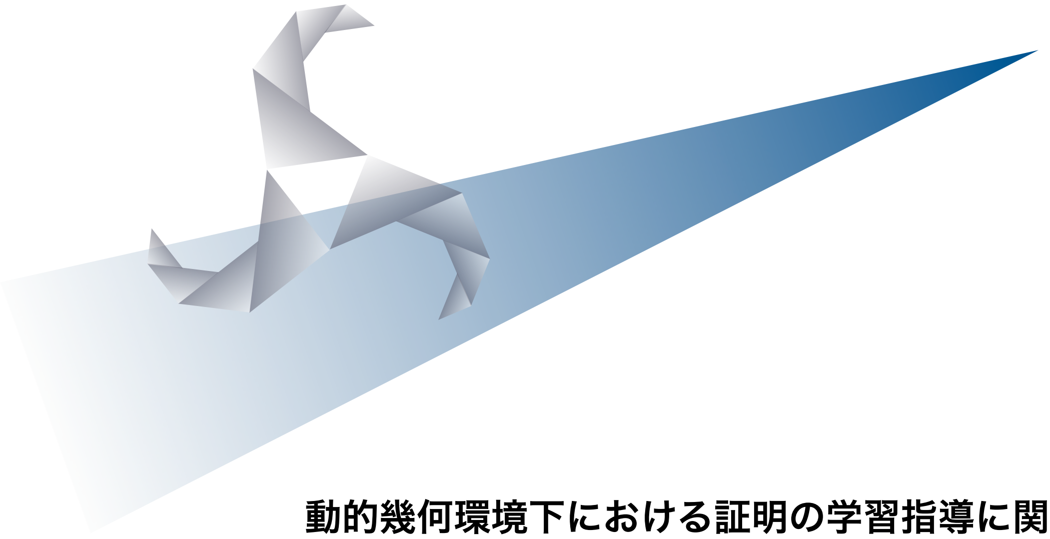
鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education
ISSN　1881−6134



動的幾何環境下における証明の学習指導に関する研究：
生徒が推測を構成し，演繹的な推論の見通しを得るために教師は何をすべきか

田中慎一

vol.9, no.3
Feb. 2007

Site URL：http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第 1 章

本研究の目的と方法

本章では研究の目的と方法について述べる.

1.1.では，本研究に至る動機とその目的とその目的を達成するための課題を述べ，1.2.ではその課題の解決の方法を先行研究の示唆に基づきながら述べる．また，1.3.では本論文の構成を述べる.

1.1. <u>本研究の目的</u>

1.1.1. 研究の動機

本研究の関心は，図形の証明指導において生徒が演繹的な推論の必要性を感じていないという問題をいかに解決すべきかにある．この問題について前田(1979)は，当時の学習指導においても生徒に演繹的な推論の必要性を感じ取らせるものになってはいない，と指摘している．さらに，より多くの事例からそれに潜む性質を明らかにする帰納的な推論を行わせることで，その性質が普遍妥当であることを示す演繹的な推論の必要性を感じ取らせることが可能になるのではないか, と提案されている. しかしながら，生徒に多数の事例を見せ，さらにはそれらに生徒が能動的に働きかけていく学習指導は当時の学習環境や教師の努力にも限界があり，実現が困難であるとも述べられている．

これに対し，現在では多数の事例を「図の移動・変形」によって見せることができ,「作図」によって生徒が能動的に働きかけることを可能とする動的幾何環境が発達しており, 学習環境として用意することが可能である. では，最初に述べた問題に対し，これまであまり論じられていないアプローチ，つまり現在の学習環境の発展を鑑みたアプローチを取ることで解決を行うことはできないか，という考えが本研究の動機である．

1.1.2. 研究の目的

本研究は，生徒が演繹的な推論の必要性を感じていない，という図形の論証指導の問題点を解決することを目的としている．これについて，生徒が帰納的に推測を構成しやすくすることで演繹的な推論を行いやすくなるという前田(1979)からの示唆をもとに，帰納的に推測を構成しやすい環境である動的幾何環境を用意することで，演繹的な推論の必要性を生徒に感じ取らせることが可能になると考える．では，この示唆をもとにした学習指導とはどのようなものか，これが明らかにされなくてはならない．そこで，次の研究課題が設定される．

<u>課題 A：帰納的に推測を構成しやすくし，演繹的な推論の必要性を得させる学習指導とはどうあるべきか</u>

また，そのような学習指導において動的幾何環境はどのような役割を果たすのか, これを明確にする必要もある. よって次の研究課題を設定する.

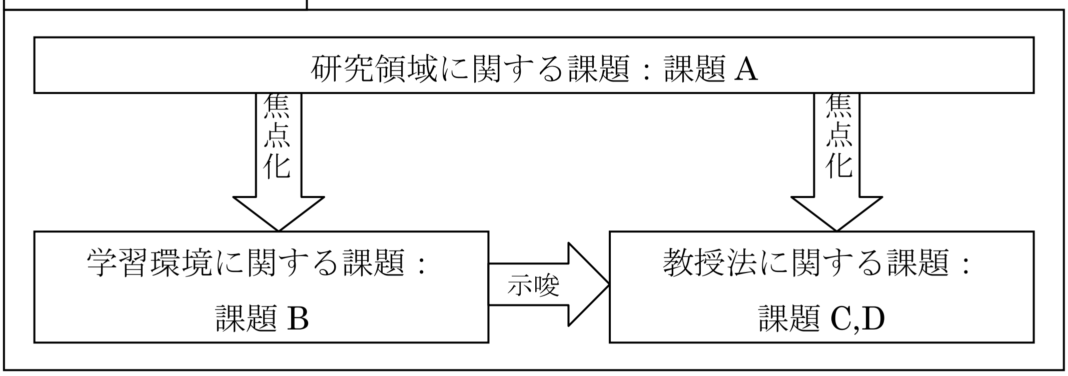
課題 B:上述の学習指導における動的幾何環境の役割とは

次に，明らかとなった動的幾何環境の効果を踏まえ，本研究で提案する学習指導を実現するために教師はどのような支援を行うべきかが課題として考えられる. さらに, 学習指導が今までとは異なるアプローチを採るため, 生徒の活動にも変化が生じると考えられる．そのため，本研究の採るアプローチによってどのような生徒の活動が行われるかを明らかにする必要もある．以上のことをまとめると，次のように課題が設定される.

課題 C：上述の学習指導を実現するために教師は何をすべきか
課題 D：上述の学習指導における生徒の活動とはどのようなものか

これらの研究課題を解決することで，本研究の主たる目的は達成できると考える．また，上記 4 つの課題の関係は次のように図示される.

課題の関係を示す図



課題 A を解決することで, 本研究の研究領域が定められる. これにより, 課題 B,C,D が焦点化される.

課題 B は学習環境に関する課題であり, 課題 C,D は教授法に関する課題である．ただし，課題 B における学習環境とは，詳しくは後述するが通常学習環境として意味する教室内の設備や生徒数などを指すのではない．また，課題 C,D は互いに不可分であり，個々に解決を図ることは困難であることが考えられる．そこで，課題 C,D についてはそれらを同時に解決することのできる研究の方法を採る必要がある．また，課題 B の解決が課題 C,D の解決への示唆を与え, 課題 C,D の解決が課題 B の解決の評価に関わることが考えられる.

1.2. 本研究の方法

本研究は生徒が演繹的な推論の必要性を感じ取るために教師は何をすべきか，を明らかにすることが目的である．

この目的を達成するために，前田(1979)から生徒に帰納的な推論をより行わせやすくすることで，演繹的な推論を行いやすくなるのではないか，という示唆を得た．前田(1979)ではこの方法に対し，当時の学習環境では帰納的に推論を行うには多数の事例を提示することが行いにくかったことも記述されている．そこで，本研究では帰納的に推測を構成しやすい環境である動的幾何環境に注目し，学習指導を提案する．

そこで，課題 A を解決するために，第 2 章では先行研究から，動的幾何環境下における図形の証明の学習指導に関して現在までにどのような課題が考えられ，どのような方法で解決がなされてきたのか，また，残された課題を明らかにする．そして，本研究が動的幾何環境下における図形の証明の学習指導に対してどのようなアプローチを採るかを明確にする．

次に，課題 B を解決するため，第 3 章では第 2 章で明らかにした本研究の採るアプローチにもとづき，生徒が帰納的に推測を構成しやすく，演繹的な推論の必要性を感じ取ることができると考えられる学習指導を前田(1979)の示唆をもとに提案する．また，学習指導としての具体的な事例を挙げ, その中で動的幾何環境はどのような役割を果たすのかを明確にする．

課題 C,D の解決のために, 第 4 章と第 5 章では上述した動的幾何環境の役割をもとに，被験者を生徒，実験者を教師に見立てた教授実験を行い，そのプロトコール分析を行い，教師は何をすべきかを明らかにする．分析は，問題解決における生徒の活動に対して有効であったと考えられる支援を抽出する方法を採る．

第 5 章では第 4 章と違い，まず大学生を対象とした予備実験を行い，生徒の活動と教師の支援についての枠組みを構築した後に，中学生に対する教授実験を行う．これは，第 5 章で行う教授実験は先行研究を基にして課題設定や支援のあり方を考察できないものであり，中学生に対して行う教授実験で扱う問題や支援を考えるための予備資料を用意する必要が生じたからである．

最後に，教授実験から明らかになった枠組みを Lakatos(1980)の述べる数学的推論の本性に基づいて評価し, 本研究の目指す学習指導を提案する．

1.3. 本論文の構成

本論文は第 1 章から第 7 章の 7 つの章および資料から構成されている．

第 2 章では動的幾何環境下における図形の証明指導に関する先行研究を分類・整理し，現在この研究分野で残されている課題を明らかにする．

第 3 章では第 2 章で明らかにした課題に対して，本研究はどのようなアプローチをとるかを前田隆一著「算数教育論」から知見を得，本研究の目指す学習指導の枠組みを明らかにするとともに，具体的な事例を示す．

第 4 章・第 5 章では，第 3 章で明らかにした枠組みを実現するための，教師の支援と生徒の活動を明らかにするために教授実験を行う．

第 4 章では高校生と対象とした教授実験を行い，枠組みと照らし合わせながら，教師の支援と生徒の活動の枠組みを構築する．

第 5 章では大学生を対象とした予備実験を行い，得られた結果を考察することで枠組みを構築する．この枠組みをもとにした中学生を対象とした教授実験を行い，その実証を行うとともに，さらに表現を一般化した枠組みを構築する．

第 6 章では，第 4 章・第 5 章で明らかにした枠組みを考察する中から生じた課題を解決するため，ラカトシュの「数学的発見の論理」から知見を得，本研究の目的とする学習指導を実現するために枠組みどのように用いればよいのかを明確にするために，枠組みの再解釈を行う．

第 7 章では本論文の結論をまとめ，本研究で考察することができなかった，今後の課題を明らかにする．

第 2 章

先行研究における図形の論証指導での
動的幾何環境の扱い

本章では，先に述べた本研究の目的を達成するために，先行研究の知見を得ることを目的とする．

2.1.では先行研究を概観し，現在の動的幾何環境に関する研究領域を明確にし，2.2.ではそれらを分類することでこの領域に残されている課題を明らかにする．

2.1 先行研究の概観

現在，動的幾何環境に関する論文は，コンピュータによる作図ソフト「Cabri-Geometry」や「Geometric-Constructor」等を用いた学習指導に関するものがある．（以下，本論文においては，「Cabri-Geometry」や「Geometric-Constructor」等のソフトを用いてコンピュータのスクリーン上に作図でき，できた図を自由に移動・変形することができる幾何を動的幾何とし，先のソフトを動的幾何ソフトとする．）その中には動的幾何ソフトそのものを研究対象とし，学習指導に利用するためにどのようにソフトを捉えるか，またツールとしてどのように用いるべきか，を研究しているものもある．（例えば，飯島康之.(1991)，清水克彦.(1991),など）

本章では， 証明の学習指導では何が課題とされているかに着目をし，分類を行う．そして，なぜ動的幾何がその課題を解決できると考えられるのかを知るために，動的幾何がどのように捉えられているかに着目をした．これは，本論文の研究課題に対し，先行研究では動的幾何環境に対してどのような捉え方がなされているか，また，動的幾何環境をどのように用いたアプローチが考えられているかについて知見を得るためである．このため，上記のような動的幾何ソフト自身に焦点を当てた研究を外して先行研究を概観した．

2.1.1.作図活動に着目した動的幾何における証明に関する研究

辻は中学校の図形学習において生徒が困難を抱く原因として,「その指導における図(drawing)と図形(figure)の区別のあいまいさを指摘できる」(辻, 1997)と述べ, 図と図形の図形としての認識を促すためにはどうすればよいか，ということを課題として研究を行っている．辻による図と図形の定義は以下のとおりである．

図：実際に描かれたもの，具体的な表現そのものを指している．

図形：概念の定義そのもので,理論的な対象を指している．

指導における図と図形の区別のあいまいさが起こす問題点として「この図と図形の区別があいまいなまま学習を進めると，図形に関係の無い知覚的な要素(図の向きなど)が，生徒の図形学習に影響を与える」と指摘している．このため，図と図形の区別を生徒が認識するために動的幾何環境における作図活動が与える効果を検討している．作図活動には紙と鉛筆を用

いて図を描くことと同じ，目的とする図を描くことと描いた図を変形させることの 2 つの活動が含まれている．辻は中学校 3 年生を対象とした紙と鉛筆を用いた場合と動的幾何を用いた場合の図形の問題解決の比較実験を行い，描いた図を動かすことで，先に述べた図形に関係のない知覚的な要素を少なくすることを確認している．

用いた問題は，「3 点 A，B，C が下図のように与えられています．点 D を取り，四角形 ABCD を作ったときのそれぞれの辺の中点を P，Q，R，S とします．四角形 PQRS が次のような四角形になるためには D をどこにとればいいかその条件を考え,D を作図しましょう．　1．平行四辺形　2．長方形　3．ひし形　4．正方形」である．動的幾何を用いた生徒は初め角度の測定や辺の長さの測定を行っていたが，図を動かすことで角度や辺の長さに関係ない図の要素の関係(中点連結定理，対角線が直行する場合など)に着目できた，と述べている．

このとき動的幾何は生徒に図を図形として認識することを促すために，図を作図するための不必要な要素を減らしその構造に着目しやすくする道具として捉えられていると考える．これは,「作図活動におけるコンピュータ環境の影響」という課題を解決するための研究であるが，生徒に与えた問は点 D をどこに取ればよいか条件を示せというものであり，そのために作図活動におけるプロセスに生徒を意識付けることに着目した研究であると考える．

2.1.2.どのように生徒の考えを読み取るかに関する研究

辻は「動的幾何に関する研究はテクノロジーを利用する個人に着目し，知識を創発する学習者とテクノロジーの間の相互作用の実現に関するものが多かったが，その結果分かったことは「テクノロジーを導入するだけでは教育的な変化は起こらない」ことである」と指摘し(辻，2002a)その理由として 2 点を述べている．1 点目は学習者の実際の認識の研究の不足であり，2 点目はテクノロジーの利用の方法と技術に関する研究の不足である．

1 点目に関して，辻は動的幾何の導入による作図の意味の変化として紙と鉛筆で作図した場合の「条件を満たす図の作図」から「いつでもいえる事実を支える，対象を構成する点の依存関係を決定する活動」に作図の意味が変化したと述べ，学習者の実際の認識を調べるために「点の自由度」に着目することで，この問題を克服できると述べている．(辻，2002b)

点の自由度とは，動的幾何を用いた場合，スクリーン上の何も無いとこ

ろに点を打つと，その点は自由に動かすことができる．これを自由度 2 とする．次に，直線上に点を打つと点は直線上でしか移動できなくなり，これを自由度 1 とする．最後に，直線同士の交点は直線の位置によって決定されるので，点を動かすことができない．これを自由度 0 とする．作図活動においてこの「点の自由度」を決定するものはその図の構造であり,「点の自由度」を観点とすることで教師は生徒の点の依存関係という認識の変化を判断できると述べている．

このことから，辻は学習者がスクリーン上の図をどのように解釈しているかという問題意識に対して点の自由度を考察することで答えようとしていると考えられる．このとき，動的幾何は生徒の認識を読み取るために，点の自由度を表すことができる道具として捉えられていると考えられる．

2.1.3.動的幾何を用いた証明そのものに関する研究

清水・垣花らの研究(1995)では動的幾何ソフトによる作図活動での「測定値」を利用することに焦点を当てている．清水らは以前の調査で生徒が「測定値」を命題の成立の根拠として納得するという活動を行ったことから,「測定値を根拠とする証明は間違いか」という課題を設定した．ここで動的幾何は作図した図の角度や長さを測定する道具として捉えられている．この研究の調査において，生徒にとって測定値は問題を理解するために用いられ，図形の性質を発見することに用いられ，証明の強い根拠となっていることから，測定値の有効性を認めている．そして，先の課題に対し「今後，中学校の図形学習で証明活動において「測定値」を利用した活動(帰納的な活動)を演繹的な活動へとどのように進めるべきか. 中学生の多くが図形の証明に困難を感じていることを考慮すると，演繹的な証明のみが中学生に指導されるべきだろうか.」と述べ，新たな証明の立場を取ることで先の課題を解決しようとしていると考えられる．

2.1.4.どのように証明の必要性を与えるかに関する研究

Laborde(2000)は「生徒に証明の必要性をどのようにして与えるか」という課題に対し，その解決のための研究を行っている．このとき動的幾何は生徒に認識の矛盾を与えるものとして捉えられている．Laborde は Hadas(2000)らの動的幾何を用いた多角形の内角の和と外角の和に関する問題の調査結果から，図を動かすとき，動かした図の動きが動かす前の予測と異なっていることから，生徒はその違いがどこから生まれてきたのか

に着目をし，なぜそのように動いたのか説明しようとし，それが証明の必要性を生み出すことに繋がると述べている．

この先行研究から，動的幾何を用いた図形の学習指導においてどのように証明の必要性を与えるか，という課題があることが言える．

2.1.5.動的幾何とその周りにある環境に関する研究

辻は「学習形態，授業展開などを含めた全体として捉え，学習者自身による知識の構成ならびに諸能力の習得を目指す，学習者と相互作用をする環境の構築の必要性」を考えることが重要であると述べ，(辻，2002a)動的幾何を Brosseau 氏の提唱する「milieu」概念を用いて学習環境の一部であるとし，生徒の知識の生成に重要な役割を果たすと位置づけた．ここでは，動的幾何は生徒が知識を生成するための相互作用する相手として捉えられているといえる．相互作用の具体例として，先の点の自由度の考えを用い，生徒は図に制約を与えそれを動かすことでその動きから制約が適切かどうか確認し，それが適切でなかった場合また制約を加えたり外したりすることで適切になることを目指す，としている．

しかし，このような相互作用の質は，学習者のスクリーン上の対象の解釈に依存すると指摘している．（辻，2003)これについて次のように述べられている．「つまり，「なぜそのような動きをするのか」「変化する性質と変化しない性質の違いは何か」についての理論的な根拠として，要素間にある依存関係を捉えることができるかどうかに関わる．よってこのような解釈の質的な変化，つまりスクリーン上の現象に見られる事実を集め，帰納的に推論するだけでなく，その事実を生じる対象の論理的な構造を捉えることへと変化するための教授・学習計画が動的幾何環境の利用に特有な効果を生じる．」

このことから，動的幾何が証明に貢献するための教授・学習計画はどのように作られるべきかという課題に対し，動的幾何は学習者の周りにある環境の一部と捉えられ，その環境を理論的に考察することで解決を目指しているといえる．

2.2 先行研究から得られた課題

先行研究を概観することで，以下の 5 つに分類ができた.

1. 作図活動に着目した動的幾何における証明に関する研究
2. どのように生徒の考えを読み取るかに関する研究
3. 動的幾何を用いた証明そのものに関する研究
4. どのように証明の必要性を与えるのかに関する研究
5. 動的幾何とその周りにある環境に関する研究

図形の証明の学習指導を行うにあたり生徒の活動を見ないで指導を行うことは現実的ではない．そこで「2.どのように生徒の考えを読み取るかに関する研究」，の内容を考える必要があり，生徒の考えを読み取るためには「1.作図活動に着目した動的幾何における証明に関する研究」，の内容を考えることが必要となる．また，動的幾何を利用した授業を考える際には動的幾何を含んだ教師・生徒といった学習環境を考えることの必要性があると「5.動的幾何とその周りにある環境に関する研究」で述べられているので，動的幾何を含む学習環境を考えることも必要になる.

本論文では，この分類の「3.動的幾何を用いた証明そのものに関する研究」と「4.どのように証明の必要性を与えるかに関する研究」，に関わる分野の研究から示唆を得ることができる.

まず，「3.動的幾何を用いた証明そのものに関する研究」であるが，今回用いた先行研究において動的幾何を用いた証明に対する研究は清水・垣花の研究のみであった．辻は「“証明を書く”ことに対して，直接的に動的幾何環境が効果を持つとは言いがたい」(辻，2003)と述べており，動的幾何を用いることと現在行われている証明を行うことの間には，これらが直接結びついていないという問題があると考えられる．この，動的幾何を用いることと現在行われている証明指導の間にある問題について考察することは本研究に必要であると考えられる.

次に，「4.どのように証明の必要性を与えるかに関する研究」について清水・垣花らは動的幾何を用いた証明として中学校の図形指導においては演繹的な証明ではなく帰納的に確かめられたものを認めようということを結論として述べており，上で述べた問題を解決する 1 つの方法であると考えられる．これは「コンピュータの出現により「測定」が「調べつくし」(完全帰納法)という形で証明の役割も持つようになり，それを視覚的に見るこ

とが可能になってきた」(清水・垣花,1996)ということをもとに述べられている．しかしながら，本論文では「生徒が難しいと感じているから帰納的な推論を認める」のではなく，どのような証明を行わせたいのか，それに適する推論形式はどういったものなのか，という考察を経た上で新たな証明を認めるかどうかを判断したい．そして，新たな証明観を作り上げるにしろ，従来どおりの“証明を書く”と述べられている証明を行うにしろ，その必要性をどのように導くのか，を検討する必要があると考える．

これらの先行研究から明らかになった課題について，本研究はどのようなアプローチを採るかを次章で明らかにする．

第 2 章の要約

第 2 章では，動的幾何環境下における図形の証明の学習指導についてどのような先行研究が行われているか，その目的と動的幾何環境の扱いについて考察を行った．

その結果,「動的幾何を用いた証明そのものに関する研究」と「どのように証明の必要性を与えるかに関する研究」, に関わる分野の研究から課題を得ることができた．

前者からは動的幾何環境を用いることと生徒が証明を行うことの直接的な因果関係について課題が残されていること，後者からは図形の論証指導に関して，依然として証明の必要性をどのように与えるのか，という点について課題が残されていることが明らかになった．

次章ではこれらの課題に対し，本研究がどのようなアプローチを採るかについて述べる．

第 2 章の引用・参考文献

辻宏子.(1996).図形の問題解決における動的変形の効果に関する検討　―生徒の活動の分析を通して― ,第 29 回数学教育論文発表会論文集,625-626.

辻宏子.(1997).コンピュータ環境下での作図活動の効果,平面図形の学習での図の図形としての認識を促す場の検討,日本数学教育学会誌,79(11),11-19.

辻宏子.(1999).数学の教授学習におけるコンピュータ利用の捉え方についての一考察　―相対的システム“milieu”の概念の導入―,第 32 回数学教育論文発表会論文集,119-124.

辻宏子.(2000).図形学習の作図活動における認知的人工物としてのコンピュータについての考察,第 33 回数学教育論文発表会論文集,131-136.

辻宏子.(2001).コンピュータを利用した教授＝学習環境の構築に関する一考察,第 34 回数学教育論文発表会論文集,587-588.

辻宏子.(2002a).図形学習のための学習環境の構築に関する一考察　―作図活動に着目した教授学的状況の展開―,第 35 回数学教育論文発表会論文集,277-282.

辻宏子.(2002b).数学教育における教材・教具としてのコンピュータの機能に関する一考察,筑波教育研究,第 21 号,47-54.

辻宏子.(2003).動的幾何環境における学習者の作図活動と「点の自由度」の認識に関する一考察,第 36 回数学教育論文発表会論文集,193-198.

辻宏子.(2003).証明と動的な幾何環境の利用に関する一考察,第 36 回数学教育論文発表会論文集,228-231.

清水克彦.(1991).数学的問題解決と道具の相互作用に関する研究　―幾何ソフト Cabri-Geometry を事例として―,第 24 回数学教育論文発表会論文集,245-250.

垣花京子&清水克彦.(1995).図形の証明問題での測定値の役割　―コンピュータ環境下における生徒の活動分析を通して―,日本数学教育学会誌,77,17-22.

清水克彦&垣花京子.(1996).学校数学における実験・観察的方法の導入と証明の機能の変化についての考察　―コンピュータによる実験数学と証明―,第 29 回数学教育論文発表会論文集,223-228.

飯島康之.(1991).作図ツールの導入に伴う作図の新しい役割について,第24回数学教育論文発表会論文集,275-280.

飯島康之.(1992).数学的探求のための環境としての作図ツール　―事実の収集可能性と数学的知識の実行可能性の観点からの考察―,第25回数学教育論文発表会論文集,445-450.

飯島康之.(1996).テクノロジーを用いた数学的探求の研究において注目すべき緒変数について　―学習環境の変化によって変わるもの―,第29回数学教育論文発表会論文集,499-504.

Laborde, C. (2000). Dynamic Geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving, *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151-161.

第 3 章

本研究の対象とする図形の論証指導での
動的幾何環境の扱いとは

3.1.図形の証明指導に対する本研究のアプローチ
3.2.本研究のアプローチの具体例
第 3 章の要約

3.1.では第 2 章で得られた先行研究からの知見を基に，本研究の目的を達成することが期待される学習指導を提案する．また，この学習指導において本研究が認める動的幾何環境の役割を述べる．

3.2.ではその役割を具体的な事例を通して明らかにする．

3.1. 図形の証明指導の問題点に対し本研究の採るアプローチ

従来，図形領域の学習指導において生徒が与えられた図を基に推測を生み出すことの重要性は述べられている(前田,1979)．しかし，与えられた図を生徒が目的を持って移動させることや変形させることができないため，例えば図を変形させたときその変化の中から推測を生み出すことや，推測を生み出すために多くの図を必要とする性質であった場合，推測を帰納的に構成することが困難であったことも指摘されている．これに対し,現在では CabriGeometry や Geometric Constructor といった動的幾何ソフトの使用により生徒が自ら図を自由に移動･変形させることが可能となっている．このようなテクノロジーの発達によって，従来よりも推測を帰納的に構成しやすい学習環境が構築可能であることが Laborde(2000)において明らかにされている．一方，辻(2003)は「“証明を書く”ことに対して，直接的に動的幾何環境が効果を持つとは言いがたい」と述べており，動的幾何を用いることと現在行われている証明を行うことの間には，これらが直接結びついていないという問題があると考えられる．以上のことから動的幾何環境下における学習指導は推測を帰納的に構成しやすいという利点を持ちながらも，演繹的な推論つまり証明の必要性を生徒が感じないという問題を含んでいると言える．

そこで，動的幾何環境下における探究活動の中で生徒が推測を帰納的に構成することを踏まえ，本研究では推測を演繹的な推論によって普遍に妥当であることを明らかにし，その結果未知の命題を真であるものとして受け入れることが可能となる学習指導の構築を提案する．この学習指導が演繹的な推論の必要性を生徒が感じないという問題に対して有効に機能すると考えられる理由は，新たな課題に対しそれが常に成り立つこと，既習の事実に帰着できそれが妥当であることを示すためには演繹的な推論を用いざるを得ないと考えられるからである．

先に述べた学習指導を行うにあたり，生徒に真偽が明らかでない命題を提示することにより，その真偽を探求することが期待される．ここでは「この場合には成り立ちそうだ」「この場合には成り立たない」といった試行錯誤の結果，命題に対する推測を構成することが考えられる．このような活動を期待するとき，できるだけ多くの事実を収集し，推測を構成しやすくするために動的幾何環境が適していると言え，動的幾何環境はそれらに共通する一般的な性質への推測を帰納的に構成しやすくするためのツールとして役割を果たすことが考えられる．

次に，推測がなぜ常に成り立つと言えるのか，それはどのような既習の事実に基づいているのかを示すために生徒が演繹的な推論の必要性を考え，用いることを期待する．ここで，①「帰納的に構成した推測はどのような既習の事実に基づいているのかを明らかにすること」さらにそれがどのようにして成り立つ場合と成り立たない場合に影響を与えているかを明らかにするためには②「生徒が目的を持って図を移動・変形させること」が有効であると考える．そのために動的幾何環境が必要と言え，動的幾何環境はこの活動の中で演繹的な推論を行うための見通しとなる推測を与える役割を果たすことが考えられる．

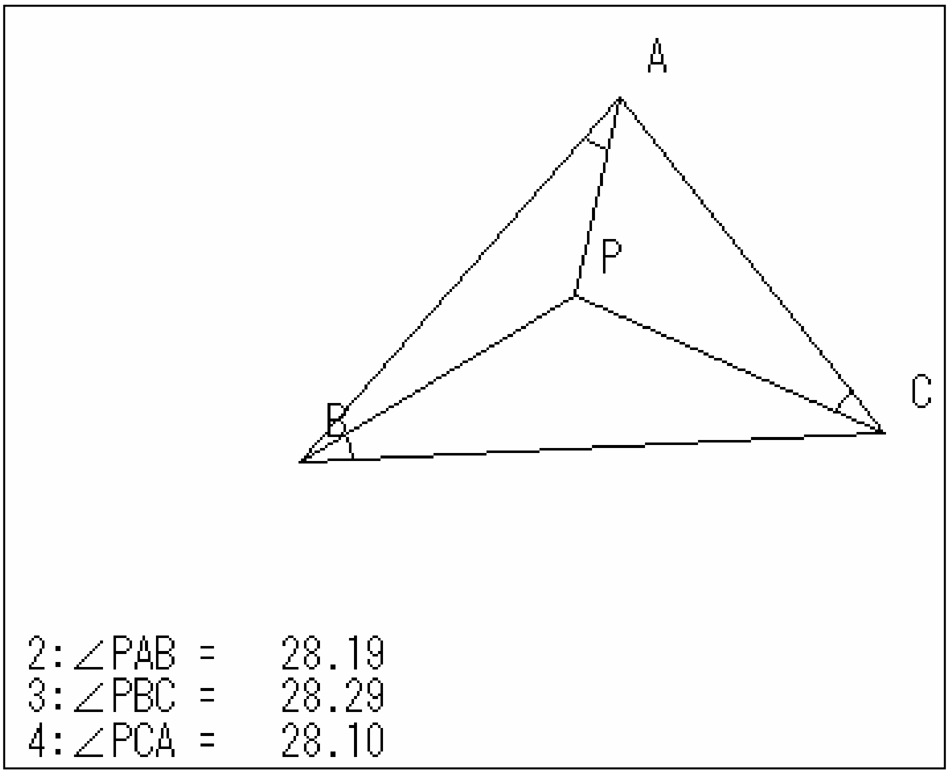
3.2. 本研究の採るアプローチの具体例

3.1.で考えられた動的幾何環境の役割を，事例を用いて具体的に示す．事例として用いる問いは次の通りである．

問：△ABC の中に∠PAB=∠PBC=∠PCA となるような点 P を作図せよ．また，なぜその作図方法で点 P が得られるか説明せよ．

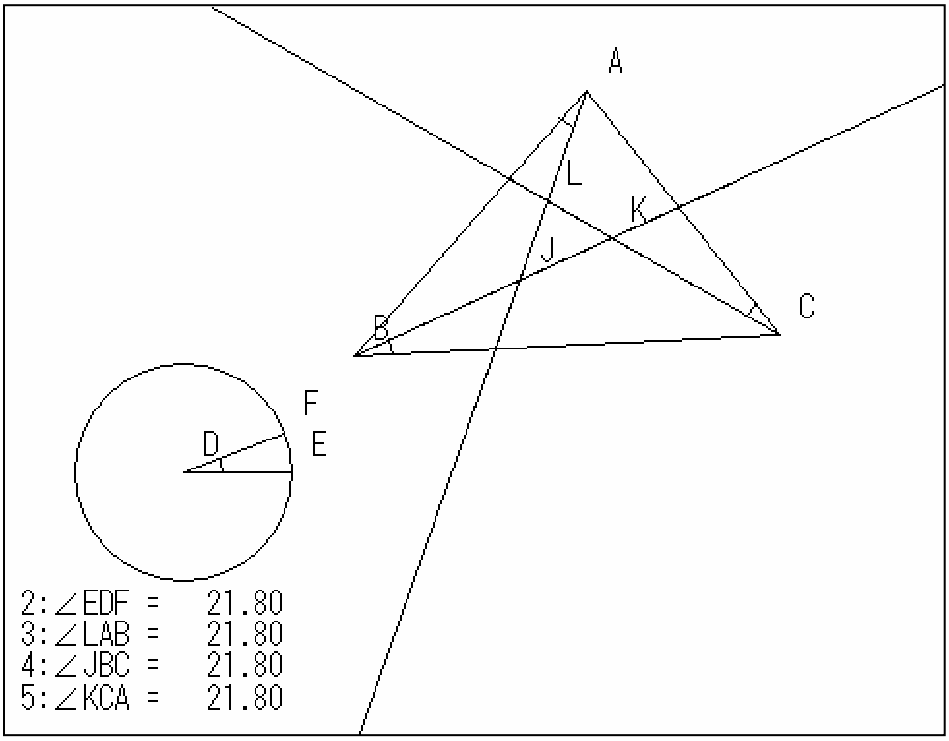
問いは「△ABC の中に∠PAB=∠PBC=∠PCA となる点 P を作図せよ.」という Brocard の問題を改変したものである．この問いを事例として用いることに適していると考えられる理由は，この問いを解決するにあたり軌跡を用いて問題の困難な点を焦点化し，さらに軌跡から推測を帰納的に構成するためには動的幾何環境が適していると考えられるからである．

この問いを提示した場合，予想される活動としては△ABC の内部の任意の位置に点 P をとり，∠PAB,∠PBC,∠PCA を表示させ，これらの角度が等しくなる位置を探る活動が考えられる．(図 1)また，△ABC の形状に着目し，二等辺三角形や正三角形といった特殊な場合において点 P はどの位置になるか探る活動を行うことも考えられる．



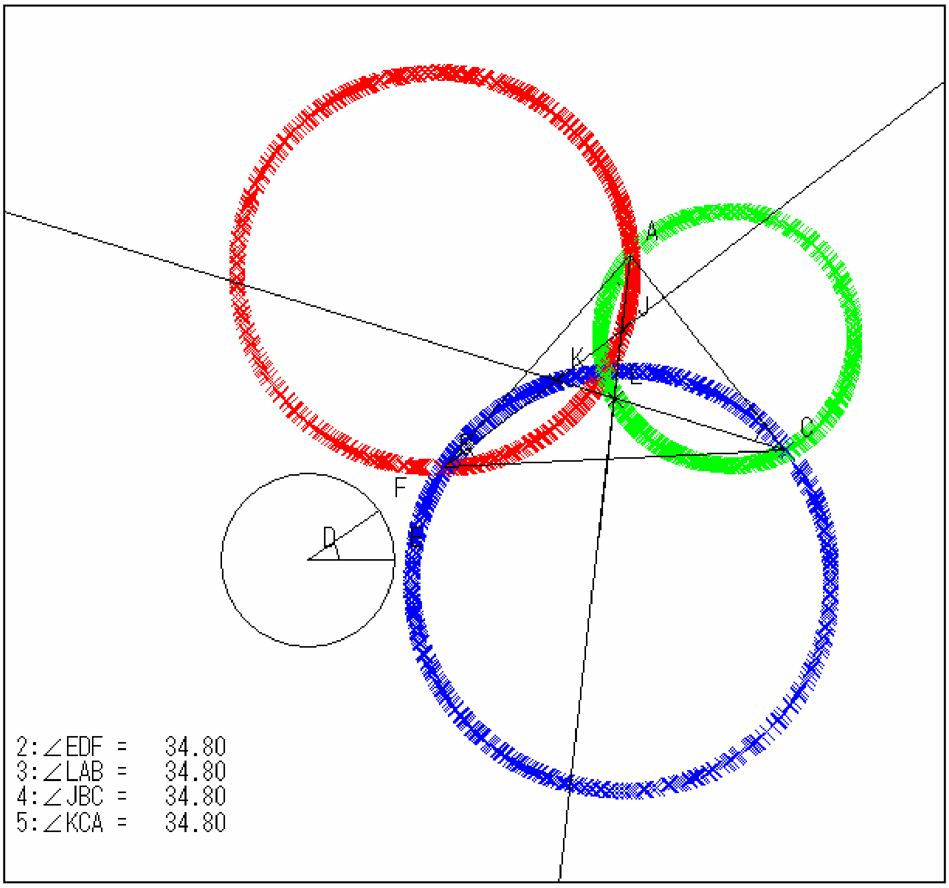
(図 1)

しかし，△ABC が特殊な場合や任意の△ABC において点 P の位置を発見したとしても，△ABC の形や位置が変わると点 P は条件を満たさなくなる．そこで，角度が同じ場合にその性質はどうなっているか，という観点の変更を期待する．動的幾何ソフトには特定の角度を参照して別の位置に角度をコピーする機能がある．これを利用し，各辺に対して同じ角度を持つ半直線を各頂点から引いた図が次の図 2 である．



(図 2)

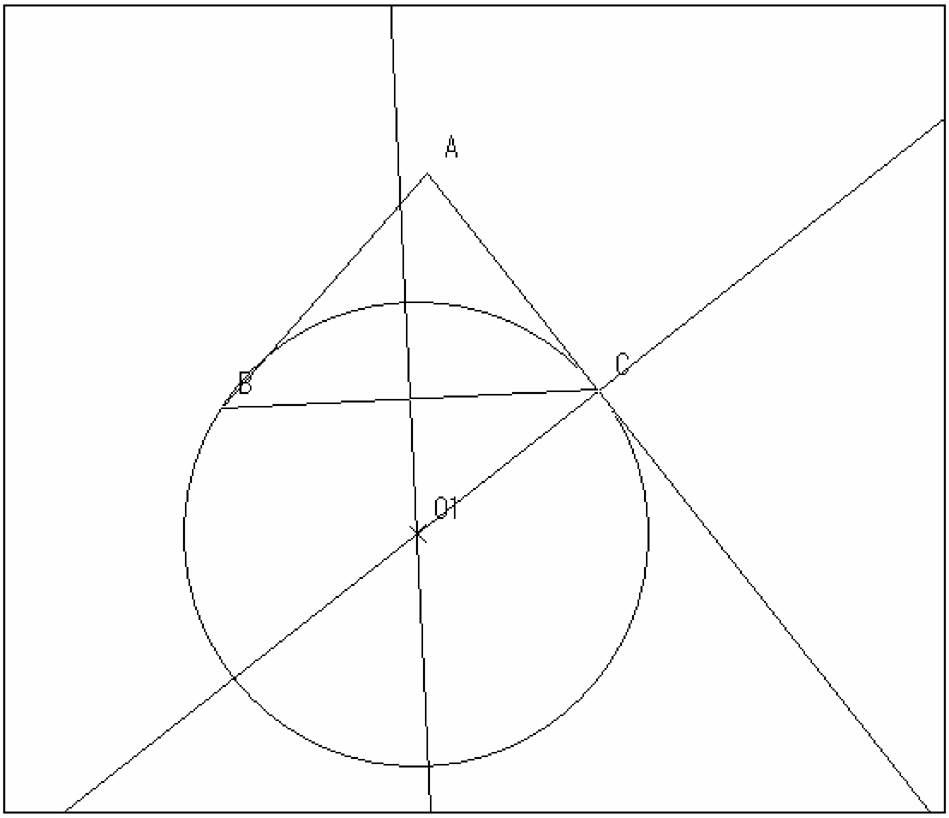
それら 3 本の交点の軌跡は各辺を弦とする 3 つの円を描き，3 つの円はその円の弦となっている辺ではない辺に接している．(図 3)それらの円は 1 点で交わり，その交点が求める点 P となる．ここで，なぜ接するのか，なぜ 1 点で交わり，それが求める点となるのか，という推測を帰納的に構成することを期待する．



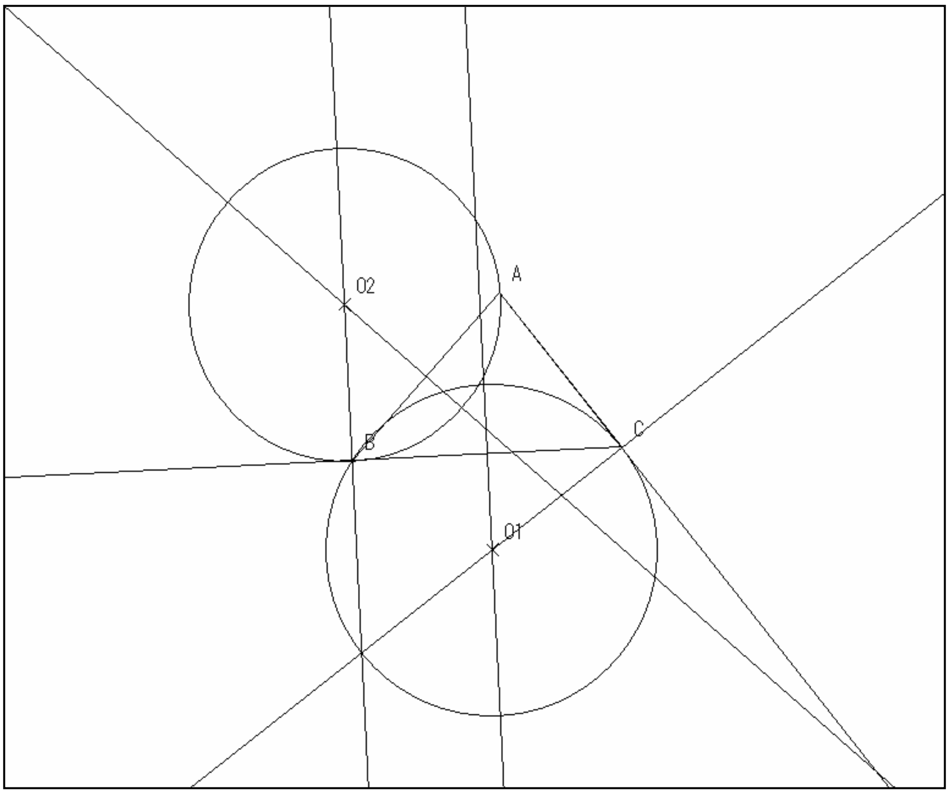
(図 3)

先に挙げた①の活動は点 P が 3 円の交点である理由を接弦定理から示すことと言える．軌跡の円に内接する三角形の内角と軌跡の円に交わる線分の成す角度が等しくなることから，軌跡の円に交わる線分は円に接していることが言える．具体的な角度で示せば∠KBC=∠KCA となる．同様にして，∠LCA＝∠LAB，∠JAB=∠JAC．これより，円に内接する三角形の頂点 J,K,L が一致する 3 円の交点では 3 つの角度が全て等しくなり，点 P となる．

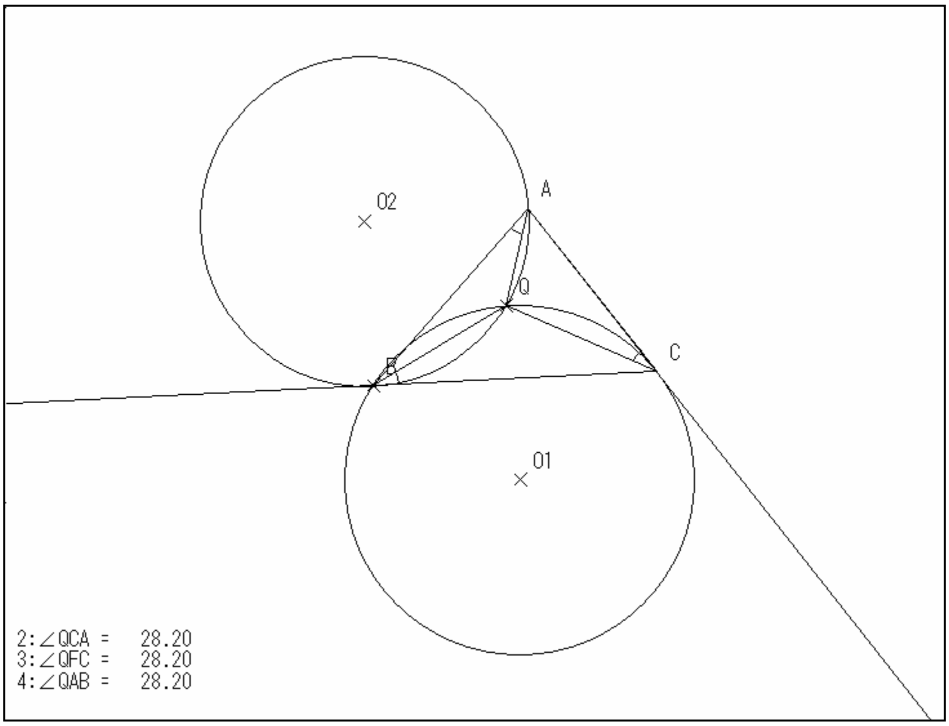
また，②の活動は接弦定理を利用して作図をすることによってできる点が推測と一致し，図を移動･変形させてもその関係が保持されることから，推測が普遍に妥当であることを確認することと言える．接弦定理を利用して作図を行うことで図 4,5,6 を描くことが期待される．



(図 4)

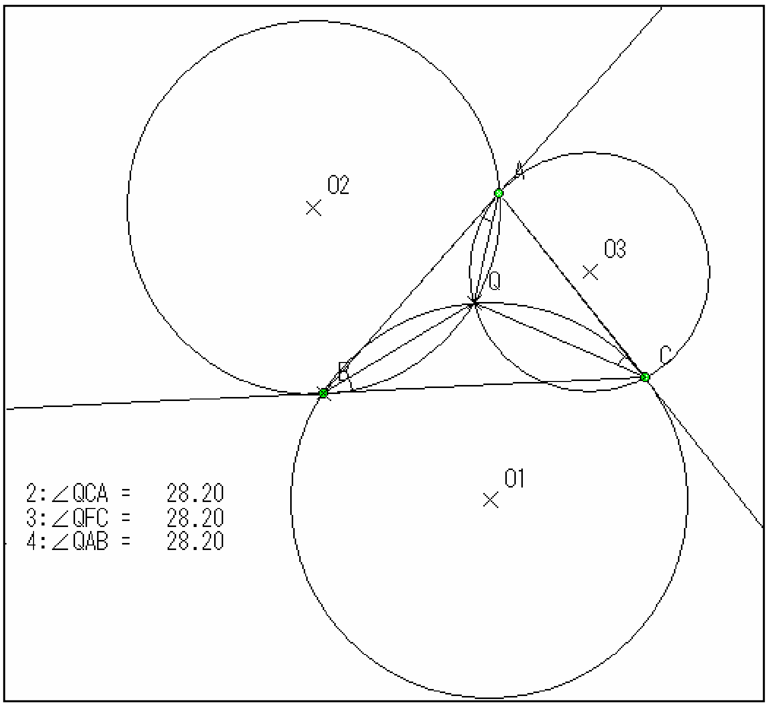


(図 5)

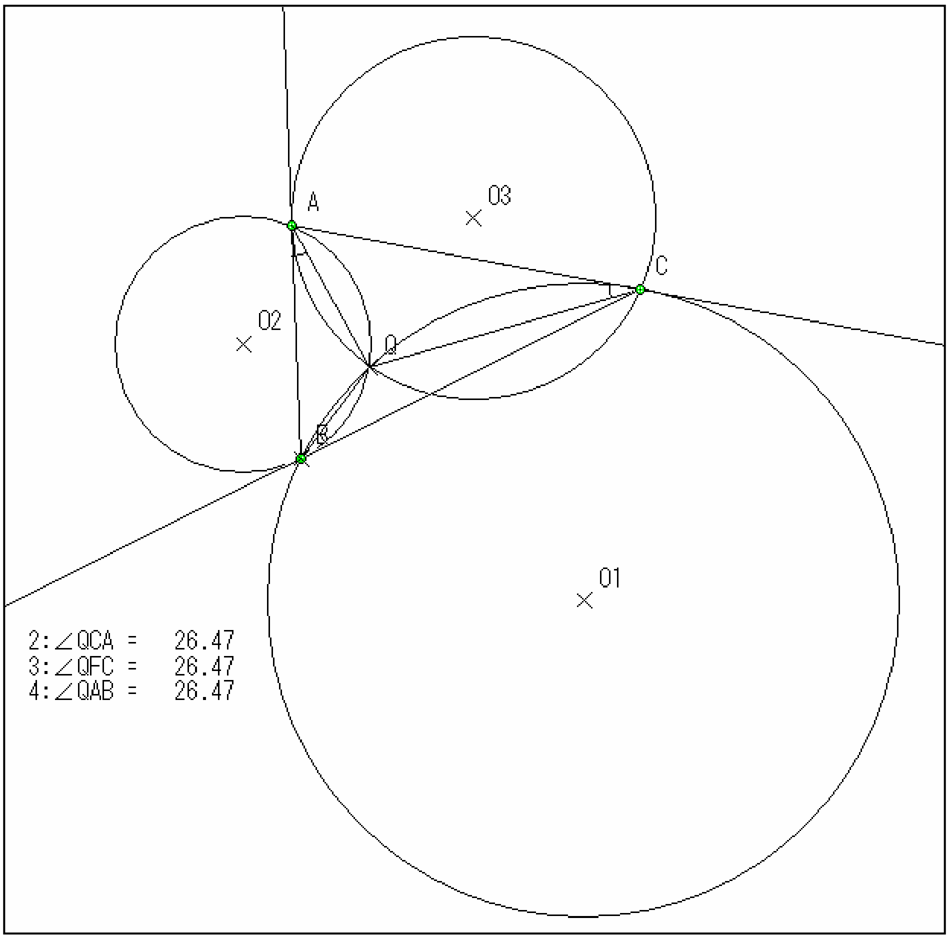


(図 6)

このように，生徒が自ら推測を普遍妥当であると示そうとすれば，接弦定理という既習の事実に基づき，演繹的な推論を行うことが必要になると言える．そして，問いにおける動的幾何環境の決定的な役割は，接弦定理を用いれば推測が普遍妥当であると示せそうだという見通しを与えることである．この見通しを得られた結果，図 4,5,6 と接弦定理を用いた作図を行うことが期待でき，さらに 3 円の交点が一致することとそれが△ABC を移動・変形させてもその関係が保持されること(図 7,8)を接弦定理をもとに説明することが期待できる．



(図 7)



(図 8)

では，提案した学習指導を実施するにあたり，教師の支援はどのように行われなくてはならないだろうか．また，本論文において動的幾何環境に認める役割は直接的に観察できるものではない．そこで，生徒の活動を観察することを通してその役割がどのように影響を与えるかを観察することが方法として考えられる．

つまり，本論文において動的幾何環境には 2 つの役割が考えられるが，これを踏まえると教師の支援と生徒の活動はどのように考えるべきなのか，これらが次に議論されなくてはならない．

第 3 章の要約

第 3 章では，生徒が演繹的な推論の必要性を考え，用いることができるための学習指導を提案した．そして，この学習指導において本研究が動的幾何環境に認める役割として以下の 2 つが考えられた.

- 帰納的に事実を集め，推測を構成しやすくする役割.
- 推測が普遍妥当であることを示すための見通しを与える役割.

特に後者は生徒が演繹的な推論を用いるために重要な役割を果たすと考えられる．これらの役割を学習指導に活かすためには，教師の支援がどのように行われるかを明らかにする必要があると同時に，生徒の活動がどのように行われるかも明らかにする必要がある．そこで，次章からは教授実験を行うことで教師の支援と生徒の活動を明らかにする.

第 3 章の引用・参考文献

宇沢弘文.(1998).好きになる数学入門　2　―図形を考える　幾何―,岩波書店.

辻宏子.(2003).証明と動的な幾何環境の利用に関する一考察,第 36 回数学教育論文発表会論文集,228-231.

前田隆一.(1979).算数教育論,金子書房.

Laborde.C.(2000).Dynamic Geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving, *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151-161

第 4 章

帰納的に事実を集め，推測を構成しやすくする役割を学習指導に活かすために教師は何をすべきか

本章と第 5 章では，第 3 章での課題を受け，動的幾何環境下における教師の支援と生徒の活動を明らかにすることを目的とする．そのためにまず，4.1.では動的幾何環境下における教授実験とはいかなるものであるかを述べ，4.2.では高校生を対象とした教授実験の計画の概要を述べる．4.3.では教授実験結果を述べ，これを 4.4.で考察し，実験から得られた教師の支援と生徒の活動を相としてまとめる．

4.1. 動的幾何環境下における教授実験

動的幾何環境下における教授実験には，環境の構成要素として生徒，教師，コンピュータ，問い，などが考えられる．教師は生徒に動的幾何ソフトを用いて解決を行うことが適していると考えられる問いを用意し，生徒に自力解決を行わせる．動的幾何ソフトを用いることで生徒は自身の考えをスクリーン上に作図活動やそれを操作する活動として顕在化でき，またスクリーン上に現れた図の振る舞いから自身の考えを修正し，修正した考えを再びスクリーン上に表すことが可能となる．

動的幾何環境における実験の方法としては，集団を対象とした方法(垣花＆清水，1995)，生徒のペアを対象とした方法(Laborde，2005)が先行研究として行なわれている．集団を対象とすることは量的なデータを得られる利点があり，ペアを対象とすることは生徒の考えを顕在化できる利点がある．しかし，ここでは教師の支援とそれを受けての生徒の活動を明らかにすることが目的であるのでこれらの方法ではなく，被験者 1 人に対して実験を行なう．

そして，教師は生徒の活動が停滞したと判断すればすぐに支援を行なえるように生徒のそばで常に解決活動を観察する．これは，現行の学習指導において動的幾何ソフトが常に扱われておらず，生徒はその使用に慣れていないと考えられるので，解決に支障が無いように操作を支援することも意図している．

4.1.1. 本研究における教授実験の意味

動的幾何環境を用いた教授実験を行なうことは，生徒が動的幾何環境の役割の影響を受けて行う活動を観察可能にすることを意味する．これは，その役割が効果を与えていることを実験者が判断することを可能にする．また，被験者の考えはスクリーン上に作図することや図を操作することで顕在化でき，実験者の支援の結果どのような思考へと変化したのか明らかにできることを意味する．これにより，被験者の活動と実験者の支援を記録することで解決活動においてどの支援が機能したかを明らかにすることが可能となる．

よって，教授実験を行なうことにより本研究での目的である動的幾何環境の役割が効果を与えていると確認ができる学習場面においての生徒が行なう活動を明らかにし，生徒の解決活動からどのような教師の支援が機能したか明らかにできると考えられる．

4.2. 教授実験計画

4.2.1. 日時

平成 17 年 11 月 23 日　解決活動 150 分

4.2.2. 対象

実験の対象を高校 3 年生とする．これは，実験に用いる問いが現行の学習指導で扱われていないものであるが，解決に必要とされる知識は高等学校を終えるまでに学習する内容であるので，対象を高校 3 年生とした．

4.2.3. 機器・ソフトウェア

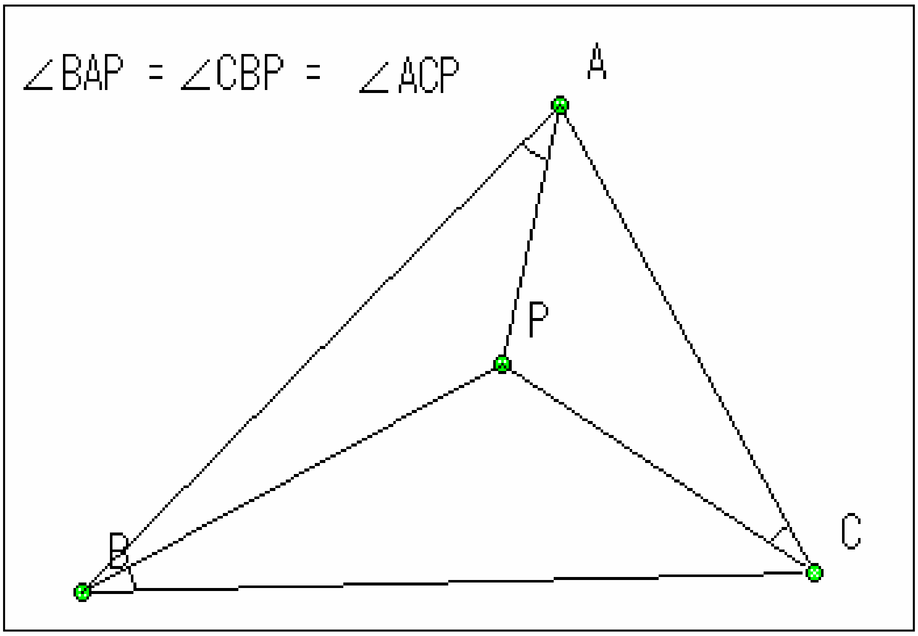
Windows Xp　Geometric Constructor　Win

4.2.4. 実験に用いた問題

実験に用いた問題は右のもの [1]である．「△ABC の中に∠PAB＝∠PBC=∠PCA となるような点 P を作図せよ．また，なぜその作図方法で点 P が得られるか説明せよ．」

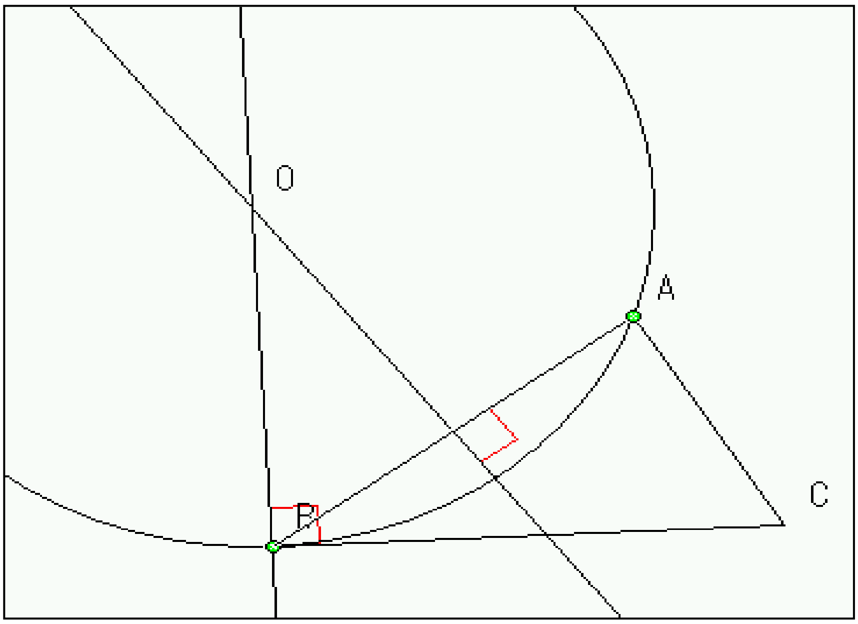
4.2.5. 実験の手順

VTR を用いてパソコンのモニターを記録するとともに，そのときの実験者と被験者の発話を記録した．これは Brocard 点と呼ばれる点を作図する問題である．点 P は次に示す(図 9)のように作図される．



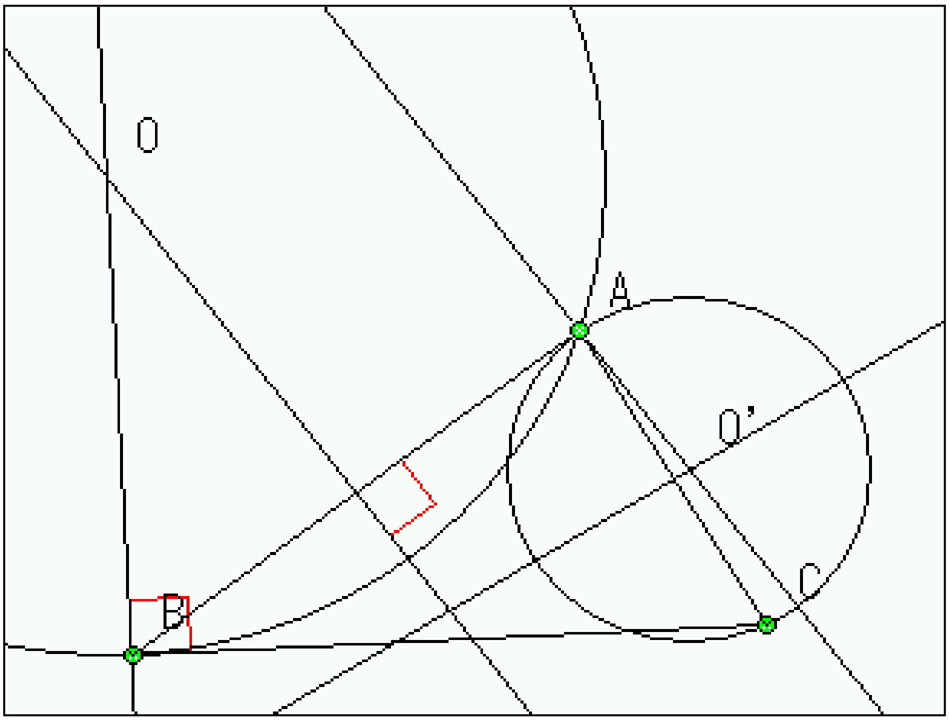
(図 9)

この問題の解決にあたる点 P の作図方法は以下の通りである.「B において BC に立てた垂線と，AB の垂直二等分線が交わる点 O を中心として，半径 OA=OB の円 O を描く(図 10).

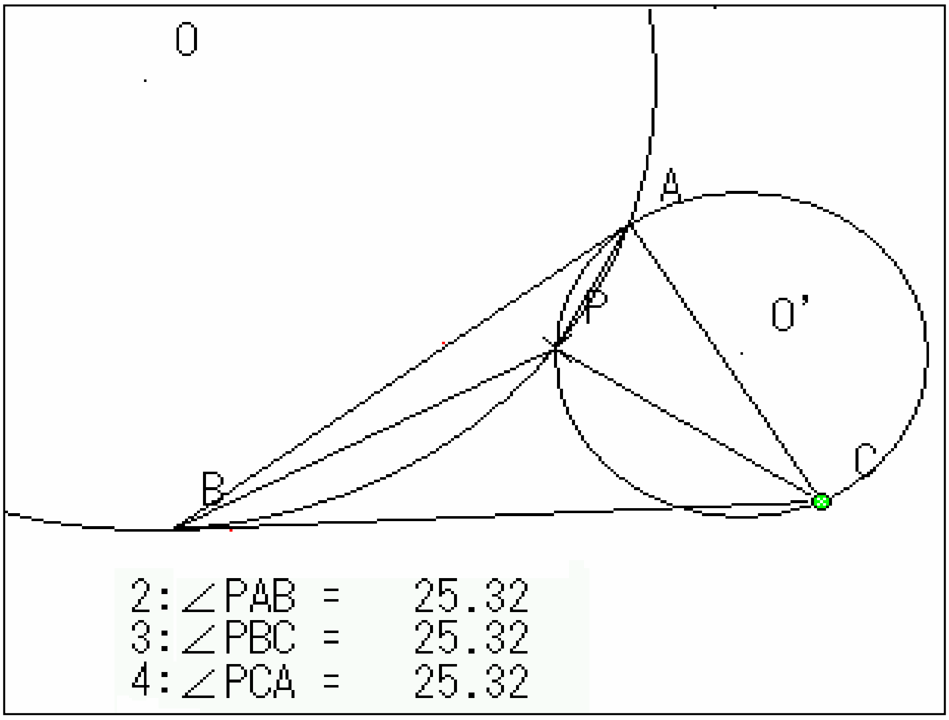


(図 10)

また，A において AB に立てた垂線と AC の垂直二等分線が交わる点 O を中心として，半径 O’A=O’C の円 O’を描く．(図 11)この 2 つの円 O，O’の A 以外の交点が求める点 P である．(図 12)

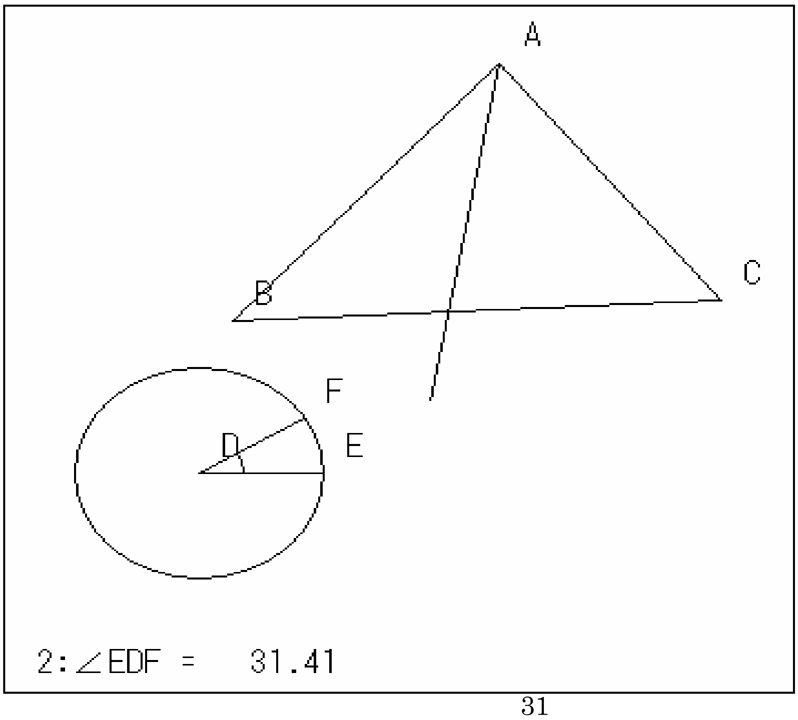


(図 11)

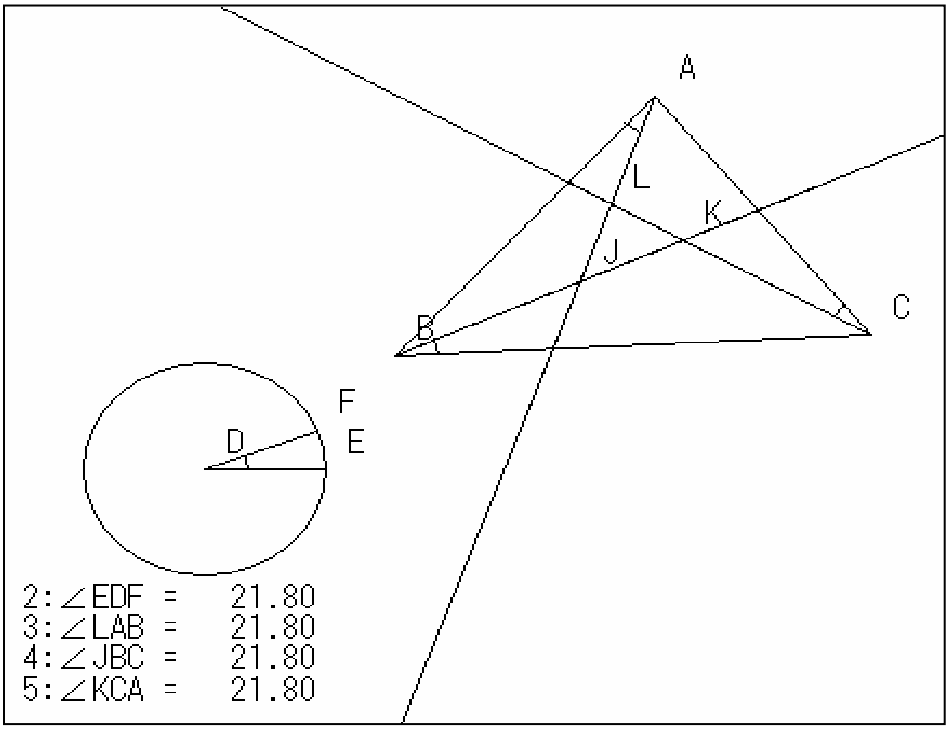


(図 12)

BC は円 O に接するので∠PAB=∠PBC，また AB は円 O'に接するので∠PCA=∠PAB．従って∠PAB=∠PBC=∠PCA となる.」この解決において動的幾何環境の「帰納的に事実を集め，推測を構成しやすくする役割」が解決に影響を与えたならば，△ABC の形状に依存せず作図を行なうためには角度のみに着目をすればよいという推測を構成しやすくなり，∠PAB＝∠PBC=∠PCA という条件を満たすための作図手順を求める活動を行なうと考えられる(図 13，14).

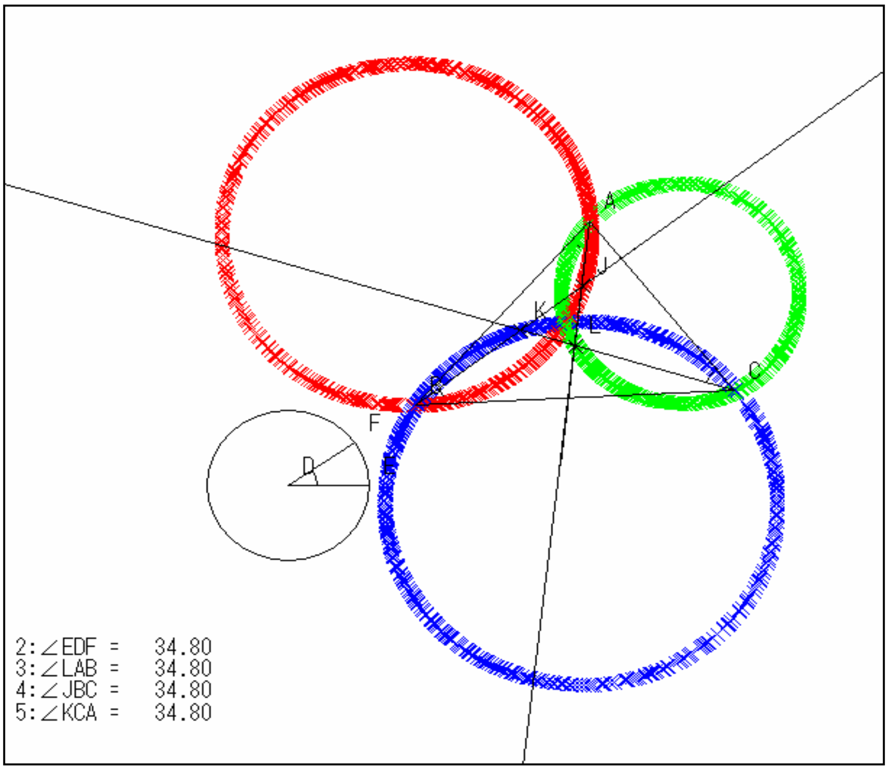


(図 13)



(図 14)

また，この手順が明らかになったときに見られる点の特徴は∠PAB＝∠PBC=∠PCA となるように動的幾何ソフトの機能を利用して作図した線分の交点の軌跡が円を描くことである(図 15)．この活動から，求める点はそれらの円の交点であろうという推測を構成しやすくなると考えられる．



(図 15)

4.3. 実験結果

この実験において被験者が構成したと考えられる推測は大きく二つに分けられる．一つ目は求める点 P を作図する手がかりを明らかにするためにどのような手続きを用いればよさそうかという推測である．(活動 A)二つ目は求める点 P はどのような手順で作図ができそうかという推測である．(活動 B)以下に，被験者が推測を構成した活動の前後の記録を記述する．合わせて，それぞれの活動において実験者が行なった支援も記述する．

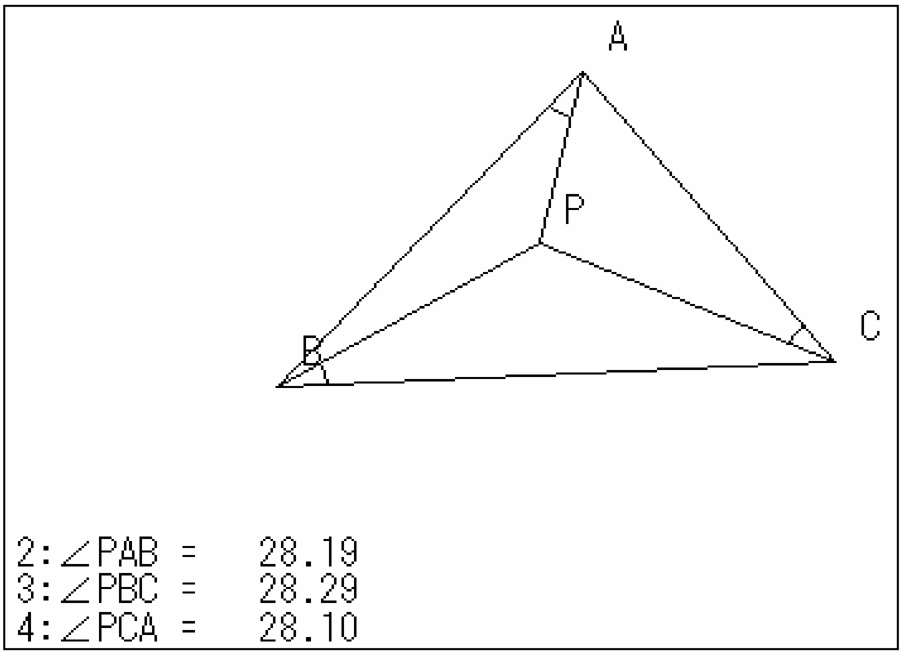
4.3.1. 活動 A

被験者はこの問題を解決しようとしたときの困難な点として△ABC の内部の任意の場所に点 P を取り，線分 PA，PB，PC を引くと点 P を動かすたびにそれぞれの角度が変わってしまうことに気がついたと考えられる．これは

A-1：個々に角度を決定しようとする活動

実験者(以下 EX)001：点 D(図 a-１では点 P)を動かすと角度はどうなる？

被験者(以下 Su-A)002：全部変わる．



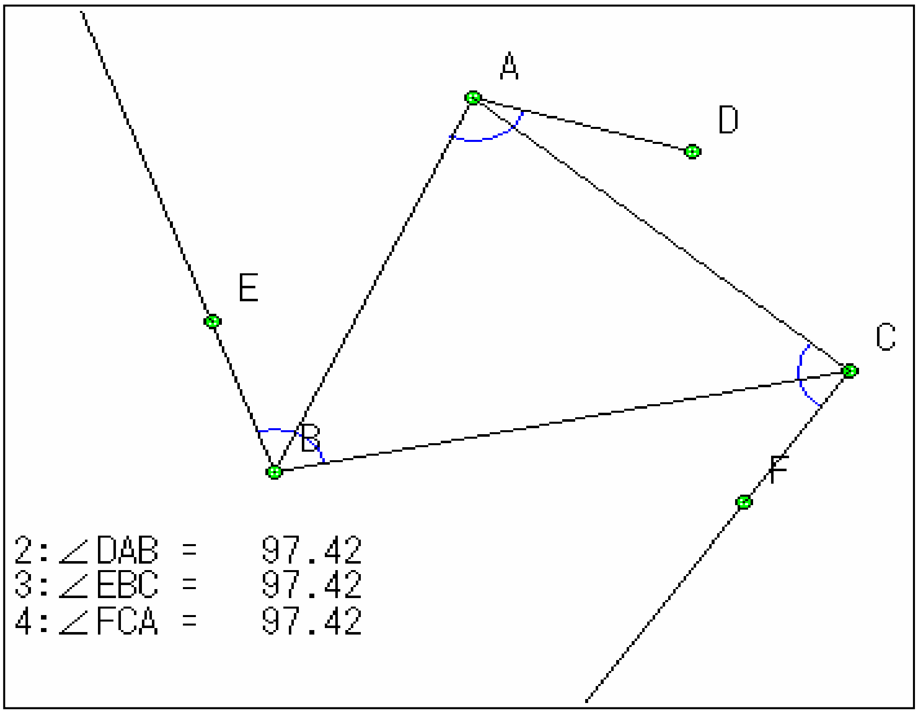
(図 a-1)

という実験者の質問に対する被験者の答えから判断できた．その後被験者は個々に角度を変化させることから 1 つの角度を固定してそれに他の角度を揃えることを行なった．

A-2：角度を同時に変化させる活動

EX003：じゃあ，考えやすくするためにはどうしたらいいと思う？
Su-A004：点 P を最初においてから ABC を決める．
EX005：逆の方向にいくわけだね．それは(位置を)決められるかな？
Su-A006：難しい．
EX007：3 つ全部が動くから難しいんだよね？
Su-A008：1 つずつ動かす．

活動 A-2 を行った後，被験者に特定の角度を参照して他の場所へその角度をコピーできることが可能であることを伝え，作図を補助した(図 a-2)．



(図 a-2)

A-3：1つの角度を固定し，それに合わせて他の角度を変化させる活動

EX034：∠DAB をコピーして貼り付けることができる.（∠EBC を測定し，∠DAB＝∠EBC となっていることを確認する）

EX035：イメージしていたのと同じ？

Su-A036：大体同じ．1つを固定してそれにあわせる.

EX037:(同様の作図手続きで FC を作図することを指示. ∠FCA=∠DAB となることを確認．）

以上の活動を活動 A とする．この活動を経ることで被験者は次の活動 B に移った.

4.3.2. 活動 B

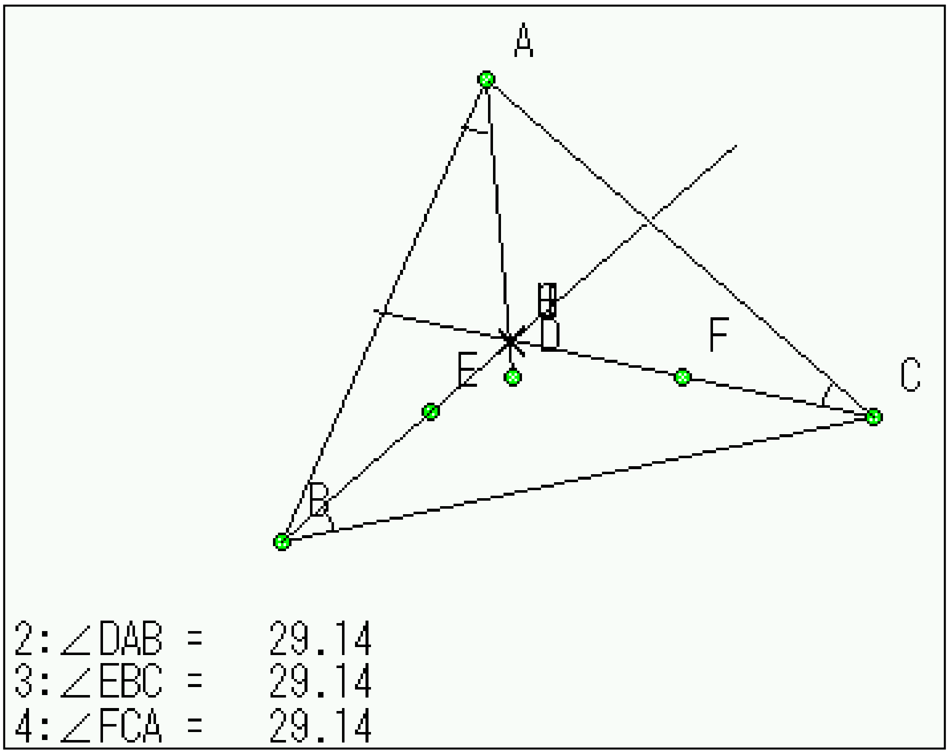
先の活動を行った直後被験者は以下の活動を行った．

B-1：同じ角度を持つ線分を一致させる活動

Su-A038：(D，E，F を一致させる)(図 b-1)

EX039：一致させたけど，その一致したところは何？

Su-A040：点 P.



(図 b-1)

この活動 B-1 において，被験者は 3 つとも角度を同じにするよう引いた線分の交点が点 P であることを推測していることが考えられる．しかし，点 P を作図しようとして線分を一致させたのではないことが以下の発言からうかがえる．

EX066：もう少し具体的に言うと線分の何を一致させる？

Su-A067：どこか一点．線分の．

EX068：三つの角度を等しくすることが目標だった．それを満たす点はこの画面内にある？

Su-A069：無い.

Su-A069 の発言から，Su-A は活動 B-1 において目的を持って線分を一

致させたのではないことが考えられる．なぜなら，3 つの角度を満たす点 P が画面内に「無い.」と発言しているからである．もし，点 P を作図すると言う目的を持って一致させたのであればここでの答えは一致させた点，もしくは点 P となるはずである．

活動 B-1 の後，被験者は点 D，E，F の集まり方に着目をした．

<u>B-2：交点の集まり方を明らかにする活動</u>

EX091：回ってるぽいね．点の動きを見るためにはどうすればいい？

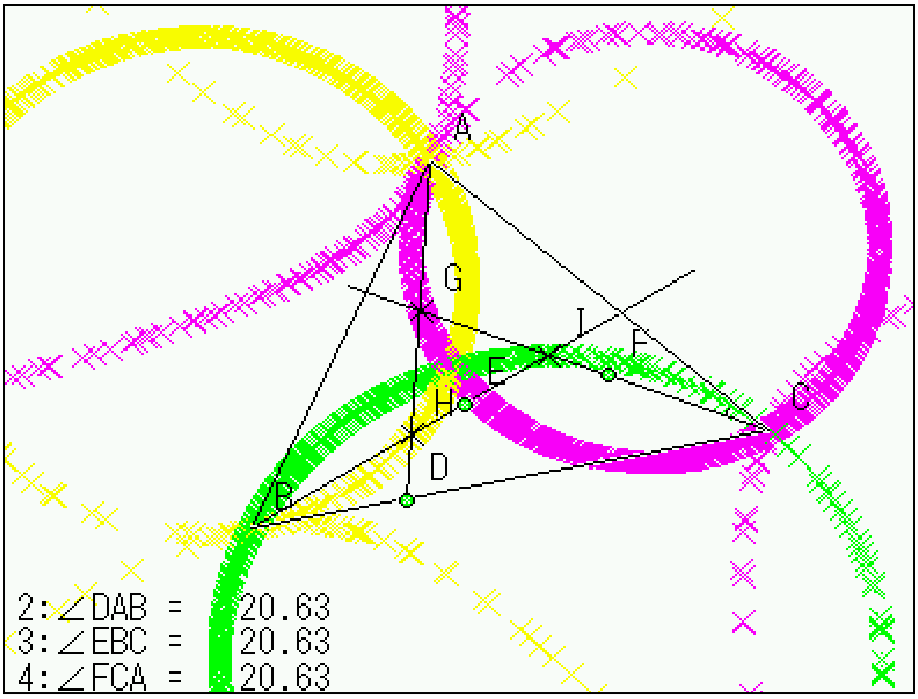
Su-A092：軌跡.

EX093：(G，H，I の軌跡を表示することを指示)(図 b-2)

Su-A094：(軌跡は)円になっている.

EX095：交点を作図するためには何が分かればいい？

Su-A096：円．円の交点.



(図 b-2)

ここまでの活動を活動 B とする．

4.4. 実験結果の考察

4.4.1. 考察の方法

本章では動的幾何環境の役割が生徒の解決に影響を与えていると確認できる学習指導において生徒はどのような活動を行い，それを受けて教師は何をすべきか明らかにすることを目的として教授実験を行なった．考察として，生徒の活動を明らかにするため，スクリーン上に現れた図の操作や被験者の発話から推測を構成しようとしている活動と，推測を構成していると判断できる活動を抽出する．抽出した活動の前後の活動から生徒が帰納的に推測を構成したと判断できる場合, 目的とする生徒の活動とする．また，実験者の支援によって，帰納的に推測を構成しようとした活動を促進したと前後の活動から判断できるものを，教師の支援として抽出する．

4.4.2. 解決に直接的でない推測を構成している相

ここでの被験者の活動は，以下の通りである．

EX001 : 点 D を動かすと角度はどうなる？
Su-A002 : 全部変わる
EX003 : じゃあ，考えやすくするためにはどうしたらいいと思う？
Su-A004 : 点 P を最初においてから ABC を決める．
EX005 : 逆の方向にいくわけだね．それは(位置を)決められるかな？
Su-A006 : 難しい
EX007 : 3 つ全部が動くから難しいんだよね？
Su-A008 : 1 つずつ動かす

EX017 : これで∠PAB，∠PBC，∠PCA をばらばらに動かせる．
Su-A018 : どこからはじめていいか分からない．
EX019 : ということは,
Su-A020 : 1 つを決めて，それと同じ角を作るのかな，と思った．でもそしたらこういう風に 3 つ点がばらばらになっちゃうのかな．そしたら P が 1 つじゃなくなる．

被験者は「角度を 1 つずつばらばらに動かす」という考えのもとに活動を行った．この活動は「事例から共通する性質を見出そうとする」点では「帰納的に推測を構成しようとする活動」を行っていると言えるが，解決

にあたり望ましい活動ではない．それについて Su-A20 の発言から被験者自身も気付いていると考えられる．そこで，実験者は１つの角度を参照して３つ同時に同じ角度を動かして考える活動を行わせた．そこで，生徒が帰納的に推側を構成する活動を行っている場合であっても，それが解決に直接的に結びつかないものであれば，教師は解決へと直接的に結びつく帰納的な推論を行わせる支援を行なうべきであると考える．つまり，３つをばらばらに動かす活動から，交点の軌跡が円を描くことを導くことは困難であることから，ここでの活動は解決へと向かってはいるが，被験者の扱う事象からは推測を構成しにくいものであると言える．この支援により，被験者は次のように述べている．

EX034:∠DAB をコピーして貼り付けることができる.（∠EBC を測定し，∠DAB＝∠EBC となっていることを確認する）
EX035：イメージしていたのと同じ？
Su-A036：大体同じ．１つを固定してそれにあわせる.

ここまでの活動を，「解決に直接的でない推測を構成している相」とし，支援の相として「帰納的に推測を構成しやすい事象を提示する支援」を置く．

4.4.3. 目的を定めず推測を構成している相

ここでの被験者の活動は以下の通りである．

Su-A038：(D，E，F を一致させる）
EX039：一致させたけど，その一致したところは何？
Su-A040：点 P

この活動以前に被験者は，3 本の直線を１つずつ動かして 3 つとも角度が同じになる位置を探すことを試している．その活動をもとに，3 本の直線を一致させたのではないかと推測できる．しかし，ここでの活動は自身の行った手続きについて無自覚であることが問題となる．それは，被験者の次の発言から示される．

EX068：三つの角度を等しくすることが目標だった．それを満たす点はこの画面内にある？

Su-A069：無い.

先の場面においては3本の直線の一致する点が求める点Pであると述べているのに対し，ここではそのような点は無い，と述べている．つまり先ほどの「一致させる」という活動が被験者にとって無自覚に行われていたことを示している．これは，動的幾何環境の「帰納的に事実を集め，推測を構成しやすくする役割」によって引き起こされていると考えられる．これを，「目的を定めず推測を構成している相」とする．そして，構成した推測が何を意味するのかを考えさせる支援を行う．これは，以下の支援を指す.

EX078：さっき点Pがいっぱいできるといったが，どこにできる？
Su-A079：新しくできた3本の線分の2本ずつ選んでできる交点.
EX080：じゃあ交点を取ろう.（DAとCFの交点G，EBとDAの交点H，DBとCFの交点Iを作図することを指示）
EX081：今できたG,H,Iが一致するところが点P.（Su-Aが点Dを△ABCの外に置く）もう点Dの位置はどうでもよくなってきたね.
Su-A082：よくなってきた.
EX083：じゃあG,H,Iはどんな点だろう. どんな風に一点に集まるだろう.

この支援により，交点の持つ性質を考察する活動へと移行することが確認された.

4.4.4. 帰納的に事実を集める方法を特定していない活動の相

先ほどの支援を受け，被験者は次のような交点の特徴を探る方法を明らかにする活動を行った.

Su-A088：三角形が集まって小さくなる．Gに集まる.
EX089：それはHを基準にしてみればHに集まるとも言える.
Su-A090：(三角形が)回ってる.
EX091：回ってるぽいね．点の動きを見るためにはどうすればいい？
Su-A092：軌跡.
EX093：(G,H,Iの軌跡を表示することを指示)
Su-A094：(軌跡は)円になっている.

EX095：交点を作図するためには何が分かればいい？

Su-A096：円．円の交点．

交点の性質を明らかにするための方法として，軌跡を表示させることを被験者は特定した．また，軌跡から3本の直線の交点の軌跡が円を描くことを推測し，円を描くことが求める点を作図する方法であることを言い表せている．この活動を「帰納的に事実を集める方法を特定していない活動の相」とする．

上述の生徒の活動と教師の支援は以下のように示される．(表1)

動的幾何環境下における論証を目指した活動の相
解決に直接的でない推測を構成している相
支援：帰納的に推測を構成しやすい事象を提示する
↓
目的を定めず推測を構成している相
支援：構成した推測が何を意味するのかを考えさせる
↓
帰納的に事実を集める方法を特定していない活動の相

(表1)

表1に示される教師の支援が，動的幾何環境に認める「帰納的に事実を集め，推測を構成しやすくする役割」を学習指導に生かすために教師がすべきことである．

次章では，動的幾何環境に認める「推測が普遍妥当であることを示すための見通しを与える役割」を学習指導に活かすために教師は何をすべきかについて議論する．

第 4 章の要約

本章では，動的幾何環境に認める「帰納的に事実を集め，推測を構成しやすくする役割」を学習指導に生かすためには教師は何をすべきか，について教授実験を行うことで生徒の活動と教師の支援の相を枠組みとして明らかにした．枠組みは以下のものである

動的幾何環境下における論証を目指した活動の相

解決に直接的でない推測を構成している相

支援：帰納的に推測を構成しやすい事象を提示する

目的を定めず推測を構成している相

支援：構成した推測が何を意味するのかを考えさせる

帰納的に事実を集める方法を特定していない活動の相

次章では，動的幾何環境に認める「推測が普遍妥当であることを示すための見通しを与える役割」を学習指導に生かすために教師は何をすべきかについて議論を行う．

第 4 章の註および引用・参考文献

1）問題の作成にあたり，次の文献の問題を参考にした．

宇沢弘文.(1998).好きになる数学入門　2　―図形を考える　幾何―,岩波書店.

垣花京子＆清水克彦.(1995).図形の証明問題での測定値の役割　―コンピュータ環境下における生徒の活動分析を通して―,日本数学教育学会誌,77,17-22.

Laborde, C.(2005).The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry, *Meaning in mathematics education*,Springer,159-180.

第 5 章

推測が普遍妥当であることを示すための
見通しを与える役割を学習指導に活かすために,
教師は何をすべきか

本章では，前章で明らかにしたように，動的幾何環境に認める役割を学習指導に生かすために教師は何をすべきかを明らかにする．

そのため，5.1.では大学生を対象とした動的幾何環境下における教授実験を行った．これは，中学生を対象とした教授実験に対する予備実験であり,枠組みを予備的に作るとともに，中学生に与える問題はどのようなものが適切であるかを見るものである．

これを受け，5.2.では中学生に対する教授実験を行い，枠組みを実証するとともに，生徒の活動と教師の支援を相としてまとめる．

5.1. 大学生に対する教授実験

中学生を対象とした教授実験を計画するために，大学生を対象とした課題の異なる教授実験を行なう.

一方の被験者に与える課題は正三角形で成り立つ性質を探り，それが一般の三角形の場合でも成り立つか明らかにする，という特殊から一般へと考えるように意図された課題である．他方の被験者には一般の三角形の場合から課題を与え，解決過程において必要であれば正三角形や二等辺三角形，直角三角形などを参照する，一般から特殊へと考えが進むよう意図された課題を与えた．これらの実験をもとに，中学生に対する教授実験を計画する.

5.1.1. 大学生 T に対する教授実験計画

5.1.1.1. 日時

平成 18(2006)年　3 月 31 日　所要時間　45 分(問題解決　35 分　インタビュー　10 分)

5.1.1.2. 対象

四年制大学　教員養成課程　数学教育専攻　4 年生　1 名

5.1.1.3. 機器・ソフトウェア

Windows Xp,　Geometric Constructor Win (以下 GC)

5.1.1.4. 実験に用いた問題

「正三角形の各辺の任意の位置に点を取ると，各頂点とその隣にある任意の 2 点を通る円が 3 つでき，それらは 1 点で交わる．この性質は正三角形に限らずどの三角形でも言えるか明らかにせよ.」[1)]

5.1.1.5. 実験の手順

この被験者には正三角形の場合から一般の三角形の場合を考えるように課題を与えた．実験ではボイスレコーダーで実験者と被験者の発話を記録し, GC の画面保存機能を用いてスクリーンショットを保存した. 実験後，解決過程の中で被験者がどのように考えて活動を行ったか明らかにするために，実験者が GC を用いて当該の箇所の作図を再現しながらインタビューを行った．便宜的に正三角形の場合の性質を探る活動を活動 C，一般の三角形の場合の性質を探る活動を活動 D とする.

5.1.2. 実験結果

5.1.2.1. 正三角形の性質を探る活動(活動 C)

C-1：条件に合う図を作図させ，点 G を作図させる．

Subject-T(以下 Su-T)002:正三角形を作ったらいいんですか？

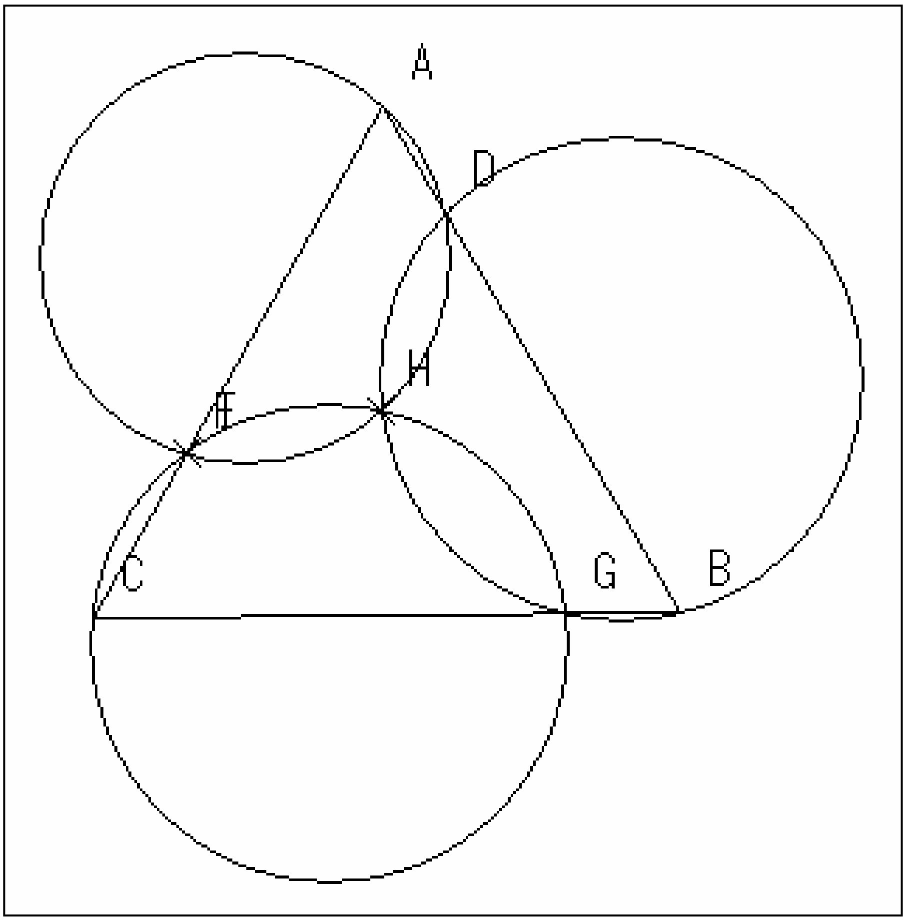
Experimenter(以下 Ex)003:まず正三角形を作ってこの性質を確認してみて．(GC の操作方法を伝える)

Su-T004:交わりました.

C-2：D,E,F の位置を変えさせる．

Ex005:D,F,G を動かしてみて.

Su-T006:(D,F,G を動かしても一致することを確認する．)(図 c-1)



(図 c-1)

C-3：G の動きを“円周上を動く”と述べさせる．

Ex010:点 H(図 c-1)は D,F,G がどのように動いても一致している．この点 H の動きに特徴はある？

Su-T011:H の動き･･･．特に(無い)．三角形の中を動いている．あ，そうでもない．そうでもなかった．

Ex012:何に依存している？

Su-T013:例えば D を動かすと，AFD とか D を通っていない円の円周上に H はある．他の点を動かしても，同じようなことが言えます．

Ex015:必ず一点で交わるということを説明して欲しいけど，そのために使えそうな性質は何がありそう？

Su-T018:思いつかない．

この活動で，実験者は証明ができそうかと質問を行っているが(Ex015)被験者はできないと答えている．

C-4：G の周りにできる円周角を測定させ，どれも 120°となることを確認させる．

ここで Su-T は円周角が 120°になっていることに気がついていなかった．Ex は円周角に着目させることができたので，一般の三角形で考える活動に移ってからでも正三角形の場合において具体的に角度は何度なのかを振り返らせることは可能であると考え，120°であることを言い表す活動は行わせず次の活動へと移行させた．

5.1.2.2. 一般の三角形の場合の性質を探る活動(活動 D)

D-1：G における円周角を測定させ，△ABC の内角と補角の関係にあることを見つけさせる．

Ex019:じゃあ，一般の三角形を作ろう.

Su-T020:(3 つの円が一点で)交わってそうです.

Ex021:じゃあ，交点に記号をつけよう.（交点を点 Q とする．）

Ex024:さっきは円周上を動くといったが，円周上を動く点の特徴として何があった？

Su-T025:円周角の定理.

Ex026:円周角の定理があった．M を動かすと点 Q は M がその上にない円周上を動く．このときに点 Q が作る円周角はどこにできる？（ここで，点 M,P,O の位置の関係が変わったことによって「2 つの円の交点」として作図をしていた点 Q と点 R が入れ替わった. Su-T027 からは点 R が 3 つの円の交点を表している．）

Ex030:じゃあ，その角度を測定してみよう.（角度の測定方法を伝える．）

Su-T031:(∠MRP，∠ORQ を測定する．)(図 d-1 右側)

Ex032:この角度と，一点で交わるということはどのように関係がある？

Su-T033:(活動止まる．)

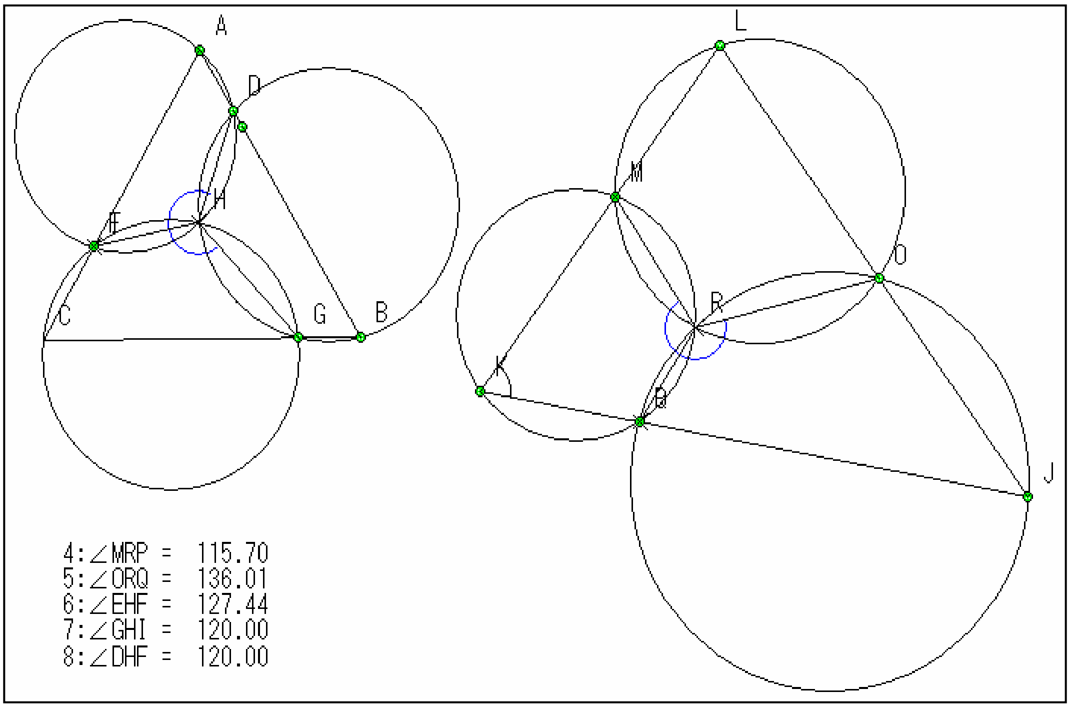
Ex034:一般の三角形で考えることが難しければ，正三角形に戻って考えてみて．正三角形にも円周角ができているから，それを測定してみよう.

Su-T035:120°な気がします.

Su-T038:(∠GHI,∠DHF を測定する．)(図 d-1 左側)

Ex039:常に 120°？

Su-T040:はい.



(図 c-2)

D-2：∠FGE(劣角)が∠A+∠B であることを明らかにする．

Ex053:難しければ正三角形の場合に戻ろう．綺麗に 120°に分かれているが，「正三角形だから」ということは説明になっていない．なぜ 120°なのか．何か理由があるはず．

Su-T054:∠A(∠CAB)と∠H(FHD)は向かい合う角だから 180°になる．

Ex055:なるほど．

Su-T056:で，ここ(三角形の内角の和)が∠A+∠B+∠C で 180°になる．正三角形なのでそれぞれは 60°になる．なので，∠FHD は 120°になる．

Ex057:それは何の性質？

Su-T058:円に内接する四角形．

Ex070:そこの角度(∠MRP+∠ORP)はどういう角度？ 式で表すと？

Su-T071:∠MRP=180°−∠K，∠ORP=180°−∠J なので，360°−∠K−∠J．

Ex072:ということはその反対側(∠MRO)はどうなる？

Su-T073:∠K+∠J ですね.

被験者は一般の三角形において，円周角が何に依存しているのかを明らかにすることができなかった．実験者は，被験者に正三角形の場合を考えさせることで，一般の三角形の場合にも言える性質を導かせた.

D-3：∠FGE が∠A+∠B であれば，∠C の補角を成すので 4 点 CFGE は同一円周上にあることの説明を行なう．

Ex074:ということはそこにできる四角形(LMRO)は，∠MRO が∠K+∠J となっている四角形．ここから言えることは？

Su-T075:L,M,R,O は 1 つの円周上にある.

Ex076:ということは，先に K を通る円，J を通る円があったときに L,M,O を通る円を描いたら，その円は必ずどこを通る？

Su-T077:P(図では点 R)を通ります.

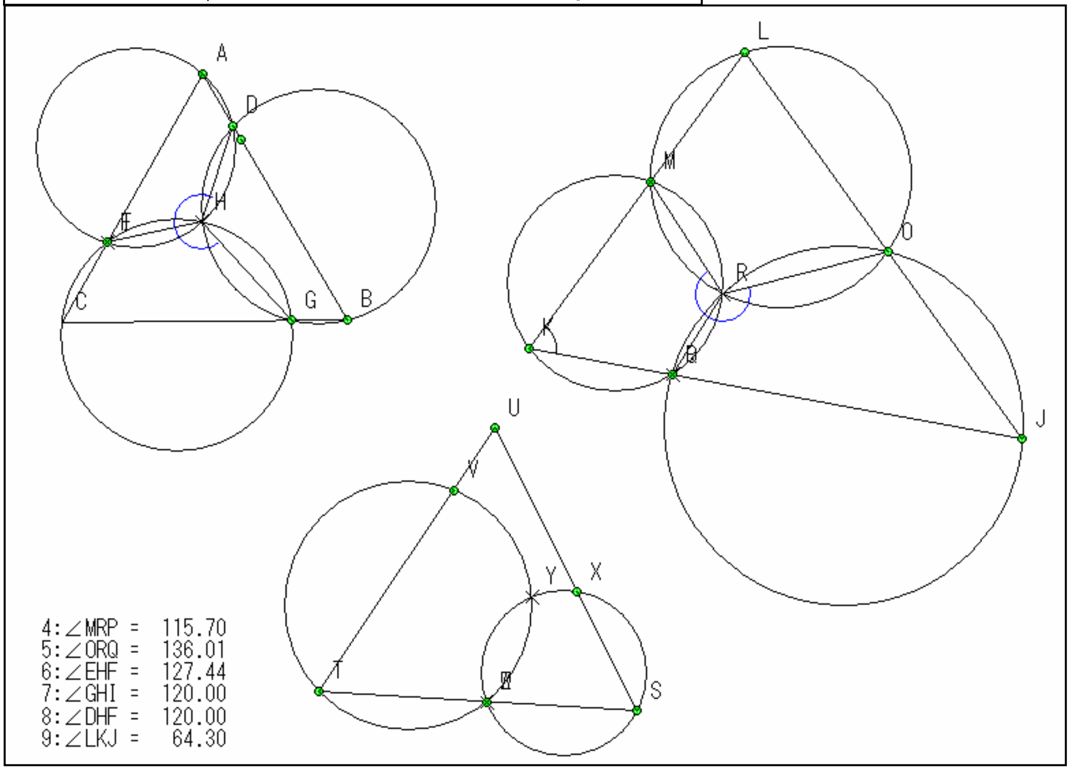
Ex078:これは一般の三角形でも言える？

Su-T079:言えます.

Su-T081:(新たに三角形(△STU)を作図する．ST 上に点 W，TU 上に点 V，US 上に点 X を作図する．)

Su-T082:まず T,V,W を通る円を作図する．もう 1 つ S,X,W を通る円があったときに，2 つの円の交点，W とは違う方の交点 Y ができる. 四角形 VYWT は円に内接する四角形なので∠VYW は 180°－∠T になる．反対側の円に内接する四角形も，∠XYW は 180°－∠S になる．4 点 U,V,X,Y の四角形の∠VYX は 360°－∠VYW－∠XYW になる．さっき求めたように∠VYW は 180°－∠T で，∠XYW は 180°－∠S だから∠VYX は∠T+∠S になる. ∠U+∠VYX は元が三角形で内角の和が 180°なので，∠U+∠VYX は 180°になる．よって，この 4 点(U,V,X,Y)は円に内接していると言える．よって，任意の位置にとった点と三角形の各頂点を結んだ円の交点は 1 点で交わると言える.

Su-T が解決に用いたスクリーンの状態



5.1.2.3. 実験後のインタビュー

○ 「120° になりそう」と述べたとき，それは円に内接する四角形の性質を意識しての発言だったのか？

Ex001:どの辺で円に内接する四角形に気がついた？

Su-T002:正三角形を考えるときにそうだったと気が付いた.

Su-T006:最初は(120° に)なりそうだ，という感じで．しかも内部にできる角のことばかり考えていたので，向かい合う角まで考えていなかった.

Ex007:でもそこまで気が付いたら，説明はもうできると思った？

Su-T008:はい.

○ 問題を解く中で難しかったことについて

Su-T010:「向かい合う角の和が 180° になる」ということと，「3 つの円が一点で交わる」ことがどう関係があるのかということが一番難しかった.

Ex011:そのとき正三角形に戻れたということは大きかった？

Su-T012:はい.

○ 支援について

Ex015:途中で質問が変わっていることに気が付いた？ 「なぜ 1 点で交わるか？ 」ということから「2 円を描いたときにできる交点に，残る 1 つの円が交わるか？ 」という質問に変わっていたが.

Su-T016:はい．それでいいんだ，と思いました．そういう風にこういうことを説明したらいいのか，と思った．問題を言い換えることで.

Ex017:自分で言い換えられそうだった？ 言われて気が付いた？

Su-T018:自分が問題に合わせるようにしていたので，問題を解釈するという方にはなかなか行かなかった.

5.1.3. 大学生 K に対する教授実験計画

5.1.3.1. 日時

平成 18(2006)年　4 月 4 日　所要時間　55 分(問題解決　45 分　インタビュー　10 分)

5.1.3.2. 対象

四年制大学　教員養成課程　数学教育専攻　4 年生　1 名

5.1.3.3. 機器・ソフトウェア

Windows Xp,　GC

5.1.3.4. 実験に用いた問題

「『三角形の各辺の任意の位置に点を取ると, 各頂点とその隣にある任意の 2 点を通る円が 3 つでき，それらは 1 点で交わる.』これを証明せよ.」

5.1.3.5. 実験の手順

この被験者には，一般の三角形の場合から性質を明らかにするように課題を与えた．先の被験者と同様にボイスレコーダーで実験者と被験者の発話を記録し，GC の画面保存機能を用いてスクリーンショットを保存した．実験後，実験者が GC を用いて当該の箇所の作図を再現しながらインタビューを行った．先の被験者の活動と区別するために便宜上活動 E とする.

5.1.4. 実験結果

5.1.4.1. 活動 E

<u>E-1：条件に合う図を作図させ，点 G を作図させる．</u>

<u>E-2：D,E,F の位置を変えさせる．</u>

Ex002:どういう円を描くか分かる？

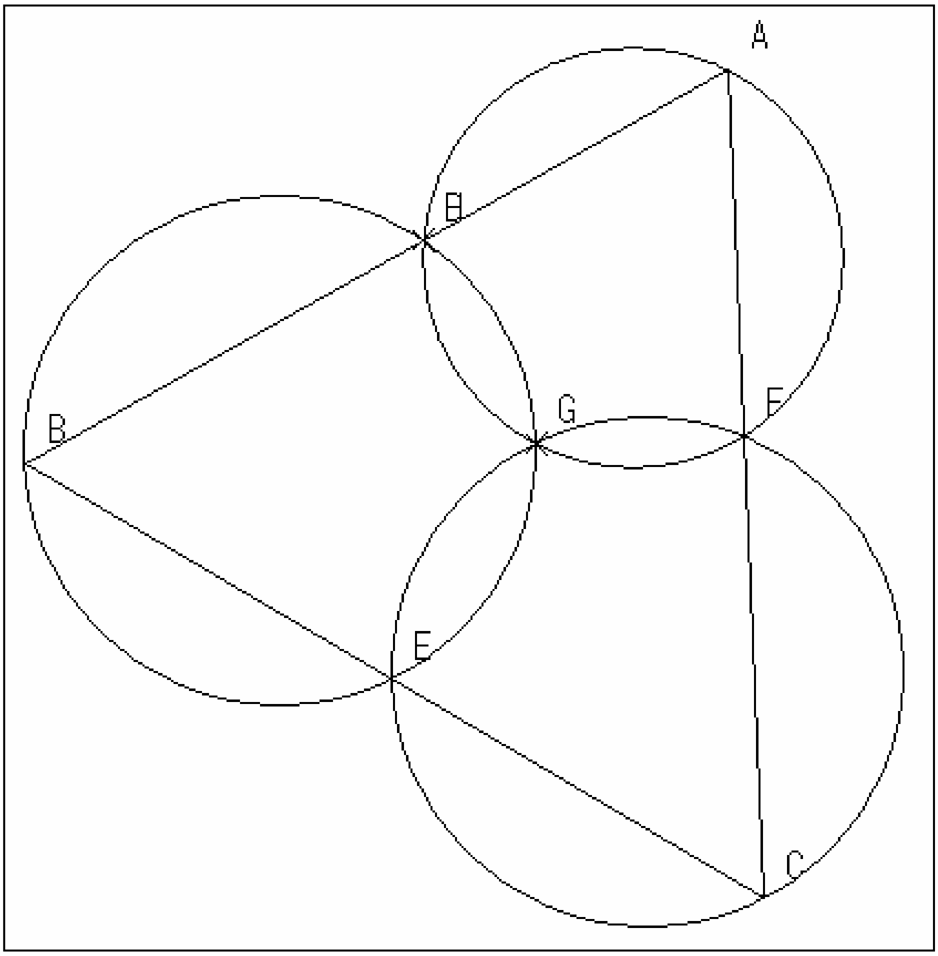
Subject-K(以下 Su-K)003:C なら E と F.（円を作図する．）

Su-K004:交わりました.

Ex005:(A,B,C を移動させても交わることを確認させる．交点 G を作図させる．）

D,E,F を動かしても交わる？（図 e-1)

Su-K006:交わります.



(図 e-1)

E-3 : G の動きを“円周上を動く”と述べさせる．

Ex009:じゃあ，なぜこれは 1 点で交わる？

Su-K010:(活動止まる)

Ex011:点 E を動かすと点 G はどこを動く？

Su-K012:AEF，いや ADF の円周上を動く．当たり前ですが．動きます．

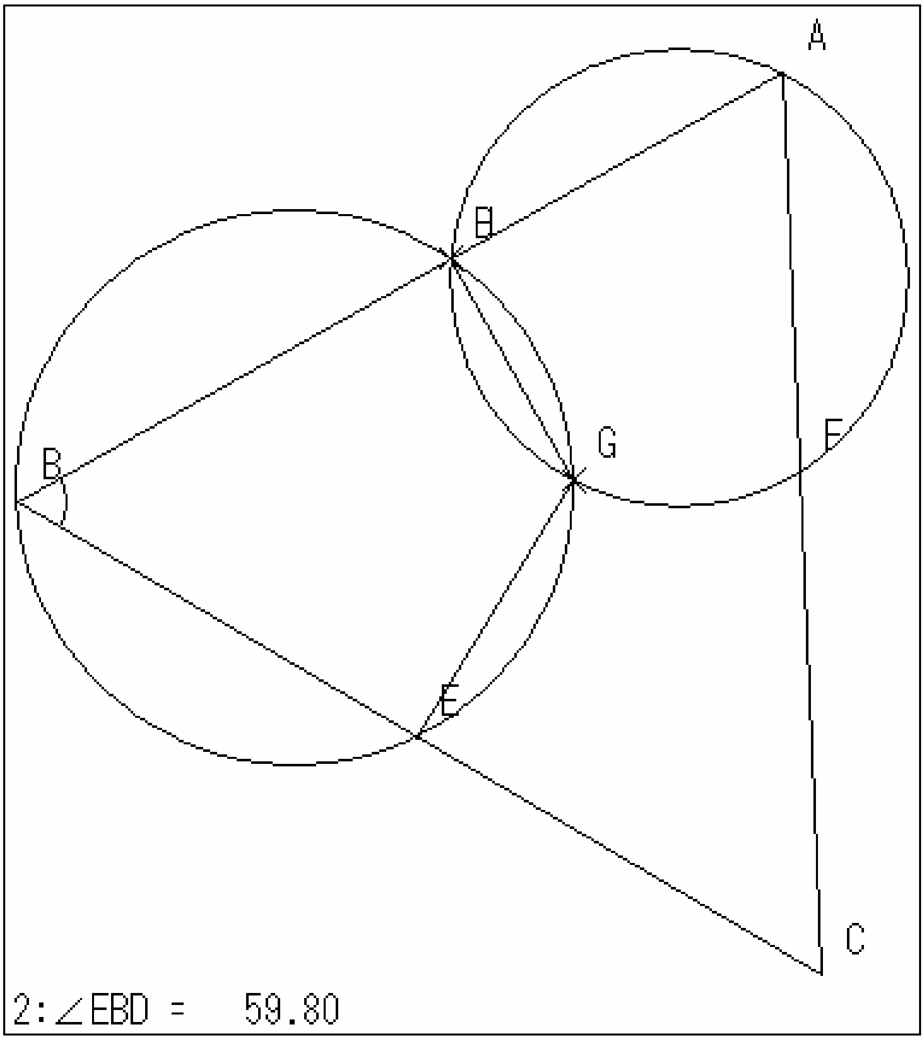
Ex013:円周上を動くね．点 F を動かしたらどうなる？

Su-K014:点 F を動かしたら，BDE の円周上を動きます．

E-4：G における円周角を測定させ，△ABC の内角と補角の関係にあることを見つけさせる．

Ex023:じゃあ，いま点 G が円周上を動いている.
例えばどこに円周角ができる？
Su-K024:∠EBD.
Ex025:じゃあ，それを測定してみよう.
Su-K026:できてない.（図 e-2）
Ex027:円周角はどこにできる？ 点 G が作る.

Su-K033:∠DGE です.
Ex034:測定してみよう.
（角度が一定となることを確認させる.）



(図 e-2)

Ex041:それは何か意味を持っている？ 何かそうなる理由がある？

Su-K042:これは内接する四角形と見たときに，対角の和は 180°になるということから，こっち(三角形の内角)が細くなれば大きくなって，太くなれば小さくなる．

Ex043:ということは，∠DGE は何に依存している？

Su-K044:最初に作った任意の三角形の角に依存している．

Ex045:ということは，∠DGF も？

Su-K046:∠DGF も∠BAF に依存している．（∠BAC を測定させ，∠HGF+∠BAC=180°となることを確認する．)(図 e-3)

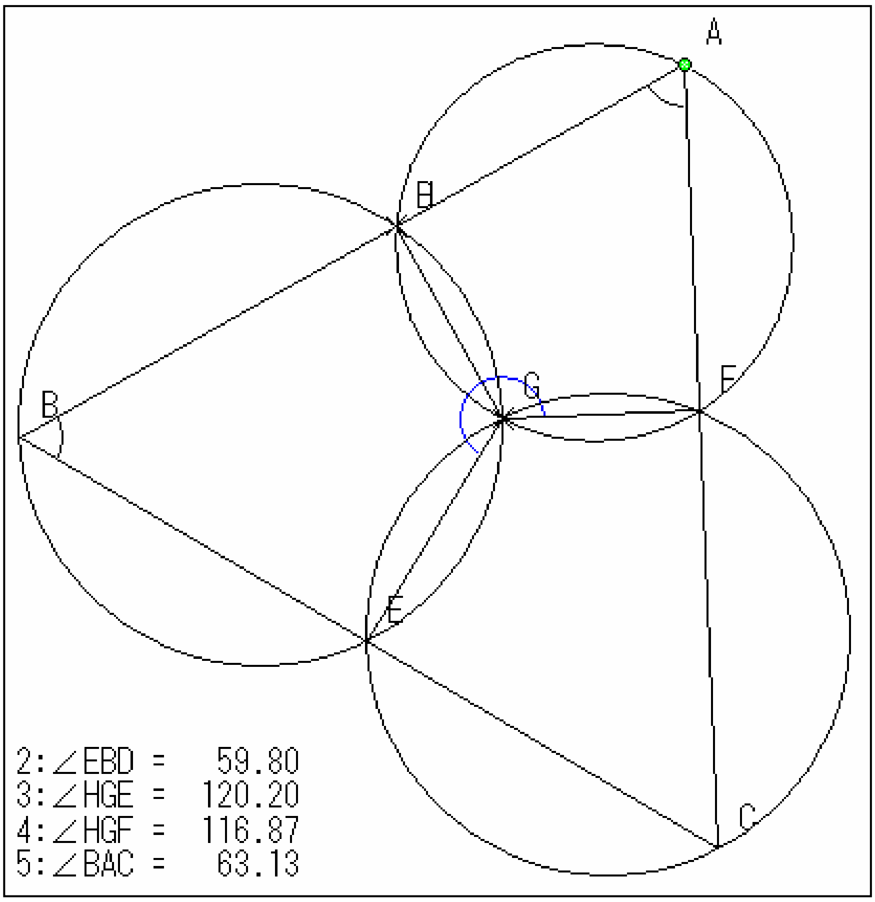
Su-K048:180°になります．

Ex049:じゃあ，任意の三角形を描き，各辺上の任意の位置に点を取ったとき，頂点とそれに近い 2 点を結んでできる円の円周上にできる角はどんな特徴があると言える？ 例えば∠DGE であれば？

Su-K050:180°−∠DAF の値．

Ex051:これは 3 つの円が 1 点で交わるということに使える？

Su-K052:まだ出てこない．



(図 e-3)

ここで Su-K は円周角を∠EBD と答えている．∠EBD を測定する操作により，図には角度を表す記号が表示された．その記号を表示したまま∠DGE が円周角であると答え，角度の測定を行っている．この一連の活動により Su-K は，円に内接する四角形の向かい合う角となっている∠EBD と∠DGE の 2 つの角に着目しやすくなったと考えられたが，この活動によって 2 つの角が補角の関係にあることに気付きやすくなったわけではない，と実験後のインタビューで答えている．

E-5：∠FGE(劣角)が∠A+∠B であることを明らかにする．

Ex059:いま∠ACB が分かっていない．∠BAC と∠ABC が分かっている．そうすると？

Su-K060:360°－∠DGE－∠DGF.

Ex061:結局いくらになる？

Su-K062:180°－∠ABC･･･.

Ex063:180°－∠BAC と 180°－∠ABC を足すとどうなる？

Su-K064:360°－(∠BAC+∠ABC).

Ex065:じゃあ，∠EGF は？

Su-K066:∠EGF は･･･．∠A+∠B(∠BAC+∠ABC).

Ex073:つまり，先に 2 つの円を描いた，A を通る円と B を通る円．このとき円周角が 2 つできる．∠DGE と∠DGF．さらに∠EGF も自動的にできる．この∠EGF は常に？

Su-K074:∠A+∠B.

Ex075:ということは，C,E,F を通る円を描くと？ G を通る？

Su-K076:(沈黙)

Su-K077:整理していいですか？ さっきのことから言って対角の和が 180°になる･･･.

Su-K078:(沈黙)

Su-K079:ちょっとまだわからない.

Ex080:任意の三角形を描き，各辺上に D,E,F をとる．A,D,F を通る円と B,E,F を通る円を描くと点 D じゃない点で交わる．いま点 D と点 G で交わっている．最後に C,E,F を通る円を描いたときに，その円が必ず点 G を通るはずである．実際に通っている．なぜ点 G を通る

のか．それを説明して欲しい．

Su-K081:もしここ(点 G)で交わるとしたら，(∠EGF の)角度が∠A+∠B になる．(三角形の内角の和の関係から)∠A+∠B+∠C は 180°になるので∠EGF+∠ACB も 180°になると言える．

Ex082:「交わるとしたら」というのは C,E,F を通る円が点 G を通るということ？

Su-K083:はい．

Ex084:まだ通っていないとき，これから「円を描く」という状態のときに，C,E,F しか選んでいないのに点 G を通ると言える？ G が円周上に無い可能性もある．でも描いてみれば通っている．円周角の定理から∠DGF=180°－∠A と∠DGE=180°－∠B，∠EGF=∠A+∠B ということまで明らかにした．それを使って C,E,F を通る円が点 G を通る理由を説明して．

Su-K085:∠EGF=∠A+∠B,∠EGF+∠C=∠A+∠B+∠C=180°と言えるので，C,E,F,G は内接する三角形，いや，四角形と言える．C,E,F を通る円に内接する･･･．

Ex086:円に内接する三角形？

Su-K087:内接する四角形．ですがしっくりこない．点 G を目標とするときは通るけれど，点 E と点 F を通らない･･･．

被験者は後で「変な勘違いをしていた」と述べているように，ここでは円を点 C と点 G を通る円を描いたときにその円が点 E,F を通るかどうか，という解釈のもとに作図しようとしている．

<u>E-6：∠FGE が∠A+∠B であれば，∠C の補角を成すので 4 点 CFGE は同一円周上にあることの説明を行なう．</u>

Ex092:C,E,F は必ず通る．これが点 G を通るかどうか．繰り返しになるけど，なぜ点 G を通る？

Su-K093:それは∠EGF と∠ECF で考えたときに，対角の和が 180°ということから，四角形 CFGE は円に内接するということが言える．だから点 G も通る．さっき∠EGF=∠A+∠B ということが言えている．∠A+∠B+∠C=180°ということが前提としてある．そこから，∠EGF+∠C=180°になるということが言えるので，内接する四角

形の性質の対角の和が 180°になるということから逆に考えると，この四角形は円に内接していると言える．このことから，点 G は円周上にある．

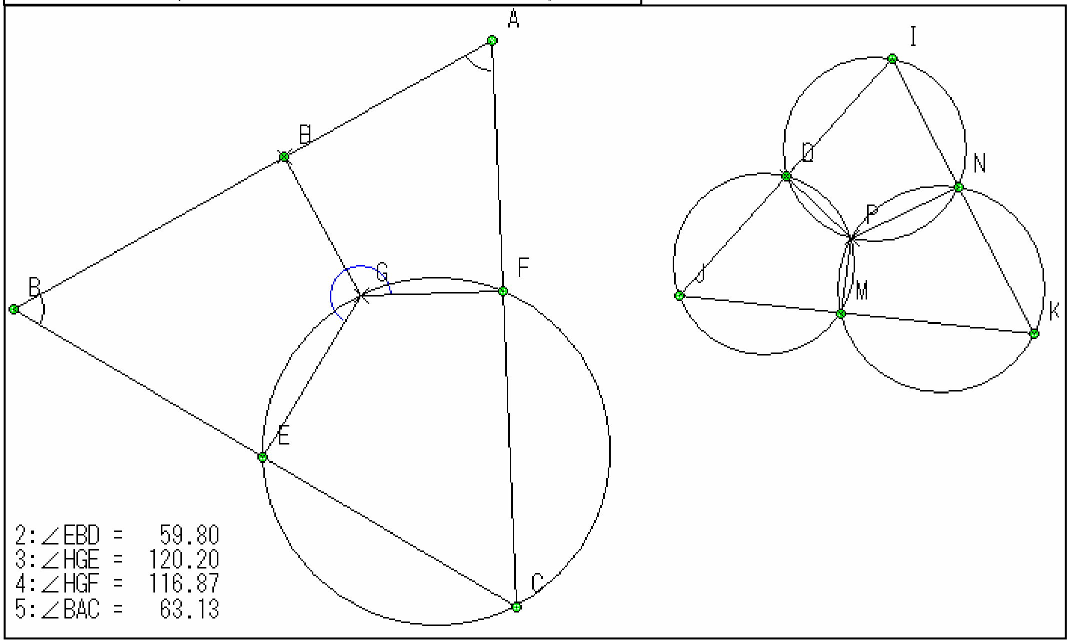
Su-K094:でもまだしっくりこない．

Ex095:じゃあ作図をしながら説明してみて．

Su-K100:（新たに△IJK と各辺上に任意の点 L,M,N を作図する．点 I を通る円と点 J を通る円を描き，交点を P とする．）∠LPN=180°−∠I，∠LPM=180°−∠J，打ち消しあって∠NPM=∠I+∠J．点 I を通る円と点 J を通る円は点 P で交わる．この 2 円があったときにもう 1 つの円が点 P を通るかどうか．∠NPM は先の言ったとおり∠I+∠J，三角形の内角の和から∠NPM+∠K=180°．だから四角形 KMPN は内接する．わかった．そうですね．四角形 KNPM は円に内接することが言えるので，K,M,N を通る円は P を通る．分かった．四角形として考えればいい．変な勘違いをしていた．一点で交わることが言えた．

実験者は先の活動における被験者の考えを訂正するために支援を行った．被験者は証明としてほぼ望ましい解決を述べることができている．しかし「しっくりこない」と述べていることから証明に納得していないものと考え，作図をしながら自分の手続きを振り返るように支援を行った．これにより，被験者は証明の内容自体に大きな変化は出なかったが，自身の手続きに納得した．

Su-K が解決に用いたスクリーンの状態



5.1.4.2. 実験後のインタビュー

○ 証明の見通しについて

Su-K002:説明は簡単だったが,「何が言えたら(証明を)言えるのか.」ということ. 例えば 3 点をとると 2 円を通ると. じゃあ 3 つ目の円が点 P を通ることが言えればいける, という証明の核.「これが言えたらこれが言えるんじゃないか」という証明の核を考えるところが難しかった.

Ex003:こちらが意図的に途中何度も「証明できそう？ 」と聞いて「いまの時点では無理だ」ということを確認した. 最後に「2 つの円は 1 点で交わる. 最後の円が点 G を通ればいいんだよね？ 」という風な聞きかたをしたことには気が付いた？ 問いが少し変わっているということに.

Su-K004:はい.

Ex005:そこで, こういう風に証明すればいいんだと気が付いた？

Su-K006:そうですね. 部分は見えていた. それを繋げていくことが見えなかった. いろいろやったのでパーツはあったがどれを選ぼうかということが難しかった.

○ ∠EBD を先に測定したが, 解決を振り返ってみて∠EBD を先に測定したことは円に内接する四角形に気付くために有効だったのか？

Su-K008:自分は(四角形があるという)先入観があったので見やすかったが,(角を表す)記号があると見やすくなる. それに数値で出てくるのであれば確実に(180° に)なったということが分かるので. その後に実験者に聞かれた∠A と∠B を使って∠FGE を表すと？ というところからはスッと.

Ex009:証明は言わなかったけれど頭の中では大体できていたということ？

Su-K010:言い換えることが難しかったけれど大体できていた. 四角形と見ることができれば分かった.

Ex011:EGFC は四角形であることを確認する支援が有効だったということ？

Su-K012:活動の中でも「これはどんな図形？ 」と言われたが, それが効いた.

○ その他

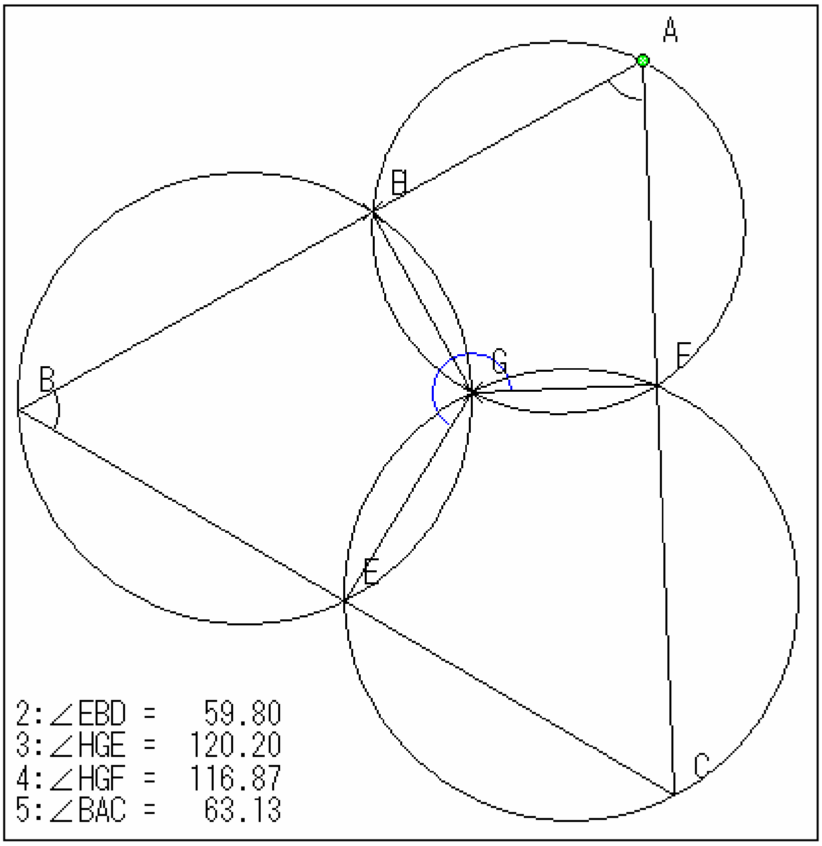
Su-K014:支援は問題ないが，書くものが欲しかった．考えを書けるものが欲しかった．何が使えるのか，円周角の定理はどこで使うのか，などの考えを整理したかった．

5.1.5. 大学生に対する教授実験結果の考察

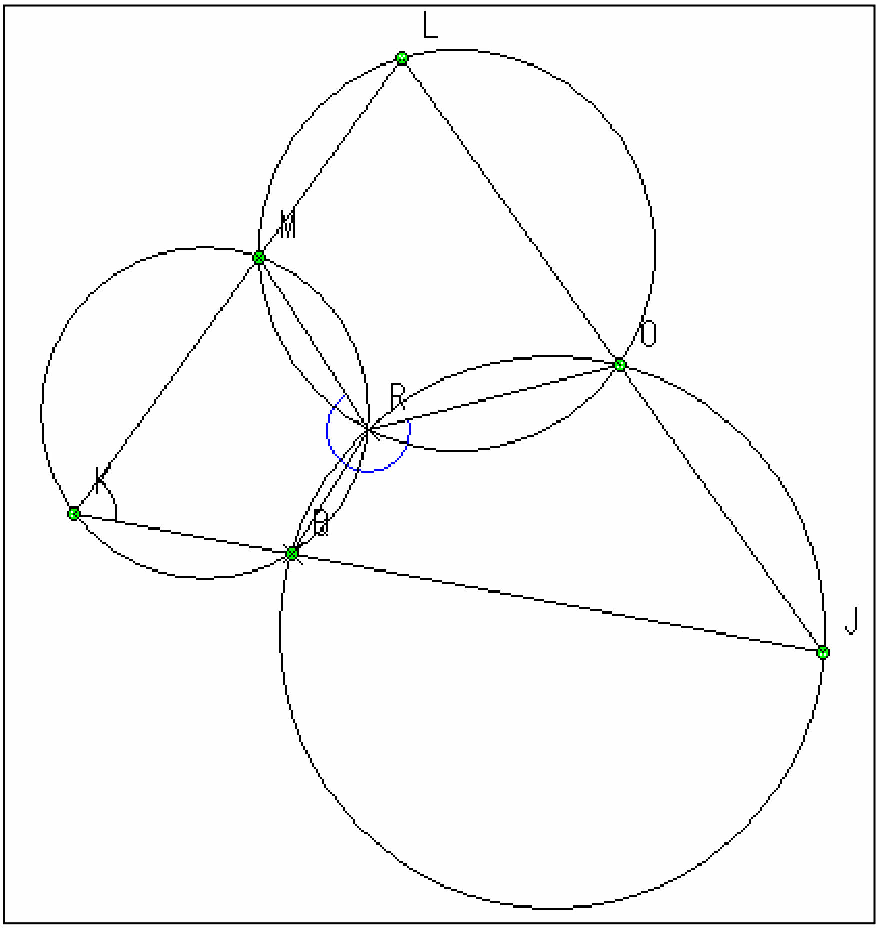
実験前には Su-K に対する支援として，問題の条件を満たす特殊な場合である正三角形を与えることを考えていたが，被験者が特殊な場合を参照する前に円に内接する四角形の関係を見出していたことから，一般の三角形だけを用いて証明を行なった．これ以外は活動 C,D,E において被験者は実験者が計画した通りの活動を行った．

どちらの被験者も，最初に問題場面を作図する活動を行った．実験者は，被験者が円に内接する四角形の性質に気付くことをねらい，その前段階として 3 円の交点の周りに円周角の定理が成り立つこと，その円周角が三角形の内角と補角の関係にあること，に気付くよう意図して支援を行った．

まず，「動かしてみて」という支援を行うことにより，3 円の交点の持つ条件を考える活動へと移行させた．そして，どちらの被験者も作図後に辺上の点を動かし，Su-K は図 e-3 における∠DGE，Su-T は図 c-2 右側における∠PRO に対して円周角の定理を用いれば交点の動きを説明できそうであると考えを述べている．これは，問題場面を作図することが目的である活動から，図の持つ条件を明らかにすることが目的である活動へと活動の目的が変化していると考えられる．そこで，問題場面を作図する活動を 1 つの相として捉え，それとは異なる活動の相として 3 円の交点の持つ条件を考える活動を捉える．



(図 e-3)



(図 c-2 右側)

また，教授実験は演繹的な推論の見通しの具体的な活動として，円に内接する四角形の性質を明らかにすること(活動 D-1, E-4)を想定して行った．しかし，円に内接する四角形の性質を見抜くことだけが証明を行ううえで決定的ではなかった．これは，被験者 Su-K が円に内接する四角形の性質を説明した直後の質問，「その性質を用いて証明ができそうか？ 」に対して「できない.」と答えていることから示される．では，演繹的な推論の見通しとして他に何が具体的な活動となるのか．これは，なぜ 1 点で交わるのかを説明するために課題を言い換えることであると考える．つまり，1 点で交わることを説明せよ，という課題を 2 つの円を作図したときにできる交点のうち，三角形の辺上に無いものに 3 つ目の円が交わることを説明せよ，という課題として解釈できるかどうかが決定的であると言える．活動において，実験者が課題を言い換えた後(Su-T の実験における Ex076, Su-K の実験における Ex080)に，被験者は証明を行うことができていることから示される．さらに，2 つの実験に共通した「実験者が課題を言い換えるまで何を証明すればよいのか分からなかった.」という感想からも，課題の言い換えが影響を与えていたと推測できる．

そこで，被験者が円に内接する四角形の性質を見出しながらも，それが課題の解決にどのように機能するかを明らかにできていない状態を 1 つの相と捉える．そして，実験者が課題を言い換えることによって，被験者が課題を捉え直した後に行った，円に内接する四角形の性質を用いて 2 つの円が作る交点を 3 つ目の円が通ることを説明する活動を 1 つの相として捉える．

教授実験からそれぞれの活動を相として捉え，相と相の間を移行させるために決定的であったと考えられる支援を抽出すると，以下のように表すことができる．(表 2)

Miquel の定理の論証を目指した被験者の活動と支援の相

問題場面を作図する相

- 正三角形・一般の三角形を作図する．
- 任意の位置に点を打つ．
- 円を作図する．

支援：円の交点はどのような条件を持つか明らかにさせる

3 円の交点の性質を考察する相

- 図を移動・変形する．
- 円周角の定理が成り立つことを明らかにする．
- 円周角を測定する．

支援：円に内接する四角形の性質を明らかにさせる

3 円の交点が作る角の性質を考察する相

- 円周角が何に依存しているか明らかにする．
- 2 つの円周角の和が 360°から三角形の 2 つの内角の和を引いた差であることを明らかにする．

支援：課題を言い換えさせる．

捉え直した課題の解決を行う相

- 円に内接する四角形の内角の和の性質から，2 つの円の交点を 3 つ目の円が通ることを説明する．

(表 2)

以上のように予備実験から得られた活動の相をもとにして中学生に対す

る教授実験を計画し，推測が普遍妥当であることを示すための見通しを与える役割を学習指導に活かすために，教師は何をすべきかを明らかにする．

5.2. 中学生に対する教授実験

5.2.1. 中学生に対する教授実験計画

5.2.1.1. 日時

平成 18 年　7 月 13 日　解決活動　30 分　インタビュー　5 分

5.2.1.2. 対象

鳥取県東部　公立中学校 3 年生　1 名

被験者について，当該校数学担当の教師から成績は中位であるが，数学に関心を持っている生徒であると説明を受けた．被験者に聞いたところ，動的幾何ソフトを扱った経験は無く，今回の実験で初めて問題解決に動的幾何ソフトを使用するとのことであった．そこで，実験者は被験者にソフトの基本的な操作を教え，必要な操作は適宜支援する形で実験を行った．

5.2.1.3. 機器・ソフトウェア

Windows Xp, Geometric Constructor

5.2.1.4. 実験に用いた問題

「正三角形のそれぞれの辺上に点をとる．このとき，各頂点とその隣にある 2 点を通る円が 3 つでき, それらは 1 点で交わることが知られている．この性質は正三角形に限らずどの三角形でも言えるだろうか.」

5.2.1.5. 実験の手順

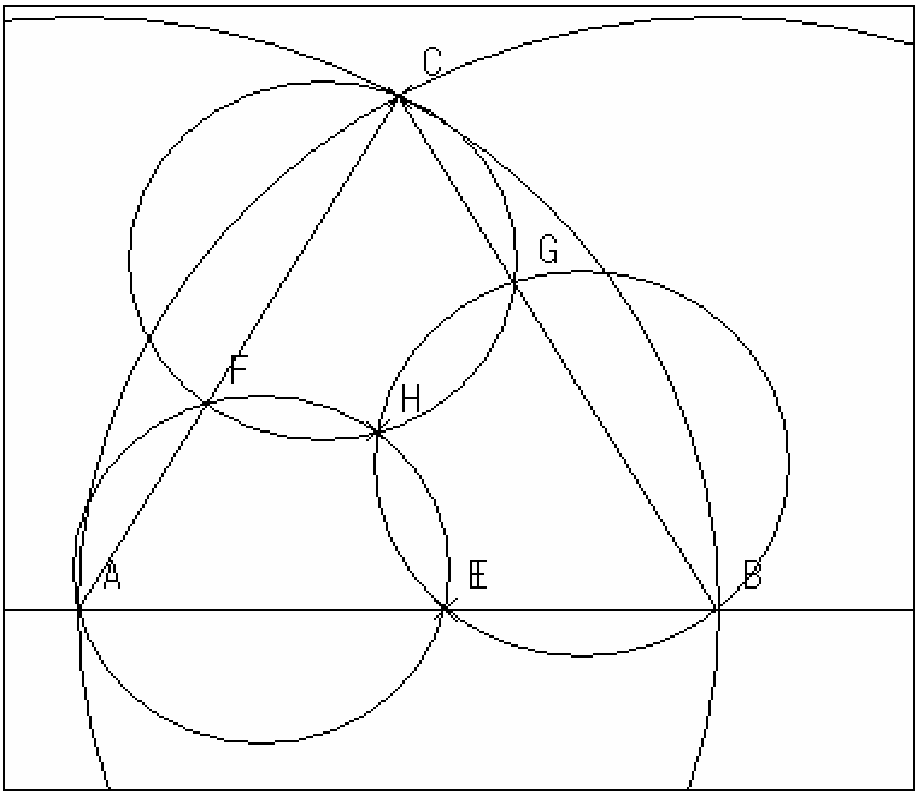
実験は問題解決を 30 分間行い, その後にインタビューを 5 分間行った．実験者と被験者の会話はボイスレコーダーで記録し，被験者が問題解決に用いた図はソフトの保存機能を用いて記録した．実験はコンピュータを中央として実験者と被験者が横に並び，被験者の解決活動を常に実験者が観察できる状態で行った．

5.2.2. 実験結果

教授実験の記録は活動の相に沿って記述する．プロトコールにおける括弧書きは著者による注である．

5.2.2.1. 問題場面を作図する相

被験者は実験者から操作を聞きながら作図を行ない，正三角形を描き，その各辺上の任意の位置に点を打ち，頂点とその隣にある 2 点を結んで円を 3 つ描いた．(図 f-1)



(図 f-1)

5.2.2.2. 3 円の交点の性質を考察する相

作図を終えた時点で実験者は

Ex039：じゃあ，H は，この点 H の動きに特徴は無い？

と被験者に質問を行った．

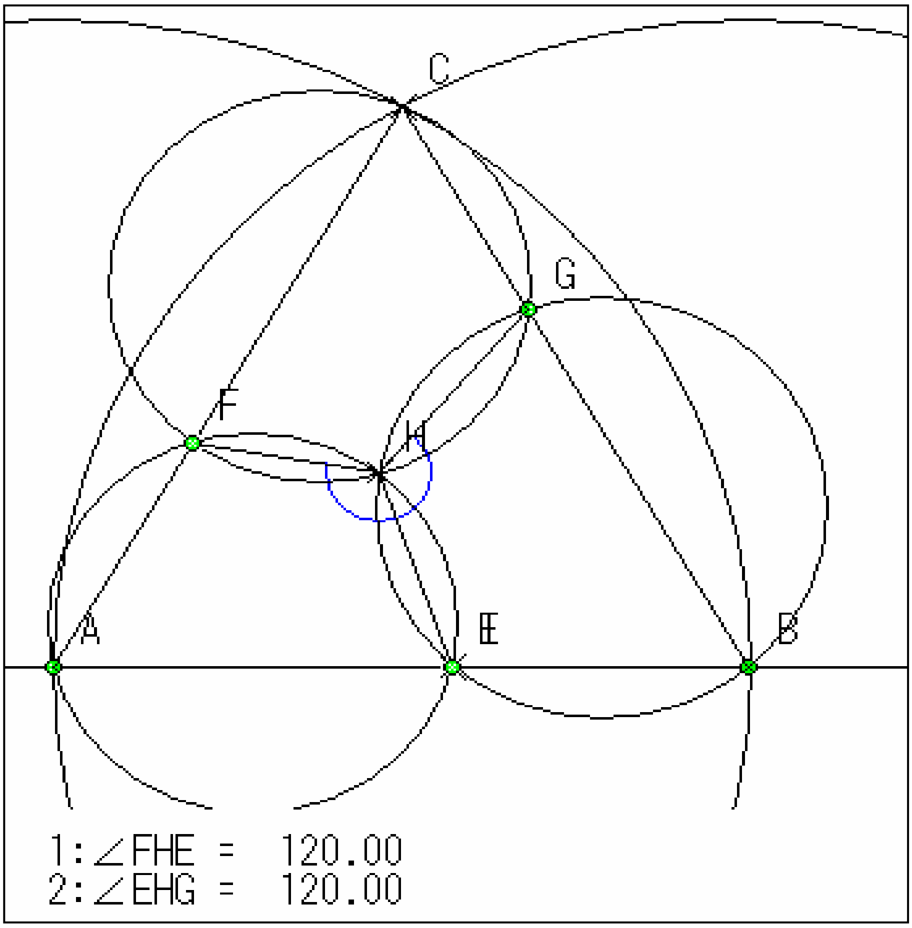
Su-N040：うーん．円に沿ってる．

Su-N044：点に対して，何て言うのかな？ 対角…対角じゃないな．対称にある位置の円の円周に沿って動く．

Ex045：なるほど．上手い表現だね．じゃあ，円周上を動く点の特徴を表す性質って何があったか覚えてる？ 今まで習った中で．

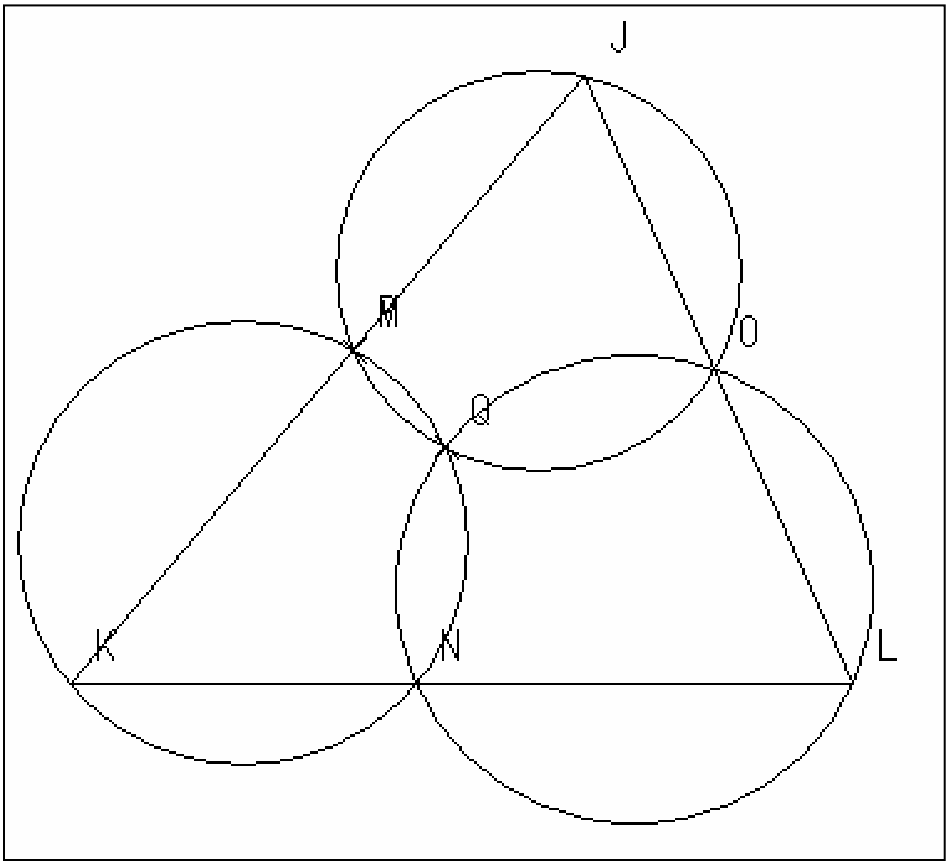
Su-N046：円周角.

被験者は交点の性質として円周角の定理を挙げることができたので，実験者は円周角を測定することを指示した．被験者は交点の周りにできる角度が 120° となることを確認し(図 f-2)，これが一般の三角形でも成り立ちそうか，という実験者の質問に対し成り立ちそうだ，と答えている．



(図 f-2)

そして，一般の三角形を作図し各辺上に点を取り，頂点とその隣の 2 点を結び 3 つの円を作図した．(図 f-3)



(図 f-3)

Su-N067：交わってる．

Ex068：交わってるね．じゃあ辺上の点を動かしてみようか．本当にそうか．三角形を変形させてもいい．

Su-N069：(辺上の点を移動し，三角形の頂点を移動して三角形を変形させても 1 点で交わることを確認する．）うん．

Ex070：交わってそうだよね？ 何で交わっているんだろう？

Su-N071：ちょっと待って下さい．えっと，交わる理由か．こっちの三角形(正三角形)で，特殊から一般だから，こっちの三角形(正三角形) で考えると，この角(∠FHE) は 120° だから，ここに四角形ができているから，60° の，180° から 120° を引いた値がここ(∠FHE) にくる．この式から．だから，それが 3 つでここ(点 H の周り) は 360° ．てことは，ここ(∠A＋∠FHE) が 180° ってことはここ(点 H の周り) がこれで 2 倍(360°) になる．で，同じになるってことが言える．そのあと，これ．

交わる… 交わる理由…

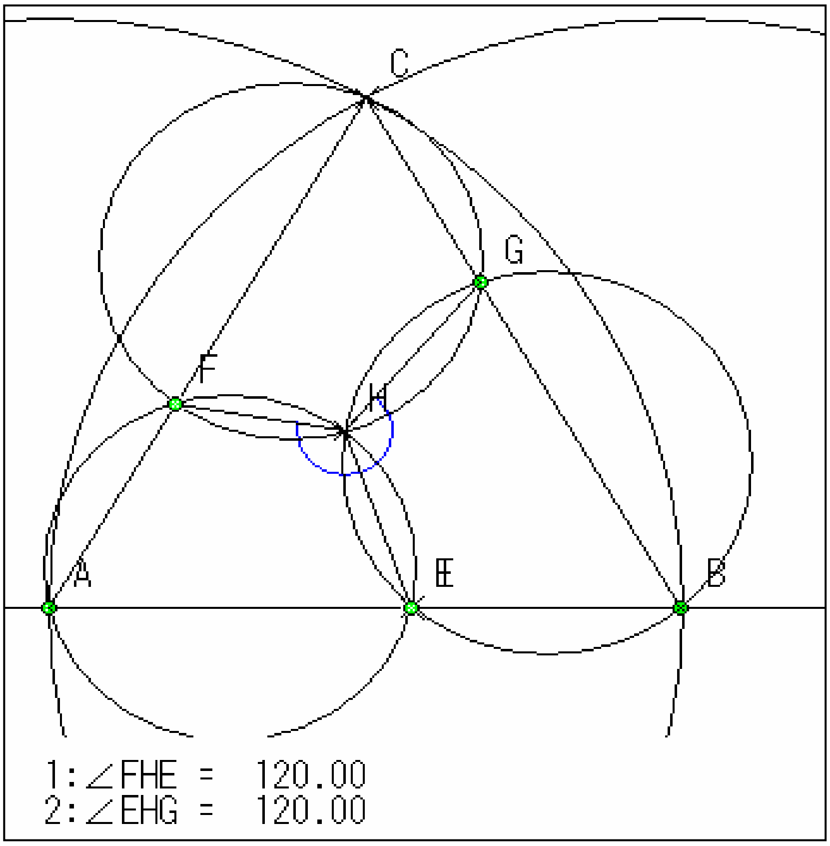
Ex072：いま円に内接する四角形を見つけてくれた．これはいま作った三角形でも言える？

Su-N073：はい．

実験者が行った Ex70 の質問から，被験者はなぜ 3 円が 1 点で交わるか説明を行おうとしているが，この時点では説明ができなかった．しかし，このとき円に内接する四角形の性質について言及していた．これは実験者が支援を行う前に，3 円の交点が作る角の性質を考察する相へと移行していることが言える．そこで，実験者は改めて 3 円の交点が作る角の性質について問う質問を行い，被験者が 3 円の交点が作る角についてどのように捉えているかを明らかにしようとした．

5.2.2.3. 3 円の交点が作る角を考察する相

Su-N087：つまり，これ(∠EHG) もこれも(∠GHF) 同じことが言えて，120°，120°，120° で 360° になる．で，それぞれ 2 倍になっている(120° ＝60° ×2) ってことだから，これ(三角形の内角の和) は 2 分の 1 の 180°，が真ん中に集まっているから 2 倍になっていると．真ん中のこの角度は 360° だから．



(図 f-2)

この説明から，実験者は被験者が

∠FHE＋∠EHG＋∠GHF

＝(180°－∠B)+(180°－∠C)+(180°－∠A)

＝360°

と捉えていると考え，この相に達していることを確認できた．

ここで，被験者は次のような発言を行った．

Su-N089：うーん… 3 点あれば円が描けるなら，4 点があっても描けますよね？

この Su-N089 の発言は, 円に内接する四角形を意識した発言と考えられたので，実験者は次のように答え，円に内接する四角形となるための条件を考えさせる支援を行った．

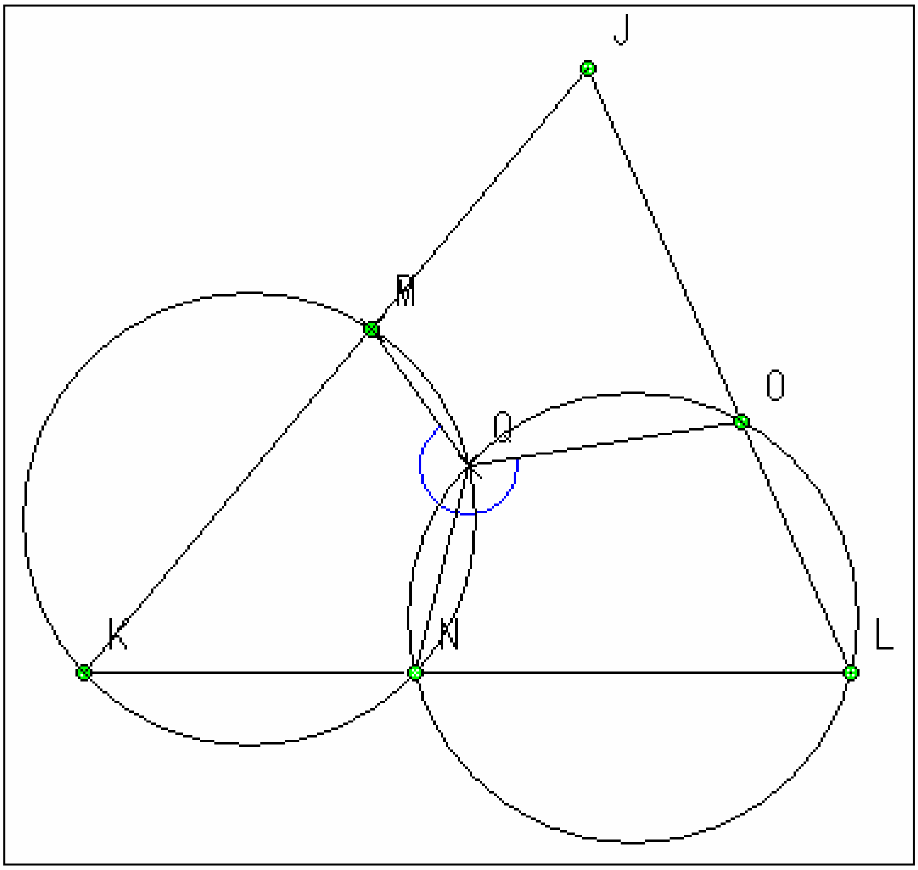
Ex090：その 4 点目を通るかどうかはまた別の問題．その 4 点がどういう条件であれば，円ができる？

Su-N091：この角(∠J) とこの角(∠MQO) をあわせた点が 180°？

しかし，この後角度と 3 円が 1 点で交わることを繋ぐ発言が被験者から行われなかったことから，実験者は次の相へと移行させるための支援を行った．

Ex100：じゃあ，少し課題を捉え直そう．この円(J を通る円) をまだ描いていない状態にしよう．(図 f-3 における J を通る円を表示しないようにする) (図 f-4) とすると，2 つの円があったときに，点 Q は絶対できるよね？円の交点だから．

Su-N101：うん．



(図 f-4)

Ex102 : そうすると，ここで問題になってくるのは？ 何が問題になってくる？

Su-N103 : 何…

Ex104 : もし J，M，O を通る円を描いたときに，その円はどこを通らないといけない？

Su-N105 : Q？

Ex106 : そう．そこを通るかどうかが問題になってくる．もしその理由が言えれば，どんな三角形でも円を 3 つ描けば，3 つ目は必ず先にできた点 Q を通ることが説明できるよね？

5.2.2.4. 捉え直した課題の解決を行う相

先の支援を受け，被験者は 3 円の交点の周りにできる角度と円に内接する四角形の性質を用いて 3 円が 1 点で交わることを説明した．

Su-N107 : この角度(∠K)を x として，ここ(∠MQN) は 180°－x．こっち(∠NQO) は 180°－y．だから，360 引く…いくらになる？

Ex108 : 計算していいよ．

Su-N109 : そしたら，残りの角は… 三角形の内角の和だから x－y か．

括弧をつけると x＋y か.

Ex110：そうすると？

Su-N111：これを足して 180°になるんだから，ここ(∠J)とここ(∠MQO)の和が 180°になることが言えるから，全てひっかかる．ひっかかるというか，交わる.

Ex112：つまり，この JMQO は？ どういう四角形になっている？

Su-N113：円に内接する四角形.

5.2.3. 中学生に対する教授実験結果の考察

上で行った教授実験によって，予備実験から考えられた活動と支援の枠組みが中学生に対しても有効であることが実証された．次に，教授実験結果の考察から，先の枠組みをより一般化した表現に改めた枠組みを構築する．これは，ここでの枠組みを今後図形の論証指導全体に対する枠組みとして用いる可能性を視野に入れているためである．

5.2.3.1. 問題場面を作図する相

この相は問題解決において問題場面を把握するために必要であり，初めの相として位置付けることができる．

この相に達した後，図を移動・変形させることでその問題場面の持つ条件や性質を明らかにする支援を行い，次の相へと移行させる．本実験では

Ex039：じゃあ，H は，この点 H の動きに特徴は無い？

がこれにあたる．

5.2.3.2. 3 円の交点の性質を考察する相

この相は，問題場面の持つ条件・性質を明らかにする相である．ここで行った教授実験では，円周角の定理，円に内接する四角形の性質，三角形の内角の和の性質，が問題場面の持つ条件である．また，実験における被験者の活動は

Su-N046：円周角．

Su-N071：ちょっと待って下さい．えっと，交わる理由か．こっちの三角形(正三角形)で，特殊から一般だから，こっちの三角形(正三角形) で考えると，この角(∠FHE) は 120°だから，ここに四角形ができているから，60°の，180°から 120°を引いた値がここ(∠FHE) にくる．この式から．だから，それが 3 つでここ(点 H の周り) は 360°．てことは，ここ(∠A＋∠FHE) が 180°ってことはここ(点 H の周り) がこれで 2 倍(360°) になる．で，同じになるってことが言える．そのあと，これ．交わる… 交わる理由…

にあたる．そこで，この相を問題場面の持つ条件を明らかにする相とし，問題場面を作図する相の次に位置付ける．この相においては，図を移動・変形させることが生徒に条件・性質を明らかにすることをより行わせやすくなったと考えられる．また，この活動には「推測が普遍妥当であることを示すための見通しを与える役割」も影響を与えていると考えられる．これは，生徒がこの相で明らかにした条件・性質には実験者から見れば解決に決定的である条件・性質，言い換えれば解決への見通しとなっている条件・性質が含まれていることを指す．しかし，Su-N071 における活動のようにそれを生徒が自覚しているとは言い切れない．

この相に達した生徒には，明らかにした条件の中から課題を解決するためにはどれが決定的かを明らかにするために課題を捉え直させる支援を行い，次の相へと移行させる．本実験では

Ex100：じゃあ，少し課題を捉え直そう．この円(J を通る円）をまだ描いていない状態にしよう．(図 f-3 における J を通る円を表示しないようにする) (図 f-4) とすると，2 つの円があったときに，点 Q は絶対できるよね？円の交点だから．

の支援がこれにあたる．この支援により，課題を解決するための障害を，明らかにした条件と関連付けながら考察させる．

ここで行われる支援は，予備実験で得られた相においては 3 つ目の支援として位置付けていたが，ここでの実験からこの相では条件・性質を明らかにするだけであり，次の相においてどの条件・性質が決定的であるかを考えさせるために支援の位置を変更した．

5.2.3.3. 3 円の交点が作る角の性質を考察する相

先の支援を受け，捉え直した課題の解決のために今どのような条件・性質が明らかになっており，それらはどのように関連があるかを考察させる．これにより，生徒が解決に決定的な条件を自覚し，それが課題の解決のどこに位置付くか明らかにすることができると考える．これは，実験者が

Ex106：そう．そこを通るかどうかが問題になってくる．もしその理由が言えれば，どんな三角形でも円を 3 つ描けば，3 つ目は必ず先にできた点 Q を通ることが説明できるよね？

の支援を行った後，被験者は

Su-N107：この角度(∠K)を x として，ここ(∠MQN) は 180°－x．こっち(∠ＮＱＯ) は 180°－y．だから，360 引く…いくらになる？
Su-N111：これを足して 180°になるんだから，ここ(∠J)とここ(∠MQO)の和が 180°になることが言えるから，全てひっかかる．ひっかかるというか，交わる．

の活動において，演繹的な説明を行えていることから示される．

この相に達した生徒には，捉え直した課題を演繹的に説明するよう促す支援

Ex112：つまり，この JMQO は？ どういう四角形になっている？

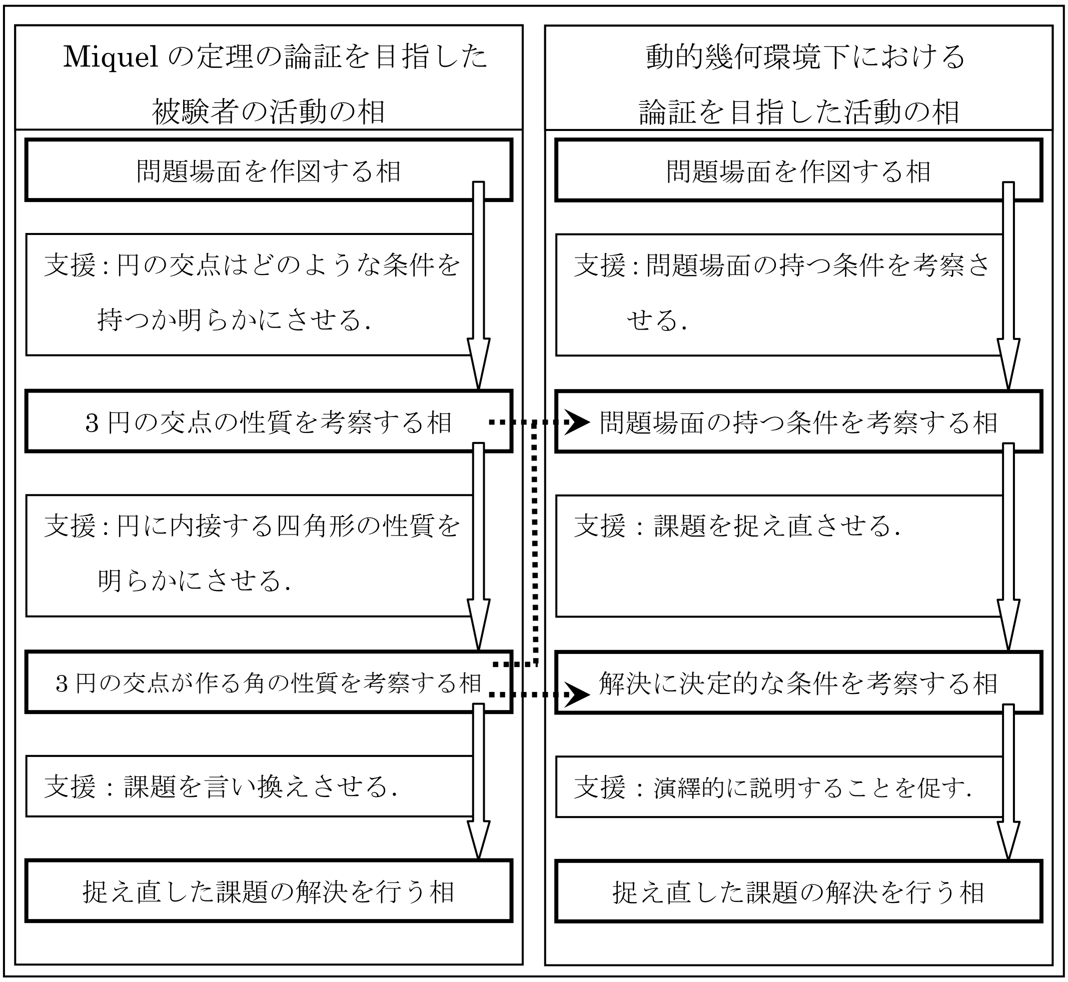
を行い，次の相へと移行させる．

5.2.3.4. 捉え直した課題の解決を行う相

この相は，決定的な条件とそれをどう用いるのかを明らかにしたうえで，課題の解決を実行する相である．

5.2.3.5. 動的幾何環境下における論証を目指した活動の相

以上の考察から，予備実験から得られた枠組みをより一般化した表現に改めた枠組みは次のように図示される(表 3).



(表 3)

大学生に行った教授実験の考察では,「3 円の交点が作る角の性質を考察する相」から「課題を言い換えさせる」支援を行った後に「捉え直した課題の解決を行う相」へと移行できたと考えられた．これに対し，中学生に対する教授実験からの考察では,「3 円の交点が作る角の性質を考察する相」と「3 円の交点の性質を考察する相」が問題の持つ性質に依存した相であることから,「問題場面の持つ条件を考察する相」として 1 つの相に表現を改めた.

また，大学生に対して行った教授実験においては「課題を言い換えさせる」という支援だけで被験者が「捉え直した課題を解決する相」へと到達できたと解釈していたが，中学生に対して行った教授実験結果を考察するなかで,「捉え直した課題を解決させる相」に至るまでに目的の異なる 2 種類の支援を行っていたことが考えられた．これは，大学生を対象とした

予備実験において，被験者に対する支援として「課題を言い換えさせる支援」を行った後，

It080:じゃあ作図しながら説明をしてみて.

のように，被験者に説明を促す支援を行っていることを指す．予備実験における「課題を言い換えさせる支援」を行った前後の実験者と被験者の活動の様相は以下の表 4 に示される．

大学生に対する教授実験	中学生に対する教授実験
「課題を言い換えさせる支援」 Ex076:ということは，先に K を通る円，J を通る円があったときに L,M,O を通る円を描いたらその円は必ずどこを通る？ Su-T077:P を通ります. Ex078:これは一般の三角形でも言える？ Su-T079:言えます. Ex080:じゃあ作図しながら説明をしてみて.	「課題を捉え直させる支援」 Ex100：じゃあ，少し課題を捉え直そう．この円(J を通る円）をまだ描いていない状態にしよう.（図 f-3 における J を通る円を表示しないようにする）（図 f-4）とすると，2 つの円があったときに，点 Q は絶対できるよね？円の交点だから. 「演繹的に説明することを促す支援」 Ex112：つまり，この JMQO は？ どういう四角形になっている？

(表 4)

1 つは，「問題場面の持つ条件を考察する相」において明らかにしたいくつかの条件のうち，課題の解決に決定的なものは何かを考えさせる支援である．ここで行った教授実験においては，

Ex100：じゃあ，少し課題を捉え直そう．この円(J を通る円）をまだ描いていない状態にしよう．（図 f-3 における J を通る円を表示しないようにする）（図 f-4）とすると，2 つの円があったときに，点 Q は絶対できるよね？円の交点だから.

Ex106：そう．そこを通るかどうかが問題になってくる．もしその理由

が言えれば，どんな三角形でも円を 3 つ描けば，3 つ目は必ず先にできた点 Q を通ることが説明できるよね？

の支援が「課題を捉え直させる支援」にあたる．

もう 1 つは，何が決定的な条件かを明らかにした後に，決定的でない条件は課題の解決にどのように位置付くのかを順序立てて説明を行わせるための支援である．教授実験では

Ex112：つまり，この JMQO は？ どういう四角形になっている？

のように，直接的な指示ではなく決定的な条件を中心として，その性質がどのように課題の解決へと結びつくかを問う支援を行っている．これが「演繹的に説明することを促す支援」にあたる．上記の考察から，相が 1 つ減り，支援の種類が増えたことによって大学生に行った教授実験とは異なる位置に課題を捉え直させる支援が位置付き，新たな活動の相を設けることとなった．

ここまでに述べたように，第 3 章で明らかとなった，動的幾何環境に認める役割を学習指導に生かすためにどうすればよいか，という課題に対し第 4 章，第 5 章で行った教授実験から，生徒の活動と教師の支援を相にまとめ，教師が行うべき支援の指針を提案することができた．しかし，これらの相が学習指導においてどのように位置付くものであるかについては議論していない．つまり，第 4 章で考察した相と第 5 章で考察した相はどのように関連があるのか，例えば前者の相にのっとった学習指導を行えば，生徒が自然に後者の相へと進むとは考えにくい．これについて，次章で考察を行う．

第 5 章の要約

本章では，動的幾何環境に認める「推測が普遍・妥当であることを示すための見通しを与える役割」を学習指導に活かすために，教師は何をすべきかを大学生に対する予備的な実験から，生徒の活動と教師の支援を枠組みとして明らかにした．この予備実験から得られた枠組みをもとにして中学生を対象とした教授実験を行うことで，枠組みを実証し，より一般化した以下の枠組みが得られた．

動的幾何環境下における論証を目指した活動の相

問題場面を作図する相

支援：問題場面の持つ条件を考察させる．

問題場面の持つ条件を考察する相

支援：課題を捉え直させる．

解決に決定的な条件を考察する相

支援：演繹的に説明することを促す．

捉え直した課題の解決を行う相

しかしながら，本章で明らかにした枠組みと第 4 章で明らかにした枠組みの相互の関連については議論を行っていない．これらの相をどのように解釈することが, 本研究の目指す学習指導を構築するために有効であるのか. これを次章において議論する．

第 5 章の註および引用・参考文献

1) これは Miquel の定理 :「三角形 ABC のそれぞれの辺に任意の点を取ったとき，各頂点とそれに近接した任意の 2 点を通る三つの円を作図するならば，それらは 1 点で交わる．」(原文 : If a point is picked at random on each side of a triangle ABC, then the three circles constructed through each vertex and the points on the adjacent sides are concurrent.)を改変したものである．問題の作成においては次の文献を参考にした．John Shape. (1999). The Brocard point, *Micromath*, Volume15/3.

垣花京子＆清水克彦.(1995).図形の証明問題での測定値の役割　―コンピュータ環境下における生徒の活動分析を通して―，日本数学教育学会誌, 77, 17-22.

前田隆一.(1979).算数教育論，金子書房.

宮崎樹夫.(1995).学校数学における証明に関する研究　―証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して―，平成 7 年度筑波大学博士論文.

Hadas,N, Hershkowitz,R, and Schwarz,B.(2000).The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments, *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 127-150.

Laborde,C.(2000).Dynamic Geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving, *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 151-161.

Laborde,C.(2005).The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry, *Meaning in mathematics education*, Springer, 159-180.

第 6 章

本研究の目指す学習指導を実現するための提言

本章では，第 4 章・第 5 章で明らかにした生徒の活動と教師の支援の枠組みをどう学習指導に位置付けるかについて議論を行う．

そのため，6.1.ではラカトシュの証明観・数学的推論の本性に対する考えを明らかにし，6.2.ではそれを基にした枠組みの再解釈を行う．

6.1. ラカトシュの証明論駁法からの示唆

本章までに,

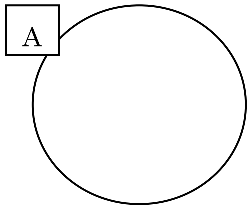
・ 推測構成の役割を学習指導に活かすための生徒の活動を教師の支援の枠組み

・ 普遍妥当の役割を学習指導に活かすための生徒の活動と教師の支援の枠組み

これらを明らかにしたが, 2 つの枠組みの接続はいかになされるかが明らかにされていない. パースの言葉を借りれば, 帰納的推論とは事実から推測を構成することであり, その推測が真であるかどうかは帰納的推論を行う限り妥当であると述べることはできない. これに対し, 演繹的推論は公理をもとに論理が構成され, ある事象を真であると説明する方法であり, 演繹的推論以外認められない. 問題は, 帰納的推論・演繹的推論がこのようなものであるとして, 帰納的推論を行う生徒がいつ, どのようにして演繹的推論を行うことが可能となるか, にある. パースの言説では個々の推論形式の特徴は述べられても, それらの接続は述べることができない. そこで, これらの接続についてラカトシュの述べる推論形式に対する考え方から知見を得る.

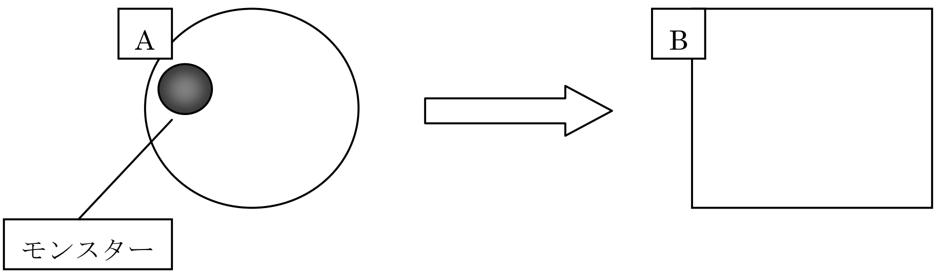
ラカトシュは「数学的発見の論理」において「非形式的・準経験的数学が議論の余地無く確立された定理の数的な単調増加によって成長するのではなく, 思索と批判, 証明と論駁による推量の不断の改良を経て成長する, という点を練り上げるのがそのささやかな目的である.」(Lakatos, 1980) とその目的を述べ,「教師」と異なった考えを持つ幾人かの「生徒」らとの対話という手法によって素朴な推測を正当化する方法を分け, それぞれの方法の限界を指摘する.

素朴な推測：「全ての多面体はオイラー的である」



まず，生徒がいくつかの多面体から上記の素朴な推測を提案する．これに対し，「額縁」「円柱」「うに形」などの例はこの推測に当てはまらないのではないか，という反例が示される．この反例をどのように捉えるか，が以下の 3 つの方法である．

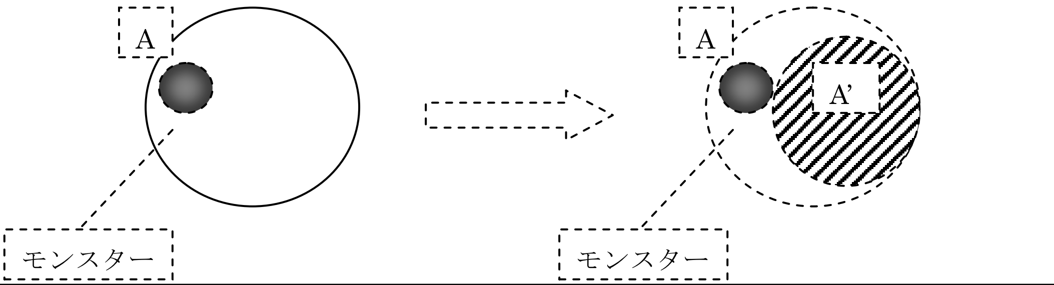
モンスター排除法：「全ての多面体はオイラー的である」を得るように用語を再解釈することで，擁護する．



簡潔に述べれば，モンスター(反例)を対象としない，という考え方である．しかし，「素朴な推測とモンスター排除定理が言語表現で一致しているので，本質的改良は用語の意味の内密裏の変更の陰に隠れてしまう．」と述べられている通り，論駁として示された説明は素朴な推測と同じ文言であるため，その本質的な差異は表面上わかりにくいものとなる．

この論駁法に対し，さらに改良されたものとして提案されるのが，次の考えである．

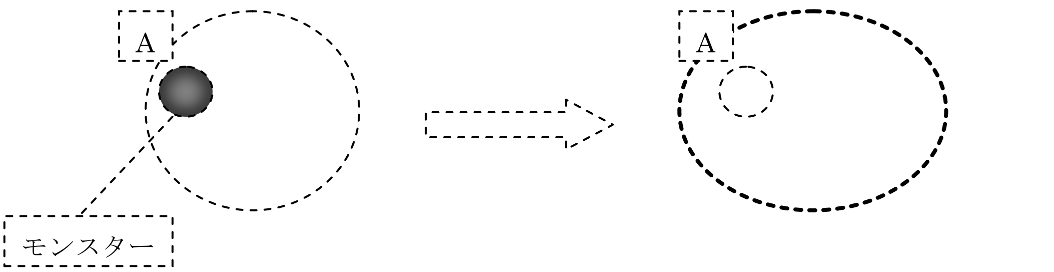
例外排除法：議論とは本当は関係のない要素，凸性を導入し，「全ての凸多面体はオイラー的である」とする．



この考えも簡潔に述べれば，例外を含まないように対象とする範囲を狭くする考えである．この考えでは，モンスターが示されるたびに対象範囲を検討しなくてはならない，という問題が生じると指摘されている．

最後に，より優れた考えとして示される考えが，次のものである．

補題組み込み法：議論，すなわち証明を頼みにし，それ以外のものは頼みにしない．証明を「単連結面を持つ全ての単純多面体はオイラー的である」にまとめた．



この考えは，対象範囲に例外を含めて，推測の持つ補題を改良するように考えるというものである．この考えを適用することで，例外が現れた際に対象範囲の解釈を変えることや狭めることなく，反例を含むより統一された考えを生み出すことが可能となる，と述べられている．

そして，「補題組み込み法」を「証明と論駁の方法」と再命名し，このような方法をとることが証明の方法であると述べている．つまり，最初に素朴な推測があり，その推測をいくつかの補題に分解する．それぞれの補題に対し反例が存在する場合がある．Lakatos(1976)においてはオイラーの多面体定理をもとにし，反例として「額縁」「うに型」「円柱」などが挙げ

られる．これらの反例をはじめはモンスターとして排斥しようとし，次には推測で考えた定義域を限定することでモンスターを排除しようとする．しかし，反例を取り込む形で推測を変形し，全ての反例を含む説明を行った．このような推測し，論駁し，反例を含むより統一的な説明を与えることが「証明」であると主張している．また，ラカトシュの証明観とは以下のように述べられている.「われわれは証明(ここでは伝統的な意味での「証明」)しようと意図していたことを証明するわけではない．それゆえ，いかなる証明も『それが証明さるべきことであった』(Quod Erat Demonstrundum)で終わるべきではない.」(Lakatos, 1980, p50, l1~3) これは，推測が証明に先立つのであり，証明が先に存在するのではないことを意味している．

また,「教師」は発見の方法が帰納的推論から演繹的推論へと移り変わっていくという考えが誤りであることを次の対話の中で示している．

教師　演繹的推量は最良ですが，素朴な推量は推量が全然無いよりはましです．しかし素朴な推量は帰納法ではない：帰納的推測といったものは存在しないのです．

生徒 B　しかし，僕らは素朴な推測を帰納法で見つけたではないですか！「つまり，それは観察によって示唆され，特別な例によって指示される・・・　我々が検討した特別の場合には 2 グループが識別可能です：観察や例が推測形成に先行するものと，後に続くものです．前者では推測を示唆し，後者では推測を支持する．両方とも，推測と『事実』の間の何らかの接触のあり方を示しています・・・」この 2 重の接触が帰納法の心髄なのです：第 1 のものが帰納的発見法，第 2 のものが帰納的正当化，つまり帰納的論理.

教師　違うよ！事実は推測を示唆したりはしないし，支持したりもしません！

生徒 B　それでは僕の表の中にリストされている事実ではなくて何が V−E+F=2 を僕に示唆するのですか？

教師　あなた自身幾度もデータを公式に仕上げることに失敗したと言いました．さて起こったことは次のことです：あなたは 3 つ無いし 4 つの推測を得たけれども次々と論駁されてしまいました．あなたの表はこういった推測をテストし論駁する過程で打ち立てられたものでした．死に絶え今は忘れられたこれらの推測が事実を示唆したのであって，

事実が推測を示唆したわけではありません．素朴な推測は帰納的推測ではない：私たちは推測と論駁による試行錯誤でそれに到達するのです．けれども，もしあなたが―誤って―それに，あなたの表から帰納的に到達したと信じ，表が長ければ長いほどより多くの推測を示唆し，さらに支持すると信じるなら，不必要なデータをまとめるのは時間の無駄です．また，発見の道は事実から推測へ，推測から証明へとなされる(帰納法の神話)と教え込まれているとすれば，あなたはもう 1 つの発見法：演繹的推量を完全に忘れていることになります．」(Lakatos, 1980, p.90)（波線部　原文）

ここでの教師と生徒のやり取りから，ラカトシュは数学的推論とは帰納法や演繹法に還元されるものではなく，それらが相補的に存在して数学的推論を成すものである，と主張していると読み取ることもできる．これは，波線部の「推測と論駁による試行錯誤でそれに到達するのです．」という教師の発言に表れていると言える．

ここで本節の課題に戻れば，第 4 章，第 5 章で構築した生徒の活動と教師の支援の枠組みはパース流の帰納法・演繹法の考えに基づいて考えられてきたといえる．そのため，接続が不明確であるという課題が生じてきたと考えられる．そこで先に述べたようなラカトシュの数学的推論に対する考えを用いるならば，帰納的な推論と演繹的な推論は推測をよりよい推測へと高めるための手段であるので，どちらか一方が他方に先立つのか，といった順序性を考える必要は無くなる．では，このような推測と論駁の方法で証明を作り上げるという観点に立ったとき，2 つの枠組みはどのように解釈すればよいのか．

6.2. ラカトシュ論を用いた枠組みの再解釈

前節では，ラカトシュの証明論駁法から，証明とは素朴な推測を帰納的な推論と演繹的な推論を相補的に用いながら，論駁によってよりよい推測へと高めたものである，という示唆を得た．この考えに基づいたとき，第4章，第5章で得られた枠組みをどのように学習指導へ活かすかを考察することが本節の内容である．

ラカトシュは素朴な推測を持つ生徒に対し，より優れた推測を持つ生徒が素朴な推測を論駁する形で証明論駁法を説明している．この手法は実際の学習指導にそのまま適用できるものではない．なぜなら，ラカトシュが証明論駁法の説明に用いている「生徒」は帰納法・演繹法を駆使できる，いわば熟練した数学者を想定しているからである．このような「生徒」を対象に学習指導を考えることは現実的ではない．では，どのように学習指導を考えていくのか．ラカトシュの説明における，素朴な推測を持つ生徒Aに対し，よりよい推測を持つ生徒Bがどのように生まれてくるのか，さらにはどのように生み出させるべきか，これを考えることが生産的であろう．

この，帰納的な推論・演繹的な推論を行うための方法として，これまでに構築してきた枠組みが活かせると考えられる．つまり，帰納的な推論を行うことが困難な生徒には1つ目の枠組みを適用して支援を行い，演繹的な推論を行うことが困難な生徒には2つ目の枠組みを適用して支援を行う．再び前田(1979)の示唆をもとにすれば，図形の証明の学習指導において帰納的な推論から演繹的な推論へと考えを進めるよう学習を設計することが有効ではないか，と述べられている．そこで，どちらの推論を行うことも困難な生徒には，帰納的な推論を行わせるための枠組みを適用した後に，演繹的な推論を行わせるための枠組みを適用することが，図形の証明指導に有効ではないかと考えられるのである．これは，数学的推論に帰納的な推論と演繹的な推論が段階として含まれていることを主張しているのではなく，あくまでラカトシュの数学的推論の考えに基づき，学習の手立てとしてこのような方法を採ろうとするものである．

ラカトシュによれば，数学的推論の本性は「帰納的な推論から演繹的な推論へ」と推論形式が「順序付く」ことや，「変化する」わけではないことは先述しているが，学習の手立てとして帰納的な推論によってよりよい推測を構成させ，その後演繹的な推論によってさらによりよい推測を構成させることは，目指す推測を構成するための方法としてラカトシュの主張に

反するものではないと考える．これは，パース，ラカトシュが推論とは何であるか，というその本性を明らかにしようとしているのに対し，本研究は学習指導として推論はどうあるべきか，という立場に立っているからである．

また，教授実験おいて，被験者 Su-A は「三角形 ABC の各頂点から線分を作図し，それらを角度が同じになるよう移動すればよい」という推測を持っていたと説明できる．また，3 本の線分を同じ角度を保つように移動させる作図をした後，その 3 本の線分の交点はどのように作図をすればよいか，その作図方法を考える際に「三角形が回転して集まっている」「2 本ずつ取った交点の軌跡が円を描く」「3 つの円を作図し，その交点が求める点である」と推測し，その説明を行っていることはまさに求める点の作図方法に対しての「よりよい推測」を構成していると言える．そこで，第 4 章・第 5 章で構築した枠組みはラカトシュの言う「よりよい推測」を構成するために貢献できると考えられる．

第 6 章の要約

本章では，前章までに構築した動的幾何環境下における生徒の活動と教師の支援の枠組みをどのように学習指導に位置付けるかについて議論した．

前章までは，枠組みについてパースの述べている推論形式に則った考察してきたが，その考察方法では位置づけが不明確であるという限界を明確にし，ラカトシュ(1980)の言明をもとに再考察を行った．そして，2 つの枠組みは帰納的な推論と演繹的な推論が相補的に生じながらよりよい推測を作り上げるという，ラカトシュの言う証明を構成するための手段として位置付けることが考えられた．また，どちらの推論も構成することが困難な生徒に対しての学習指導を考える際には，その手立てとして前田(1979)の主張をもとに帰納的な推論から演繹的な推論へと指導を行うことが考えられた．

第 6 章の引用・参考文献

I.ラカトシュ著,佐々木力訳.(1980).数学的発見の論理,共立出版株式会社.

William H.Davis 著,赤木昭夫訳.(1990).パースの認識論,産業図書.

第 7 章

本研究の結論

本章では，本研究で得られた成果を 7.1.で示し，本研究で考察ができなかった課題を 7.2.で述べる．

7.1.研究の結論

従来，図形領域の学習指導，特に論証において生徒が演繹的な推論の必要性を感じていないという問題点が指摘されている．これに対し，生徒が演繹的な推論の必要性を感じとるためには帰納的な推論を行わせ，推測を構成する活動が必要であることを主張する研究も見られる（例えば前田，1979；宮崎，1995)．しかし，前田(1979)は当時の学習環境では推測を帰納的に構成することが困難であったことも指摘している．これに対し，現在では CabriGeometry や Geometric Constructor Win といった動的幾何ソフトの使用により生徒が自ら図を自由に移動･変形させることが可能となっている．このようなテクノロジーの発達によって，今日では推測を帰納的に構成しやすい学習環境が構築可能であることが明らかにされている(例えば Laborde，2000；Hadas，2000；垣花＆清水，1995 など)．これを受け，本研究の関心は推測を帰納的に構成しやすい学習環境を用意することで，生徒が演繹的な推論の必要性を感じる学習指導を行うためにはどうすればよいかということにある．

これについて第 2 章では動的幾何環境を用いた証明の学習指導に関する先行研究を概観し「動的幾何を用いた証明そのものに関する研究」と「どのように証明の必要性を与えるかに関する研究」，に関わる分野の研究から課題を得ることができた．

これらの課題から，第 3 章では本研究の考える，生徒に真偽が明らかでない命題を与える学習指導を提案した．これにより，その真偽を探求する中で帰納的な推論を行うことから，より一般的な性質の推測を構成することを期待し，構成した推測が普遍妥当であることを示すために演繹的な推論を用いる必要性が生じると考えられた．このとき，教師が動的幾何環境に認める役割として次の 2 点が考えられた．

- 帰納的に事実を集め，推測を構成しやすくする役割．
- 推測が普遍妥当であることを示すための見通しを与える役割．

次に，これらの 2 つの役割をどのように学習指導に活かすべきか，が課題となる．これに対し，第 4 章と第 5 章ではこれらの役割を学習指導に活かすために，動的幾何環境下における生徒の活動とそれに対する教師の支援を知るため，教授実験を行った．

第 4 章では帰納的に事実を集め，推測を構成しやすくする役割を学習指導に活かすために教師は何をすべきかを課題として，高校生を対象とした教授実験を計画・実施し，その結果をから次の枠組みが得られた．

動的幾何環境下における論証を目指した活動の相

解決に直接的でない推測を構成している相

支援：帰納的に推測を構成しやすい事象を提示する

目的を定めず推測を構成している相

支援：構成した推測が何を意味するのかを考えさせる

帰納的に事実を集める方法を特定していない活動の相

第 5 章では，推測が普遍妥当であることを示すための見通しを与える役割を学習指導に活かすために教師は何をすべきかを課題とし，大学生を対象とした予備実験をもとに，中学生を対象とした教授実験を行い，次の枠組みを得た．

動的幾何環境下における論証を目指した活動の相

問題場面を作図する相

支援：問題場面の持つ条件を考察させる．

問題場面の持つ条件を考察する相

支援：課題を捉え直させる．

解決に決定的な条件を考察する相

支援：演繹的に説明することを促す．

捉え直した課題の解決を行う相

ここで，それぞれの枠組みは明らかとなったが，これらの接続，つまり枠組み間の移行はどのように考えればよいのか，ということが課題として考えられた．

これについて，第 6 章ではラカトシュ(1980)の主張から知見を得，枠組みの再解釈を試みた．ラカトシュの述べる数学的推論の本性には帰納的な推論と演繹的な推論が相補的に存在していると考えられ，証明とは素朴な推測から練り上げられたよりよい推測を指す．そして，2 つの枠組みは帰

納的な推論と演繹的な推論が相補的に生じながらよりよい推測を作り上げるという，ラカトシュの言う証明を構成するための手段として位置付けることが考えられた．また，どちらの推論も構成することが困難な生徒に対しての学習指導を考える際には，その手立てとして前田(1979)の主張をもとに帰納的な推論から演繹的な推論へと指導を行うことが考えられた．

7.2. 今後の課題

本研究に残された課題として，以下の点が挙げられる．

1 つは，教授実験で用いた課題は既存の定理を対象に合わせて改変しているが，本研究で提案した学習指導の目的・枠組みに基づいたとき，どのような問題を設定すべきか，その方法が明らかにできていない．

さらに，教授実験における結果の考察方法のあいまいさが指摘できる．この考察方法の厳密さを高めることが，枠組みをより精緻なものに改良できると考えられる．

また，枠組みを用いた学習指導の検証が課題として挙げられる．本研究では枠組みの構築に重点を置き教授実験を行ってきたが，その妥当性の検証が行われていない．また，教授実験は個人を相手に行ったものであるので，30 人～40 人の通常の学習指導で想定される人数に対してこの支援の枠組み，そして学習指導は有効であるかどうかが検証されなくてはならない．

これらの課題が，今後の課題として残されている．

7.3. 今後の動的幾何環境下における証明の学習指導への提言

本研究の結論は既に得られているが，この研究を通して明らかになった今後解決が期待される更なる課題を最後に述べる．

第 1 に，このような動的幾何環境を用意した学習指導を行うにあたり，支援については指針を示すことができたが，課題設定については検討が行えていない．

これは，先行研究を見る限り，動的幾何環境下において扱うにふさわしい課題とはいかに設定されるべきか，といった指針が無いことに課題が残されているといえる．多くの先行研究で扱われている課題は四角形の各辺の中点を結んでできる四角形の性質について扱ったものや，円周角の定理に付随するものである．これらは元々紙と鉛筆で考えられてきた課題であり，それらを解決する道具が変わったに過ぎない，と言うこともできる．本論文で扱った課題もやはりその域を出ていない．今後，動的幾何環境から生まれる課題とはどのようなものかを探求することが期待される．本論文では，課題を設定するにあたり，「軌跡を用いることが解決に決定的になる課題」を選択した．これは，本論文で明らかにした動的幾何環境の役割を活かすために妥当であると判断したためである．今後は，このような指針を明らかにすることも期待される．

第 2 に，課題解決の目的に対応した動的幾何環境の扱いに関する研究が行われることを期待する．これは，本論文で行った教授実験において，課題を解決するだけでなくその課題を解決する中で自ら課題を見出し，それを解決する中でさらに課題を見出す，というサイクルが確認できたことに起因する．筆者自身，個々ばらばらに選んだ 2 つの定理 Brocard の定理と Miquel の定理であるが，他方が一方の特殊な場合であることを教授実験を計画する中で発見した．今後の研究の方向性として，一見別々に見える図形の性質を自ら関連付けようとする活動を，動的幾何環境下における解決活動の中で行うことに着目したものが期待できる．

引用・参考文献
邦文

飯島康之.(1991).作図ツールの導入に伴う作図の新しい役割について,第24回数学教育論文発表会論文集,275-280.

飯島康之.(1992).数学的探求のための環境としての作図ツール　―事実の収集可能性と数学的知識の実行可能性の観点からの考察―,第25回数学教育論文発表会論文集,445-450.

飯島康之.(1994).コンピュータを活用した問題解決・課題学習,CRECER中学校数学科教育実践講座,第11巻,269-278,株式会社ニチブン.

飯島康之.(1996).テクノロジーを用いた数学的探求の研究において注目すべき緒変数について　―学習環境の変化によって変わるもの―,第29回数学教育論文発表会論文集,499-504.

宇沢弘文(1998).好きになる数学入2　―図形を考える　幾何―,岩波書店.

清水克彦.(1991).数学的問題解決と道具の相互作用に関する研究　―幾何ソフトCabri-Geometryを事例として―,第24回数学教育論文発表会論文集,245-250.

垣花京子&清水克彦.(1995).図形の証明問題での測定値の役割　―コンピュータ環境下における生徒の活動分析を通して―,日本数学教育学会誌,77,17-22.

清水克彦&垣花京子.(1996).学校数学における実験・観察的方法の導入と証明の機能の変化についての考察　―コンピュータによる実験数学と証明―,第29回数学教育論文発表会論文集,223-228.

辻宏子.(1996).図形の問題解決における動的変形の効果に関する検討　―生徒の活動の分析を通して―,第29回数学教育論文発表会論文集,625-626.

辻宏子.(1997).コンピュータ環境下での作図活動の効果,平面図形の学習での図の図形としての認識を促す場の検討,日本数学教育学会誌,79(11),11-19.

辻宏子.(1999).数学の教授学習におけるコンピュータ利用の捉え方についての一考察　―相対的システム“milieu”の概念の導入―,第32回数学

教育論文発表会論文集,119-124.
辻宏子.(2000).図形学習の作図活動における認知的人工物としてのコンピュータについての考察,第 33 回数学教育論文発表会論文集,131-136.
辻宏子.(2001).コンピュータを利用した教授＝学習環境の構築に関する一考察,第 34 回数学教育論文発表会論文集,587-588.
辻宏子.(2002a).図形学習のための学習環境の構築に関する一考察　―作図活動に着目した教授学的状況の展開―,第 35 回数学教育論文発表会論文集,277-282.
辻宏子.(2002b).数学教育における教材・教具としてのコンピュータの機能に関する一考察,筑波教育研究,第 21 号,47-54.
辻宏子.(2003).動的幾何環境における学習者の作図活動と「点の自由度」の認識に関する一考察,第 36 回数学教育論文発表会論文集,193-198.
辻宏子.(2003).証明と動的な幾何環境の利用に関する一考察,第 36 回数学教育論文発表会論文集　課題別分科会発表集録,228-231.

八田善穂(1975).パースのアブダクションについて,理想,506,85-98.理想社.

前田隆一.(1979).算数教育論,金子書房.

宮崎樹夫.(1995).学校数学における証明に関する研究　―証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して―,平成 7 年度筑波大学博士論文.

欧文

G.Polya,柴垣和三雄訳(1959).帰納と類比,丸善株式会社.

Hadas,N,Hershkowitz,R.and Schwarz,B.(2000).The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments, *Educational Studies in Mathematics*,44,127-150

Laborde,C.(2000).Dynamic geometry environment as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving, *Educational Studies in Mathematics*,44,151-161

Laborde,C.(2005).The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry, *Meaning in mathematics education*.Springer.

Shape,J. (1999). The Brocard point, *Micromath*, Volume15/3,27-31.

William H.Davis 著,赤木昭夫訳(1990).パースの認識論,産業図書.

資料

資料１　高校生に対する教授実験記録
資料２　大学生(Su-T)に対する教授実験記録
資料３　大学生(Su-K)に対する教授実験記録
資料４　中学生に対する教授実験記録

高校生に対する教授実験記録

(05/11/23 実施)

実験者(以下 EX)001 : 点 D を動かすと角度はどうなる？

被実験者(以下 Su-A)002 : 全部変わる

EX003 : じゃあ，考えやすくするためにはどうしたらいいと思う？

Su-A004:点 P を最初においてから ABC を決める.

EX005 : 逆の方向にいくわけだね．それは(位置を)決められるかな？

Su-A006 : 難しい

EX007 : 3 つ全部が動くから難しいんだよね？

Su-A008 : 1 つずつ動かす

EX009: じゃあ例えばこの D をどうやって動かしたらいいの？

Su-A010 : 分からない

EX011 : じゃあ一つ一つ決めていくというのを目標としよう．∠PAB だけを作ってやればこの中に 1 つ角ができるよね？

Su-A012 : ∠PAB

EX013 : (△ABC のみを表示することを指示)∠PAB だけを作ってみよう.

Su-A014 : (△ABC の内部に点 D をとり，∠DAB を測定し，表示)

EX015 : じゃあ次に∠PBC を作ってみよう．でも，一個ずつ考えるんだから，その点 D は使わない.

Su-A016 : (点 E を作図し，∠EBC を測定，表示．同様に点 F を作図し∠FCA を測定，表示)

EX017 : これで∠PAB，∠PBC，∠PCA をばらばらに動かせる.

Su-A018 : どこからはじめていいか分からない.

EX019 : ということは，

Su-A020 : 1 つを決めて，それと同じ角を作るのかな，と思った．でもそしたらこういう風に 3 つ点がばらばらになっちゃうのかな．そしたら P が 1 つじゃなくなる.

EX021 : じゃあ作図してみよう.(「同じ角度を作る」という作図が可能であることを伝える．)

EX022 : ∠DAB という角度をどこに作りたい？

Su-A023 : ∠DBC のところ

EX024 : ということは何を∠DAB と同じだけ回転させればよいのかな？　AB を何を中心に回転させればいい？

Su-A025 : 点 D

EX026 : AB を点 D を中心として回転させることはできない.

Su-A027 : 回転させる意味が分からない．回転させるイメージがわかない.

EX028 : ∠DAB をどこの頂点に作りたい？

Su-A029 : B

EX030 : B のところに作る角度は，DB と何から作られる？

Su-A031 : BC

EX032 : DB は∠DAB 分だけ BC から離れているんだよね？つまり, B を中心に∠DAB 分だけ何を回転する？

Su-A033 : ∠DAB

EX034 : ∠DAB をコピーして貼り付けることができる．(∠EBC を測定し，∠DAB＝∠EBC となっていることを確認する)

EX035 : イメージしていたのと同じ？

Su-A036 : 大体同じ．1 つを固定してそれにあわせる.

EX037 : (同様の作図手続きで FC を作図することを指示．∠FCA＝∠DAB となることを確認．)

Su-A038 : (D，E，F を一致させる)

EX039 : 一致させたけど，その一致したところは何？

Su-A040 : 点 P

EX041 : じゃあこの一致させた点を作図する方法を考えよう．この点はどんな点？

Su-A042 : この点は新しく作った線の上にある.

EX043 : この一致している状況が点 P を表しているといったよね？じゃあ，この交点を作図しようとしたらどうしたらいいと思う？

Su-A044 : 長さを測る．AP,BP,CP の．いったんば

らした方がいいですか？

EX045:（AD,BE,CF の長さを測定することを指示.）

Su-A046：角度が全部動いている.

EX047：D,E,F を一致させてみて.

Su-A048：（D を動かして D，E，F を一致させようと試みる．CF は F が D,E と一致せずその延長と D，E が交わる.）

EX049：F がその位置でも点 P はできそうだ.

Su-A050：じゃあ長さは関係ない.

EX051：F じゃなくてどこで点 P はできている？

Su-A052：D と E.

EX053：じゃあ E を動かしてみて？

Su-A054：（E を線分上 D でない部分に移動．それでも点 P が作図できていることを確認.）

EX055：じゃあ「一致する」というのは何が一致しているのかな？

Su-A056：わからない

EX057：(点 D を移動させ，線分の交点上から離した状態で点 P を作図することを指示.） この場所でも点 P はできる．今何を一致させた？

Su-A058：線分

EX059：じゃあ三つの線が交わるためにはどのような作図をしなくてはならないだろう.

Su-A060：（活動が止まる）

EX061：何を一致させればいい？

Su-A062：分からない

EX063：さっき点 P がいっぱいできるといったが，どこにできる？

Su-A064：AD，BE，CF の先端.

EX065：(「一致する」という活動を行うよう指示.）

EX066：もう少し具体的に言うと線分の何を一致させる？

Su-A067：どこか一点．線分の.

EX068：三つの角度を等しくすることが目標だった．それを満たす点はこの画面ないにある？

Su-A069：ない.

EX070：じゃあ∠DAB と∠DBC が等しいことを同時に満たす点はある？

Su-A071：D と B

EX072：D から測ると∠DBC と∠DAB は等しくならない.

Su-A073：わかりません

EX074：点 E を EB 上どこに動かしても∠EBC は変わらないよね？∠DAB＝∠EBC を満たす点 E の位置はどこ？

Su-A075：(三本の線分の交点上に置く)

EX076：そこでは三つの角度が全て等しくなる.

Su-A077：(活動が止まる)

EX078：さっき点 P がいっぱいできるといったが，どこにできる？

Su-A079：新しくできた 3 本の線分の 2 本ずつ選んでできる交点.

EX080:じゃあ交点を取ろう.(DA と CF の交点 G，EB と DA の交点 H，DB と CF の交点 I を作図することを指示)

EX081：今できた G,H,I が一致するところが点 P.（Su-A が点 D を△ABC の外に置く）もう点 D の位置はどうでもよくなってきたね.

Su-A082：よくなってきた.

EX083：じゃあ G,H,I はどんな点だろう．どんな風に一点に集まるだろう.

Su-A084：E を動かす.

EX085：どんな集まっていきかたをする？

Su-A086：寄ってくる.

EX087：どんな風に？

Su-A088：三角形があつまって小さくなる．G に集まる.

EX089：それは H を基準にしてみれば H に集まるともいえる.

Su-A090：(三角形が)回ってる.

EX091：回ってるぽいね．点の動きを見るためにはどうすればいい？

Su-A092：軌跡.

EX093：(G,H,I の軌跡を表示することを指示)

Su-A094：(軌跡は)円になっている.

EX095：交点を作図するためには何が分かればいい？

Su-A096：円．円の交点.

EX097 : 三つの円が分かれば点 P が描けそうなことが分かった．じゃあ三つの円をどうやって描けばいいだろう．

Su-A098 : 三角形に沿って円ができているから，1 つずつ三角形を取り出して円を描く．

EX099 : 取り出すとして，△PBC のことを言っているんだよね？その三角形を描くためには何が必要？

Su-A100 : △ABC.

EX101 : じゃあ△ABC を使ってグリーンの円(BC を弦に持つ円)をどうやって作図したらいい？

Su-A102 : BC を動かす

EX103 : この円は BC を動かした軌跡ではない．

Su-A104 : 分かりません．

EX105 : グリーンの円を描くことだけを目的としよう．グリーンの円は△ABC とどんな関係にある？

Su-A106 : 軌跡

EX107 : I の軌跡．△IBC にくっついていると言ったけど，△ABC とは？

Su-A108 : BC だけ

EX109 : BC とグリーンの円はどんな関係？

Su-A110 : 直径．下に下ろせば．

EX111 : BC は直径ではない．BC はグリーンの円の弦となっている．弦と円はどんな特徴があった？

Su-A112 : わかりかせん

EX113 : BC が直径だったら円が描けそう？

Su-A114 : 描けそう．

EX115 : 中心どこに来る？

Su-A116 : はっきりとわからない．

EX117 : じゃあ BC が直径だったらどうやってグリーンの円を描くかな？

Su-A118 : 半径を調べる．

EX119 : 半径を出した後はどうする？

Su-A120 : コンパス．

Su-A121 : (活動が止まる．)

EX122 : BC が弦であることが分かっている．他の円は？

Su-A123 : AB や CA を弦としている．

EX124 : これだけで円は描ける？

Su-A125 : 描けない．

EX126 : 弦から中心は出せる？

Su-A127 : 出せない．

EX128 : 直径だったら？

Su-A129 : 長さを出して半分にする．

EX130 : 長さがわからないとできないだろうか．BC が直径なら BC のどこにある？

Su-A131 : 中点．

EX132 : 今は直径ではなくて弦だ．さっき弦の下に直径があるといった．

Su-A133 : 中点を延ばす．

EX134 : それをなんと言った？

Su-A135 : 垂直二等分線．

EX136 : じゃあグリーンの円だけを描いてみよう．(△ABC を別ウインドウに表示. BC の垂直二等分線，垂直二等分線上に点 D を作図することを指示．) 点 D が中心だが，半径は？

Su-A137 : BD，CD

EX138 : (点 D を中心とし，点 B を円周上に持つ円を作図するよう指示) この円はグリーンの円と全く同じだろうか？

Su-A139 : 一緒．

EX140 : 中心を動かしてみて．(円の位置と大きさが変わることを確認した後) 弦だけが分かっても描けない．グリーンの円と同じにできる？

Su-A141 : (中心を動かして大体の位置に置く)

EX142 : 今それはどうやって場所を決めた？

Su-A143 : 大きさ．

EX144: でもそれは△ABC の形が変わると大きさが変わるよね．何か特定する方法はないだろうか？

Su-A145 : BC の線からの距離．

EX146 : グリーンの円を動かしてみようか．円自体の特徴は？

Su-A147 : 点 I.

EX148 : 点 I の軌跡ではある．BC を弦に持つという以外には？

EX149 : (△ABC の形状を変え，三つの円を描くことを指示．)

Su-A150 : (グリーンの円が)大きくなった．

EX151：でも BC は？
Su-A152：変わらない.
EX153：円と BC の関係は？
Su-A154：弦.
EX155：BC は常にグリーンの円の？
Su-A156：わかりません.
EX157：さっき△IBC が円にぴったりくっついているということを言ってくれた.
Su-A158：内接円，内接円じゃない．外接円.
Ex159：ということは？何が言えるだろう.
Su-A160：わかりません.
Ex161：外接円にはなりそうだ．△ABC とはどういう関係にある？
Su-A162：わかりません.
Ex163：(別ウインドウの△ABC を元の図の△ABC と同じように変形することを指示)どの位置にグリーンの円の中心をおけばよいだろう？
Su-A164：この辺
Ex165：どこでその位置を判断した？
Su-A166：やっぱり見た目.
Ex167：△IBC にぴったりくっつくといってくれた．BC だけに着目すると，BC にぴったりくっつくということはどう説明できる？
Su-A168：動かしたら離れる.
Ex169：(別ウインドウの図で)BC はぴったりくっついている？
Ex170：今△ABC と円がどんな関係にあるか
Su-A171：それがわからない
Ex172：(作図の手順を説明後)中心の位置を決めたい．そのとき，グリーンの円はどんな特徴を持つか.
Su-A173：(活動が止まる)
Ex174：見た目で判断したといったが，どことどこで判断した？
Su-A175：円と三角形の交わり方.
Ex176：(具体的な場所を示すよう指示．Su-A は円と AB，CA との交点を示す．) そこにはどんな特徴があるだろう？(元の三角形の形を変えて調べるよう指示．)
Su-A177：(三角形の形を変えて軌跡を表示する．)
Ex178：交わり方は変わった？
Su-A179：AC が交わってない.
Ex180：じゃあ AC の交わり方は関係ないという特徴がありそうだ.
Su-A181：点 A は紫の円(AB を弦とする円)と黄色の円(CA を弦とする円)の交点となっていて，点 C は黄色の円とグリーンの円が交わっている.
Su-A182：(活動が止まる)
Ex183：さっき AB の交わり方は関係なさそうだということが分かった．あとは B か C の交わり方に特徴が無いだろうか.
Su-A184：(△ABC を変形して軌跡を表示．)
Ex185：B と C の交わり方は同じだろうか？
Su-A186：角度は関係ない？
Ex187：それは全部一緒になるようにとっている.
Su-A188：(活動が止まる)
Ex189：(軌跡の表示方式を『×』から『・』に変更するよう指示)点 I と点 C はどのように交わっている？
Su-A190：一致した.
Ex191：じゃあ B と C は円周上にあると言える．△ABC とグリーンの円の交わり方はどんな特徴があるだろう.
Su-A192：(活動が止まる)
Ex193：(グリーンの円以外の軌跡を非表示にするよう指示)交わり方はどうなるだろう？交点 B と C それぞれに特徴は無いだろうか？
Su-A194：特徴？△ABC 全体で？
Ex195：円と△ABC で，特に点 B や点 C について.
Su-A196：(△ABC を変形する．)
Su-A197：(活動が止まる．)
Ex198：ここまでの作図手順を説明し，円の中心を決定するために円の特徴を調べる中で三角形と円の交わり方が問題であることを説明する.
Su-A199：(△ABC を変形する．) 変えても交わり方は全部一緒に見える.
Ex200：全部一緒に見えるということは何か法則があるかもしれない．B も C もどっちも一緒に見え

る？

Su-A201：B と C の長さが変わらないからずっと同じに見える．

Ex202：B と C の長さを変えてもいいよ

Su-A203：(BC の長さを変える)　同じに見える．

Ex204：途中でぴったりくっついているといったが，△ABC とはぴったりくっついていない？

Su-A205：くっついていない．A は離れているけど B と C はずっと一緒．

Ex206：△IBC にはぴったりくっついている．△ABC に関して円と三角形の関係はないか．

Su-A207：円周角の定理？は今関係ない．

Ex208：BC と円は常にどうなっている？

Su-A209：(活動が止まる)

Ex210：辺 AB とは交わったり交わっていなかったりするから関係ないことが分かった．BC とはぴったりくっついている．CA とはどうなっている？

Su-A211：CA とも交わったり交わらなかったりしている．

Ex212：交わらないのはどんなときだった？

Su-A213：(△ABC を変形)　交わった．

Ex214：どこで交わった？

Su-A215：点 C．(AB と円の交点を示し)こういうのも交わったって言うんですか？

Ex216：それは言い方を変えよう．「横切った」と言うことにしよう．

Su-A217：じゃあ点 C で交わった．

Ex:218：その交わり方をもう少し詳しく言うと？

Su-A219：「横切っている」

Ex220：C で横切っている？

Su-A221：横切っていない．

Ex222：(△ABC を変形するよう指示)

Su-A223：横切ってない．

Ex224：横切っていないということをどう表現すればよい？

Su-A225：接している．

Ex226：接しているということは点 C をなんと言う？

Su-A227：接点．

Ex228：じゃあ C は円の接点だろう．(別ウインドウの図を示し)　今点 C で接しているだろうか？

Su-A229：接している．

Ex230：接しているかどうかはどうやって判断する？

Su-A231：CA を延長する．

Ex232：(半直線 CA を作図することを指示)

Su-A233：(CA に接しているように円の中心を移動させる．)

Ex234：この接しているという状況を使えば円は描けそう？

Su-A235：描けそうだけど

Ex236：接点と円はどんな関係にあった？

Su-A237：中心と接点を結ぶ半径と接線は 90°

Ex238：じゃあ△ABC が先に与えられたときには？

Su-A239：C から 90°の接線を引いて，その線上に中心を作る．中心がある．

Ex240：(新たに△ABC を与え，作図するよう指示．) C から 90°の線を引くとき，何に対して 90°？

Su-A241：CA　(BC の垂直二等分線，CA 上 C で垂直に交わる直線を引き，交点をとる．その交点を中心として点 B を通る円を描く．)

Ex242：グリーンの円以外に紫と黄色の円があったけど，それも描けそうじゃない？(紫の円を描くことを指示)

Ex243：紫の円はどの辺を弦に持つ？

Su-A244：CA

Ex245：どこで接している？

Su-A246：A

Ex247：何に接している？

Su-A248：AB

Ex249：(グリーンの円を描いた図に紫の円を描くことを指示．)

Su-A250：(AC の垂直二等分線を引いた後，活動が止まる．)　もう一回こっち(元の図)見ていいですか？

Ex251：紫の円はどこと接している？

Su-A252：AB　(AB 上 A で垂直になる直線を描き，

交点を中心に取り，紫の円を描く）
Ex253：じゃあ点Pはどこにある？
Su-A254：わからない．
Ex255：∠PAB＝∠PBC＝∠PCA となる点 P を作図しようとした．3 つ全部動かすと分からないから角度を 1 つと同じにしてあとはそれと同じように動くように作図した．その交点の軌跡がどうなった？
Su-A256：交わった．
Ex257：その交わったところはどこにできている？
Su-A258：（グリーンの円と紫の円の交点を示し）ここ？
Ex259：（元の図で角度を等しくする線分の交点の軌跡が円になることを確認させる．） 点Pはどこ？
Su-A260：（グリーンの円と紫の円の交点を示し）ここ．
Ex261：（∠PAB＝∠PBC=∠PCA となっていることを測定により確認するよう指示）
Su-A262：一緒．
Ex263：円を描いて交点を取るとなぜ三つの角度は等しくなるんだろう．
Su-A264：接している点があるから．
Ex265：どんな性質があるから？その接しているという性質を使って．
Su-A266：わかりません．
Ex267：グリーンの円だけで考えよう．この円は BC を弦として何に接しているんだった？
Su-A268：CA.
Ex269：こういう円を描いたらどこの角とどこの角が等しくなった？等しくなるんだ？
Su-A270：∠ABC
Ex271：とどこが等しい？
Su-A272：(活動が止まる）
Ex273：円は点 P を探すために描いた．この円を描くことで∠PAB と∠PBC と∠PCA はどうなっている？
Su-A274：一致している．
Ex275：なぜ円を描くことと一致することが繋がるんだろう？
Su-A276：(活動が止まる）
Ex277：さっき接しているといったが，何が何に接している？
Su-A278：円が直線に接している．
Ex279：他に円が接しているものは何があった？
Su-A280：点．弦.
Ex281：両方とも接している．この円は最初どんな円と言った？
Su-A282：三角形が内接している．
Ex283：今どこに三角形がある？
Su-A284：2 つの円の中．
Ex285：(△PBC の作図を指示） △ABC があって，グリーンの円を描けばこの△PBC ができる．これと角度が等しいことはどう繋がる？
Su-A286：全部にこれと同じような三角形ができる．紫の円や黄色の円の中にもこの三角形ができるから．
Ex287：もう少し詳しく見てみようか．（△PCA の作図を指示）
Ex288：なぜこれらの三角形の角度が等しくなるんだろう．
Su-A289：P を中心にして･･･∠PBC と∠PCA は同じですか？
Ex290：同じ.
Su-A291：回る．
Ex292：グリーンの円の特徴は？
Su-A293：B で接している．△IBC を中に持つ．
Ex294： なにか角度と関係していたかな？
Su-A295：(活動が止まる．)
Ex296：この理由が言えれば円を描くことで点 P が作図できることの説明ができそうだよね．あとは三角形の持つ角度が等しくなる理由を述べてほしい．
Su-A297：(活動が止まる）
Ex298：グリーンの円が持つ特徴は BC を弦に持つことと，B で接していることだけだった．これが∠PBC＝∠PCA になることとつながるかな？
Su-A299：この図では同じになっている．
Ex300：(新たに△ABC を描き，グリーンの円を描

く．円周上に点 F を取り，△FBC を描いた図を示す．）　この図でどの角とどの角が等しい？

Su-A301：この中(新たな図)ですよね？

Ex302：どことどこが等しくなってほしい？

Su-A303：∠FBC と∠FCA

Ex304：(角度の測定を指示)

Su-A305：同じ.

Ex306：グリーンの円を描くと∠FBC=∠FCA となっていることが言えそうだ．これはなぜだろう．

Su-A307：どっか円周角が同じ.

Ex308：ここどここが等しくなると言うことを説明するために使えそうな定理は円周角以外に無い？

Su-A309：相似･･･.

(実験終了)

大学生(Su-T)に対する教授実験記録

(06/03/31 実施)

Ex001:正三角形を作って.

Su-T002:正三角形を作ったらいいんですか?

Ex003:まず正三角形を作ってこの性質を確認してみて.(GC の操作方法を伝える)

Su-T004:交わりました.

Ex005:D,F,G を動かしてみて.

Su-T006:(D,F,G を動かしても一致することを確認する.)

Su-T007:ここからやるんですか?

Ex008:これは正三角形だけど,一般の三角形でもこのような性質が成り立つかどうか.

Ex009:(3 つの円の交点に記号をつけることを指示.交点を点 H とする.)

Ex010:点 H は D,F,G がどのように動いても一致している.この点 H の動きに特徴はある?

Su-T011:H の動き・・・.特に(無い).三角形の中を動いている.あ,そうでもない.そうでもなかった.

Ex012:何に依存している?

Su-T013:例えば D を動かすと,AFD とか D を通っていない円の円周上に H はある.他の点を動かしても,同じようなことが言えます.

Ex014:例えばじゃあその動きに関して中学生か高校生ぐらいで習ったことを用いるとしたら,何の性質を用いる?

Ex015:必ず一点で交わるということを説明してほしいけど,そのために使えそうな性質は何がありそう?

Su-T016:中学校・高校でですか?

Ex017:中学校 3 年生ぐらいまでで.

Su-T018:思いつかない.

Ex019:じゃあ一般の三角形を作ろう.

Su-T020:(3 つの円が一点で)交わってそうです.

Ex021:じゃあ交点に記号をつけよう.(交点を点 Q とする.)

Su-T022:なりそうです.

Ex023:なぜ?

Ex024:さっきは円周上を動くといったが,円周上を動く点の特徴として何があった?

Su-T025:円周角の定理.

Ex026:円周角の定理があった.M を動かすと点 Q は M がその上にない円周上を動く.このときに点 Q が作る円周角はどこにできる?(ここで,点 M,P,O の位置の関係が変わったことによって「2 つの円の交点」として作図をしていた点 Q と点 R が入れ替わった.Su-T027 からは 3 つの円の交点は点 R が表している.)

Su-T027:∠PRJ

Ex028:∠PR「J」か?もう一度 M を動かしてみて.円周角の足はどこに来る?

Su-T029:∠PRO

Ex030:じゃあその角度を測定してみよう.(角度の測定方法を伝える.)

Su-T031:(∠MRP, ∠ORQ を測定する.)

Ex032:この角度と,一点で交わるということはどのように関係がある?

Su-T033:(活動止まる.)

Ex034:一般の三角形で考えることが難しければ,正三角形に戻って考えてみて.正三角形にも円周角ができているから,それを測定してみよう.

Su-T035:120° な気がします.

Ex036:本当に?

Su-T037:そんな気がします.

Su-T038:(∠GHI,∠DHF を測定する.)

Ex039:常に 120° ?

Su-T040:はい.

Ex041:じゃあ一般の三角形に戻って,正三角形で 120° になったということを踏まえると,ここに出てきた∠MRP と∠ORQ は何と関連がある?

Su-T042:何と・・・.

Ex043:さっき 120° になりそうと言ったが,なぜそ

う思った？

Su-T044:ここ(一般の三角形)で(円周角を3つあわせると)360°になると思って，正三角形なら 3 つに分けて 120°になるんじゃないかと.

Ex045:正三角形だから 120°になるというのはなぜ？

Su-T046:何に関係がある･･･.

Ex047:他の部分を測定したり延長線などを作図しても構わない.

Su-T048:もう一回質問を確認してもいいですか？

Ex049:3 つの円が必ず一点で交わる.

Su-T050:それと角度がどう関係があるか，ということですよね.

Ex051:さっき円周上を動くと言った．円周上を動くということで使える性質は円周角の定理だった．円周角の定理を使おうと思って角度を測ってみたら，ちゃんと一定の角度を保った．じゃあ円周角の定理と一点で交わるということはどう繋がってくるのか．ちなみに正三角形だったら(円周角は)全部 120°だった.

Su-T052:一点で交わる･･･.

Ex053:難しければ正三角形の場合に戻ろう．綺麗に 120°に分かれているが，「正三角形だから」ということは説明になっていない．なぜ 120°なのか．何か理由があるはず.

Su-T054:∠A(∠CAB)と∠H(FHD)は向かい合う角だから 180°になる.

Ex055:なるほど.

Su-T056:で，ここ(三角形の内角の和)が∠A+∠B+∠C で 180°になる．正三角形なのでそれぞれは 60°になる．なので，∠FHD は 120°になる.

Ex057:それは何の性質？

Su-T058:円に内接する四角形.

Ex059:円に内接する四角形の，何？どういう計算をした？

Su-T060:180-60＝120

Ex062:それは前提としてどのような性質を用いている？

Su-T063:円に内接する四角形の向かい合う角の和は 180°.

Ex064:じゃあ一般の三角形だったら？どこと関係がある？

Su-T065:こっち(三角形の内角)ですね.

Ex066:じゃあ測ってみよう.

Su-T067:(∠LKJ を測定．∠MRP+∠LKJ=180°となることを確認する．)

Ex068:ということは，まだ測定していないが∠MRO はどういった角度になっている？

Su-T069:360°引くここ(∠MRP+∠ORP).

Ex070:そこの角度(∠MRP+∠ORP)はどういう角度？式で表すと？

Su-T071:∠MRP=180°-∠K，∠ORP=180°-∠J なので，360°-∠K-∠J.

Ex072:ということはその反対側(∠MRO)はどうなる？

Su-T073:∠K+∠J ですね.

Ex074:ということはそこにできる四角形(LMRO)は，∠MRO が∠K+∠J となっている四角形．ここから言えることは？

Su-T075:L,M,R,O は 1 つの円周上にある.

Ex076:ということは，先に K を通る円，J を通る円があったときに L,M,O を通る円を描いたら，その円は必ずどこを通る？

Su-T077:P(図では点 R)を通ります.

Ex078:これは一般の三角形でも言える？

Su-T079:言えます.

Ex080:じゃあ作図しながら説明をしてみて.

Su-T081:(新たに三角形(△STU)を作図する．ST 上に点 W，TU 上に点 V，US 上に点 X を作図する．)

Su-T082:まず T,V,W を通る円を作図する．もう 1 つ S,X,W を通る円があったときに，2 つの円の交点，W とは違う方の交点 Y ができる．四角形 VYWT は円に内接する四角形なので∠VYW は 180°-∠T になる. 反対側の円に内接する四角形も，∠XYW は 180°-∠S になる．4 点 U,V,X,Y の四角形の∠VYX は 360°

－∠VYW－∠XYW になる．さっき求めたように∠VYW は 180°－∠T で，∠XYW は 180°－∠S だから∠VYX は∠T+∠S になる．∠U+∠VYX は元が三角形で内角の和が 180°なので，∠U+∠VYX は 180°になる．よってこの 4 点(U,V,X,Y)は円に内接していると言える．よって任意の位置にとった点と三角形の各頂点を結んだ円の交点は 1 点で交わると言える．

（実験終了）

大学生(Su-K)に対する教授実験記録

(06/04/04　実施)

Ex001:(三角形を作図することを指示．また，三角形の各頂点をドラッグして位置を変えることができることを確認する．)

Ex002:どういう円を描くか分かる？

Su-K003:C なら E と F.（円を作図する．）

Su-K004:交わりました.

Ex005:(A,B,C を移動させても交わることを確認させる．交点 G を作図させる．)D,E,F を動かしても交わる？

Su-K006:交わります.

Ex007:じゃあどうもこれは真であるみたいだ.

Su-K008:そうですね.

Ex009:じゃあなぜこれは 1 点で交わる？

Su-K010:(活動止まる)

Ex011:点 E を動かすと点 G はどこを動く？

Su-K012:AEF，いや ABF の円周上を動く．当たり前ですが．動きます.

Ex013:円周上を動くね．点 F を動かしたらどうなる？

Su-K014:点 F を動かしたら，BDE の円周上を動きます.

Ex015:円周上を動くということで, 点 G の動きを決定する既習の性質はないだろうか？点 G の動きを説明できそうな既習の性質.

Su-K016:(沈黙)

Ex017:円周上を動く点の性質と言ってもいい．中学校や高校の範囲で.

Su-K018:円周上を動く点の性質･･･.

Ex019:特に性質は無かった？

Su-K020:「点の」性質ありました？

Ex021:「点の」じゃなくてもいい．円周上を動く点が作る性質とか.

Su-K022:円周角の定理.

Ex023:じゃあ今点 G が円周上を動いている. 例えばどこに円周角ができる？

Su-K024:∠EBD.

Ex025:じゃあそれを測定してみよう.

Su-K026:できてない.

Ex027:円周角はどこにできる？点 G が作る.

Ex028:点 D を動かすと点 G は円周上を動く．ということは点 G は円周角の頂点になっているはず.

Su-K029：はい.

Ex030:そうすると, その「足」はどこにある？∠EBD であれば点 E と点 D が足になっている. 点 G が作る円周角だったら？

Su-K031:D と E です.

Ex032:じゃあ円周角は？

Su-K033:∠DGE です.

Ex034:測定してみよう.（角度が一定となることを確認させる．）

Ex035:じゃあ円周角の定理を使って 1 点で交わることが証明できそう？

Su-K036:わからないです.

Ex037:じゃあ円周角自体はどういう性質を持っていた？

Su-K038:同じ弧に対する角が等しい.

Ex039:今は何度？

Su-K040:(∠DGE の大きさを読む．)

Ex041:それは何か意味を持っている？何かそうなる理由がある？

Su-K042:これは内接する四角形と見たときに，対角の和は 180°になるということから，こっち(三角形の内角)が細くなれば大きくなって，太くなれば小さくなる.

Ex043:ということは∠DGE は何に依存している？

Su-K044:最初に作った任意の三角形の角に依存している.

Ex045:ということは∠DGF も？

Su-K046:∠DGF も∠BAF に依存している.

Ex047:測定してみよう.（∠BAC を測定させ，∠HGF+∠BAC=180°となることを確認する．）

Su-K048:180°になります.

Ex049:じゃあ任意の三角形を描き，各辺上の任意の位置に点を取ったとき頂点とそれに近い２点を結んでできる円の円周上にできる角はどんな特徴があると言える？例えば∠DGE であれば？

Su-K050:180° －∠DAF の値.

Ex051:これは３つの円が１点で交わるということに使える？

Su-K052:まだ出てこない.

Ex053:∠DGE と∠DGF が出されている．これらはどうやって表現できる？もちろん数値で表現できるけれど，さっきの Su-K が用いた表現を使うと？

Su-K054:180° －∠DAF.

Ex055:∠DGE は？

Su-K056:180° －∠B(∠ABC).

Ex057:残った∠EGF は？

Su-K058:ここも同じなので，180° －∠C(∠ACB).

Ex059:今∠ACB が分かっていない．∠BAC と∠ABC が分かっている．そうすると？

Su-K060:360° －∠DGE－∠DGF.

Ex061:結局いくらになる？

Su-K062:180° －∠ABC･･･.

Ex063:180° －∠BAC と 180° －∠ABC を足すとどうなる？

Su-K064:360° －(∠BAC+∠ABC).

Ex065:じゃあ∠EGF は？

Su-K066:∠EGF は･･･．∠A＋∠B(∠BAC+∠ABC).

Ex067:∠A+∠B ということは∠EGF は∠C とどういう関係にある？

Su-K068:∠A+∠B ということは･･･．180° になる.

Ex069:180° というのはどうして？計算はどうやった？

Su-K070:∠A+∠B＋∠C なので 180° となりました.

Ex071:これは証明できそう？

Su-K072:(沈黙)

Ex073:つまり，先に２つの円を描いた，A を通る円と B を通る円. このとき円周角が２つできる. ∠DGE と∠DGF．さらに∠EGF も自動的にできる．この∠EGF は常に？

Su-K074:∠A+∠B.

Ex075:ということは C,E,F を通る円を描くと？G を通る？

Su-K076:(沈黙)

Su-K077:整理していいですか？さっきのことから言って対角の和が 180° になる･･･.

Su-K078:(沈黙)

Su-K079:ちょっとまだわからない.

Ex080:任意の三角形を描き，各辺上に D,E,F をとる. A,D,F を通る円と B,E,F を通る円を描くと点 D じゃない点で交わる．今点 D と点 G で交わっている．最後に C,E,F を通る円を描いたときに，その円が必ず点 G を通るはずである. 実際に通っている．なぜ点 G を通るのか．それを説明して欲しい.

Su-K081:もしここ(点 G)で交わるとしたら，(∠EGF の)角度が∠A+∠B になる．(三角形の内角の和の関係から)∠A+∠B＋∠C は 180° になるので∠EGF+∠ACB も 180° になると言える.

Ex082:「交わるとしたら」というのは C,E,F を通る円が点 G を通るということ？

Su-K083:はい.

Ex084:まだ通っていないとき，これから「円を描く」という状態のときに，C,E,F しか選んでいないのに点 G を通ると言える？G が円周上に無い可能性もある．でも描いてみれば通っている．円周角の定理から∠DGF＝180° －∠A と∠DGE＝180° －∠B，∠EGF=∠A+∠B ということまで明らかにした．それを使って C,E,F を通る円が点 G を通る理由を説明して.

Su-K085:∠EGF=∠A+∠B,∠EGF+∠C=∠A+∠B+∠C=180° と言えるので，C,E,F,G は内接する三角形，いや，四角形と言える．C,E,F を通る円に内接する･･･.

Ex086:円に内接する三角形？

Su-K087:内接する四角形．ですがしっくりこない. 点 G を目標とするときは通るけれど，点 E と点 F を通らない･･･.

Ex088:点 C と点 E と点 F を通ることは前提.「各頂点とその隣にある任意の 2 点」だから. ただ，それが点 G を通るのか，通らないのか.

Su-K089:∠EGF と∠C の和が 180° になるから(四角形 ECFG は円に)内接する．点 G と点 C を通る円は内接するけども，このときに点 E と点 F を通るということが確実に通るかどうかわからない.

Ex090:作図して確かめてみよう. そのときに 3 点はどこを選ぶの？点 E と点 F を選んでいるのに点 E と点 F を円周上に持たないことはあり得る？

Su-K091:ないです.

Ex092:C,E,F は必ず通る. これが点 G を通るかどうか. 繰り返しになるけど，なぜ点 G を通る？

Su-K093:それは∠EGF と∠ECF で考えたときに，対角の和が 180° ということから，四角形 CFGE は円に内接するということが言える．だから点 G も通る．さっき∠EGF=∠A+∠B ということが言えている．∠A+∠B+∠C=180° ということが前提としてある．そこから，∠EGF+∠C=180° になるということが言えるので，内接する四角形の性質の対角の和が 180° になるということから逆に考えると，この四角形は円に内接していると言える．このことから，点 G は円周上にある.

Su-K094:でもまだしっくりこない.

Ex095:じゃあ作図をしながら説明してみて.

Su-K096:∠EGF+∠C=180° となることは納得できるが，点 C と点 G を通る円が点 E と点 F を通る保証はあるのだろうか？作図をしてみると C,E,G,F を通っていたから帰納的に正しい，では駄目か.

Ex097:証明としてはこういった理由で C,E,F を通る円が点 G も通るということが言えなくてはならない. もちろん A と B を通る円を描いた時点で交点 G は存在している．そして C,E,F を通る円を描くということも問題の条件．点 G を通る円を描くとは言っていない.

Su-K098:そうですよね.

Ex099:点 G と点 C を通る円を描いて点 E と点 F を通るか，ということは前提がまず違う．この問題では点 G と点 C を通る円は描けない. C,E,F を通る円が円周上に点 G を持つかどうか.

Su-K100:(新たに△IJK と各辺上に任意の点 L,M,N を作図する．点 I を通る円と点 J を通る円を描き交点を P とする.)∠LPN＝180° －∠I, ∠LPM=180° －∠J，打ち消しあって∠NPM=∠I+∠J．点 I を通る円と点 J を通る円は点 P で交わる．この 2 円があったときにもう 1 つの円が点 P を通るかどうか. ∠NPM は先の言ったとおり∠I＋∠J，三角形の内角の和から∠NPM+∠K=180°．だから四角形 KMPN は内接する．わかった．そうですね. 四角形 KNPM は円に内接することが言えるので, K,M,N を通る円は P を通る. 分かった. 四角形として考えればいい．変な勘違いをしていた．一点で交わることが言えた.

(実験終了)

中学生に対する教授実験記録

(06/07/13　実施)

Ex001：これが問題．メモを取りたかったらこの紙に書いていいから．

Ex002：まず，この問題を最初から読んでみると，正三角形のそれぞれの辺上に点を取ると．じゃあまず正三角形をここ(スクリーン上)に作ってほしいんだ．どうやって作ればいいと思う？

Ex003：コンパスと定規を使って描くとしたらどういう方法をとる？

Su-N004：まず一本直線を決めますね．

Ex005：そうか．じゃあまず点を取らないといけないんだ．点を取って．「自由な新しい点」．

Su-N006：こうかな？

Ex007：じゃあ「作図」，「直線」，「2 点を結ぶ」．

Su-N008：こう？

Ex009：そう．じゃあ例えば B を動かしてみて？ 直線が自由に，ぐるぐる回るはず．動かそうと思えば．

Su-N010：はい．

Ex011：じゃあ次だ．円には色々な作図の仕方がある．例えば，1 点を中心にして描くこともできる．直線も色々な描き方ができる．垂直二等分線を引くこともできる．

Su-N012：じゃあこれかな？（円の作図を選択する．）

Ex013：「中心と 1 点」だ．

Su-N014：(2 円を作図後)これでできるかな？

Ex015：今どういう点を取りたい？

Su-N016：ここ．

Ex017：じゃあ「作図」，「点」，「交点」を選んで，「2 円」を選択して．後は，それらを繋げばいい．「線分」にしようか．

Su-N018：うん．

Ex019：例えば B や C を動かしてみて．ずっと正三角形だね．ぐるぐる動かしてみてもいいし．

Ex020：(2 円の交点が)反対側にも点ができているけど，しょうがない．それぞれの辺上に点を取ってみようか．

Su-N021：それぞれの辺上に点を取る．

Ex022：「作図」で，「点」，「新しい点の追加」，「直線上に新しい点」．

Ex023：例えば F と G を動かしてみて．直線上にしか動かないよな？

Su-N024：うん．

Ex025：よし，で，このとき，各頂点とその隣にある 2 点を通る円が 3 つできる．例えばどこを通るか分かる？

Su-N026：ここ(F)，ここ(E)，かな？　こう(A，F，E を通る)円ができる．

Ex027：じゃあ円を描いてみようか．

Su-N028：こう？

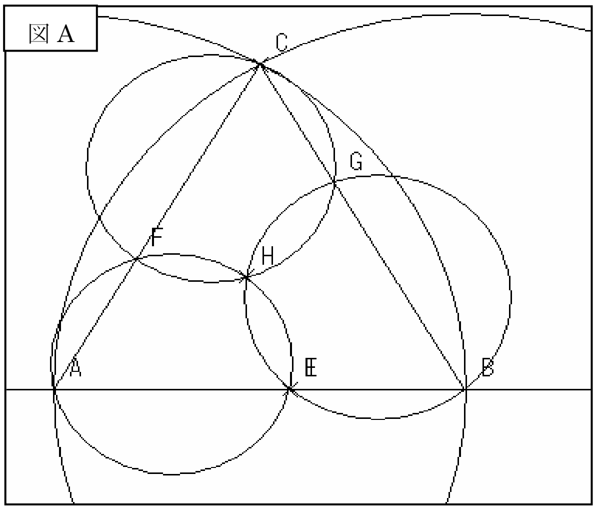
Ex029：そう．これがあと 2 つできるはず．

Su-N030：(3 つの円が 1 点で交わることを確認する．)

Ex031：そうすると，これらの円が 1 点で交わることが知られている，と．どう，1 点で交わってそう？

Su-N032：うん．(図 A)

図 A



Ex033：E とか G を動かしてもいいよ．

Su-N034：(E，G を動かす．交点が一致することを確認する．)

Ex035：じゃあ交点に名前を付けようか．「作図」，「点」，「交点」，「2 円」で，さっき C を作ったみたいにやってみて．

Su-N036：はい.

Ex037：そうすると，今交点は H だね.

Su-N038：はい.

Ex039：じゃあ，H は，この点 H の動きに特徴は無い？

Su-N040：うーん．円に沿ってる.

Ex041：確かに円に沿ってる．それは今点 E を動かしたけど,それは F とか G とかでもそうかな？

Su-N042：G を動かすと，こっちの円(A を通る円)で．E を動かすとこうで，F を動かすとこうだから…

Ex043：うん.

Su-N044：点に対して，何て言うのかな？ 対角…対角じゃないな．対称にある位置の円の円周に沿って動く.

Ex045：なるほど．上手い表現だね．じゃあ，円周上を動く点の特徴を表す性質って何があったか覚えてる？ 今まで習った中で.

Su-N046：円周角.

Ex047:円周角とか.例えば,今 G を動かしたよね．そのときにできる円周角は∠何？

Su-N048：角.

Ex049：どこにできるか.

Su-N050：どこにできるか．ここ(∠FHE)とか.

Ex051：じゃあ測定してみようか．本当に同じ角度にずっとなっているかどうか．先に線分を描こう.

Su-N052：(∠FHE を測定する．)(図 B)

Ex053：G を動かしてみて．なってるね.

Su-N054：うん.

Ex055：じゃあ F を動かしたらどこにできる？

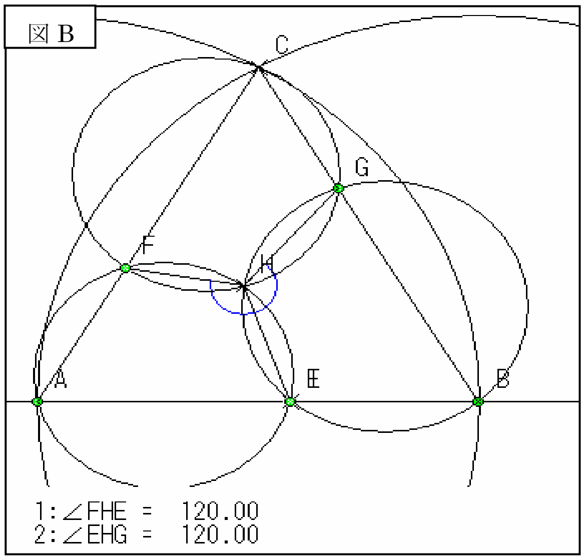
Su-N056：F を動かしたらこっち(∠EHG)かな？

Ex057：じゃあそっちも作ってみようか.

Su-N058：あー…　もうちょっと考えたら…

Ex059：F を動かしてみたら？ (円周角に)なってるね．いまこれは正三角形だとこういう 1 点で交わるという性質が言えた．じゃあ正三角形に限らずどんな三角形でも言えそう？

Su-N060：言えるかな．(言える，という風に取れる言い方)



Ex061：じゃあ三角形を作ってみて.

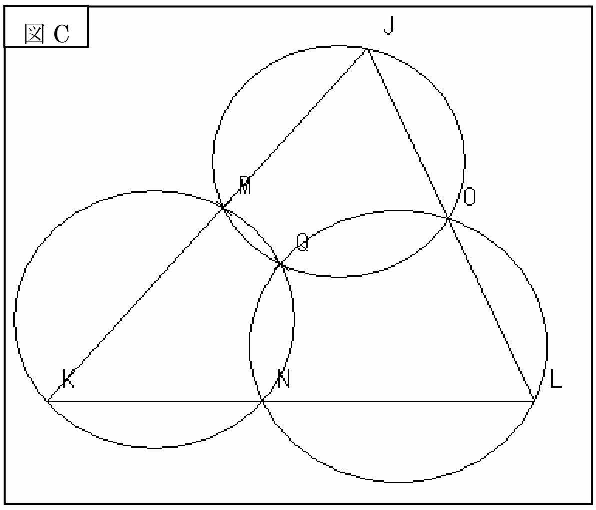
Ex062:「点」で「新しい点の追加」.「線分・多角形」で「多角形の追加」,「三角形」.

Su-N063：(一般の三角形を作図．作図後，各辺上に点を作図し，円を作図する．)

Ex064：先に交点を作ろう.

Su-N065：(2 円の交点 P を作図する．)

Ex066：点 P ができた．(図 C)



Ex068：交わってるね．じゃあ辺上の点を動かしてみようか．本当にそうか．三角形を変形させてもいい.

Su-N069：(辺上の点を移動し，三角形の頂点を移動して三角形を変形させても 1 点で交わることを確認する．)うん.

Ex070:交わってそうだよね？ 何で交わっているんだろう？

Su-N071：ちょっと待って下さい．えっと，交わる理由か．こっちの三角形(正三角形)で，特殊から一般だから，こっちの三角形(正三角形)で考えると，この角(∠FHE)は 120°だから，ここに四角形ができているから，60°の，180°から 120°を引いた値がここ(∠FHE)にくる．この式から．だから，それが 3 つでここ(点 H の周り)は 360°．てことは，ここ(∠A＋∠FHE)が 180°ってことはここ(点 H の周り)がこれで 2 倍(360°)になる．で，同じになるってことが言える．そのあと，これ．交わる… 交わる理由…

Ex072：いま円に内接する四角形を見つけてくれた．これはいま作った三角形でも言える？

SU-N073：はい．

Ex074：じゃあ線分を引いて作ってみよう．(ここで，先ほど三角形や辺上の点を動かした際に交点が P から Q に変わっていた．以下 2 円の交点は Q である．)

Su-N075：(線分 MQ，NQ，OQ を作図する．)

Ex076：測定してもいいよ．

Su-N077：(∠MQN，∠NQO を測定する．) 点を動かしても角度は変わらない．やっぱりここ(点 Q)は一致している．えーっと，交わる．言える理由．

Ex078：さっき正三角形で四角形だから 180°になる，という話だったよね．そうすると 120°はどこに関係してくる？

Su-N079：ここ(∠A)

Ex080：うん．そこが何度だから 120°になる？

Su-N081：60°

Ex082：60°，60°，60°だよね．とすると，いま測った∠MQN はどこに関係してくる？

Su-N083：ここ(∠K).

Ex084：さっきの「この角度は 2 倍になる」というのはどういう事？ もう少し詳しく説明してくれないかな？

Su-N085：2 倍になるっていうか，ここの円に内接する四角形の，えーっと，対角にあたるのは合わせて 180°だから，ここ(∠FHE)に 120°がくるじゃないですか.

Ex086：うん.

Su-N087：つまり，これ(∠EHG)もこれも(∠GHF)同じことが言えて，120°，120°，120°で 360°になる．で，それぞれ 2 倍になっている(120°＝60°×2)ってことだから，これは 2 分の 1 の 180°，が真ん中に集まっているから 2 倍になっていると．真ん中のこの角度は 360°だから.

Ex088：確かに，いま言ってくれたことは角度の計算からちゃんとできているから正しい．それと，3 つの円が 1 点で交わるということはどう関係してくるだろう．何か関係がありそうだけど.

Su-N089：うーん… 3 点あれば円が描けるなら，4 点があっても描けますよね？

Ex090：その 4 点目を通るかどうかはまた別の問題．その 4 点がどういう条件であれば，円ができる？

Su-N091：この角(∠J)とこの角(∠MQO)をあわせた点が 180°？

Ex092：そうだ．いま，4 点というのはどこをイメージして言った？

Su-N093：J，M，Q，O.

Ex094：じゃあ，もしこの 3 つ目の円が無かったら，ということだよね？

Su-N095：無かったら？

Ex096：円が 2 つしかなかったら，という話だよね？

Su-N097：うーん…

Ex098：あまり言わない方がいいかな？

Su-N099：うーん… 四角形…

Ex100：じゃあ，少し課題を捉え直そう．この円(J を通る円)をまだ描いていない状態にしよう．(J を通る円を表示しないようにする) とすると，2 つの円があったときに，点 Q は絶対できるよね？ 円の交点だから.

Su-N101：うん．(図 D)

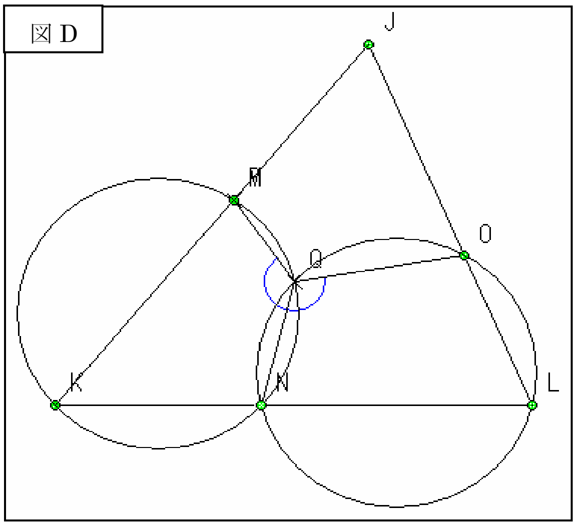


図 D

Ex102：そうすると，ここで問題になってくるのは？何が問題になってくる？

Su-N103：何…

Ex104：もし J，M，O を通る円を描いたときに，その円はどこを通らないといけない？

Su-N105：Q？

Ex106：そう．そこを通るかどうかが問題になってくる．もしその理由が言えれば，どんな三角形でも円を 3 つ描けば，3 つ目は必ず先にできた点 Q を通ることが説明できるよね？

Su-N107：この角度(∠K)を x として，ここ(∠MQN)は 180° －x．こっち(∠NQO)は 180° －y．だから，360 引く…　いくらになる？

Ex108：計算していいよ．

Su-N109：そしたら，残りの角は…　三角形の内角の和だから x－y か．括弧をつけると x＋y か．

Ex110：そうすると？

Su-N111：これを足して 180° になるんだから，ここ(∠J)とここ(∠MQO)の和が 180° になることが言えるから，全てひっかかる．ひっかかるというか，交わる．

Ex112：つまり，この JMQO は？ どういう四角形になっている？

Su-N113：円に内接する四角形．

(実験終了)

鳥取大学数学教育研究　　ISSN 1881−6134

Site URL：http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/