

卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究, 第8号, 2006】

コミュニケーションの立場からみた絶対値記号の必要性

川口 卓己

指導教員：溝口 達也

I. 研究の目的と方法

1.1. 研究の動機

まず私は、日常行われているコミュニケーションという言葉に興味を持った。数学の学習においても常にコミュニケーションは行われており、このコミュニケーションを意識することで、よりよい授業作りを可能にすることはできないのかと考えた。

そこで、まず数学におけるコミュニケーションとは何であるのかについて、NCTM Standard「コミュニケーションとしての数学(Mathematics As Communication)」を参考にした。そのなかで私は、以下のような記述に注目した。

数学的概念が表現した記号としっかり結びついていることが本質的である。

記号表現の必要性は、概念の探求の中で起こる。数学的概念や記号について討論する過程において、生徒はそれらのつながりに気がつくようになる。

生徒の数学的な概念と、数学的概念を記述し表現することための言語や記号を発達させることは、記号の必要性を作り出し、記号に意味を与えるような一連の具体的場面注意深く計画し、組織することによって促される。

以上3つの点で、数学的コミュニケーションにおける数学的記号についての記述から、数学的コミュニケーションにおける、数学的記号という側面に注目し、数学的記号の役割と必要性について考察していく。

ここで、数学教育において、様々な概念につ

いてなぜそうなるのかといったような概念の追求を行うことは、数学をより理解する上で重要であると考えた。そしてそれは数学的記号についても同様ではないのかと考え、数学的記号についての理解は、数学をより理解することに関係するのではと考えた。

そこで、数学を学習するにあたって多くの場面で登場する数学的記号。そして私たちは無意識のうちにその記号を受け入れ、使用している。しかしながらそれでは数学的記号を理解したとは考えることができないのではないのか。またそれ以前に私たちには数学的記号を理解するという考えが存在しないのではと考える。つまり、記号の表現方法のみを理解し上で、なぜこの数学的記号が使われるのかといった考察がなされていないということである。現に数学的記号を学習する場面において表現の方法は教師を通じて知るのみで、利用することに重きをおいているように感じられる。

以上のことから、数学的記号を用いることは決定的な必要性が存在すると考える。そこで、数学的記号の必要性について考察していく。

1.2. 研究の目的

本研究の目的は、コミュニケーションの視点から注目した数学的記号について、その数学的記号の必要性とはなんであるかを明確にすることで、生徒にとっての数学的記号の必要性を見出すことである。

そこで数学的記号の具体的な事例として、絶対値をとりあげて考えていくこととする。絶対値については中学校1年における「正負の数」において学習するのであるが、教科書での扱いも小さく、学習指導要領においても用語として「絶対値」と一言記しているのみであるにもかかわらず、中学校数学においてだけでなく、多くの場面で絶対値が登場するというということ

から、絶対値の意味とは何であるのかをはっきり理解しているのかという疑問のためである。そこで絶対値の定義が、中学校第1学年「正負の数」における「数直線状における0からある数までの距離」といったもので、生徒は絶対値を理解したといえるのであろうか。また、絶対値の記号化する必要性とはなんであるのかを検討していきたい。

課題1 絶対値の概念およびその記号化のプロセスの考察

課題2 学習場面における絶対値の記号化の必要性についての考察

1.3. 研究の方法

先に設定した課題を次のように解決していく。

課題1については、絶対値そのものの概念の追求と絶対値がどのように記号化されてきたのかを、歴史的背景から考察することで絶対値を記号化することの意義と必要性、絶対値記号の役割について見出す。

課題2については、課題1で見出した絶対値の記号化の意義と必要性、絶対値記号の役割を教育の営みとして、学習場面で絶対値がどのような状況で用いるのか、生徒にとっての記号化とは何であるかを考察することで学習場面における絶対値の記号化の意義と必要性、絶対値記号の役割を見出す。

以上の課題を解決することで、数学的記号の必要性となんであるかを明確にし、生徒にとっての数学的記号の必要性を見出す。

II. 本論文の構成

第1章 研究の目的と方法

1-1. 研究の動機

1-2. 研究の目的と方法

第2章 絶対値の概念と記号化

2-1. 歴史的背景における絶対値の概念と記号化

2-2. 学習場面における絶対値の概念と記号化

第3章 絶対値の概念と記号化の必要性

3-1. 絶対値の概念と記号化の必要性

3-2. 学習場面における生徒の絶対値の概念と記号化の必要性

第4章 研究のまとめ

4-1. まとめ

4-2. 今後の課題

(1 ページ 35 字×35 行, 30 ページ)

III. 研究の概要

3.1. 歴史的背景からの絶対値の概念

今日における絶対値の定義は「数直線状での、0からある数までの距離」である。このことから私は数について歴史的背景をみることで、絶対値の概念がなぜ必要となったのかについて考察する。

まず、絶対値の概念が存在しないとされるユークリッド原論をもとに、数についての認識をみる。ユークリッド原論において数は、「単位のおつまったもの」と定義されている。また、ユークリッド原論において扱われる数や量に関しては、「正の数とする」という記述、

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
を図形上の問題として

見ていることから、数を正の整数として扱っていることがわかる。

これはアリストテレス的数の見方がなされているためである。これは『数も、その存在の仕方として、「5個のあめ」や「10台のバス」のようにあるいは「前から7番目の人」といったように、数が常に何らかの大きさを伴った対象と結びついた仕方では存在する（溝口1995）』という考えである。

ここで一言「大きさ」としているが、対象となりうる「大きさ」は長さや面積など様々な「大きさ」が存在する。そこでその様々な「大きさ」について考察することを考える。ここでそれぞれの「大きさ」は基準となるものが存在し、その基準を用いてそれぞれの「大きさ」について考察することは可能である。しかし性質の異なるもの同士ではその基準となるものが異なるため考察することができないのではと考える。

そこで、現代の定義である「原点からの距離」という絶対値の「(正の) 大きさ」をもうけることで、様々な数を比較・考察することができる。つまり絶対値は様々な数に対する新たな「大きさ」として必要とされたのではと考える。

以上のことから、歴史的背景から見出した絶対値の概念の必要性は以下のように考える。

① 数における絶対値という新たな「大きさ」

3.2. 歴史的背景からの絶対値の記号化

絶対値の記号をはじめて用いたのは、Weierstrassの「Mathematische Werke Vol. I (Berlin, 1894)」とされている。

その後、絶対値の記号が用いられている例と

して極限の概念，ベクトルや複素平面において用いられている．その一例として近時計算について取り上げる．

近似計算において，近似値 a の良さは真値 x からの偏差，つまり絶対誤差 $\varepsilon = a - x$ によって考えられる．そして各々の近似値と絶対誤差の精度に関して考察する際，相対誤差 $|\varepsilon/x|$ により表す．このとき真値 x ，絶対誤差 ε とともにその大きさを考察の対象としているために，絶対値の概念を用い表している．

このように絶対値という概念を用いる際，その「大きさ」に対して $|\quad|$ という記号で表すことにより，簡潔かつ明瞭な考察を可能にしたと考えることができる．

次にベクトルの概念の場合において，ベクトルの「大きさ」を絶対値を用いて記号化することにより，代数計算を可能にすると考えられる．これは内積における考察や，円を表すこと．さらには，複素平面においても同様な考察ができる．

歴史的背景から見出した絶対値の記号化の必要性は以下のようにまとめることができる．

- ② 考察を簡潔かつ明瞭にする
- ③ 代数計算を可能にする

3.3.絶対値の概念と記号化の必要性

課題 2「学習場面における絶対値の記号化の必要性についての考察」に対しては，歴史的背景から見出した絶対値の概念とその記号化の必要性を，今度は学習場面において考察する．学習場面において絶対値の概念とその記号化はどのように利用され，そこに生徒はどのような必要性を感じているのか．

また，歴史的背景から見出した絶対値の概念とその記号化の必要性は，学習場面における生徒が感じる必要性に当てはめることができるのかについても考察していく．

では，前章であげた 3 つの絶対値の概念とその記号化の必要性から，生徒が感じるであろう必要性について考察していく．

- ① 「数における絶対値という新たな『大きさ』」について
絶対値は中学校第 1 学年において導入されていることをもとに考える．
この段階において絶対値の概念を導入するこ

とで，正負の数における乗法除法における演算を説明しているのみである．よって生徒が絶対値が本当に必要であると感じているとは考えがたい．

しかし中学校，高等学校と数学を学習していくうえでこの絶対値という「大きさ」の概念と絶対値の「正の数」を表すということが必要と感じるのではと考える．

②「考察を簡潔かつ明瞭にする」について

絶対値の記号は，極限の概念やベクトル，複素平面，または点と直線の距離など様々な場面で用いられている．

そこで生徒は繰り返し用いられる概念について記号化を行うことにより，その概念を簡潔に表せるということを理解する．さらにはその記号を用いた考察に関しても簡潔に表すことを可能にすることを理解する．

以上の点から生徒は記号化を，その概念を多く扱う場面を通すことで，記号化の必要性を感じると考える．

ここで，中学校においてなぜ絶対値の記号化を行わないのかについては，絶対値を用いた複雑な考察を行う機会がないことが要因であるということが上の考察からわかる．

③「代数計算を可能にする」について

この点については，歴史的背景と同様ベクトルや複素平面の概念において考えることができる．

新しく登場したベクトルという概念を，絶対値という概念によりその「大きさ」を記号化し表すことにより，ベクトルの性質について考察することができる．

さらには，ベクトルの「大きさ」を記号化することにより，内積や円における代数計算を可能にする．このことから生徒は絶対値の概念とその記号化の必要性を感じるのであると考える．

IV. 研究の結果

4.1.研究のまとめ

本研究の目的は，コミュニケーションの視点から注目した数学的記号について，その数学的記号の必要性とはなんであるかを明確にすることで，生徒にとっての数学的記号の必要性を見出すことを目標に研究を進めてきた．

絶対値の必要性としては以下の 3 つ点が考えることができる．

- ① 数における絶対値という新たな「大きさ」
- ② 考察を簡潔かつ明瞭にする
- ③ 代数計算を可能にする

そして学習場面における生徒が感じる絶対値の必要性としては、

- ① 様々な数に対して「大きさ」を与えることができる
- ② 記号化することにより考察を簡潔にする
- ③ ①で与えた「大きさ」について代数計算を可能にする

の3つの点を上げることができる。

そしてこの3つの点は、生徒は絶対値の概念を利用していく場面を多く設定することで、絶対値を用いることの良いさを感じるのだということを見出すことができた。

4.2.今後の課題

本研究において、数学的コミュニケーションの中における数学的記号、その中でも絶対値という概念に注目して、必要性とはなんであるのかを考察してきた。

そこで、数学では絶対値以外に様々な数学的記号が存在する。そのことから一般的な数学的記号の数学的コミュニケーションにおける位置づけと役割とはなんであるのかについて見出す余地がある。

そして数学教育における数学的記号の必要性をふまえた上での学習実践について考察することで、より生徒の数学的記号に対する認識と、数学的記号の利用のあり方について考察していく余地がある。

引用・参考文献

- ・文部科学省検定済教科書 中学校数学科用
「楽しさひろがる 数学123」
啓林館 文部科学省 H18年度
- ・文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用
「数学 I II III ABC」
- ・「NCTM Standard (1989)」
- ・「数学史—形成の立場から—」
中村 幸四郎 1981
- ・「正負の数のイメージ その背後にある数の見方の転換 (数学教育)」
溝口 達也 1995.6
- ・「数学のあけぼの ギリシャの数学と哲学の源流を探る」
アルパッド・K・サボー 1976
- ・「アリストテレス 形而上学 上下」
出 隆 1959
- ・「A HISTORY OF MATHEMATICAL NOTATIONS」
Florian Cajori