を見つけ出す活動が設定された。

[表1 面積を表す式に特殊な数を代入した表]

x	面積	(縦, 横)
0	6	(2, 3)
1	12	(2, 6), (3, 4)
2	20	(2, 10), (4, 5)
3	30	(2, 15), (3, 10), (5, 6)
4	42	(2, 21), (3, 14), (6, 7)
5	56	(2, 28), (4, 14), (7, 8)
6	72	(2, 36), (3, 24), (4, 28), (6, 12), (8, 9)
7	90	(2, 45), (3, 30), (5, 18), (6, 15), (9, 10)
...	...	

ただし、多くの生徒が $x=0$ からではなく、 $x=1$ からの表を作成することが予想された。実際、 $x=0$ のとき1つに定まることに着目しやすいが、生徒が自らこのことを気づくことは困難であると検討された。

(4)練り上げ(解決の吟味)の構想

練り上げの構想において、先ず議論の軸となったものは、図形を用いた解決活動をどのように位置付けるかであった。理解のための図であるならば教科書の扱いと変わりはなく、本授業設計の趣旨とは異なる。わかりやすくするための図ではなく、本授業で検討したい一意性に絡んだものとするために、図を用いた解決活動を行わせることを前提と考えるのではなく、一意性という観点から見たとき、図を用いた解決活動をどのように位置付けるのが望ましいかを考える方が、本授業設計には適しているという結論に達

した。そのため、練り上げにおける主要な課題(発問)として、当初次のような課題の系列を得た。

課題1: 切り貼りの仕方はこれしかないのだろうか。

課題2: 表中の $x=1$ 以上は複数通りでてくる。他にも長方形を作れる場合はないか。

課題3: もしそうであるならば、そのようなパターンはいかにして見出すことができるか。

ただし、一意性をどのように示すかという問題が残される。すなわち、因数分解の一意性が、この図形の場合でしか示せないということでは、本授業のねらいは達成されない。すべての図形で成り立つようにするにはどのようにすればよいかを考えなければならないということである。換言すれば、 $x^2+(a+b)x+a\beta$ という式が与えられたとき、 $a+\beta$ と $a\beta$ の組み合わせは本当にひとつしかないのだろうかという考察が行われなければならない。このような議論から課題を見直してみると、先に設定された3つの課題に加え、新たに後述の課題2'が必要になることが得られた。

課題1: 図形を形が異なる長方形に変形する切り貼りの仕方は他にないか。

課題1': 具体値で調べた表によると、複数通りの変形ができるのではないか。

課題2: x がどんな数のときでもあてはまるパターンをいかにして見つけるか。

課題2': 与えられた数がどんなパターンでも一意に結果を導けるか。(一般的な証明ということではなく、具体的な数の調査を通して)

以上のような課題から、自力解決や練り上げにおいて、具体的な数値の表を調査することが要請され、(2, 3)や(3, 4)という組み合わせが何を意味するのかを考えさせたい。そして、自力解決における活動を振り返ることにより、こうした点を検討する練り上げにしていくことを意図するのである。このことは、その後のたすきがけの考えにつながり、またそれを保障もし得るため、次時以降への有効な指針となり得る。

$x=3$ の時 $15+9+6=30$	$x=2$ の時 20
$1 \times 3 = 10 \times 3$	10×2
$2 \times 9 = 6 \times 5$	4×5
$3 \times 6 = 15 \times 2$	

[図3a 生徒の数学的活動B]

$x=2$... 20	5×4 4×5
	2×10 10×2
$x=3$... 30	5×6 6×5 15×2
	3×10 10×3
$x=4$... 42	6×7 7×6
	2×21 21×2

[図3b 生徒の数学的活動B]

x	面積	(縦×横)
2	20	(2×10) (4×5)
3	30	(2×15) (3×10) (5×6)
4	42	(2×21) (7×6) (7×6)
5	56	(2×28) (7×8) (8×7)
6	...	$x-3$ $x+23$ $x+1$ $x+2$
7	...	
8	...	

$(x-3)(x+23)$
 $= x^2 + 20x + 56$

[図3c 生徒の数学的活動B]

4. 結語：授業設計の過程

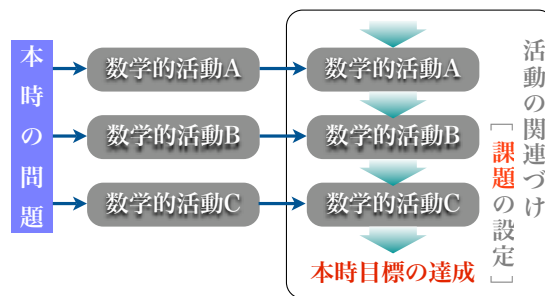
我々の授業設計は、当初「活動からのアプローチ」と呼び得る次のような過程を踏んでいるものと思われた。すなわち、問題の解決において、期待する活動を構想することから授業を設計し、そこにおいて《練り上げ》は、期待する活動の組織化(関連付け)によって構成されるとするものである。このようなアプローチでは、実際には、《本時の問題》に対して、



[図4 授業の実際]

いかなる活動が数学的に価値づけられるか、という視点をもって、具体的に活動を構想し、構想された活動をどのように組織化(関連づけ)することで、一般化や拡張、あるいは形式化といった統合的発展的考察(中島, 1981)が図られるか吟味することになる。これらの統合的発展的考察の具体的様相は、本時の目標に対応するものである。(図5参照)

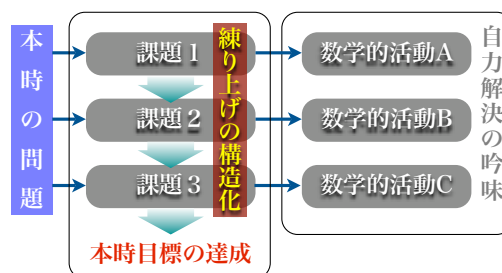
しかしながら、我々の授業設計は、むしろ《課題》を構成することからそこに活動を位置づける、「課題からのアプローチ」と呼び得るものであった。すなわち、《練り上げ》の展開を、課題の連鎖によって構想することから授業を設計したといえるものである。そこにおいては、《自力解決》における期待



[図5 活動からのアプローチ]

する活動は、《練り上げ》の実現に必要なものとして設定され、支援されなければならない。このようなアプローチでは、実際には、「本時の問題」の解決に当たって、真に議論されなければならない《課題》は何か、ということを先ず洗い出すことから始める。これらの《課題》は、本時の目標に対応する。さらに、「練り上げ」においてそのような課題の検討を可能にするため、「自力解決」ではどんな算数・数学的活動が要請されるか、吟味する。

(図2参照)



[図2 課題からのアプローチ]

これら2つのアプローチは、当然のことながら設計された授業を実践する上では、いずれのアプローチがとられたか観察し得るものではないであろう。しかし、授業を設計していく上で、有効な視点として機能することが考えられる。

引用・参考文献

- 浅井和行, 岡本正志, 高乗秀明, 佐々木真理 (2007). 教師の力量形成のための試み. 京都教育大学教育実践研究紀要, 7, 131-140.
- 溝口達也 (1995). 認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ：極限概念を事例として, 数学教育学論究, 63・64, 27-48.
- 溝口達也 (2006). 地域との連携による協同的実践研究の展開：鳥取数学教育研究会（Lapinの会）の発足とその活動の軌跡. 鳥取大学数学教育研究, 8.
- Mizoguchi, T. (2008). Designing the Problem Solving Lesson as an Organization of Students' Mathematical Activities: For Developing the Grounding of Creativity. *Regional studies (Tottori University Journal of the Faculty of Regional Sciences)*, 4(3), 309-326.
- 溝口達也, 矢部敏昭, 足立和美, 喜久山悟 (2008). 教員養成カリキュラムの再構築：教科教育学を中核に据えた授業実践力の育成に焦点を当てて. 2007年度科学研究費補助金報告書「地域の教育福祉諸機関の連携に関する総合的研究—新しい専門性の形成をめざして—」（基盤研究B, 課題番号 17330167, 代表：田丸敏高）, 211-217.
- 中島健三 (1981). 算数・数学教育と数学的な考え方：その進展のための考察. 金子書房.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional STANDARDS for teaching mathematics*. Reston, VA.
- 鳥取県検証改善委員会 (編) (2008). 平成19年度 全国学力・学習状況調査の分析と課題のまとめ 学習指導の改善支援ハンドブック～授業改善から学校改善へ～. 平成19年度鳥取県検証改善委員会.

[資料] 学習過程 (因数分解 第1時)

【問題の提示】
 図の面積と等しい長方形を作りたい。
 縦、横の長さはそれぞれいくらか？

[支] 図のどの部分なら面積を求められる？
 [sub支] (図に切れ目を入れてみせ) この部分の面積は？

数学的活動C1：所与の図をもとに縦、横を決める (面積を求め、分解する)

[活] 面積は、 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$
 答 $x+2, x+3$

[支] x が5だったら複数通りできないかな？
 [sub支] x に数値を代入した図を示す。

数学的活動C2：所与の図をもとに縦、横を決める (図を切り貼りし、)

[活] 下部を切り取り、上部へ移動させればよい。
 答 $x+2, x+3$

[支] 他の変形はできないだろうか？
 [sub支] 別の形の長方形を複数提示する。

数学的活動B：具体値で縦、横の組み合わせの規則性を見つける

[活] $x=0$ のとき、面積6で、(縦、横)=(2, 3)
 $x=1$ のとき、面積12で、(縦、横)=(2, 6), (3, 4)
 ...同様に、結果をまとめる。

x	面積	(縦、横)
0	6	(2, 3)
1	12	(2, 6), (3, 4)
2	20	(2, 10), (4, 5)
3	30	(2, 15), (3, 10), (5, 6)
4	42	(2, 21), (3, 14), (6, 7)
5	56	(2, 28), (4, 14), (7, 8)
6	72	(2, 36), (3, 24), (4, 28), (6, 12), (8, 9)
7	90	(2, 45), (3, 30), (5, 18), (6, 15), (9, 10)
...	...	

[支] 決まり方を見つけるとき、どこを見ていくとよいだろうか。
 差に着目するとどうだろうか。

数学的活動B'：(x+2)(x+3)が見つかった生徒

[活] $x=0$ のとき、(2,3)→ $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$
 $x=1$ のとき、(2,6)→ $(x+1)(x+5)=x^2+6x+5$
 (3,4)→ $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$
 同様に調べていくと、 x がどんなときでも、 $(x+2)(x+3)$ の組み合わせしか所与の面積の式を満たさないことがわかる

[支] 表の縦、横すべての組み合わせが元の図に当てはまるだろうか？
 [sub支] $x=1$ の場合の式を提示する。

数学的活動B'：(x+2)(x+3)が見つかっていない生徒

[活] $x=0$ のときは一通りだから、 x がどんなときでも縦、横はこの組み合わせになる。

[支] 表の長さで長方形をかいてみよう。どんなことがいえそうだろうか？
 [sub支] 表から $x=5$ の場合に考えられる3つの長方形をかいてみせる。

【練り上げ】

(1) 答え (面積： x^2+5x+6)を確認 (縦・横が長方形が1つはありそうだ、ということの共有)

(2) 答えが一通りに決まることについての議論 ((1)の根拠)

- ▶ 図の面積を表す式と図の切り貼りによる変化の仕方
- ▶ 具体的な図の結果を表に表すこと

(3) 表から、どのようにして規則性を見つけるか

- ・ 表の値を比べて、縦・横の組の組み合わせの決まり方を見つけてみよう
- 方法1：面積の式に代入・検証
- 方法2： $x=0$ のときに注目
- 方法3：表の値の縦・横の長さを用いて長方形を描くことで、正方形に近い1つ違いの長さをもつ長方形が必ずできる

(4) 因数分解の一意性についての議論

- ・ 縦、横の長さが1つ違いとなる長方形が1つできること
- ・ こういった組を見つける活動を「因数分解」と呼ぶことの導入
- ・ 効率の良い組の見つけ方を次時への課題とする

鳥取大学数学教育研究 ISSN 1881-6134

Site URL : <http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html>

編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 tsyabe@rstu.jp

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 mizoguci@rstu.jp

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
 - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
 - 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
 - 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
 - その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101 (溝口)

<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/>