

【鳥取大学数学教育研究，第4号，2002】

算数・数学的活動の展開とその追究

姫田 恭江・石谷健二郎・神波 徹・徳高雄一郎

鳥取大学教育地域科学部附属小・中学校

・算数・数学科の位置づけと研究課題

1)算数・数学科の役割

算数・数学科はこれからの社会をよりよく生きていくために必要とされる資質や能力，すなわち，

- ・論理的な思考力や表現力
- ・的確な判断力や創造力
- ・自ら課題を見つけ，自ら学び，自ら問題を解決していく力

を育成する場として期待されている。また，算数・数学を学習することを通して，

- ・事象を数理的に考察することや処理することのよさを知る
- ・実生活における様々な事象との関連を思考する

ことが大切であると考え。これらの資質や能力は「数学的な見方・考え方」と総称することができるが，文言から明らかなように，数学の見方・考え方は，「生きて働く」力や「よりよく生きる」力の一面として高められ，自らの生き方を見つめるきっかけになるものであるということが出来る。

2)算数・数学的活動と教育課程

算数・数学の学習の中で，数学的な見方・考え方を育てることは，これまでも算数・数学科の目標でありつづけ，私たちはそのための学習内容や指導方法を工夫してきた。しかし，数学的な見方・考え方は文字通り「見方」「考え方」であって，本来目に見えないもの，すなわち観察不可能なものである。したがって，児童生徒の数学の見方・考え方の達成状況を評価しようとするとき，その根拠として観察可能なものを求めなければならないことになる。その拠り所として，私たちは「算数・数学的活動」を位置づけたいと考えた。

一方，従来の算数・数学カリキュラムの構成は，数学の内容を並べ替えることが中心の，「学習内容（単元）の配列」であった。しかし，算数・数学的活動を学習の中で展開しようとするとき，私たちは児童生徒の発達段階に応じた「学習過程（プロセス）の配列」を考慮することも必要と考えた。なぜなら，多くの場合，算数・数学的活動はあくまでも数学の見方・考え方を評価するための手段と考えられるが，小学校低学年の児童にとっては，算数的活動そのものを学習の目的とする場合があるといった，児童生徒の発達段階による差異が考えられるからである。

このように，算数・数学的活動を日頃の授業構成や単元構成の軸とすることによって，児童生徒の主体的な学びに伝える一方，カリキュラムを考えていく際にも，従来の学習内容（単元）の配列に，新たに学習過程（プロセス）の配列を加味することで，カリキュラム構成に新しい可能性が見出されるのではないかと考えたのである。

3)研究課題

そこで私たちは，「できる」「わかる」算数・数学教育から「みつける」「つくる」「つかう」算数・数学教育への転換が必要である（杉山，1999）という考え方に注目し，算数・数学的活動をキーワードに，小学校，中学校の連携を図りながら，次のような研究課題に基づいて実践研究に取り組んできた。

【研究課題】

児童生徒の発達区分を考慮しながら、「算数・数学的活動」を軸にした算数・数学カリキュラムをどのように構成すればよいか。

ところで、私たちは算数・数学的活動を軸としてカリキュラムを構成していこうとしているのであるが、そのための理論的裏づけや教科カリキュラム構成の経験をもたない。そのような状況のもとでは、一つひとつの授業実践をもとにそれぞれの発達段階に合致した算数・数学的活動のあるべき姿を追求していくというケーススタディを積み重ねていくことが、研究を進めていく方法として最も適切であると判断した。

研究のスタートした平成11年度は、

- ・算数・数学的活動とは何か
- ・児童生徒がどのような算数・数学的活動を展開することを、教師は期待するのか
- ・算数・数学的活動を仕組むため、教師にはどのような準備が必要なのか
- ・算数・数学的活動をどのように評価していけばいいのか

といった具体的課題を見出した。

平成12年度は、それらを「算数・数学的活動の位置づけと教師の支援」と「算数・数学的活動の展開とその評価」の2つに焦点化し、小・中学校のいろいろな学年の実践をもとに検討していった。その結果、

- ・授業において期待される算数・数学的活動を展開していく場として、「みつける」「つくる」「つかう」場面が位置づけられること
- ・本時のねらいを評価するために、期待された算数・数学的活動と本時のねらいの関連づけが必要であり、なおかつ算数・数学的活動相互の関連づけが不可欠であること

ということが明らかになった。

本年度は、算数・数学的活動によって何を具体的に評価しようとしているのか、すなわち、児童生徒に育てたい力の何を読みとろうとしているのかを明らかにするべく、「算数・数学的活動の価値づけ」に重点をおいて取り組んだ。

・授業実践を通した課題への取り組み

1) 「算数・数学的活動」とは何か 単元名の一部に数理探求のプロセスを用いる場合、《 》をつけることとする。

私たちが児童生徒に取り組みせたいと意図する算数・数学的活動は、前述しているように「数学的な見方・考え方の育成につながる活動」である。そのような算数・数学的活動とは、どのようなものなのか、具体的な授業、小学校第3学年「新しい数との《出会い》」及び中学校第1学年「文字式との《出会い》」を例に挙げながら述べてみたい。

- 3) で述べたが、これまでの授業実践を通して明らかになったことの1つは、授業において効果的な算数・数学的活動を展開していく場として「みつける」「つくる」「つかう」場面が位置づけられるということである。 - 1) で述べるが「みつける」「つくる」「つかう」場面は単元、カリキュラムのレベルにおいても同様のプロセスが考えられる。そのレベルでのプロセスは、次節に譲り、ここでは、1単位時間の学習の「みつける」「つくる」「つかう」それぞれの場面において「算数・数学的活動」とは何か考えてみたい。

「みつける」場面

- ア) 児童生徒が課題を発見する活動
- イ) 児童生徒が問題解決に向けて推測する活動

ア) は児童生徒が設定された問題について、疑問をもって課題を見つける活動である。

日常生活や提示された問題場面から、事象の中の関係を探り、疑問に思うことを既習事項をもとに観察したり整理したりして、本時考えていく課題は何であるのか焦点化していく活動である。

例えば、小学校第3学年「新しい数との《出会い》」では、提示された問題場面で、立式して考えていくと、あまり「1」が出てくる。ここで「あまりが出ないように」という問題から、「あまりの1も同じように分ける方法やその表し方を考える」という課題を話し合いの中で焦点化していくのである。

また、複雑な現実事象について問題を明らかにするため、諸条件を簡潔に表現し(抽象化)原則に従って、

<小3>問題場面の提示

折り紙をあまりがでないように同じように分けます。
・ 1 1 枚の折り紙を 2 人で分ける ・ 1 1 枚の折り紙を 5 人で分ける
・ 1 3 枚の折り紙を 3 人で分ける ・ 1 3 枚の折り紙を 4 人で分ける

<小3>課題の設定

それぞれの場合について立式する。
・ $11 \div 2 = 5 \dots 1$ ・ $11 \div 5 = 2 \dots 1$
・ $13 \div 3 = 4 \dots 1$ ・ $13 \div 4 = 3 \dots 1$
「あまりの1枚を 人で分ける方法やその表し方を考えよう。」

数理的処理を施し考察すべき課題とする活動も考えられる。

中学校第1学年「文字の式との《出会い》」では、陸上大会で、400メートルトラックを走る場合、レーンごとにスタートの位置はどうなるのかという場面が提示される。生徒はトラックの周は、直線部分がどのレーンでも同じ長さであること、弧の部分、つまり円周を考えていけばいいこと等を話し合いの中で整理していく。そして、半径と円周の関係を考察していくという課題を設定するのである。

<中1>問題場面の提示

ビデオを見て、陸上競技場のトラックは外側のコースほど周が長くなっている様子を確認する。

<中1>問題場面の追究

円の半径が大きくなるにつれ、円周がどのように変わっていくかということに問題意識を持つ。円周が長くなった分だけ、前に出ること、また、その長さはレーンによるのかどうか話し合い、問題場面を整理する。

<中1>課題の設定

円の半径が一定の長さで大きくなると円周はどのように変化していくのだろうか。

イ) は問題解決に向けて「たぶん～に違いない」「こうすれば～になる」と推測する活動である。

自力解決に向かう場合、解決の見通しを持つ活動である。見通しを持って結果を予測したり解決するための工夫をしたりする。「新しい数との《出会い》」(小3)では、既習の数(整数)では、表現できないことがから、新しい数・表現の仕方を作り出す必要性を見出す。そして、数直線をかきそれを等分していくとできるのではないかと、1枚の折り紙を人数分に折っていくと求められるのではないかと、絵に描いて等分してみると考えることができるかな、整数の時のように位取りが関係あるかもしれない等考えるのである。この場合、既習事項を想起し、それらを選択し構成していく活動が、個々の内的活動として行われているのである。

「つくる」場面

- ウ) 推測をもとに推論を構成し，展開する活動
- エ) 操作，図，式などの新たな意味づけをする活動

「みつける」場面で問題解決に向けて，推測したことをもとに，根拠を明確にしながら推論を構成し，操作，図，式などを用いながら，それらに新たな意味づけをすることによって数学的概念・原理・法則を作り出す活動である。 児童生徒が自力解決をしたりそれをもとにした集団での話し合いの場面での活動である。

「新しい数との《出会い》」(小3)の場合，折り紙・テープ・線分図などを実際に折ったりかいたりする活動を通して，単位量を等分割した量を新たに見出していくのである。そして，その結果を見ながら，2つに分けた1つ分であること，または，1を10に分けた5つ分であると表すのである。そして，分け方に着目して考え方を議論する中で，「整数」ではない新しい数のあることを共通の概念として見出していくのである。そして，その作り方によって表し方が違うことも気づき，「分数」「小数」についての考え方・表し方を共有していくのである。

- <小3>自力解決 -----
- 例) 2人で同じように分ける
- ・ 折り紙・テープを2等分する。
 - ・ 線分図で表す
 - ・ 数直線をつかって0と1の間を考える。
 - ・ 1を10等分してその半分とする。
 - ・ 位取り板を利用して考える。
- <小3>話し合い -----
- 分け方に着目して，あまりの1を分ける方法・表現の仕方を考える。
- <分数につながる分け方>
- ・ 折り紙やテープを等分に折ったり線分図で等分に分けたりしてその1つ分として表す。
- <小数につながる分け方>
- ・ 数直線で表す。 ・ 10等分して表す。

「文字式との《出会い》」(中1)の場合では，具体的な数値を用いて1レーンの周を計算し，そして，2レーンの周とさらに計算していけば，課題解決できるのではないかという推測し，共通項を見つけることで何か一般的な表現，言葉や文字を使って表現することができるのではないか，結果を推論できるのではないかと実際に言葉や記号，文字を使って式に表し計算したり説明をしたりする活動である。

「つかう」場面

- オ) 数学的処理のよさや原理・法則を活用する活動
- カ) 問題場면을広げ条件を変えていく活動

児童生徒が学んだことを活用し，問題場면을広げ問題を抽象化したり一般化したりする活動である。 さらに，具体的な生活場面に広げ問題を見つけ活用しようとする活動である。

「新しい数との《出会い》」(小3)では，いろいろな形・大きさの図形を折って等分していく活動で，それぞれもとなる単位量の形や大きさが違っていても，等分割したも

- <小3>発展課題 -----
- 分数・小数の分け方に着目し，いろいろな形，いろいろな大きさの形で，
 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, 0.5, 0.2$ などをつくる。

のは数の大きさとしては同じであることも見つけ出すのである。そして、その考えを生かして、学習した数だけでなく、他の分数を作り出す発展的な活動へとつながる。このような活動を通して、分数・小数の量的イメージをもち、小数・分数の考え方、表し方を見出していくことにつながるのである。それが、整数・小数・分数について親しみをもち、それらについて豊かな感覚をもつ基礎となり今後の学習の課題を生んでいくのである。さらに、分数・小数を同時に扱うことにより、小数・分数を比較し、新たな関係を見つげ出したり規則性を見出したりする。そのことが論理的な考えを進め、数学的な見方考え方を深めることになるのである。

<p>「文字式との《出会い》」(中1) では、トラックの大きさを変えたり天体などのさまざまな円や球など場面を拡げ、条件を変えて表す活動を通して、円の半径を一定の長さだけ大きくしたときの円周の増加は、もとの円の半径によらないことを確か</p>	<p style="text-align: center;">--- <中1>発展課題 -----</p> <ul style="list-style-type: none"> ・トラックの大きさを変えたり、天体などのさまざまな円や球について文字の式で表わしたりする。 ・さまざまな図形の長さ、面積、体積の公式を文字式で表す。 <p>文字式を用いられる場面が既習事項の随所にあることを見つげ出し、それらを文字式で表す。</p>
--	---

め、文字式の有用性を実感するのである。さらに既習事項の随所に文字式が利用でき、それらは、文字式で表すことによって、より簡潔に一般的に表すよさを実感していくのである。

このような活動は、探究の対象が変わると、具体的な活動は、それに伴い変わるものである。しかし、その活動の意図しているものは、それぞれの場面において共通なものである。児童生徒の行う様相から、操作的・作業的等、活動を細かく分類するのではなく、数学的な見方・考え方を育成する手段として算数・数学的活動を考え、価値づけをしていきたいと考えている。従って、本稿においては、算数的活動・数学的活動は、発達段階を通して質的に異なるものであることは認めるものの、一般に言われているような算数的活動と数学的活動の区別を問題視しているのではない。展開される場面に共通性を見出し、9年間を通して、算数・数学的活動を軸として学習を進めたいと考えている。

2)算数・数学的活動と「本時のねらい」及び「学習場面」の関連

これまでの授業実践を通して明らかになったことの2つ目として、本時のねらいを評価するために、期待された算数・数学的活動と本時のねらいの関連づけが必要であり、なおかつ算数・数学的活動相互の関連づけが不可欠であることがあげられる。昨年度の研究発表会で公開した中学校第2学年の「論証との《出会い》」(現行「図形の調べ方」)の実践を例に述べてみたい。

「本時のねらい」と「本時の期待される数学的活動」は次の通りである。

<p>本時のねらい</p> <p>星形n角形の頂角の総和についての関係を、様々な操作を通して推測し、それを論証することができる。</p> <p>A：生徒自らが様々な課題を見つけようと取り組み、探究すべき課題を見い出すことができる。</p> <p>B：実際に星形n角形を作図し、計測や操作を通して、星形n角形の頂角の総和についての関係を見つけることができる。</p> <p>C：星形n角形の頂角の総和について関係を推測し、その理由を論証することができる。</p>
--

本時の期待される数学的活動

グラフ電卓で図形学習ソフト「カブリ」を使用

星型 n 角形の頂角の総和についての関係を調べる。

ア：星型 n 角形を作図する。・・・(A , B , C)

イ：星型 n 角形の頂角を計測する。・・・(A , B , C)

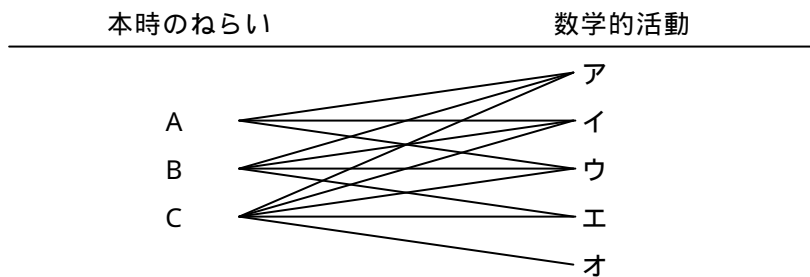
ウ：星型 n 角形の図に操作を施す。・・・(A , B , C)

エ：星型 n 角形の頂角の総和についての関係を推測する。・・・(B , C)

オ：星型 n 角形の頂角の総和についての関係を論証する。・・・(C)

本時においては、本時目標と3つの下位目標を設定した。それぞれの数学的活動との関連は次の通りである。

本時のねらいと数学的活動

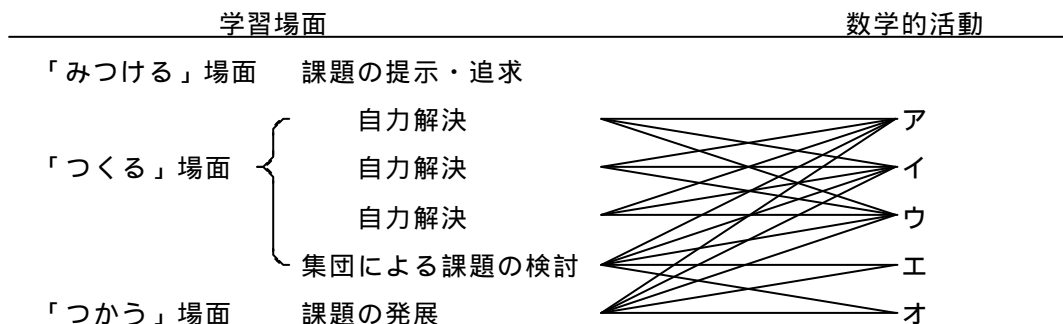


ねらいと数学的活動は1対1に対応するものとは限らない。むしろそれは例外的であろう。また、下位目標と数学的活動との関連では、一般的に到達が困難なものほど多くの数学的活動がからんでくるといえる。したがってそれらが効果的に展開される活動の場面を設定していかなければならないことがいえる。

次に、本時の展開における学習場面と「数学的活動」の関連について考えていきたい。

課題を発見する数学的活動は、自力解決を可能にするために欠くことのできないものであるから、位置づけられる活動場面は「課題の提示・追求」の場面に限定される。「自力解決」を経て「集団による課題の検討」に移行する場面では、課題を整理し、推論する（数学的活動エ）とともに、課題の発展の方向性を見出したり、推論したことを論証する（数学的活動オ）ような数学的活動を位置づけていかなければならない。

学習場面と数学的活動



以下，本時の展開を簡単に示す。

本時の展開



：期待される数学的活動

：予想される生徒の反応

課題の提示

仮称「星形n角形」の頂角の総和についてどんな関係があるのでしょうか？

仮称「星形n角形」の名前をつける

五角星形

星形(5)

五星形

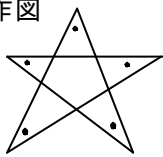
課題の追究(グラフ電卓で図形学習ソフト「カブリ」を使用)

自力解決
星型五角形を作図し，
頂角の総和を計測する。

自力解決
星形六角形を作図し，
頂角の総和を計測する。

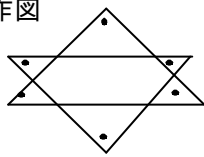
自力解決
星形七角形を作図し，
頂角の総和を計測する。

作図



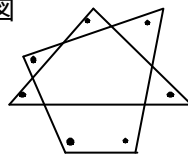
180°

作図

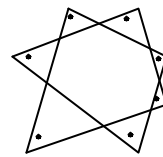


360°

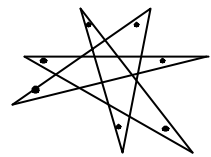
作図



540°



540°



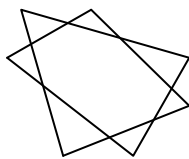
180°

新たな課題の発見と推測

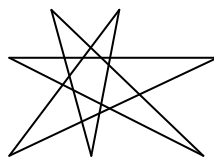
「星型n角形」の作図の方法について

- ・頂点から「一筆書き」ができるものとできないものの違い
- ・星型七角形は2通り以上書ける

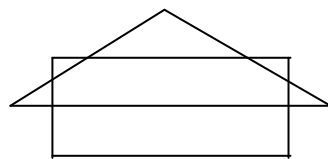
「1つとばし」



「2つとばし」



三角形と四角形を組み合わせる



星型n角形の頂角の総和の関係について

- ・nが1つ増えるごとに180度ずつ増える
星型五角形(1つとばし): 180(度)
星型六角形(1つとばし): 360(度)
星型七角形(1つとばし): 540(度) 星型七角形(2つとばし): 180(度)
星型八角形(1つとばし): 720(度) 星型八角形(2つとばし): 360(度)
- ・「1つとばし」の書き方と「2つとばし」の書き方とでは頂角の総和は違う。

なぜ，星型五角形は180度になるのだろうか？

カブリ上の星形n角形の図に操作を施し，頂角の総和の値と同じ多角形を作図する。

集団による課題の検討

星型五，六，七角形の頂角の総和の関係について話し合う。

星型五角形（1つとばし）：180（度）

星型六角形（1つとばし）：360（度）

星型七角形（1つとばし）：540（度）

：

星型 n 角形（1つとばし）：180（ $n - 4$ ）（度）

星型七角形（2つとばし）が180度になる場合についてどう扱えばよいか

課題の発展（次時）

星形五角形の頂角の総和が180度になることの動的論証をする。

「カブリ」画面上で操作を施し，星形 n 角形の頂角の総和の値と等しい内角の和になる多角形の作図をする。

星形 n 角形の頂角の総和の関係式を考える。

1つとばしの場合 $180(n - 4)$ （度）

2つとばしの場合 $180(n - 6)$ （度）

星形 n 角形（ m とばし）の頂角の総和の関係式を考える。

$180(n - 2) - 360m$ （度）

3)算数・数学的活動の価値づけ

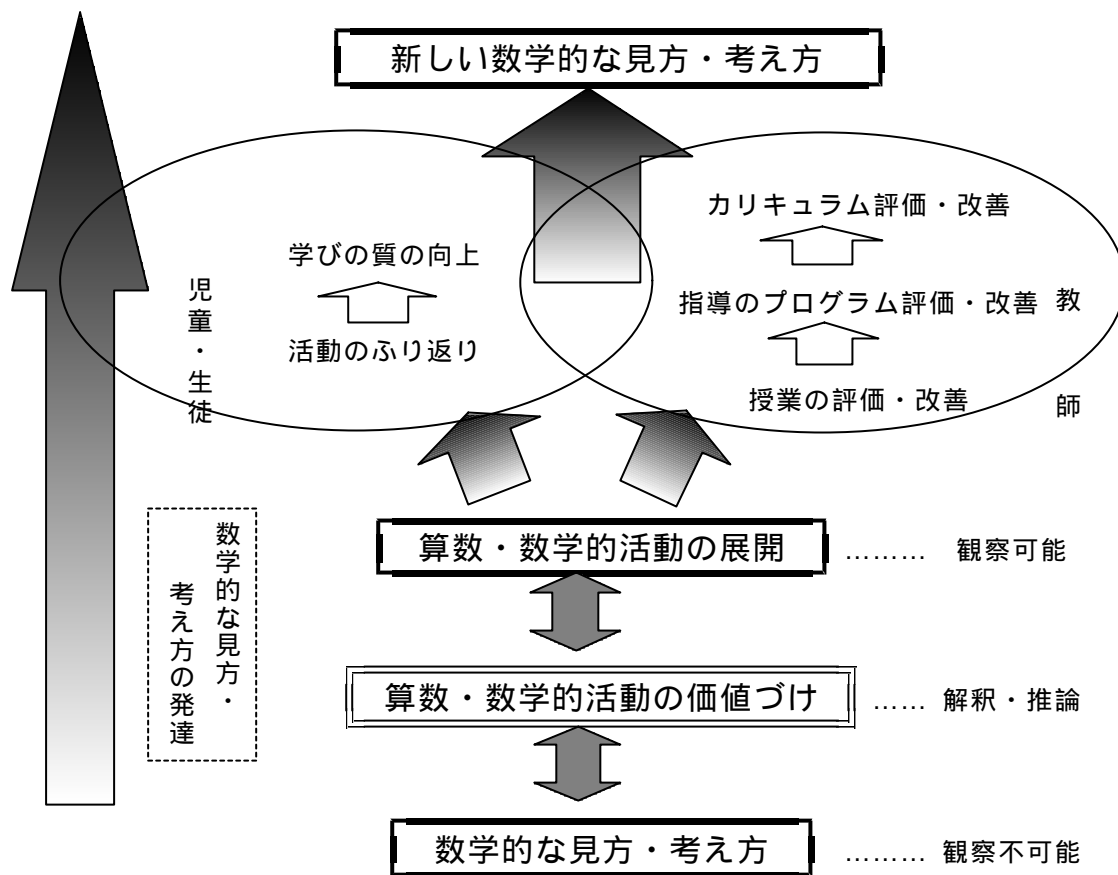
算数・数学教育の目標は，数学的な見方・考え方の育成を図ることである。観察不可能な数学的な見方・考え方の達成を評価するために，私たちは観察可能な算数・数学的活動に着目してきた。

児童生徒が数学的な見方・考え方を身につけるために，児童生徒に取り組みせたい，教師の意図する算数・数学的活動を「みつける」「つくる」「つかう」という3つの場面で明らかにし，それらを有機的に関連づけることで単元構成の見直しを図ってきた。

評価は，目的や目標と対をなすもの，セットとしてとらえるべきものである。そこで私たちは，教師の意図する算数・数学的活動の達成そのものが評価の観点になり，児童生徒の数学的な見方・考え方の達成を評価する拠り所になると考えた。

しかし，算数・数学的活動を通しての評価はそれだけにとどまるものではない。児童生徒の表出した活動を観察することにより，個々の児童生徒の思考を推論（評価）し，教師が支援を工夫したり指導の修正を行ったりすることが可能となる。意図する活動が行われているか，そして，それが推測を展開したり，推論を構成したりする活動，意味づけをする活動などに適したものであったか等，教師自身の指導プログラムについての自己評価の拠り所となる。

こう考えると，算数・数学的活動の展開は，むしろ教師の側に授業の改善の意識が求められていることがわかる。つまり，表出した児童生徒の活動は，今までの学習における操作活動，思考等と変わらないように思える場面も多いかもしい。しかし，それを意図する教師側の活動構成，見方等によって児童生徒が行う活動から導かれる数学的な見方・考え方等が変わってくるのである。



それでは、どのような活動が、どのような数学的見方・考え方の育成につながるのでしょうか。児童生徒の活動の様相から、どのような数学的見方・考え方の達成が解釈できるのであるでしょうか。本年度はこの点についての検討を試みた。教師が児童生徒に取り組みせたいと意図している活動は、児童生徒にどのような数学的な見方・考え方を育成しようとしているものであるのか、また、児童生徒の活動の様相から、どのような数学的な見方・考え方の伸長を見取ることができるのか、これらの点を明らかにすることは、児童生徒の数学的な見方・考え方の達成状況を評価していく拠り所となるばかりでなく、学習指導のプログラムの評価、カリキュラムの評価の拠り所ともなっていくのである。私たちは、このような児童生徒の活動の様相の解釈を「算数・数学的活動の価値づけ」としてとらえた。言い換えれば、観察不可能な数学的な見方・考え方の達成を評価するにあたって、観察可能な算数・数学的活動を証拠・手がかりとして、これについての妥当な推論あるいは命題を作り上げるプロセスであるということができよう。以下、具体的な例を挙げて述べてみたい。

小学校第3学年の「図形の《構成と操作》(3)」において、ジオボード上に構成した三角形の分類についての授業では、授業のねらいと算数的活動及び価値づけを次のように考えた。

本時のねらい

・ 格子点方眼紙，正三角形形状の編み目のドット点用紙に，正三角形，二等辺三角形，直角三角形，不等辺三角形をそれぞれの定義・性質等に着目して構成する。

・ 構成した三角形が，それぞれの三角形になるのか，理由を説明する。

・ 順序よく考えて，それぞれの三角形ができる場合をできるだけ多く考える。

本時の算数的活動

ジオボード上に，辺の長さ等に着目しながら，それぞれの三角形を構成する。

格子点方眼紙の直角に着目して，直角三角形を構成する。

ドット点の数，点の間の数に着目して辺の長さを等しくし，いろいろな二等辺三角形・正三角形を構成する。

底辺の長さを一定にし，その中線上にある頂点の位置を移動するなど，順序よく考えて，それぞれの三角形を出来るだけ多く（すべての場合）構成する。

3辺の長さをすべて異なるようにして不等辺三角形を構成する。

構成した三角形が，直角三角形・二等辺三角形・正三角形・不等辺三角形になっている理由を説明する。

数学的な見方・考え方の達成の評価（算数的活動の価値づけ）

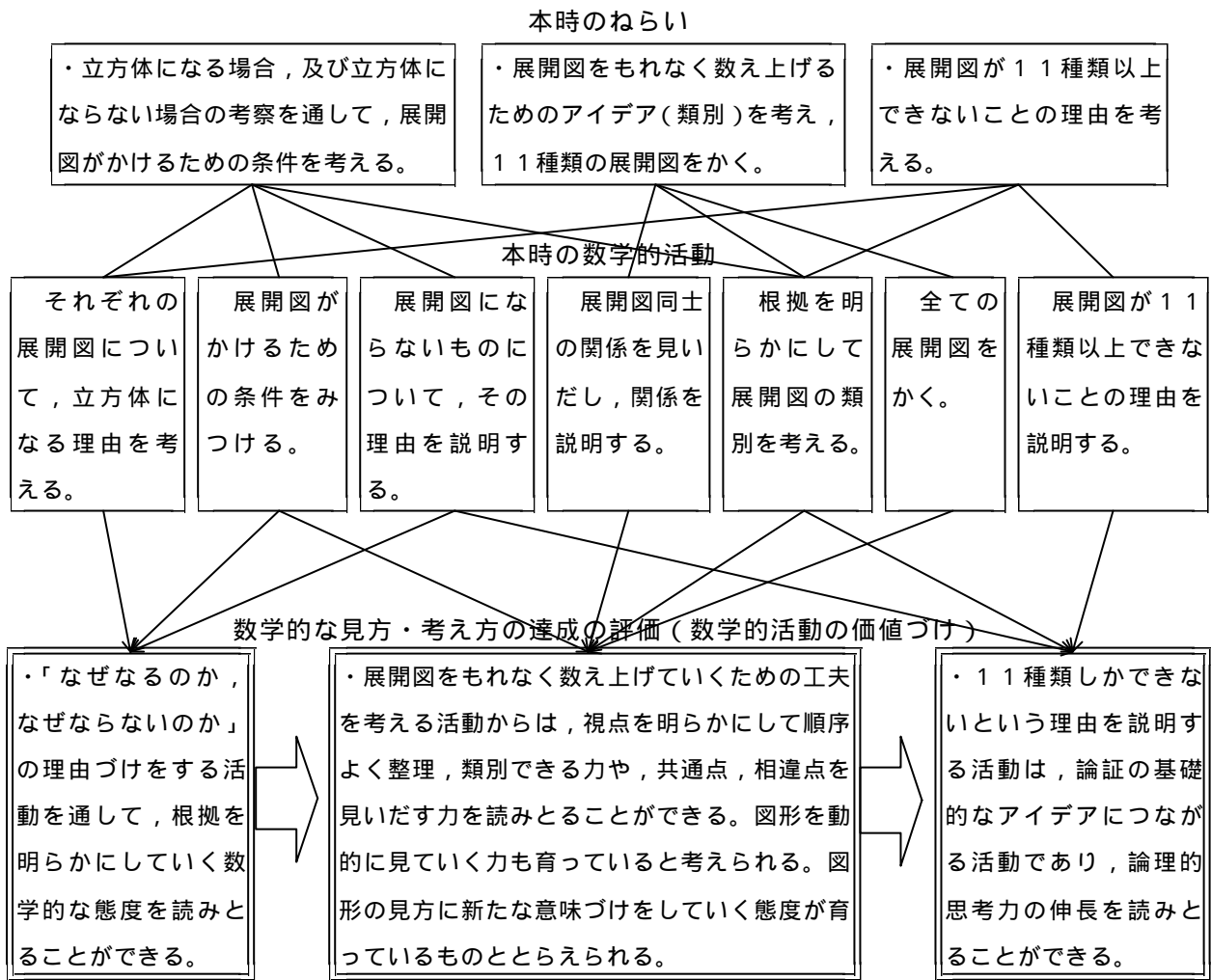
・ ドット点を利用して三角形を構成する活動を通して，既習事項を活用し図形に対する見方・考え方の確かさを見ることが出来る。また，平面図形を抽象的な見方・考え方でとらえることや，図形を的確に表現する活動によりよさに気づき，豊かに表現しようとする態度や力を見ることが出来る。

・ 構成した三角形が，それぞれの三角形になる訳を説明する活動から，図形を見る観点の広がりを観察する事ができる。また，論理的な思考力の芽生えを見ることが出来る。

・ 底辺を一定にして，頂点を移動したり，辺の長さを順に変えて考えていく活動を通して，図形の動的な見方がわかるとともに，論理的な思考力の基礎が養われていることを見ることが出来る。

本時のねらいを達成するための算数的活動を以上のように位置づけた。ねらいと算数的活動は一対一に対応するものでなく，一般にねらいが複雑であったり，達成に困難が伴うものについては，いくつかの算数的活動が期待される。そして，児童の算数的活動の様相から解釈される児童の数学的な見方・考え方の達成の状況を以上のように考えた。算数的活動の価値づけである。

もう1例は，中学校第1学年の単元「図形の《構成と操作》」において，立方体の展開図が11種類あり，11種類に限ることを明らかにしていく授業である。授業のねらいと，数学的活動，そして数学的活動の価値づけを次のように考えた。



児童生徒の算数・数学的活動の様相は、私たち教師にとって、児童生徒の数学的な見方・考え方の達成状況を見取る根拠となるものである。観察可能な活動の様相から、観察不可能な数学的な見方・考え方の達成を解釈(推論)していくことが、「算数・数学的活動の価値づけ」であり、このことは、児童生徒の学びの質の向上に資するものである。さらに、教師の意図する算数・数学的活動が展開できたかどうかを振り返ることにより、教師の授業の評価・改善に、指導のプログラム、カリキュラムの評価・改善に結びついていくものと考えられる。

算数・数学カリキュラムの構成

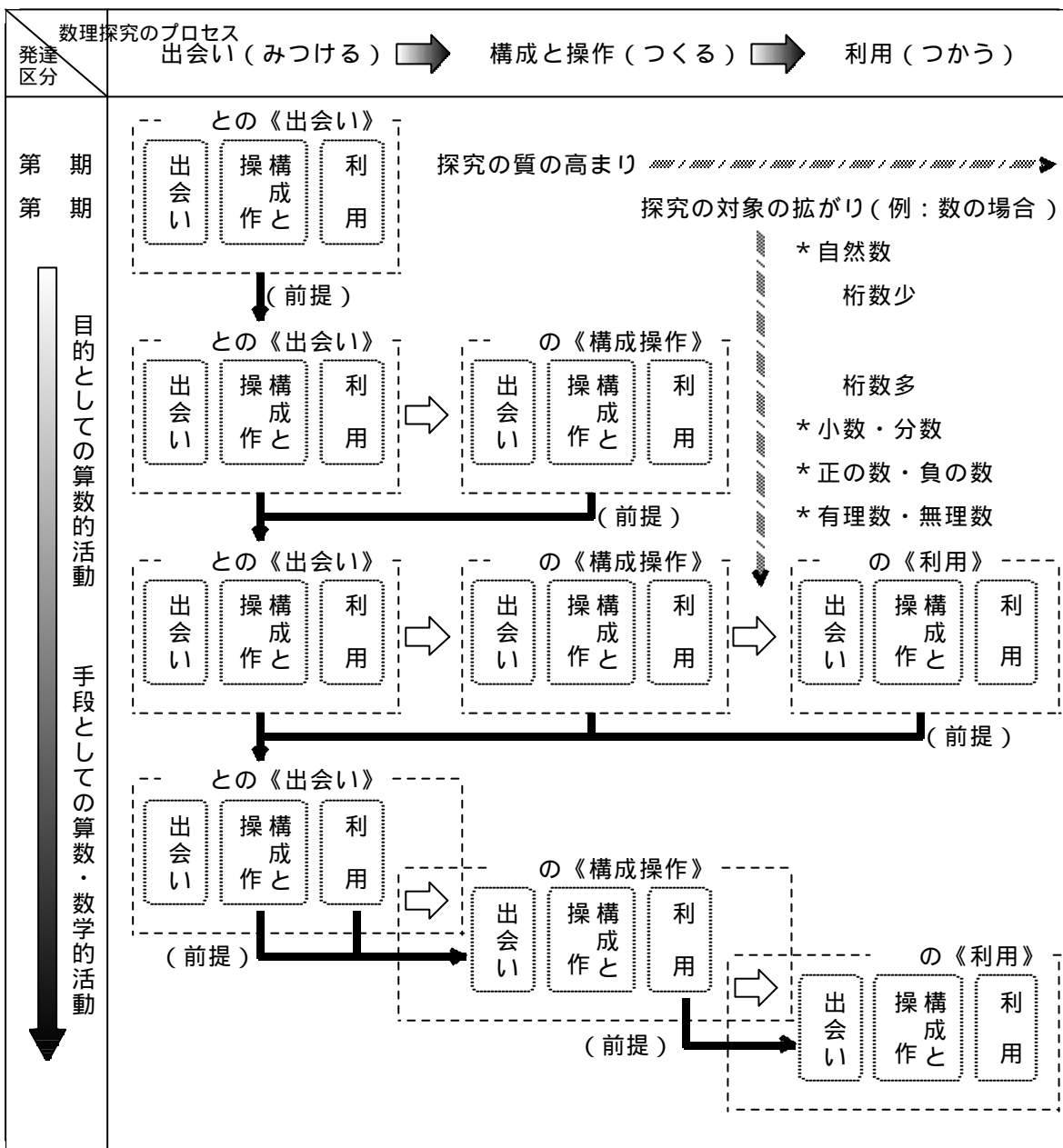
1) 構成の基本的な考え方

ア 数理探究のプロセス

以上に述べたような算数・数学的活動を軸として、それらの活動どうしのつながりと発達段階を考慮しつつ、カリキュラムの編成にあたった。ここでは、その基本的な考え方を示す。

まず、算数・数学的活動という視点で学習内容をとらえていくとき、数・式、図形といった探究の対象に関わらず、次のような3つの共通した数理探究のプロセスがあると考えた。すなわち、「出会い」「構成と操作」「利用」である。このプロセスは発達段階に沿って、探究の対象を拡げながら、らせん状に質を高めていくものと考えられる。そこで、これらを単元およびカリキュラムのレベルにおける「みつける」「つくる」「つかう」と呼ぶべき段階であると捉え、その視点から、単元構成とカリキュラム編成を試みていったのである。

「数理探究のプロセス」の深化のモデル



イ 単元構成

中学校第1学年で学習する「文字式との《出会い》」(現行「文字の式」)を例に、単元構成について考えてみる。この単元で児童生徒に期待される数学的活動は、次のようなものである。

- 「出会い」の相(主として新しい数学的事実を発見する算数・数学的活動を期待する相)
 - ・ことばや図等を用いて問題の状況を説明し、ことばの式により状況を整理していく活動
 - ・文字を使って条件設定し、立式をしていく活動
 - ・文字式が計算の操作であると同時に、その結果をも表していることに気づく活動
- 「構成と操作」の相(主として新しい数学的事実を知識や概念等へと構成していく算数・数学的活動を期待する相)
 - ・ \times と \div の省略など、あたらしい約束による文字式の表現に習熟していく活動
 - ・抽象化された文字式の現実世界への適用として、代入により式の値を求める活動

- ・計算法則の意味や現実世界との合致を確認しながら，しだいに機械的，形式的な式の簡約に習熟していく活動
「利用」の相（主として構成された知識や概念等を具体的な場面に利用する算数・数学的活動を期待する相）
- ・文字を使った立式，代入，計算を生かして，既習のさまざまな学習内容や新たな問題場面を文字式で表現，処理していく活動，すなわち，文字式を利用できるという認識を形成していく活動

現行のカリキュラムでは通常，「関係を表す式」を本単元の最後に学習するが，その内容は，ことば等による問題の状況整理，文字を使った条件設定，すなわち立式が中心であり，本来ならば「出会い」の相に位置づけられるべき学習内容である。しかし，等式を扱うという点で他の学習内容とはやや異質であり，「利用」の相の「文字を使った立式，代入，計算を生かして，既習のさまざまな学習内容や新たな問題場面を文字式で表現，処理していく活動，すなわち，文字式を利用できるという認識を形成していく活動」の延長線上に位置づけた上で，次の単元「文字式の《構成と操作》」（現行「方程式」）の「出会い」の相で学習するのがふさわしいと考えられる。このように，それぞれの教材の中で，児童生徒に期待される算数・数学的活動を有機的に組み合わせることで，単元構成を見直していくことが可能である。

別の事例として，中学校第3学年における新しい単元「新しい数との《出会い》」を取り上げてみたい。中学校において数の拡張が図られるのは，現行のカリキュラムでは，第1学年における「正の数・負の数」と第3学年の「平方根」であるが，そこで共通して学ばれるべきことは「数値化」「大小・相等関係」「四則演算」である。これらを学習する場面で，数直線という1つのモデルを用いることによって数学的活動を位置づけていく試みが考えられる。そのために，現行の「平方根」と「三平方の定理」の一部を，新しい単元「新しい数との《出会い》」として，次のように構成してみた。

「新しい数との《出会い》」の単元構成		
第1次	平方根とその近似値	（平方根との出会い）
第2次	根号を含んだ数の計算	（平方根の構成と操作）
第3次	有理数と無理数	}（平方根の利用）
第4次	三平方の定理	

平方根の学習において，その概念と根号を用いた数を導入するだけであれば，わざわざ三平方の定理と関連させて学習する必要はないかもしれない。しかし，平方根の数値化，大小・相等関係などの十分な概念形成を図らないままに四則演算のみを扱う，あるいは二次方程式・二次関数等の学習の基礎的な概念でありさえすればよいというものではない。また， 2 ， 5 が存在することは格子点方眼紙を用いることで確認できるが， 3 はどこに存在するのかという疑問も湧いてくる。数の拡張を学ぶ場面では数直線は欠かせないものであるが，三平方の定理を利用し，表記できるあらゆる数を自由自在に数直線上に作図してみることによって，視覚への訴えによる数概念の理解の深まりが期待できる。またそれによって今後の学習への意欲を高めることが期待される。このように，算数・数学的活動によって得られるであろう教育的価値を見越して単元構成を図ることは，大変意義深いことであると考えられる。

2) 単元構成からカリキュラム構成へ

以上に述べたように，児童生徒のそれぞれの発達段階において期待される算数・数学的活動を有機的に組み合わせることで単元構成を考えた。単元構成にあたっては，期待される算数・数学的活動の特質を「出会い」の相，「構成と操作」の相，「利用」の相として明らかにし，それらの有機的な関連づけを図った。

カリキュラムの構成にあたっては，これらの単元を，系統性を持ってそれぞれの発達区分の中に位置づけていくようにした。カリキュラム構成においても，単元構成のときと同様に，出会い，構成と操作，利用と呼ぶべき数理探求のプロセスがあると考えられる。《出会い》の単元，《構成と操作》の単元，《利用》の単元として，次のように考えた。

《出会い》の単元

- ・新しい数学的な見方・考え方にふれ，慣れ親しむ単元

《構成と操作》の単元

- ・新しい数学的な見方・考え方を，それぞれの対象について，論理的に体系化する単元

《利用》の単元

- ・体系化した数学的な見方・考え方をより広い対象へ利用する単元

例えば，小学校第1学年の「かずとすうじ」，中学校第1学年の「正の数・負の数」，中学校第3学年の「平方根」(現行の単元)について述べてみたい。これらの学習内容については，数理探究のプロセスが共通しており，期待される算数・数学的活動はその共通点が多い。活動のプロセスは数値化によって始まり，次いで大小関係や相等についての考察を経て演算や操作へ，さらにそれらを活用していくという流れである。「みつける」「つくる」「つかう」場面における算数・数学的活動には共通点が多い。発達段階による違いは，対象とする数の範囲の広がり，活動の展開の質的転換である。いずれの単元も，新しい数の世界と出会い，その考えにふれ，慣れ親しんでいく単元ととらえることができる。そこで私たちは，単元を「かずとの《であい》」「新しい数との《出会い》」「新しい数との《出会い》」のように名づけ，数理探究のプロセスの明確化を図った。

このように，算数・数学的活動の共通点に注目することからスタートし，単元の数理探求の相を系統的に関連づけることにより，従来のカリキュラムの見直しを図ってきた。

このような観点でカリキュラムを構成したが，いくつか具体例を挙げてみたい。例えば，小学校第1学年の数に関わる単元配置をを次のように考えた。

新しい単元の構成	従 来 の 単 元
かずとの《であい》	かずとすうじ(10までのかず),いくつといくつ,なんばんめ
かズの《こうせい・そうさ》(1)	ふえたりへったり,たしざん・ひきざん,
かズの《こうせい・そうさ》(2)	10をこえるかず,3つのかズのけいざん,
かズの《こうせい・そうさ》(3)	くりあがりのあるたしざん,くりさがりのあるひきざん
大きな数との《であい》	大きな数,大きな数の計算・数の利用,多い方少ない方
.....	

また、小学校第3学年のわり算に関わる単元の配置は、次のように考えた。

新しい単元の構成	従 来 の 単 元
わり算との《出会い》 わり算の《構成と操作》(1) わり算の《構成と操作》(2) わり算の《構成と操作》(3) 数の《操作》と《利用》(2) ……	わり算 あまりのあるわり算 わり算の筆算 わり算の筆算，何十でわる もとの数はいくつ，何倍でしょう

そして、わり算の概念を用いて1より小さい数を表現する算数的活動を展開することを意図して、新しい数との《出会い》(分数・小数)をわり算の《構成と操作》(1)と(2)の間に位置づけている。算数的活動が新しい算数的活動に有機的に結びつくように単元同士を配置したカリキュラムを考えている。上に述べた単元の名称は、9年間の学習の流れを大きくとらえたカリキュラムを組み上げていく根拠となる視点での名称である。《出会い》と位置づけている単元の中でも構成と操作、利用ととらえるべきプロセスがあり、また《利用》と位置づけている単元の中でも、出会い、構成と操作ととらえるべきプロセスがあると考えられる。

また、図形のとらえ方についても述べてみたい。図形について学んでいくとき、発達段階によらない共通の視点は、その図形の構成要素である。図形の対称性や図形の性質等に注目して展開するという視点で小中の算数・数学的活動は共通点が多い。発達段階における違いは、直観的、操作的な活動を中心とする活動と、論証というとらえ方で組み立てる活動の違いである。従って、このつながりを一層明らかにしていくために、「かたちとの《であい》」(現行小1「いろいろなかたち」)、「かたちの《こうせい・そうさ》」(現行小1「かたちづくり」)、「図形の《構成と操作》」(現行小2「三角形・四角形」)、「……」「論証との《出会い》」(現行中2「図形の調べ方」)、「論証の《構成と操作》」(現行中2「図形と合同」)「……」のような単元の名称とした。中学校第2学年と第3学年の図形領域の単元構成については次のように考えている。

新しい単元の構成	従 来 の 単 元
論証との《出会い》 論証の《構成と操作》 ……	図形の調べ方 } 図形と合同 } 中学校第2学年 円 } 図形と相似 } 図形の計量 } 中学校第3学年 ……

三平方の定理の内容の一部については、前述のように無理数の学習と関連づけた数学的活動の展開を意図して「新しい数との《出会い》」の中で位置づけた。このように算数・数学的活動のより有機的な展開を意図して、指導内容の順序の変更を行うなど、従来のカリキュラムを見直してい

る。発達段階によらない算数・数学的活動の共通点と、発達段階による算数・数学的活動の違いを明らかにし、算数・数学的活動のつながりに一貫性を持たせたカリキュラムの作成に取り組んだ。別紙の年間指導計画をご参照いただきたい。

・カリキュラムの評価について

算数・数学的活動を軸に構成したカリキュラムを以下の項目について評価したい。

従来のカリキュラムとの違い

- ・従来のカリキュラムは算数・数学教育で学習する内容の系統性を重視した配列であるのに対して、本カリキュラムは、児童生徒の発達段階において期待される算数・数学的活動の系統性をもたせ配列したカリキュラムであること。
- ・「みつける」「つくる」「つかう」算数・数学教育を目指すために、「出会い」「構成と操作」「利用」という数理探究のプロセスを重視し、授業・単元・カリキュラムを構成したこと。

本カリキュラムのよさ

- ・算数・数学的活動を軸に構成することで算数・数学教育の目標である「数学的な見方・考え方の育成」の達成の評価が従来より確かになったこと。
- ・算数・数学的活動によって得られる教育的価値を見越して単元構成、カリキュラム構成できること。

本カリキュラムを実践する中で明らかになった検討課題

- ・「みつける」「つくる」「つかう」算数・数学教育を実践するために、数理探究のプロセスを展開できる、より質の高い教材を開発する必要があること。
- ・授業における「集団討議」の場面で、算数・数学的活動をどのように位置付けていくのか、また、それはどのような様相を呈することになるのか。
- ・本研究で開発された数理探究のプロセス「出会い」「構成と操作」「利用」は、本研究を通じて一定の妥当性を得られるものとする。しかしながら、これらのプロセスは研究の過程で帰納的に抽出されたものであるため、より理論的な精緻さが要請されること。

(参考文献)

- ・杉山吉茂，新しい算数・数学教育をめざして，東洋館出版，1999
- ・根本 博，数学的活動と反省的経験，東洋館出版，1999
- ・矢部敏昭，平成11年度科学研究費（基礎研究C2）第1年次研究報告書
研究題目「学校数学における児童・生徒の自己評価能力の形成に関する実証的研究」（課題番号11680186）
- ・溝口達也，鳥取大学数学教育研究（第2号），算数・数学的活動と評価，
鳥取大学数学教育学研究室，2000，PP33～41