講演記録【鳥取大学数学教育研究，第５号，2003】

数学の授業におけるコミュニケーションの見方
―学習者の自然な思考にそった授業を展開するために―

講演者：江森英世　宇都宮大学助教授

はじめに

コミュニケーションという言葉を出しますとどんな感じでしょうか。授業のコミュニケーションといえばどのようなイメージですか。ここに来て初めて知ったとか，今まで考えたことがないとか，あるいは普段考えているとか，色々あると思うのですが。

やはり昔の高等学校というイメージは，数学の先生が前に出て，講義中心に話をして，それを生徒が一生懸命理解するという状況だったと思うのですが，今はもうそういう状況ではない，と思われる方，あるいはまだ高校は昔ながらに先生が講義中心に話を進めても大丈夫だと思われる方はいらっしゃいますか。今，質問を２つ出しましたが，講義中心にやっているしそれで大丈夫だ，あるいはあまり子ども達を甘やかさないで，やはり数学という学問を格調高く語ることも必要だ，そう思われる先生いらっしゃいますか。そういう先生がいてもいいし，高校の先生ってそうかなってイメージがあるんですけどね。

栃木県の場合をお話しますと，やはり小,中,高と上がってきて，高校はほとんど全入に近い状態ですから，高校生になってから急に講義中心というふうにならないんですね。小学校，中学校の先生が一生懸命授業に引きつけようとして，工夫して，やりとりを交えながらやっている，それが，高校にきていきなりコミュニケーションのない授業というふうになかなかなりづらく，ですから，今日は，できましたら小中学校でどのようなコミュニケーションがある授業をやっていて，そういう子どもたちが入ってくるよということを理解して頂いて，そして，高校の先生方も工夫できるところは工夫して頂きたいと思うんです。やはり，一方では人の話をおとなしく聞くという態度の育成も必要でしょうし，あるいは「わからない」ということを話しを聞いていて後でゆっくりわかってくる，という自分の思考の持ち方も大事なわけですから，一概にこうしてくださいということはないと思うんですよ。教育というのは，どの場合でもお話するんですけど，やはり先生一人一人がどういう教育をしたいのか，どういう子どもに育てたいのか，どんな数学の授業をしたいのか，自分の思いがやはり根底にあるんですね。ですから，どんな方法がいいというふうに他の人から言われて，じゃあこれがいいから真似しましょう，といってもうまくいかないし，それぞれ先生方の個性もありますしね。だから，教育観というものをもし共有できるならば，今日の私のお話をちょっとでも参考にしていただければいいかなと思いますね。

Q1．数学の授業で，あなたは，何を大切にしていますか？

―基本ですね。

ああ，これも一つの基本中の基本ですね。そうすると，基礎基本とは何ですか，という議論になりますが，それをやると時間が経ち過ぎますから，伏せておきますが，一言で言うと高校の基礎基本といえば何ですか。

―公式が作られていく流れのところだと思います。

ああ，いわゆる数学というものが最後に体系化されるところですね。公式というと一つの道具ですけどね，だけど，それはそこに入ってくる考え方，あるいは抽象化，一般化，というものをふまえてできてくる，あるいは人類がずっと作ってきたわけですよね。その作っているという過程には試行錯誤もあったわけだし，うまくいかないこともあったわけですね。あるいは，これでうまくいくと思っていたんだけど，うまくいかないから途中で大きく変えたこともありますね。

それで数学というのは，一つ何かの考え方を出していくんだけど，それは当然古い考え方を

うまく踏襲しながらそれを使って新しいものを作っていくんです。でも新しいアイデアを作るときには，どうしても複数出てくるんですね。これはいろんな数学がそうなっているんです。そして，その複数出てくる数学を，やはりもう一回統合，構成しておかないと，そこから枝分かれする複数のいろんな数学が出てきてしまいます。ですから，そこで何とか一つにするんですね。数学というのは人類が作ってきた文化だと考える人たちは，みんなが共通でこれにしましょうというふうに，社会的な合意を作って，一つのアイデアにしましたというふうに考えがちなんですけど，数学というのはそれほどたぶん甘いものではない。やはりその次のもっと大きなアイデアに都合よく作っていかなければならないんですね。ですから Grassmann という人が外積というものを考え出しましたけども，外積というものを考えていくうちに，右手座標か左手座標かの選択を迫られて，理論的にどっちかになるんですね。これは，数学というものを作っていく一つの考え方で，非常に大事なことですね。これは日本の小中高の学校現場では，こういうプロセスをちゃんと教えているんですね。小中高，あるいは大学で数学を勉強してきた流れのなかで，何かそういった数学の歴史というものを学んだ経験ありますか。例えば，小学校２年生で長さを勉強しますよね，高校の先生方に小学校２年生の話をするのは大変恐縮なんですが，長さの勉強するときに，最初に何をやりますか。

—直接比較です。

そうですね，比較をしますよね，なんでそういうことをするかというと，やっぱり長さという考え方が必要だなと感じて欲しいからですよね。要するに，生活する上で，長さを比べるとか，２つの棒，２つの何かのもの，食べ物を比べるとか，直観的にその何か見る視点として長さという認識が必要ですよね。だからそれは自然の生活の中で出てきたのですね。そして次に何をするかというと，一般の小学校の先生がやるのは「自分が持っている消しゴムで本を測ってみましょう」ということです。そうすると「私は６個分だったけどあなたは７個分だった」とか，なりますよね。これが「分かれていく」ということですよね。要するにものを使ってそれの何個分というふうに数値化するという，この“長さ”という数学的な考え方ですよね。そこに，こう置き換えているわけでしょ。そうすると，まずみんなが勝手に，「ああ，その考え方は便利だ」といって普及するわけですよね。で普及するんだけど，それは日本では尺になりますし，あるいはヤードだとか何とかだとか，みんな分かれてくるんですよね。その単位をどういうふうに修正しましょうかとなって，単位規準を決めるときに，物理のあるいはいろんな世界とのやりとりで「共通単位はこれが便利だ」というふうに選んでいくわけですよね，学問上。だけどある面では，皆さんが集まって，「じゃあこれを 1m としましょう」となるわけですよね。

ですから，数学を作っていくという“過程”の学習は，やはり教師側は意識しているんですけど，子どもたちはなかなかそういう体系を踏んでいるんだな，というふうには理解しにくい。おそらくそれは高校の授業のなかの一つ一つの，例えばベクトルの授業でもそうですし，積分でもそうですし，あるいは微分をするときでもそうですよね。だから，それをストレートに伝え過ぎますとね，何か無味乾燥としますよね。全然迷わずに何かストレートに，あるいは教科書通りに，というのはまさにそういうことなんですよね。ということで，基礎基本の話，少し脱線しましたけど，第１番目の話にもう一回戻りますね。

あなたは数学の授業で何を大切にしていますか，今日の私の一つの答えは「学習者の自然な思考」です。要するにこれは学習者ということをとれば，我々もそうなんですけど，ものを人に話すときには，あるいは聞くときにはですね，自然な思考にそった授業というのはやはり一番大切じゃないかなと思うんですよね。それはわかりやすい授業というものにつながってくるんですよね。要するに生徒の方では，自分が習ってきた知識，あるいは生活で得たもの，あるいは前の時間で獲得したもの，技能ですね，そういうものを使って次に考えていくんだろうな，というのがやはり普通だと思うんですね。ある日突然，別個のアイデアがぽこっと出てきて，これをならえと言われても困るわけですよね。何か期待感といいますか，こういうふうになっていくだろうな $\cdots$ というものを大切にした授業をすると，やはり聞いている方は分かりやすいと思うのですね。今日のキーワードとして，副題に示しましたけども「自然な思考にそった授業」を展開しましょう。

Q2．学習者の自然な思考にそった授業を行うためには，何が必要だと思いますか？

となると，その自然な思考にそった授業をするためには，どうしなくてはいけないのか。やはり学習者が今何を考えているのかな，ということを逐次理解する必要があるんですね。だから先生が一方的に話をするのが悪いのではないんです。当然，一方的に話をすすめると，こちらの思いと学習者，生徒一人一人の考えていることとは，やはりずれていくわけです。ずれていくというのは，それは知識を持っている人と持っていない人との差ですから，ずれていくのは当然なんですけど，どのくらいずれているのか，そしてそのズレを使いながら自分は授業をどう展開するのかということが，やはり見えてないといけないんじゃないかなと思います。生徒が今何を考えているのかということを知るためにも，コミュニケーションというのは必要ですよ。これは，ただ単にその程度のことだったら高校の先生もやっているよと思われるかもしれません。でも今私が言ったのは，教師が時々質問して，おまえ解けるかと聞くようなことではなくて，もう少し緻密に，自分がここまで説明しているそのプロセスの中で，どのくらいついてきているのか，ついてきていないのか，ということを知って欲しいということです。

Q7．コミュニケーションのある授業がよいと感じる理由はなんですか？

ここで少しあとのお話をしますけど，なぜ30人や40人といったように，多くの人数で教育が行われているのか。それは日本に限らないのですけど，なぜ集団で授業というものがあるんですかね。一つには国家予算がなくて，今になって学校をつぶそうとか，教員を減らそうとか，今朝も国家公務員の給料，退職金が下がるとか言っていましたけど，それだけですかね。もし潤沢な資金があったなら，お金がいっぱいあるから生徒の数だけ先生を準備します，あるいは生徒の教科ごとに替えますよ，といったようにそういう方法をとるべきなのか，あるいはそうではなくて，やはりクラスというものがいいのか，どう思われますか。実現できるかできないかの問題ではなくて，理想的な教育像としてですよ，一対一がいい，あるいはよくない，どう思われますか。

――*一対一はあまりよくないと思います。*

どうしてですか。

―*いろいろな人の思考を起用するというのも学習の手段かなと思うからです。*

もし教師がいて生徒がいるとしたら，先生というのは先を見越したり，何かこの子ここでつまずきそうだなというところで手を差し延べたり，あるいはその子の進度にあわせてゆっくりやったり，早くやったりとできますが，そうするとやはり，人間の思考というのはいろんな思考があるんだなということを学ぶ機会が少なくなるし，あるいは自分が知らなかったこと，あるいは自分が知っているということを知る機会がないですよね。個性を重視するという話がよくありますけども，やはり個性というものは人と比べる，いろんな人がいるということが分かっていく中で出てくるものですよね。

そこで，二つ目のキーワードでコミュニケーションというものがあるのですけども，今我々はある意味では詰め込まれて，40人，50人といった生徒をいっぺんに扱わなければなりませんので，個々に対応したコミュニケーションというのは難しいわけです。でも状況としては一対一よりもやはり集団学習という道を選ぶべきなのかなと思うんですよね。それは先生のお答えにもあったように，やはり他の人の思考，他の人のつまずき，他の人の成功から学ぶことがあるからですよね。これは今日お配りしました資料の一番最後のページに，結論めいたものが書いてあるんですけど，そこをちょっと見て頂くとですね，“学習の起源”というものが上から４段目に書いてありますけど，“授業がいい”というのはですね，その子に合わせた発見が何かどこかにあるということですね。要するに，今こういう話をしているときも皆さんの受け取っていることが違うんです。「あ，今いい話しているな」と思う瞬間がね，あるいは他の先生が答えたときに，例えば基礎基本の話に流れていったときに，「あ，自分の基礎基本の捉え方と違うな」とかあるいは「基礎基本なんてことは考えてもいなかった」とかね。だからそれがきっかけになるんですよね。それを私は“学習の起源”と呼んでいるのです。要するに教師がこの授業の中で「こんなことを学んでもらいたい」ということはそれほど準備できるものではないんですね。それとは別にイレギュラーなかたちで，常に授業というものは生きていますから，脱線したり，ふくらんだり，その時その時に，

その子どもたち一人一人が，何か教師が全然意図しないところで学習していることがあるんですよね。それが多ければ多いほど，豊かな授業になります。ですから，コミュニケーションを入れますと，そういう“学習の起源”が増えてくるのです。教師は「この子は今，こんなところに反応している」ということを察知して欲しいわけです。要するに，皆さんも今ここで，自分の研究にあわせて，あるいは自分の教えている子供たちの顔を思い出しながら，何かを考えているわけで，私の言っていることがそのまま皆さんの頭の中に来るのではなくて，何かきっかけなのですね。きっかけとして思考が進んでいく。そういうものがあるし，教師が「はい，今この先生はこんな学習をしていますよ」なんて説明できるようなものではないですけど，だけどそれは豊かなのですね，分からないとき。ということで，学習者の自然な思考にそった授業を行うために，やっぱりコミュニケーションは必要だということですよね。

Q3．あなたの数学の授業では，学習者との十分なコミュニケーションがありますか？

３番目ですけど，「十分なコミュニケーションがありますか?」というときに，先生は実際コミュニケーションがありますか？というふうに聞かれると，何を考えますか?

—*発問したりとか，生徒の反応を見たりとか，そういうことを思い浮かべます。*

そうですよね。他の先生は？

—*生徒の対応ややりとりの中でコミュニケーションをやっているかなと…。*

生徒から発言を引き出しているかなということですか。

—*その中で多くの生徒が授業に集中しているかなと…。*

—*机間巡視をする中でどれくらい分かっているのか発問，逆にあるいは生徒からの質問の質とかね…。*

もし，授業を見ていて，この授業は生徒が一度も答えなかった，例えば先生が質問をしたのに，一度も話をしなかった，となるとこれは十分なコミュニケーションはないと言えますよね。ということは何が基準ですか？回数ですか？量ですか？ということになりますよね。やりとりが一回もない生徒は，二回あった生徒よりもレベルが低い。でも10回やりとりがあったほうがもっとコミュニケーションが高い，というふうに思いがちですよね。あるいは，小学校の授業を見て，授業研究をやって，この授業はみんながはい!はい!はい!はい!と手を挙げて非常に活発な授業だったというときには，普通の先生方が見るのは回数ですよね。でも高校の先生方にお願いしたいのは，回数ではなくて，あるいは量ではなくて，もう少し質的な交流ですね。だから誰も話さなくていいんです。おそらく今この状況では先生方，結構真剣にだんだん考えていかれていますよね。だんだん考えているなということがこちらにも分かってくるわけですよね。やはりそこに私が，何か言葉，あるいはOHPを見せることによって刺激を一生懸命与えているわけですよね。今まで考えていなかったようなことをちょっとこの場で考えて下さい。そうすると皆さんの思考は聞いているということよりも何か考えている，批判的に聞いているとか，「あ，そうだな」と思って聞いているとか，あるいは自分で自分の世界にこもって聞いているとか。こちらもこんな話をすることによって，皆さんの思考が多分こういう風になっているなということが見えてくるとすれば，それは誰も話し合いがなく，ある意味では非常に質的な交流が起きてくるということですね。

これから段々とお話を進めますけど，数学というのはですね，このコミュニケーションが他教科のコミュニケーションと大分違っているんです。この人は今こんなことを考えていて，この問題ではここまで分かっているということが全部を聞かなくても分かりやすい，思考の交流がしやすい教科なんですね。それを私は“数学的コミュニケーション”と呼ぶんですけど，そんな話を今日はしてみたいと思います。

Q6．「数学的コミュニケーション」という言葉を聞いたことがありますか？どのようなイメージを持っていますか？

“数学的コミュニケーション”といいますとね，数式を使っているとか図を使っているとか表を使っているとか，表現が数学的なものと考えがちなんですが，まず数学の授業を見たときに先生が説明するときは比較的形式的に話しますよね。例えば三平方の定理にしても，微分積分にしても，図を描いて細い短冊を描いて，そしてその数式を書いていってだんだん一般化する，これはかなり数学的な表現をうまく使った

コミュニケーションですよね。だけど，生徒たちというのは，その形式的な理解に達していませんから，分からないときには「分からない」と言うしかないわけですよね。だけど「どこが分からない?」というと，どこが分からないのかも分からない。だからかなり数学の授業のコミュニケーションというのは，どちらかというと形式的なやりとりであって，その形式的なやりとりができる段階というのは，もうみんなが分かっているという状態なわけですよね。ですから，我々が考えなくてはならないのは，日常的な言葉を使ってやりとりをせざるを得ないわけですから，その中での裏の思考が数学を使っているかなというところに注目したいのです。

Q4．数学の授業におけるコミュニケーションを，あなたはどのように評価しますか？

例１．思考への着目

> **例１．コミュニケーションの評価**
> **以下のようなやりとりをどのように評価しますか？**
> **①「１＋１」という問題の場合**
> **A : この問題わかる。B : 2だろう。C : あっ、そうか?**

そうしますと，この「1＋1」という問題についてですね，「この問題わかる?」と言われて，そうすると「ばかにするんじゃないよ」という行動になるかもしれないし「２だろう」と普通に答えてくれる場合もあるかもしれない。だから，「この問題」という問題が「数学の問題」であるから，このような対話を数学的なコミュニケーションだというのはちょっとお粗末ですよね。

思考の質を比較する

> **②「$(5^{1/2}-1)^{1/2}(5^{2/3}+5^{1/3}+1)^{1/2}$」という問題の場合**
>
> $(a-1)^{1/2}(a^2+a+1)^{1/2}=(a^3-1)^{1/2}$ **という構造に着目すれば、**$(5-1)^{1/2}=4^{1/2}=2$ **という暗算ができる。**

だけど，例えば②のような式でしたら，先程の1＋1＝2という式よりもちょっと複雑な式ですね。これどうして２なのでしょうか？そうしますと，この前の問題の「この問題わかる」と言ったときにBが「２だろう」，そしてもう一人の人が「あっ，そうか？」というときの思考が瞬間に行われているとすると，「２だろう」「そうだよ２だよ」と言ったときにはもしＢさんが「２だよ」と答えてくれたとすれば，Ａさんが見ているこの式の構造が，Ｂさんは分かっているということが分かるんですよね。それは何通りも構造があるわけではなくて，これは $(a-1)(a^2+a+1)=a^3-1$ という公式に関係しているんですね。外側に1/2乗とか1/3乗とかがついていますので，ちょっとこの構造が見えにくくしてありますけど，いきなりこのaを使った式にしたらなんということはなく，暗算でできるわけですよね。ですから「この問題分かる」「2だろう」「あっ，そうか?」という表面的な言葉が基準になるわけではないのですね。その瞬間にＡさんはＢさんにこの公式を使えばすぐできる，それを思いついてくれるかな，と期待しているわけですよね。そこでＢさんはそれをうまく使って「２だろう」とちゃんと受け答えをしてくれるわけですよね。それを聞いているＣさんも，ＡさんＢさんの間でどんな思考のやりとりがあるのかということを見取っているわけですよね。これはですから，かなり高度な数学的コミュニケーションです。そういうものが瞬間的に見抜けないと思考の交流になりませんね。ですからこれを例えば $(a-1)^{1/2}(a^2+a+1)^{1/2}=(a^3-1)^{1/2}$ を書きまして，「これを種明かしするとこういうことですよ」と説明するとすれば，これは数学の式を使ったまさに形式的なコミュニケーションです。だけど，どっちのコミュニケーションの質が高いかと考えますと，明らかに「２だろう」というこのままの方が，形式的なコミュニケーションよりもレベルが高いことになりますよね。この例が何を示しているかというと，まずコミュニケーションというのは表面的な言葉だけではなくて，そこの瞬間にお互いにどんな思考が，どのように働いているのかを見る必要がある，ということです。

ですから私たちのコミュニケーションというのはですね，簡単なモデルを言いますと，送り手がいて何かメッセージを，それは言葉であったり何か描いた絵だったりするわけですけど，それを見せて，そしてそれを受け取るわけですよね。今までのコミュニケーションというのは，私も高校の教諭をやっていたときの経験を踏まえますと，「なんで何回も何回も説明したのにおまえ分からないんだよ，昨日も説明したよ」

とかよく言っていたんですが，こういうのですよね。

コミュニケーションの基本モデル

送り手　→　メッセージ　→　受け手

数学的な表現は，情報が高度に凝縮されたメッセージになる。
↓
数学的構造の伝達

だけどそれはこのモデルに従うと，メッセージを送っただけではやっぱり伝わらないんですよね。そこには受け手にある思考を刺激することによって呼び出されるものがあるんですね。そのものがうまく結びつかないと，だめなんですね。ですから説明する，あるいは，図を黒板に描くといったメッセージは，送っただけでは全然コミュニケーションにはなりませんよ，ということなんです。だけどここが大事なんですけど，この数学的な表現というのは，ある場合には先程言いましたように，いろんな情報を凝縮している表現なんですね。それを伝えるだけではなくて，いろんな情報を伝える，それが“数学的な構造の伝達”ということです。だから先程の例でも言いましたように，数学的な構造を見取れれば，メッセージの意味が取れるわけですよね。だからまず構造というものを大事にしましょうということです。

「構造」という見方

例２．総和記号がもたらす経済的な情報の伝達

では，構造というものは何かなと考えたときにですね，こんな問題を考えてみましょう。

!例２．総和記号がもたらす経済的な情報の伝達
初源的な認識に基づいて顕在化された問題の構造

$$\prod_{\square=1}^{17}\log(\tan 5\square^\circ)$$

これも先生方すぐ分かりますよね。∏も出てきますし，tan も出てきますし，先生方は日々教えていらっしゃいますよね。これは問題としてみると，普通は数学の問題というかたちで提示するわけですけど，なぜこれが問題になるかというと，「この表記の中にはこれを解くために必要な情報が入っていますよ」ということだからですね。だから，もう知らなくてはいけないことは教えてあるんだから，答えが出るだろうという立場ですよね。そうすると，∏だとか log だとかいう記号が何か情報源になるわけですね。まず，どうやって見るかというと，∏とか log といった記号としての位置関係の構造ではないんですね。何かもう少し意味がある，でそれが式を理解するということなんですよね。これを理解しますと，質問するまでもなく，こんなふうになるわけですよね。

$$\prod_{\square=1}^{17}\log(\tan 5\square^\circ)$$
$$= \log(\tan5^\circ) + \log(\tan10^\circ) + \log(\tan15^\circ) + \log(\tan20^\circ) + \log(\tan25^\circ) + \log(\tan30^\circ) + \log(\tan35^\circ) + \log(\tan40^\circ) + \log(\tan45^\circ) + \log(\tan50^\circ) + \log(\tan55^\circ) + \log(\tan60^\circ) + \log(\tan65^\circ) + \log(\tan70^\circ) + \log(\tan75^\circ) + \log(\tan80^\circ) + \log(\tan85^\circ)$$

要するに∏に代入していって，5°，10°，15°となる。結局何かというと，Σ，log，何とかっていうものはこの 17 項の和ですよっていう構造なんですよね。そういうふうに段々解釈していくわけです。これは一番初めです，これだけではまだ問題は解けませんので，ここで，こんな公式が使いたいとなるんですね。

「$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$」
「$\log(M/N) = \log M - \log N$」
という知識による再構造化

$$\prod_{\square=1}^{17}\log(\tan 5\square^\circ)$$
$$= \{\log(\sin5^\circ) - \log(\cos5^\circ)\} + \{\log(\sin10^\circ) - \log(\cos10^\circ)\} + \{\log(\sin15^\circ) - \log(\cos15^\circ)\} + \{\log(\sin20^\circ) - \log(\cos20^\circ)\} + \{\log(\sin25^\circ) - \log(\cos25^\circ)\} + \cdots + \{\log(\sin75^\circ) - \log(\cos75^\circ)\} + \{\log(\sin80^\circ) - \log(\cos80^\circ)\} + \{\log(\sin85^\circ) - \log(\cos85^\circ)\}$$

そうするとこれを代入していきますと，もう少し構造が賑やかに分かれていきますね。要するに「tan5°というのは log sin5°と log cos5°の引き算だよ」となって，さっきａだったのが

a1－a2と２つに分かれます。すると次に34の項が出てくるとどうですか。でこれをもっと先に進めていきますと，今度はこのままだけでは問題は解けませんので，こんな余角の公式を使うんですね。

余角公式「sin θ＝cos(90°－θ)」による再構造化

$$\sum_{\square=1}^{17}\log(\tan 5\square^\circ)$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\log(\sin 5^\circ) - \log(\cos 5^\circ)\}\\
&\quad + \{\log(\sin 10^\circ) - \log(\cos 10^\circ)\} +\\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad + \{\log(\sin 45^\circ) - \log(\cos 45^\circ)\} +\\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad + \{\log(\cos 10^\circ) - \log(\sin 10^\circ)\}\\
&\quad + \{\log(\cos 5^\circ) - \log(\sin 5^\circ)\}
\end{aligned}
$$

そうすると，最初に出てきたΣ何とかっていう簡単なものが，いろんな構造を，重層的に，最初は17項のもの，それが34項，それから今度は最初と後の項がプラスマイナスの関係になって足していくと0になるという構造を伝えることになりますよね。それでこれはこういうふうになるのかと見えてきますね。

余角の公式を導入することにより顕在化された問題の構造

$$
\begin{aligned}
\text{与　式} &= \{\log(\sin 5^\circ) \underline{-\mathit{log}(\mathit{cos}5^\circ)}\}\\
&\quad + \{\log(\sin 10^\circ) - \log(\cos 10^\circ)\}\\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad + \{\log(\cos 10^\circ) - \log(\sin 10^\circ)\}\\
&\quad + \{\underline{\mathit{log}(\mathit{cos}5^\circ)} - \log(\sin 5^\circ)\}
\end{aligned}
$$

そうすると，もうこの辺の話は皆さんにとってはあまり面白くないわけですよね。もっと先へ行けということになるんですよね。これはどうことかというと，こちらが提供しなくても「私が考えていること」と「先生方がこの先はどうなるんだろう」ということとがもう大体一致している，ということなんですよね。丁寧に式変形していったら最後にはこうなるのだろうということが見えてきますと，これ以上コミュニケーションを続ける意義がないですよね。だから，何が必要かというと，形式的にきちんと説明しなくてはいけない場合は，説明する必要がありますけど，お互いが分かるようなレベルまできたら，もうそこから先は「わかったよね」で飛ばしてもいいわけですよね。これが“コミュニケーションの経済性”というんですけど。だから，仲のいい人同士だったら，「昨日のあれどうなった」で済むわけですよね。「昨日のあれだめだったよ」で成立するわけですよね。その昨日の何とかはどうだったと詳しく言っていると，その２人の仲は疎遠になるんですよね。「昨日の何とかは何とかで，８時30分はおまえ何した，どうだったこうだった」なんて言われると，「こいつどうしたんだ？」とちょっと構えるわけでしょう。だからコミュニケーションの楽しさというのは，やっぱり省略できるところは省略する楽しさと言いますか，あるいは，その２人との間ならば言葉少なくてもいいという関係になっていると言いますかね。ですから表現を重視し過ぎますとそういうものがなくなってしまうのですね。最終的にこれがどうなるのか，みんな0，0と消えていって最後真中も0になるから答えは0だということは，これはもう説明しなくてもいいところなんですけど，だから，どこで止めるか，最初にあの問題見せた時に，「ああそれ0だろ」となったら，その話は止めた方がいいんです。

最終的に到達した問題の構造

与式＝

$$
\begin{aligned}
&\{\log(\sin 5^\circ) - \log(\sin 5^\circ)\} + \{\log(\cos 5^\circ)\\
&- \log(\cos 5^\circ)\} + \cdots\cdots + \{\log(\sin 40^\circ)\\
&- \log(\sin 40^\circ) + \{\log(\cos 40^\circ) - \log(\cos 40^\circ)\\
&+ \{\log(\sin 45^\circ) - \log(\cos 45^\circ)\}\\
&= 0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0\\
&+0+0+0+0+0\\
&+ \{\log(\sin 45^\circ) - \log(\cos 45^\circ)\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

それは，一つの思考の交流というんですけど，数学の場合はある程度自信をもってお互いに，もし先生が0と言えば，「ああもう説明しなくても分かっているな」「先生の頭の中にはどういう式が書かれているな」ということが分かるわけですよね。そういうコミュニケーションのことを，“思考の質”というのです。

「図形の構造を見る」

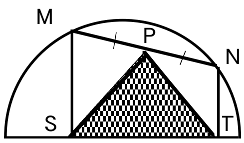
例３．線と線の関係に意味を見出す（図形の構

造）

今までちょっと式を使ったお話をしてきましたので，幾何のお話をしますけど，問題は両端をA，Bとする半円です。MNをどう動かしても三角形（△PST）は二等辺三角形になるんですよね。でかつ，これが相似になるっていうのがすぐわかる，あるいはこの問題を知っているという人はいますか。

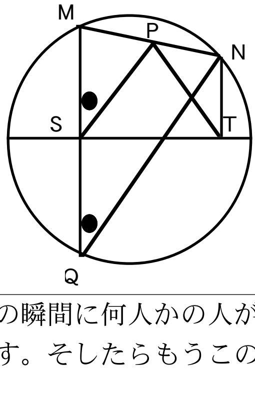
例３．図形の構造

半円の円周上に一定の長さをもった弦ＭＮを書く。点Ｍと点Ｎから線分ＡＢに垂直におろした垂線の足をそれぞれ点Ｓと点Ｔとする。このとき、線分ＭＮの中点Ｐとこれら２つの点とを結んでできる三角形ＰＳＴは、ＭＮの位置に関わらず、常に相似な図形になることを証明せよ



この問題について「どうですか」と言ったときに，こちらはこの図の何を見てほしいかという期待感をかけているんですよね，数学の問題を出すということは。「この図を，こういうふうに見たらすぐなのにな」ということを期待しているんです。だけど普通は，問題というのは何か必要な情報を削っておいてすぐには見抜けないように作ってあるわけですよね。すぐには分からないようにしているんです。そのすぐには分からない情報というのが，この下側がないということですよね，つまり，円だったらいいのに下側を隠している。そこで下を完成させますと，こういう関係になります。

円周角という知識により構造化された図形



それで，今の瞬間に何人かの人がうなずいてくれるわけです。そしたらもうこのコミュニケーションは終わりなんですね，これは説明しなくていいわけですね。その時に，うなずくという非常に単純な行為ですけど，この人がなぜうなずいてくれたのかということは，わりに数学レベルでは推測しやすいですね。うなずいて頂いた先生，「私はあなたが言ったことが分かったよ」ということを私に知らせるために，何か数学用語をキーワードとして一言言ってください。

—円周。

そうですね。それであの先生は分かってくれているというふうに分かるわけですよね。それを聞いている他の人たちは，例えば「和田君どうですか」と聞いたときに，分かったとか分からないとかなるわけですけど，どうですか。今のキーワード“円周角”というのは「ああ，すごくいいキーワードだな」と思いますか？

—問題がよく分かりません。

ああ,そういうふうになってくると，授業で考えるとですね，先生が問題を出して一部の人が分かってくれるわけでしょ。そうすると分かっていない人にとっては，非常に不安な状況ですよ。指されたらきっとはずかしいというふうにね。でも，何人かの方は“円周角”でうんうんとうなずいているということは，その時に頭の中にある数学のこの問題の構造化というのがうまくいっていて，さらに“円周角”と言って頂いたから，確信が深まるわけですよね。だけどそこまで言ってもさっきの「２だろう」「なんで？」と言ってしまう人が当然いっぱい出てきてしまう。そこで，やっぱりそういう人たちに対してこれをちゃんと説明する，解き明かす，という必要があるのですね。それをやらないとどんどん脱落者を出すことになりますね。教室で先生が説明だけして，「分かったか」と言うと，ほとんどの生徒がうなずいたから，「ハイじゃあ次ね」というのはそういう状況ですね。もう分かっても分からなくてもうなずかなくてはいけないんでしょうね。そこで「分かりません」というのは結構勇気が要ることなんですね。だから，分かった顔をしてしまうのですね。そこで先生が説明をしなかったら，生徒は一生聴けないままに終わってしまうんですね。ではどうしようかということで，じゃあ，小人数だけどちゃんと説明しますよというふうに説明してみると，もしかしたら先程先生が円周角と言っていたものと違うかもしれない。だからそこのところで学習というものが深まるのですね。

種明かしをしますと，先程言いました角（∠MQN）にここの弦（MN）というのはいつも動くわけですよね。だけど長さは一定なんです。そうしますと先生が答えて下さったように，これは一定の弦に対する円周角ですから，この黒丸（∠MQN）というのはいつも一定ですよね。その時に先程の上半分だった半円を見ますと分かるように，…(記録者補足：MP=PN，MS=SQ だから PS//NQ となって（∵⊿ MNQ における中点連結定理）∠MSP もいつも一定)… この説明もある意味まだレベルが高いですね，きちんと言っていませんから。いろんなキーワードだけ刺激を与えて，そして考えさせていく。受け手が了承していただければいいということですよね。でもここで，本当に知りたいのは⊿ PST でしたよね。これ（∠PST）は 90°から引いた余角ですからいつも一定で，これ（∠PTS）も一定になりますね。これは二等辺三角形になるのは，いろんな説明が出来ますけど，どんなときに一番大きな三角形が出来るかというと，MN が直径と平行になったときに一番高さがありますよね，一番大きな二等辺三角形ができます。

これを出した理由はもう一つあるんです。図というのは，描いている本人と分かっている本人がこの図をどう見てほしいかということが一致しているかどうか，ということが一目瞭然なんですよね，描いてる人間は。だから授業をやっているときに「ほらこんな丁寧に描いてこれ以上もう描くことがないじゃない」というふうな図を描いたつもりでいるんですけど，この図をどういうふうに見るかということは，受け手のレベルですね。これをどういうふうに分かっているか，構造化できているかいないか，というのをこちらが知るためにどうすればいいかというと，この図をノートに写させるんですよね。構造化出来ていない人は，例えば初めて見る外国の文字を写すときに，書き順もなにもなく見たところから写すでしょ。だからこれをちゃんと構造化出来ているとすれば，少なくともこれ（半円）は円一周と描きますよね。だけど分からなかったら，でたらめに描くかもしれない。現に高校生のノート見たらそう描きますよ，描きやすいところから。「お前違うよ，これとこれが意味があるんだから，これを引いたら次はここだよ」なんて言ったってそう見えてないんだからね。だから，机間指導というのは，話をする必要はなくて，その子がどういう順番で図を描いているかな，というのを見る必要があるのです。だからこういうふうに複雑な図を描いているときは，時間もかかりますしね，どういう順番で写したか，その写したときの描く順序というのがやはりかなりの根拠があるんですね。あるいはこれを分かっている人は，黒板を消してしまったときにも自分で描けますよね。「もう一回前に来て描いてください」と言ったときはたぶんたいていの人は，これは非常に多くの情報を含んでいますけど，多分描けますよね。頭の中の情報がうまく，和田君の好きな言葉で言うと“体系化”されたわけですよね。それは“構造化”されたわけです。うまく構造化されていれば，記憶にかかる負担というのは非常に少なくて済むんですね。記憶にかかる負担が少なければ，頭をもっと別なことに使えるわけです。幾何の学習というのは正にこういう意味があるんですよね。図をどう見るかということ，これは私の好きな言葉では“選択的知覚”と言います。要するにどこを今見てほしいのか。この図を描いても，いらない線というものがあるわけですよね，例えば先程の先生が円周角と言っていただいたときに，その瞬間に消してもいい線というのがいっぱいあるわけでしょ。だからその瞬間にはそこを見ないでほしいわけなんです。ある所に意識を集中してほしいわけなんです。だけど高校生というのは，学習途上ですから，「この円周角とこの円周角が同じだよね」と説明した瞬間にもこの図が分からない子はボーと見ているわけなんですよね。そのボーとという状態から焦点が合ってきて，この角とこの角だけに意識ができるというのが，一つの幾何教育を受けてきた体験と経験と知識からなんですよね。

指導力向上と予測可能性

数学の世界を離れると普通は楽しいものですよね。だけど数学の世界だとさっきみたいに「分かった」「分からない」という評価といいますか，あるいはプレッシャーがあるから，ついつい「数学のコミュニケーション」というのは，凶器になるんですよね。要するに何かというと，授業をやっていると，「分かった人」「まぁ分かった人」「分からない人」と常に線引きを始めてしまうんですよね。だからその点では「数学のコミュニケーション」というのは

非常に難しくて，そのフォローをどういうところでするかというと，やはりその先生の人間性でフォローしていただくしかないんです。でもやはり「それだけでも分かってない人がいる」ということを，あるいは「どこまで分かっている人がいるか」ということを感じながら授業をやっていただくと，いいのかなと思うんですね。そのときに，最初に言った“自然な思考”というものが，やはりこちらが期待したいことですよね。ここまで分かっている人にはこの先どうすれば分かっていくのかという道を切り開くためにも。そうするとコミュニケーションがあって，理解がこうなるというものがあるとですね，何が変わるかというと教師の“予測可能性”というものがついてきます。我々は専門家ですから予測可能性というものをもう少し高め，一生懸命何かいい教材を考えるんですね。これをやれば多分活発な活動が起きてきて，そしてみんな勉強してくれるんだろうなという世界ですね，今のところ。だけど医学にしろ何にしろ，「こんな薬を何日間投与したらこういうふうに変化するはずだ」という予測性や可能性を持ってやっていますよね。だから先生方にも，「教師がこういうふうな働きかけをすると，A 君はこうなる，B 君はこうなる，C さんはこうなる，という，全体として大体こうなるというレベルじゃなくて，個人の生徒一人一人がどういうふうになっていくのか。この子はいつもこんなところでつまずくから，おそらくまたつまずくだろうな」とか，予測性や可能性を持ってやっていくことを期待したいわけですよね。それは一人一人予測していただきたいし，そういう能力を高めないとやはり指導力向上につながらないと思うのです。今回のテーマがちょうど指導力向上ですけども，指導力とは何かというとやはり，「見据える」「予測可能性を高める」ということがどこかにあるんですね。そのためには，こちらの授業が自然に発展していくものでない限り，こっちがやっていることがイレギュラーですよね。そこから派生するものが更にできるわけですよね。ですからまず自然なところから，自然に自然にということを大事にしておいて，あまりそのイレギュラーさを出さなければ，“予測可能性”が高まるでしょ。その“予測可能性”に従って，教師というのは，そのときそのときの意思決定をしなくてはいけないわけですよね。この子を指そうか，この子にしようか，あるいはここでやめようか，もう少し説明しようか，常に意思決定をしているわけですよね。だからその意味でも“予測可能性”というものをどこかで意識しておかなければなと思います。

Q5．数学の授業におけるコミュニケーションは，どのような特徴を持っていると思いますか？

数学学習におけるコミュニケーションの厳密性

後半の本題は，数学的コミュニケーションという話をもう少し深めたいと思います。おそらく多くの先生方は“数学的なコミュニケーション”というものを聞いたことがあまりないかもしれません。先生方の知識経験によると新聞を読んでも数学的な表現はいっぱいあるし，物理や科学の本を読めば式があったりなんかする。それでちゃんと伝えたいことを正確に伝えているんですね。例えはたくさんあるんですけど，要するに“数学のコミュニケーション”というのは，「厳密に伝えたいことを伝えられる」という特性があるんですね。だから文学みたいにこういうふうにも取れるしというものを残さないんですね。そこでこれをちょっと見てください。

> **数学学習におけるコミュニケーションの厳密性**
>
> 例４．ニュースのアナウンサーの言葉
> 「今年度の第１四半期の経済成長率は２％でした。
> これを年間の成長率に直すと８％の成長率になります。」
>
> 「２×４＝８」
> （注：第１四半期の経済成長率が 3％のとき、
> 年率換算が 12.6%（≠3×4＝12%）になり、
> ずれが顕在化される
> $((1+0.03)^4 = 1.12550881)$）

このようなことはニュースでよく耳にしますよね。第１四半期というのは，一年を４つに分けて，だから第１四半期というのは１・２・３月のことですね。これを聞いたときに先生は何を考えますか？

―1/4 が 2％だから 4 倍で 8％

普通の人はそう思うわけです。それ以外の解釈をする人いますか？ここからもう真剣に数学の先生に戻りましょう。数学的に言うと「2×4＝

8」というのは間違いですね。これはもうそう言って先生方の頭をチェンジしていただければすぐ分かると思うのですけど，これは割合ですから1.02×1.02… というふうに累乗になります。実はこれは「２％」と「８％」にするとうまく８％になるんですけど，これを「３％」に直しますとこういうふうに$(1+0.03)^4$ということでこのときには12.6％で，3×4＝12％というふうにはならないのですね。だけど日常の生活をしている上では，我々はさっきの2％が４倍で8％ぐらいのことでいいわけですよ。アナウンサーだってそこでもし多くの国民がそう捉えたとしても，別に困らないわけですよね，誰もね。なにか今日の解説みたいな人が出てきて，「年率換算というのはこういうことですよ」という必要はないわけですよね。暗算として$(1+0.03)^4$という式が分かっていたとしても，３×4＝12としていいわけですよ。小数第３位以下を削ればもちろんそうなるわけですからね。だからこれを厳密に，我々はいい加減に捉えているということを言う必要はないのですけども，ただもしこの表現が数学的なコミュニケーションなんだといったときに受け手が「2×4」だと思っているうちはそれは使っている表現は数学的ですけども，全然数学的なコミュニケーションではなくて，思考が数学的ではないわけですよね。2×4という単なる掛算を使っていますけど，ちゃんと数学として正しくは解釈していない。だからこういう場合には厳密性を損なってしまうのですね。我々がもし数学的なコミュニケーションに“厳密性”を求めるとすれば，もっとこういうところまできちんと思考がなっているかどうかということを確認して欲しいと思います。

数学学習におけるコミュニケーションの経済性

２番目は“経済性”ですね。これも先生方に考えていただくと面白いのですが。

数学学習におけるコミュニケーションの経済性

例５．「Ａ、Ｂ、Ｃの３人に帽子を被らせ、この順番に前から縦に１列に並ばせ、Ｃ、Ｂ、Aの順に後ろから自分の帽子の色がわかるかどうかたずねる（野崎,1995,p.52）」。

ＣさんはＡさん，Ｂさんの帽子が見えます。ＢさんはＡさんの帽子が見えます。そういう状況です。そんな状況のときに「あなたは何色の帽子を被っていますか」と聞いても，分からないですけど，条件を加えます。

「皆さんの被っている帽子は、赤か白です。
そして、少なくとも１つは赤です」という情報を与える。

「Ｃ：わからない。Ｂ：わからない。
Ａ：自分の帽子の色は赤だ。」

こうなりますと，高校の数学によく似てくるんですね。３人の帽子のうち，赤か白なんだけど，少なくとも１つは赤です，これでもう数学的な推論ですよね。そのときに，ＣさんＢさんＡさんに聞きますと，Ｃさんは「わからない」んですね，Ｂさんも「わからない」んです。だけどＡさんは，Ｃさん，Ｂさんといった後の２人の「わからない」という言語メッセージにより，「じゃあ，自分は赤だ」と言って，実際に赤なんです。この論理といいますか，ＣさんＢさんＡさんの思考のつながりを，どなたか解説していただけますか？ちょっとずつ種明かしをしますね。要するにさっき言ったように，Ｃさんが「わからない」ということは，Ｃさんが何をどう見ているかという情報を送っているわけですよね。

<u>Ｃの思考を探る</u>

はい，ではそこからいきましょう，種本君。ＣさんがＡさんとＢさんの色を見ているにも関わらず，自分の色が決められないというのはどういう状況ですか。では決められるのはどういう状況ですか。

―(白，白)

うん，前の２人が白ならば，自分は赤しかないって決められるわけでしょ。ということは分からないということは，(白，白)ではないということを教えているわけですよね。

不確定性の低減

（A，B，C）＝<u>（白，白，赤）</u>、←削除（Cが赤に確定）
（白，赤，白）、（白，赤，赤）、
（赤，白，白）、（赤，白，赤）、
（赤，赤，白）、（赤，赤，赤）

赤か白かどちらかなんだけど，色の決め方は全部で８通りあるのです。でも「少なくとも１

つは赤」という条件が最初から（白，白，白）という状況を抜いているわけですよね。そしてCさんが「わからない」ということは，（白，白）という状況ならばもう赤に決まってしまう，でもそうではない。だからこの下の６個なんですよね。

Bの思考を探る

そこでBさんは「わからない」と言いました。Bさんの頭を考えてみましょう。じゃあ，今度は和田君。このときBさんがもし答えられるのはどういうときですか？

―*Cさんがもし分かったら前が（白，白）のときなので，それで分からないということは自分は白か赤なのですけど，前がもし白だったら自分は赤。*

そうですね。（白，白）はないんだから，前が白なら自分は赤ですよね。だからこういう可能性が残っているんですよね。

（A，B）＝（白，赤）、　←削除（Bが赤に確定）
（赤，白）、（赤，赤）

（A）＝（赤）

この６個のうちのCは関係ないですから，そうすると（白,赤）（赤,白）（赤,赤）の３通りしかないですけど，もし前が白ならばBは赤と答えられるんです。ということはこの３つのうちの（白,赤）がなくなりますので，Bが白にしろ，赤にしろAは赤しかないですね，確実に。生徒はよく「わからない」と言いますけど，“わからない”という言葉は情報ゼロを伝達しないんですね。この場合にはもう十分豊かな数学的な論理を“わからない”という５文字が伝えるのです。先程の「2％の増加率で８％です」というものを受け手の一般的な私たちが「あぁ，2×4だな」と思っているレベルのコミュニケーションと，「わからない，わからない」という言葉が伝えるコミュニケーションを比べると，「数学的な論理性」ということでいうと，この例はすごく質の高いレベルですね。このコミュニケーションが成立するためには「わからない」と言った人がその思考を踏んでいないと困るわけですね。それはこのコミュニケーションの前提ですよ。そんなことを考えないで，ただボーと「わからない」と言われちゃうと，Aさんは命を賭けて「赤」とは言えないんですよね。だからコミュニケーションというのは，その３人なら３人のレベルが決めるということなんですよね。その３人の思考レベルが高くない限り，コミュニケーションはうまくいかない。だから教師が一方的に指導力を向上しても数学の授業のコミュニケーションというのは質が高くならないのですよ。だからやっぱり教師は，自分でそういう授業展開をしたいと思ったら，それを受けてくれる生徒のコミュニケーション能力を高めないといけないんですね。我々はなんとなく小学校から算数，数学ということで授業を聞かしていますから，授業に出て，それを理解する能力というのはついていると思っているんですね。だけど考えてみると，小学校から高校まで，我々は数学の授業に出て，先生が言っていること，友達が言っていること，それを掛け合わせて，それを自分の知識として再構成するなんていうことを習っていないですよね。そういう意味で，大人になってこの高度情報化社会のために数学的なコミュニケーション能力が必要だという人がたくさんいますけども，その前に数学の授業に出て，その数学の授業で何が起きているかということを理解するためには，かなり高度なコミュニケーション能力がいります。そのコミュニケーション能力というのは，もう今日繰り返し言っていますけど，数学の問題解決，推論，数学的な見方・考え方というのがベースにあるわけですね。

そのベースがあってのコミュニケーションですから，かなりレベルが高くなるかもしれない。だからそれは問題解決能力が非常に高いとか，推論能力が高いということだけではなくて，その能力を結集してあるとき瞬間的にパッとコトが理解できる能力ですね。そのためにはやはり単なる言葉を操る，表現を操るということだけではなくて，自分が知っている知識の何をその瞬間に使うか。

先程の例で先生が「円周角」と言ったときに，あそこで一番のキーワードとして，「円周角だ」というふうに自己選択できるセンスですね，そういうセンスというのが非常に利いてくるんですね。ですから，これからでも遅くはないですけど，先生方が講義一辺倒な授業ではなくて，生徒とコミュニケーションしようと思ったわけですね。日本の小，中の学校というのは，先生と生徒のコミュニケーションで授業を作っていくんですけど，それは先生がちゃんと説明しな

いで，個々の子どもたちにいろいろ言わせるんですよ。で，先生は全然まとめない。そうすると何が起きてくるかというと，子どもたちの中途半端な，形式化されていない，あるいはひょっとしたら間違ったものがどこかにあるかもしれない，そういうきちんと形になっていない，あやふやな危ないものを積んでいってなんとなくみんなを理解させるといった状態の授業です。それを構成主義だといって先生が奨励しますと，それができない子どもたちはいっぱいいるわけで，何が起きているかわからないわけですよね。だから，先生は数学をよく知っていますから，A君が言ったアイデアは解決のここまでたどり着いている，そしてそこを越えるためにはBさんの言ったことを使えばいけるんだ，さらにCさんが言ったことで最後まできたんだというふうに頭の中で整理できるんですけど，子どもにそんな自分の隣の友達が言ったことを授業の中で，「誰が言ったこととこうなって，こういう関係なんだな」というふうにはできっこないですよね。だから我々はすごい数学的なコミュニケーション能力を前提に，少なくとも小，中の授業を構成しているんです。

ですからその意味では，高校というのはこれからもし，そういう小，中学校の発展的な授業ができたとすれば，あるいは先生が最初に言ったように，「数学を作っていく」ということをやらせようとするとね，そこで起きていることを理解する能力というのは，数学教育の総合的な力として育成されなければならない。問題を解かせるとよく解けるけども，人の話がよくわからないとか，そういうのでは困るわけですね。私が言いたい“数学的なコミュニケーション能力”というのはそういう意味では，まさに総合的な能力ですよね。

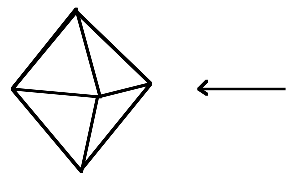
数学学習におけるコミュニケーションの自由性

ではもう一つ最後に“自由性”というものがあります。数学のコミュニケーションというのは厳密的な部分（厳密性）と，今言ったようにあんなにたくさんの情報を「わからない」という５文字で伝える経済的な経済性，効率的なという意味の経済性，それと最後はですね，数学に非常に大事なんですけど，我々は数学というのは，自由に思考できるんですね，多くの方が。自由に思考できるし，自由に表現できる，あるいは形を自由に決められるわけですね。定義を一つ決めれば，そこから発展する。定義のよさというのはどれだけ豊かなものが作れるか，ということですね。だから自由さの中にも全然豊かさを持たないものは，それは自由だからといってそう決めても意味がないんです。だけど，何かその自由だと決められているところから出発すると，発展するんですね。コミュニケーションの表現というものを押しつけると，その“自由性”を奪うことになります。「数学的な表現で言ってごらん」なんて言うと，また強調しすぎると言葉が使えなくなるんです。要するに，あやふやなアイデア，中間的なアイデアは言えなくなってしまいますよね。だからやっぱり“自由性”というものが大事だよということです。

数学学習におけるコミュニケーションの自由性

例６．正八面体

「正八面体を横から見たとき、どのような形に見えるか」



頭の中に正八面体を思い浮かべて下さい。それでこの図を見せると，非常に混乱をさせるわけですよね。で，どういう図を見ているかというと，後でお話しますけど，これはノイズだらけのへんちくりんな図なんです。これを宇都宮大学の学生にしますとね，まぁみんな立派に答えてくれるんですよ。正三角形が８個，あるいは自分で模型を作ってきたりするわけですよ。そのときに正三角形が８個でできているというのは結構数学的な表現を使っていますよね。はい，じゃそこで質問します。松田さん，正八面体を上から覗いたらどんな図形に見えますか。

―正方形。

正方形ですよね。というと，どんなイメージかというと，正三角形が４つで正四角錐をつくっていて，下が正方形で，それが２つついている，そういう図形の理解ですね。はい，それでは和田君，横から見たらどうですか。

―ひし形。

うん，いい答えをしてくれるね。（笑）種本君，ひし形でいいよね。だんだんこういうふうにこ

の教室は二分化されているんです。自分も一緒に笑ってごまかしている人もいるしね。これは誰かが間違ってくれないとちっともおもしろくないんですね。今みたいに「ひし形」と言って欲しいんですけど，この図を見るとどう見てもひし形に見えますよね。何回も何回もこんな図を描いているとひし形に見えるんですけど，正八面体というのは対称図形でしょ。だから上も下も横もないんですよね。だからこれは横から頂点を中心になるように見れば，やっぱり「正方形」になんですよ。作ってみていただければわかるんですけど。我々は先生が黒板に描く絵とか，あるいは自分で描くと，どうしても立体に見せるためには，ひし形に描かざるを得ないのですね。ということはね，どういうことかというと，正八面体という立体を概念として理解するときに，正三角形が何個あるとか，あるいはピラミッドみたいなのをペチャッとくっつけたとか，こういうことを言っていると同じ言葉の反復が，何かやはりそこに固定概念を作ってしまうんですね。たまには何かいろんな別の言い方で，自由に言い換えてみない限り，なんとなく間違っていたことに気付かないんですね。ですから，コミュニケーションというのを型どおりに押し込むと，もしその裏にある間違った考え方，ミスコンセプションと言いますけど，そういう誤った概念というものを発見しにくいんですね。そこのところを自由に自分の言葉で他にどうなるか，これはどんな形になっているか，言ってみるわけです。例えばごろごろ転がるよ，というのは「ごろごろ転がる」という感覚が大事なんですね。ごろごろ転がるのだったら同じよう（対称図形）なんじゃないの？というところからコミュニケーションを発展させましょう，という意味で“自由性”というのは非常に大事ですよということです。

数学的コミュニケーションの定義

> **数学的コミュニケーションの定義**
>
> **数学的コミュニケーションとは、対象の数量形に関する構造（論理構造も含む）を他者と交換する ことである。**
>
> **ここで数学的か否かの判定は、２つ以上の事例間で参画者 の 思考 の 質を数学の特性である厳密性、経済性、自由性の観点から比較することによって 行われる。**

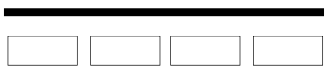
ここで中間まとめをしますと，数学的なコミュニケーションというのはいろんな定義が可能ですし，コミュニケーションという言葉自体が百何十通りも定義があると言われていますけど，それはコミュニケーションのどういう側面が見たいかということですね。定義をするということは，こいつはこういう性質を持っているよということではなくて，そういう定義を与えることによって，どの側面を見たいかということですね。ですから定義をしたから，数学的なコミュニケーションというのをあの人はこういうふうに考えているというわけではなくて，この定義をしたところから始まるのですね。私が今言ってきたように，今日やってきたことは何かと言いますと，数学的なコミュニケーションというのは，数とか量とか形あるいは，さっきの帽子をかぶったときの論理など，そういうものを交換することなんですよね。私が考えている形，私が考えている式，それをあなたは同じように感じてくれていますか。そのために必要なキーワードを交換しましょうということですね。そのときに，1+1=2 というのと，式で２と出てきたのと，表現が同じでもやっぱり質が違う場合がありますよね。だからさっきのアナウンサーの２％ではないですけど，表現が数学的だ，表現がどうだということよりも，この２つのコミュニケーションだったら，どっちが我々の言う数学的なコミュニケーションなのかという比較ですね。だから数学者にとってはそれはもう数学的なコミュニケーションではなく，もっとイントロダクションかもしれない。ですからそのときに，厳密性と，経済性と，自由性という３つの観点をもって，これはこんなやつよりも質が高いコミュニケーションが行われているとか，ということしか言えない。ここで経済性という話の中には，効率的な経済性と生産的な経済性があります。またこれは時間があったらお話したいんですけどね。

Q8．学習者の発言を言い直したり，あるいは，言い換えたりすることがありますか？

そこで私の研究の話はなかなかできないのですけど，一つだけ私がやっている研究の中で，現場の先生方に覚えておいて欲しいものがあります。それはどういうことかと言いますと，先生が質問しますね，それになんか生徒が答えてくれますよね。そして、何とか君が自分の言ったことをもう一回みんなに言い返すときがありますね。「ちょっと声が小さかったから，後ろ

は聞こえなかっただろ」ということで「今鈴木君はこう言ったよ」と先生が言い換えるわけです。こういう場合は，あまりコミュニケーションを意識しなくても出てくるわけです。

例７．小学２年生と教師との会話

> **例７．小学２年生と教師との会話**
>
> **Ｔ：どうしてこっちのテープが１ｍだと思ったの？**
> **Ｓ：教科書使うんだけど。**
> **Ｔ：さっき、教科書の長さを測ったね。**
> **だから、それを使うんだって。**
>
> 
>
> **教師は、２６×４＝１０４という計算を児童が想定していると判断している。**
> **「超越連鎖」と呼ぶ。**

そのときにですね，これは小学校２年生の例です。小学校２年生ですと，1ｍはだいたいこんなこんなていうふうに，量感をやりますよね。何本か 1ｍ ぐらいの線を描いて，このうち 1ｍ のテープはどれ？なんてやりますよね。そうすると，例えばＳ君というのが出てきて，教科書を使って測ったんですね。そしたら「このテープは，教科書４冊分になった。だからこれだと思った。」と言ったときに，先生は「そういえば，さっき教科書の長さを測ったね。だからそれを使うんだね」と言い返したとしますよね。そのときにこの時の思考を見ますと，教科書の大判というのは 26 ㎝なんですが、それは直前に授業で 26 ㎝と測っているのですね。そうすると 26×4 だから，だいたい 104 で 1ｍ，というふうに先生が理解してしまうとですね，これは子どもが本当に言いたかったことを越えてしまっている場合があるんですね。子どもは，さっきみたいに消しゴム６個分，余りも出ないという世界です。４個集めてみたらこれはちょうどうまくいったという世界だったのに，先生は「26×4」というのを頭に思い浮かべて，Ｓ君がそうやったというふうに，「よく考えたね」と誉めてしまうんですね。こういうずれを注意していただきたい。これを私は“超越連鎖”と呼んでいます。発問や質問をよくやっていますけど，生徒が本当に何を考えてそう言っているのかということに気付かないで，先生が言い足してしまったり，補足してしまったりということがあるんですね。それは場合によっては必要であって，やってはいけないわけではありませんよ。それをもとに授業を進めたいわけですから，ある子が言ったことを形式的に言い換えたり，足りない情報を整理してこういうことだよと言う必要はあります。言わないと授業が進みません。だけど，大事なことは自分がそうしているということを意識を持ってください。Ｓ君は何となくこう言って，それを私は言い返したんだけど，この間で情報の保管とあるいは雑音を除いているという意味でフィルターになっているということでね，それを意識して欲しいのですね。それを意識しないと，Ｓ君が困ってしまうのですね。先生が「あ，これさっきやったね」と言われても「何言っているのだこの先生は，僕と先生の間では全然意思が通じてないじゃないか」と。

だからこういう場合がありますので，コミュニケーションというのは私から生徒に，生徒から私にという関係だけではなくて，私とあなたそういう２人の間でも，「あなたの言ったことをまた私が言う」というある意味でのつながりですね。これが大事ですね。ですから，それを“連鎖”と呼びますけど，そういうときに思考がうまくつながっているということを，やはりきちんとおさえておきましょうね。

例８．知識の再構成を促す超越連鎖

> **例８．知識の再構成を促す超越連鎖**
>
> **教師Ａ：**$a^2+b^2+c^2 \prod ab \prod bc \prod ca \geq 0$
> **を証明せよっていう問題はどうですか。**
> **教師Ｂ：これ、平方の和にすればいいんでしょ。**
> **ちょっと、簡単すぎるから、**
> **教師Ｂ：実係数の３つの２次方程式**
> $ax^2+2bx+c=0$
> $bx^2+2cx+a=0$、
> $cx^2+2ax+b=0$**のうち、**
> **少なくとも１つは実数解を持つことを**
> **証明せよ、っていう問題にしたら。**
> **教師Ｃ：判別式の和に分解したんですね。**
> **教師Ａ：判別式の和?**

これは高校の先生向きに必要でしょ。これは種明かしに時間がかかりますので，ゆっくり考えたいと思うんですけど，これは私が勤めてい

た某大学で，新入生のための数学の問題を作りましょう、みたいな話のときに，ＡさんＢさんＣさんという３人の先生がいまして，Ａ先生が「$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$を証明せよ，という問題，これ新入生に出したらどうですか」と言うわけですね。これはもう先生方は「例のあれだな」と思うわけですよね。「それではちょっと簡単だから」と言って「これ、平方の和にすればいいんでしょ」というキーワードを言っているわけですよね。先程言ったようにＡさんが出した問題とＢさんの頭の中は，こういう計算なんだなという，これ一つの式のね，一連の「平方の和」と言うキーワードを出すことによって，「お前のやりたいことはわかっているよ」ということをフィードバックしているのですね。

式変形に関する知識

$$
\begin{aligned}
&2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
&=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\\
&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

それを式に書いて「こういうことだろ」と言う必要はないはないわけですね。これは“共鳴”と言っていますけど，こちらがしゃべりたいことと相手の人がある意味では知識レベルがあっていて，「それちょっと簡単だよ」ということぐらいで済ませたい。そして「こんな問題を新しく出そう」と言うのですね。これはx^2の式ですけど，abc が循環している式ですね。「そのうちの少なくとも一つは実数解を持つことを証明せよ，という問題にしたら」と言うと，Ｃ先生が「判別式の和に分解したんですね」と言うんですね。だからＢ先生とＣ先生の間では，先程のＡ先生とＢ先生のやりとりのように，どんな数学が展開されるのか，その瞬間にわかってしまうんですね。

高校の先生方は，この式はしょっちゅう展開しているけど，一体何のためにこんな式が出てくるのか，ご存知でしょ。この式を先程の式（式変形に関する知識における式）にせっせとせっせとやるわけですよ。「はいできたね。でもこの式は何なのか」ということをやっぱり教えたいわけですよ。そうするとＢ先生が言っている式が出てきて，結局Ｂ先生が言っているように，実数解を必ず持つということは，要するに全てが虚数解をもつことはないよ，ということですね。虚数解を全てもたないということは，判別式の和が０か正なんです。それで３つの判別式をとりますと，最初の式が出てくるんですね。

教師Ｂが提起した問題の構造

３つの実係数２次方程式のうち、少なくとも１つは実数解を持つ。

⇔　３つの実係数２次方程式すべてが虚数解を持つことはない。

⇔　３つの実係数２次方程式の判別式の和は正または０である。

⇔ $D_1+D_2+D_3$

$$
\begin{aligned}
&=(4b^2-4ca)+(4c^2-4ab)+(4a^2-4bc)\\
&=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
&=2\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0
\end{aligned}
$$

ということで，Ｂ先生はＡ先生が言った問題をストレートにではなく，ちょっと変えましょうと言っているのですね。というふうに，それはもう数学的に経験があったからなんですけど，Ａ先生Ｂ先生のようにトントントンと進むわけですよね。でＣ先生が「判別式の和」と言ったとたんに，それはＢ先生は「Ｃ先生はわかっている」と思うわけです。だけどＡ先生は「判別式の和？」と言ってとぼけるんです。そうするとＢ先生とＣ先生は「Ａ先生はついてきていないな」と思うわけです。これは，さっきのＡ先生が言ったことをもっとレベルを高くしてＢ先生が言い直しているわけですけど，超越してしまっているんです，。だけど，それは新しいアイデアを作るときには，お互いに超越していかない限り，上に上がっていきません。あるいは，Ａ先生が新しい学習をしているわけですね。ですから“超越”というのは，必ずしも悪いこととは言えません。だけど，先程も申し上げたとおり，“超越”という現象は注意して欲しいと思います。

Q9．よいコミュニケーション活動を支援するためにあなたはどのようなことができますか？

(1) どのようなコミュニケーションが起きているのかを見る能力を高める

（1）どのようなコミュニケーションが起きているのかを見る能力を高める。

①活動の連続性
・フィードバック ・連鎖的フィードバック
②学習者間の思考の連続性
・コミュニケーション連鎖の類型論
（協応連鎖、共鳴連鎖、超越連鎖、創発連鎖）
③学習者個人の思考の連続性
・コミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程
（認識・同化・拡張・分化・再構成）

最後に研修の主旨が指導能力の向上ということですから，まとめさせていただくと，やたらめったら生徒に発言させる，生徒に前に出て問題を解かせる，それをやる必要はそれほどないと思うんですね，高校の先生方にとっては。もしコミュニケーションが起きたとすると，IRFと言いますけど，教師が何か働きかけて，Initiationですね，それに子どもがReactionして，それを先生がもう一回子どもに「よかった，できたね」とFeedbackするという，こういうIとRとFというつながりが多いのですけど，また別の人を指して，こうやりとりをやるんですね。でもそうではなくて，できればA君とB君とC君というふうに活動がつながっていく，という意味で，教師が介在しないところで発言がいくつかつながるような場面を作っていくんですね。それが「①活動の連続性」ですね。

それともう一つは，今日一番のメインなんですけど，「話している人との間で思考がうまくつながっているんだろうか。なんか話はいろいろ言っているけど，お互いの考え方をうまく捉えているのだろうか」これが「②学習者間の思考の連続性」ですね。

それから３番目は，学習者個々の中で思考が連続しているか（「③学習者個人の思考の連続性」），ということですね。人からの刺激を受けて，自分が昔知っていること，あるいは今考えていること，これらがうまくつながって流れている。途切れることもあるわけです。人の話を一方的に受け入れる場合は，前後なく途切れている状態なのです。この３つの視点を持って今この場でどのようなコミュニケーションが起きているのかということを見取る，見通しの能力を持って欲しいわけです。

(2) そのコミュニケーションの下で，どのような学習が展開されているのか見極める能力を高める

（2）そのコミュニケーションの下で、どのような学習が展開されているのかを見極める能力を高める。

①学習の起源の多様性
②知識の再構成←数学的な考え方・見方
③新しいアイデアの創発

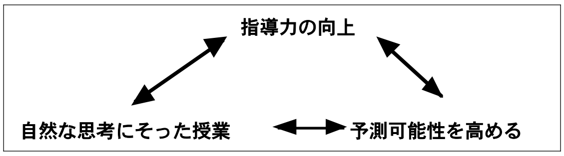
そして最後に結論ですけども，そのコミュニケーションの下でどんな学習が起きているのか，見極める能力を高めることが我々の仕事であって，コミュニケーションの質を高めることが我々の仕事ではありません。コミュニケーションを見ることによって，どんな学習が起きているのか，その学習というのは，集団でやっても最後は個々の学習なんです。要するに，あなたの頭の中で，この二時間何が起きていますか，ということですね。この二時間を聞いたことによって，明日からどう変わるかということですよね。だからそのために，今日はあまり学習の多様性という話はありませんでしたけど，まず「①学習の起源の多様性」です。これは，誰かが間違った答えをした瞬間にそれをみんなで笑った，自分もみんなと同じことで笑ったということは，その笑いの意味を理解しているということです。だから，今日はこちらが設定したとおりに進みましたので，意見というのがそれほど分散していませんけど，学習をもっと自由にやろうとすると，こちらが監督していないで「はいグループ学習してごらん」というのはまさに“学習の起源の多様性”の表出する瞬間ですね。こちらが把握していない学習があっちこっちで起こるかもしれない。それが多ければ多いほど，数学の授業というのは豊かになるのです。

それから２番目は，「②知識の再構成」なんですね。学習というのは，古い学習から新しい学習を構成していくことですから，まさに体系化，再構造化というのが起きるんです。

それから３番目は，まだ研究途上でなかなかうまく説明できませんけども，「③新しいアイデアの創発」です。コミュニケーションを通して三人寄れば文殊の知恵というのがありますよね。なんか三人集まるといい知恵が浮かんでく

る。「あれはどうしてなのか」ということを先生方個々の問題として考えてください。そうしないとグループ学習というのは意味を持たないですね。「はい，グループ学習してごらん」というときに，そこでどんな展開が起きると，我々が期待しているような話し合いが起こるのか。それは，一つは最終的には“創発”ということになるんです。“創発”というのは大事なキーワードですけど，足し算をしただけでは出てこないものですね。例えば，水素と酸素を足しますと水ができますね。水素も酸素も火を消すという性質はないのに，出てきた水は火を消すという性質を持ちますよね。これは明らかにその二つが持っていたものの足し算では出てこないものが出てきているということですよね。こういうのを創発現象というのですけど，皆さんにも“アイデアの創発”ということを考えて頂きたい。

おわりに



それで，最初に申し上げましたように，今日のテーマとしては，我々が，指導力というものを向上させようとしたときに，それは“自然な思考にそった授業”というものを前提にしないと，指導力というものは成り立たないわけですよね。“自然な思考”にそうと，“予測可能性”が高まりますよ。“予測可能性”が高まればどういう指導がいいのかという意思決定に反映されますので，それははたから言えば“指導力が向上した”と言えるんですね。ですから，この3つの関係というのを，うまい具合に結びつけていただくといいんじゃないかな，というのが今日の話です。

高校の先生方に有意義だったかどうかは分かりませんけど，何かの刺激になっていただければと思います。どうも二時間ありがとうございました。指導力を向上して，鳥取県の高校教育が益々発展することをお祈りします。どうもありがとうございました。

講演日：2002年8月29日(木)
会　場：鳥取県教育センター第2研修室
記録者：梅實幸子，松岡由布子
(えもり・ひでよ，宇都宮大学教育学部)