卒業論文要約　【鳥取大学数学教育研究，第 4 号，2002】

数学的モデルの考察とその利用に関する研究

山本　伸也

指導教官：矢部敏昭

Ⅰ．研究の目的と方法

本研究は，数学的モデルの利用がどのくらい日常の事象と結びつきがあり，数学の問題に対してどのように有効に働いているかを調べることによって，自分自身で数学的モデルというものを位置付け，数学的モデルを利用した教材を開発していくことを目標とする。

その方法として，まず文献をもとに事象を数理的に構成することについて調べ，また，事例をもとに数学的モデルについて考察していく。そして，その数学的モデルを利用し解決するまでの一連の流れを検討することで，日常の事象との結びつきを考察し，図式化していく。さらに，実際に行われた数学的モデルを利用した授業を考察していくことで，数学的モデルを位置付けていき，最後に，ここまでの研究を生かした教材を開発していく。

Ⅱ．本論文の構成

（1 ページ 40 字×36 行，60 ページ）

Ⅲ．研究の概要

1．モデルについて

モデルの一般的な定義は「あるものMがあるものＰのモデルと言われるのは，それらの間のある種の同型性に基づいて，Ｐにおける事柄がMにおける事柄に反映されるとき，また，その逆も言えるときである。」である。ある原型Ｐに対して，そのモデルMをわれわれが引き合いに出したり，また考え出したりするのは，多くの場合，何らかの理由でＰをよりよく認識したり，別の形で表現したりしようとするときである。したがって，Ｐがはっきりと把握できるとき，あえて，それよりあいまいでとらえにくいものMに置き換え，表現したり考えたりする事は行う必要はない。つまり，図 1 に示したように，ある原型ＰのモデルMを考えるよさは，よく分からないＰを，少なくともそれよりも分かりやすいMに置き換え（翻訳），Mについて知られていることを具体的活動や思考によって操作（解決）し，それによって得られた結果をＰに置き換えること（翻訳）を通して，Ｐを理解することや，Ｐでの新しい事実を発見することができるようにするということである。

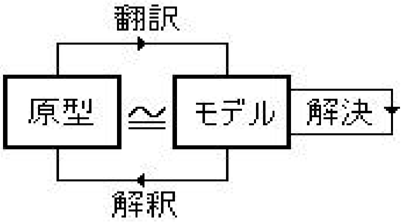

図１

２．現実的モデルについて

あいまいな日常の事象そのものを，そのまま数学的に解決しようとしても困難である為，このあいまいな事柄を単純化，理想化，言語化などを行うことによって，数学の問題としてはっきりさせる必要が出てくる。このとき，あいまいな事柄をはっきりさせる，ということで 1 つのモデルと言える。この数学の問題としてモデル化されたものを現実的モデルとする。日常の事象から取り上げた 1 つの問題（課題）から，モデルの修正・改良することで，様々な現実的モデルをつくることができる。また，現実的モデルと表現することで，数学的問題解決過程の 1 つを表現することができる。しかし，ほどよく正確で簡潔に述べられるように，モデル化できない場合は，日常の事象自体がはっきりと把握できるからであり，モデル化する必要がないと言える。

３．数学的モデルについて

そのままでは解決できそうもない現実的モデルを記号化，形式化，定式化などをすることによって，より分かりやすく表現したモデルを数学的モデルとする。ある 1 つの課題において，現実的モデルが異なっても，利用される数学的モデルはほとんど変わらなかった。それは，数学的モデルがその課題の本質的な要素となるものであるからである。つまり，常に数学的モデルとは現実的モデルを解決するために有効に働くモデルと言える。しかし，数学的モデルの中にもより有効に働くモデルが存在することはあるため，数学的問題解決過程ではモデルの修正・改良の段階を設け，より有効に働く数学的モデルを考え出すことが必要となる。

現実的モデルを数学的に解決する際，より有効に解決するためにモデル化してきた，現実的モデルを数学的モデルで表現した際，解決に有効でなかったり，さららに複雑であいまいなものになったりするような表現は数学的モデルとはいえない。また，現実的モデルの時点ですぐに解決できそうなときに，わざわざ数学的モデルに置き換える必要はない。

数学的モデルの種類としては，図的モデルと言語数式的モデルがある。

４．数学的問題解決過程について

数学的問題解決過程とは，日常の事象から数学を取り出し，解決するまでに次の６つの段階を踏む。

ａ）現実問題をつくる段階①

現実世界での事象や問題に対して，よく分からないとか追求してみようとかいう問題意識を持ち，その問題を把握する。

ｂ）現実的モデルをつくる段階②

現実世界の問題は，そのまま数学的に処理するには，あまりにも複雑すぎることが多い。したがってここでは，前段階でとらえた問題をほどよく正確で簡潔に述べられるように，理想化したり単純化したりして，現実的モデルをつくる。

ｃ）数学的モデルをつくる段階③

現実的モデルを記述するのに用いられている言葉や概念を，数や幾何図形などの数学的概念やその記号，あるいはそれらを関係付ける表，グラフ，方程式などの表現に置き換えることによって数学的モデルをつくる。

ｄ）結果を得る段階④

前段階でつくった数学的モデルに数学的な道具やテクニックを適用することによって，それを純粋に数学的手法を通して解決し結果を得る。

ｅ）得られた結果を現実世界と比較してテストする段階⑤

前段階で得られた結果をもとの現実世界と照らし合わせて解釈し，それが現実世界での問題に対するかとして妥当かどうか，あるいは，数学的モデルが有効であったかどうかを検討する。

ｆ）モデルを修正し改良する段階⑥

前段階でのテストの結果，解が妥当でないとか数学的モデルが有効でないと言うことが分かった場合，これまでの各段階を振り返って考察してみる。

一般的には，上述の仮定の段階を何度も繰り返すことによって，数学的モデルを修正し改良して有効なものにしていくのが普通である（図２)。

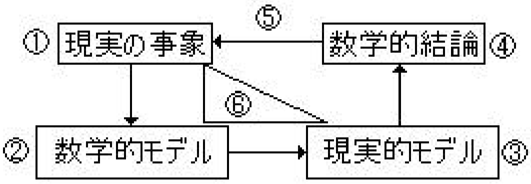

図２

数学的問題解決過程を扱った授業の問題点の１つに，この過程が一巡で終わってしまうことが上げられている。つまり，モデルの修正・改良する段階がなく，得られた解を解釈・テスト

する段階で終わってしまっているということである。モデルを修正・改良する段階を設ける為には，現実的モデルからすぐに有効な数学的モデルが考え出されるのではなく，試行錯誤することによって解決できる課題が良い。しかし，生徒の発想，能力，問題のイメージのとらえ方によっては，すぐに有効な数学的モデルを利用できると思われる。そのため，様々な現実的モデルをつくることができ，さらにその一つ一つの現実的モデルに対していろいろな数学的モデルを考え出すことの出来るものが望ましい。そして，その中で，共通で有効な数学的モデルを見つけだせる課題がいいのではないだろうか。

５．ケーニヒスベルクの橋渡りの問題について

まず，日常の事象から「ケーニヒスベルクの７つの橋を，どこから出発しても良いが，１つの橋を１回しか通らないようにして，全部の橋をわたることが出来るだろうか」という現実問題を取り出す（図３）。

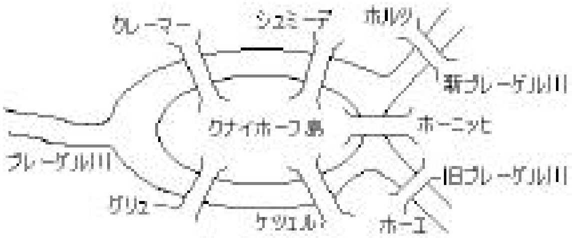

図３

この問題を解決するために，記号化を用いて「４種類の文字Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄによる８個の文字の中からなる列のうちで，次の①，②の条件を満足するような列が出来るか。

①ＡＢとＡＣは２回ずつ現れる

②ＡＣとＢＤとＣＤは１回ずつ現れる」

と言う文字列としての現実的モデルで表し，図４のような図的モデルとしての数学的モデルをつくる。

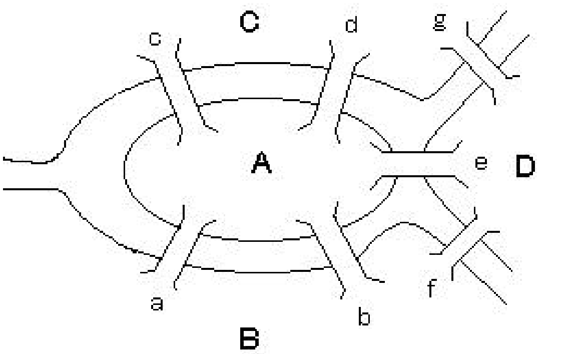

図４

この現実的モデルを解決する前に，特殊化したものから考えていく。まず，ある２つの町だけに着目し，「その２つの町の間に奇数個の橋が１つ，３つ，５つ，･･･，とかかっている場合を考え，どの橋も１回ずつわたることができるかどうか」を考えていく。ここで利用される数学的モデルも特殊化された図的モデルである（図５）。

図５

この図的モデルとしての数学的モデルを利用することで，規則性を調べ，言語数式的モデルとしての数学的モデルで表すことができる。

順路がいつも存在する場合

（橋の個数）＋１＝（各文字の現れる回数の合計）

順路が存在しない場合

（橋の個数）＋１＜（各文字の現れる回数の合計）

となる。

この数学的モデルを利用し，はじめの現実的モデルについて考えると，求める文字列は存在しないことがわかる。このことから，ケーニヒスベルクの橋渡りの問題は，求める順路は存在しないということになる。さらに，偶数個の場合も特殊化した現実的モデルと数学的モデルを利用することで，同じように言語数式的モデルとしての数学的モデルを作ることが出来る。そこで，奇数個の場合と偶数個の場合をあわせて考えれば，一般的に成り立つ言語数式的モデルとしての数学的モデルをつくることが出来る。

すべて偶数個の場合，順路が存在するには

｛(橋の個数）＋１｝－１＝（各文字の現れる回数の合計）

２箇所奇数個の橋がかかっている場合，求める順路が存在するには

｛(橋の個数）＋１｝＝（各文字の現れる回数の合計）

となる。

一方で，「結びつき」や「つながり」を考えることで，図４を図６のように書き換えることが出来る。図６も図的モデルとしての数学的モデルであり，数学的モデルとしての構造は変わらない。図６をさらに単純化することで図７のように表せる。

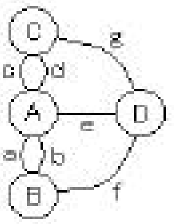

図6

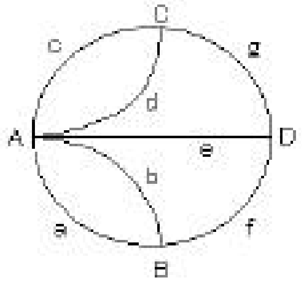

図7

もちろん図７も図的モデルとしての数学的モデルである。図７に対しての現実的モデルは「ある点から出発して，どの線も１回づつ通って書くことができるか」となる。つまり，この現実的モデルは「図７は一筆書きができるか」と同じことである。と言うことは，ケーニヒスベルクの橋渡りの問題は，一筆書きの問題として言い換えることができるということになる。

一筆書きの問題は，すべて偶点からなっている場合は，始点と終点を一致させるようにたどっていけばよい。また，奇点が２つ含まれている場合は，奇点から出発し，もう１方の奇点で終わるようにたどっていけばよい。しかし，奇点が４つ以上存在する場合は一筆書きができないため，このことからも，ケーニヒスベルクの橋渡りの問題は出来ないということになる。

この橋渡りの問題は，数学的問題解決過程をうまく取り入れたものであった。現実的モデルや数学的モデルの修正・改良を繰り返し，解決に有効な図的モデルとしての数学的モデルと言語数式的モデルとしての数学的モデルを考え出すことが出来た。特に，モデルを修正・改良する段階において，モデルと特殊化したことが解決に有効であった。特殊化によって規則性を見つけ，この問題に限らず，一般的に成り立つ場合を言語数式的モデルとしての数学的モデルで表すことが出来たからである。さらに図的モデルとしての数学的モデルを利用することで，一筆書きの問題として扱うことにもなった。そして，２つの数学的モデル利用することで，一筆書きの問題を解く際の規則を見つけるきっかけにもなったのである。

６．教材開発

「次の３つの図形は，正三角形を６つ並べて作ったものである。それぞれ一筆書きが可能かどうか考えてみよう。」

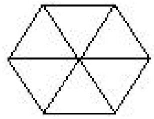

図８

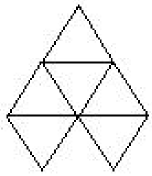

図９

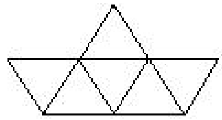

図１０

同じ枚数の三角形から出来ている図形でも，一筆書きができる場合と出来ない場合があることに気づかせることで，何故そうなるのだろうか，と言う疑問を持たせ，一筆書きについての規則性について考えさせたい。その際，始点や終点，奇点や偶点についての違いや性質を考えることで導いていけるようにしたい。さらに，規則性を考えていく為に，モデルを特殊化し，まず１枚のときは一筆書きができるか，２枚のときは出来るか，３枚，４枚，･･･，と増やしていく方法をとるようにしたい。

Ⅳ．研究の結果

モデルの定義を参考に，現実的モデルと数学的モデルを位置付けることで，数学的問題解決過程の一連の流れを表現することができた。数学的モデルとは，数学的問題解決過程の本質的な要素をもったものであり，日常の事象から取り上げた数学の問題を解決するためには不可欠であると言える。また，数学的モデルを扱った授業を行っていくことで，生徒たちの事象を数学的に解決していく能力の育成に役立っていくと考える。特に，数学的モデルをつくる段階，モデルを修正・改良する段階，さらに，現実の事象への解釈の段階を強調していくことで，日常の事象と数学との関係がより明確になっていく。最も，生徒自身がこの数学的問題解決過程を体験することが重要であり，この体験によって，事象を数学的に処理するよさを感じることができるのである。

主要引用・参考文献

・塩野直道「数学教育学」啓林館　昭和 45 年 5 月 10 日

・岩号一男「算数・数学教育学」福村出版　1990 年 11 月 20 日

・中学校指導要領　平成 10 年　数学編

・日本数学教育学会誌　第 75 巻　第 1 号　池田敏和・山崎浩二　「数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究」　1993 年

・平岡　忠「新しい幾何」　岩崎書店　1980 年 5 月 10 日