

修士論文要約【鳥取大学数学教育研究，第4号，2002】

数学教育における図形の見積りに関する研究

- 見積り過程における図形感覚に焦点を当てて -

山脇 雅也

指導教官：溝口達也，矢部敏昭

・研究の目的と方法

これまでに多くの研究において，算数・数学における見積りの価値が報告されてきている(例えば，Sowder(1992))。見積りの価値として認められることの一つには，個々人の見積りからその個々人がいかなる感覚を持っているのか見出せることがある。感覚を豊かにすることは，最近の我が国の小学校学習指導要領において目標とされていることの一つである。つまり，見積りは豊かな感覚であるかどうかを判断するための一つの手がかりとなり得るのである。しかし，これまでに図形の見積りについては，数の見積りや量の見積りと比べてあまり報告されていないようである。よって，個々人の図形感覚を判断することについての議論が不足していると思われる。本研究はこの点を取り上げ，個々人の図形の見積りにおいて，その個々人にはいかなる図形感覚が認められ得るのか明確にすることを目的とする。

このために本研究は次のような方法をとる。まず，算数・数学における見積りについての基本的な考え方を先行研究の議論から整理する。それに基づき，本研究における図形の見積りの意味を規定し，図形の見積りが要請される状況を分類する。次に，van Hiele の洞察に基づき，図形の見積りにおける直接的に観察不可能な個々人の思考過程を解釈し捉え得ることを示す。一方，C. S. Peirce の感覚の本性に基づき，図形の見積りと図形感覚との関係を確認する。以上の理論的考察を通して，図形の見積りを考察するための理論的枠組を得る。続いて，この枠組で図形の見積りの具体的諸事例を考察することにより，図形の見積りに潜在する図形感覚を顕在化させ，図形感覚の質を判断するための枠組を構築する。この図形感覚を判断する枠組を検証するために調査研究を行う。調査問題を作成・実施し，得られた結果を当該の枠組により，実際の子どもの図形の見積りにおける図形感

覚を評価する。以上の実証的考察により個々人にいかなる図形感覚が認められるのか指摘する。

本研究の意義は，教授学的な議論が不足していると思われる図形の見積りを研究の対象としていることである。また，本研究の成果によって図形の見積りを同定することに対する示唆，図形の見積りにおける直接的に観察不可能な個々人の思考過程を解釈し捉えることに対する示唆，個々人の図形感覚を評価することに対する示唆を与え得るという意義がある。

・本論文の構成

1. 本研究の目的と方法
 - 1.1. 卒業研究における成果と残された課題
 - 1.2. 研究の目的
 - 1.3. 研究の方法
 - 1.4. 研究の意義
 - 第1部 図形の見積りについての理論的考察
 2. 図形の見積りの同定
 - 2.1. 見積りについての基本的な考え方
 - 2.1.1. 計算結果の見積り
 - 2.1.2. 概測の見積り
 - 2.1.3. 多数の見積り
 - 2.1.4. 先行研究における見積り
 - 2.2. 本研究における図形の見積り
 - 2.2.1. 図形の見積りについての考え方
 - 2.2.2. 図形の見積りを要請する状況の分類
 3. 図形の見積りにおける洞察
 - 3.1. 構造についての基本的な考え方
 - 3.1.1. Piaget の理論における構造
 - 3.1.2. van Hiele の理論における構造
 - 3.1.3. 個々人の与える構造の意味
 - 3.2. 洞察による図形の見積りの解釈
 4. 図形の見積りにおける図形感覚
 - 4.1. 認識における感覚の本性
 - 4.2. 図形の見積りと図形感覚の関係
 - 4.3. 構造と図形感覚
- 第1部の結論

第2部 図形の見積りについての実証的考察

5. 図形の見積りの事例的考察

- 5.1. 事例1:九州の形を言葉でいかに説明するか
- 5.2. 事例2:九州の形をはさみで切り抜く前にいかに大まかに切るか
- 5.3. 事例3:九州のおよその面積を求めるときいかなる形と見るか
- 5.4. 図形感覚を判断するための枠組の構築
 - 5.4.1. 図形の見積りの諸事例で認められた図形感覚
 - 5.4.2. 図形感覚を判断するための枠組

6. 図形の見積りの調査研究

- 6.1. 調査研究の目的と調査問題の設定
- 6.2. 調査対象と調査方法
- 6.3. 調査結果の考察

第2部の結論

7. 本研究の結論

- 7.1. 本研究から得られた結論
- 7.2. 教授学的示唆
- 7.3. 今後の課題

引用・参考文献

資料：調査問題に対する子どもの答案

(1 ページ 35 字 × 30 行, 107 ページ)

・ 研究の概要

本研究の目的を達成するために次のような研究課題を設けた。

- 研究課題1:図形の見積りはいかに同定し得るか。
研究課題2:図形の見積りにおける個々人の思考過程はいかに解釈し捉えるか。
研究課題3:図形の見積りと図形感覚とにはいかなる関係が認められるのか。
研究課題4:実際の図形の見積りにおける図形感覚はいかに評価できるか。

そして、本研究は、第1部において図形の見積りについての理論的考察、第2部において図形の見積りの実証的考察という二部構成をとり、それぞれ以下のように構成した。

まず、研究課題1については、見積りに関する基本的な考え方を、特に、Sowder(1992)の報告を整理することから始める。そして、見積りが同定される状況に対する諸外国における捉え方と我が国における捉え方について議論することを通して、図形の見積りの意味を規定し、図形の見積りを同定し得る状況の分類を試みる。この結果、見積りは、様々な状況や質問によって要請される活動であることが示し得る。諸外

国においては、一般に計算結果の見積り (estimating results of computation)、測定の見積り (estimating measures)、多数の見積り (estimating numerosity) に分類され、我が国においては、数の見積り、量の見積り、図形の見積りに分類される。そして、図形の見積りというのは、状況における要請に対して概形へ変形し答える活動と規定し得る。この図形の見積りを要請する状況として、少なくとも、次の状況が認められることが示せる。

- ・ 所与の形を言葉で表現する
- ・ 所与の形を拡大・縮小する
- ・ 所与の形を概測する

(以上、第2章)

次に、見積りの思考過程を解釈することについて、先行研究において個々人の心的な活動によって説明付けているという示唆を踏まえ、研究課題2については、図形の見積りの思考過程を解釈するために van Hiele(1986)の洞察の考えに依拠する。このため、van Hieleの理論における構造について、Piagetの理論における構造との比較により議論する。その結果、van Hieleの構造というのは洞察を得るためのものであり、Piagetの構造というのは操作の得るためのものであると考えられる。よって、van Hieleによれば Piagetの構造は厳密な構造 (rigid structure) であり、弱い構造 (feeble structure) が認められないのである。図形の見積りというのは、記述であったり、言葉による表現であったり、個々人の念頭で描かれるものであったりするように表現形式が様々であり、たとえ同じ表現形式であっても様々な形で見積られるものである。したがって、一定の「記述する」「言葉で表す」という操作が必ずしも認められるとは限らないということが指摘し得る。つまり、個々人が与えているという構造というのは、弱い構造であると考えられる。よって、見積りの結果を洞察と考えるとすれば、その洞察を得る構造こそが、直接的に観察不可能な個々人の思考過程の表れと見なすことができ解釈し捉えることが可能であることが示唆される。

(以上、第3章)

一方、研究課題3については、Peirce(1868)の感覚の本性についての言明に基づく。Peirceの考えによると、個々人の認識が進展していくということは、感覚がものごとの性質としての刺

激を受け取り，その受けとった刺激に注意力が機能することで知覚できるようになり，さらに表象できるようになることと考えられる。ここで，図形の見積りにおける認識について考えると，個々人の見積りとして表現された形というのは，その個々人の図形感覚によって受けとられた図形の見積りが要請される状況における所与の形についての何らかの性質を表現する記号であると考えられる。つまり，図形感覚とは，個々人が図形の学習を進めたり，または生活の中での様々な具体物に触れる中の図形の見積りが要請される状況において，所与の形に対して数学的にいかなる価値を与えられるのが最初は把握できないにしても，その所与の形についての何らかの性質を受けとるためのものと考えられる。よって，もし，個々人がそのような図形感覚をもっていなければ，所与の形に対して性質としての刺激を受けとることができず，所与の形の見積りは知覚され得ず，ましてや所与の形の見積りは表現され得ないと考えられる。このことから，見積りが感覚に依存することを確認し得る。

(以上，第4章)

以上の議論から第1部の結論として，個々人の図形の見積りは次のように考えることができる。個々人の図形の見積りは，個々人の思考過程を表す構造で捉えられ，その個々人の図形感覚によってなされるものであると言える。このとき，個々人の状況に与えている構造は，図形感覚によって状況から受け取られる所与についての性質によって決定されると考えられる。つまり，図形の見積りにおける個々人の思考過程を表すものとしての構造を構成する要素こそが，その個々人の図形感覚によって受け取られる状況の所与の対象についての性質であると考えられる。これは，個々人が状況に与える構造が，その個々人の図形感覚によって要請されるものであるということである。これにより，図形の見積りを洞察により解釈しその洞察を得るための構造を捉えることで個々人の図形感覚を顕在化できるという理論的枠組が得らる。

(以上，第1部)

最後に，研究課題4については，第1部における考察の結果得られた理論的枠組による図形の見積りの諸事例における事例的考察を通じて，図形の見積りに潜在する図形感覚を顕在化させ

ることを試みる。その結果，本研究で図形の見積りを要請する状況としてあげた「所与の形を言葉で表現する」「所与の形を拡大・縮小する」「所与の形を概測する」について，それぞれ「九州の形を言葉でいかに説明するか」「九州の形をはさみで切り抜く前にいかに大まかに切るか」「九州のおよその面積を求めるときいかなる形と見るか」という事例を考察し，次のような図形感覚を顕在化し得る。

- ・形を変形すること
- ・凹凸をおしなべた形で表現すること(個人的な参照による形で表現すること)
- ・「既知の図形」¹⁾で表現すること
- ・「基本図形」²⁾で表現すること
- ・複合図形で表現すること
- ・状況における妥当性
- ・状況における効率のよさ

そして，顕在化させた図形感覚の組み合わせによって，個々人の図形感覚の質を判断するための枠組を構築した結果，表1が得られる。

表1：図形感覚を判断するための枠組

	所与の形を 言葉で説明する状況	所与の形を 拡大・縮小する状況	所与の形を 概測する状況
	x		
		x	
			x
		x	x
	x		x
	x	x	
	x	x	x

がその状況で要請される性質を受け取ることができることを示す。

：いかなる図形の見積りを要請する状況においても図形感覚によって状況で要請されることを性質として受け取ることができる傾向

：図形の見積りを要請する状況の分類のうち，いずれかの分類の要請に答えられない傾向

：図形の見積りを要請する状況のいずれかの分類においての要請にしか答えられない傾向

：いかなる図形の見積りを要請する状況であっても，それらの要請を性質として受けとることができない傾向

(以上，第5章)

続いて、この枠組を調査研究により検証する。図形の見積りの調査問題(資料参照)を作成、実施した。調査は鳥取大学教育地域科学部付属小学校第5学年、第6学年の児童および同付属中学校第1学年の生徒、総計227名を対象として、2001年12月上旬に行った。調査の方法は、調査問題を記載した1枚の問題用紙による質問紙調査を通常の授業時間内の約5分間を利用して、授業を担当する教師に依頼し実施した。調査問題の特性に基づくと、小学校算数科における図形に関する基本的な学習内容の指導を受けていることが望ましく、特に、基本図形の面積の求積についての学習が既習であることが望ましいため、小学校第5学年以上の子どもたちを対象とした。この調査の結果を整理すると、表2、図1が得られ、教授に対して次のように示唆し得る。

各学年を通じて、所与の形を言葉で説明する状況における要請を性質として受け取るための図形感覚が認められない児童・生徒が比較的多い(例えば、第5学年 21.3%、第6学年 24.0%、中学1年 26.0%)。第5学年においては、これに加え、所与の形を概測する状況における要請を性質として受け取るための図形感覚が認められない児童も比較的多い(例えば、18.7%)。つまり、第6学年、中学校第1学年と学年が進むにつれて、所与の形を言葉で説明する状況における要請を性質として受け取るための図形感覚が、所与の形を概測する状況における要請を受けとる性質としての図形感覚と比べて、比較的に育まれていない(18.7% 8.0% 1.3%、21.3% 24.0% 26.0%)。よって、所与の形を言葉で説明する状況に要請される所与の形を伝えるように特徴を捉えることと簡単な言葉で表現することという図形感覚を育むような教授が必要であると考えられる。

(以上、第6章)

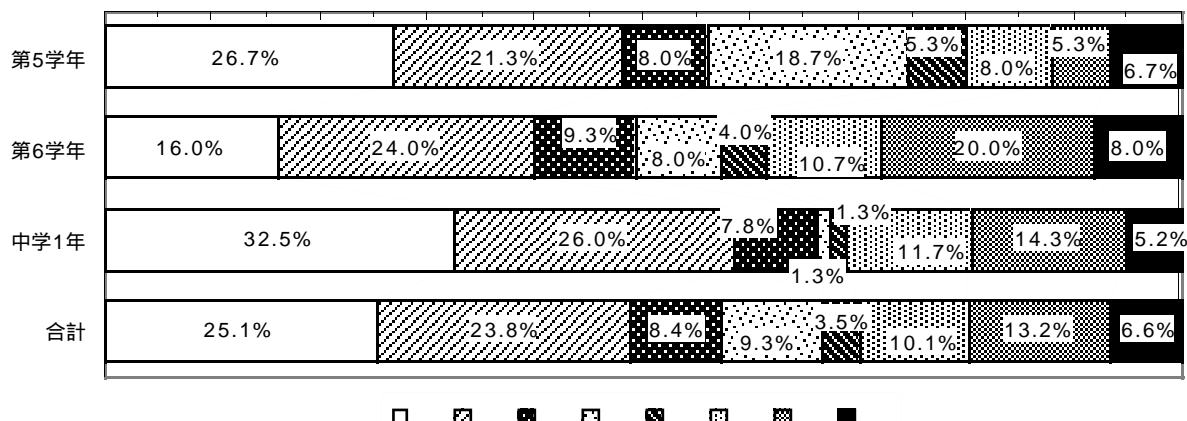
以上の議論から第2部の結論として、実際の子どもたちの図形の見積りは次のように考えることができる。事例の考察から構築した個々人の図形感覚を判断するための枠組によって、調査した子どもの図形の見積りを評価した結果、特に、所与の形を言葉で説明する状況における要請を性質として受け取るための図形感覚が、所与の形を概測する状況における要請を受けとる性質としての図形感覚と比べて、比較的に育まれていないことが指摘できた。また、このことにより、本研究で得た個々人の図形感覚を評価するための枠組の有効性が示せる。

(以上、第2部)

表2：調査結果

	第5学年		第6学年		中学1年		全体	
	(人)	%	(人)	%	(人)	%	(人)	%
	20	26.7%	12	16.0%	25	32.5%	57	25.1%
	16	21.3%	18	24.0%	20	26.0%	54	23.8%
	6	8.0%	7	9.3%	6	7.8%	19	8.4%
	14	18.7%	6	8.0%	1	1.3%	21	9.3%
	4	5.3%	3	4.0%	1	1.3%	8	3.5%
	6	8.0%	8	10.7%	9	11.7%	23	10.1%
	4	5.3%	15	20.0%	11	14.3%	30	13.2%
	5	6.7%	6	8.0%	4	5.2%	15	6.6%
計	75	100%	75	100%	77	100%	227	100%

図1：調査結果



・ 研究の結果

本研究で得られた結論は次の通りである。

(1) 見積りに関する先行研究，特に，Sowder (1992) の報告を整理することを通じて，見積りが要請される状況の特性を明らかにし，我が国における学習指導要領において図形領域に関する内容を要請される見積りを「図形の見積り」と同定した。続いて，この図形の見積りが要請される状況では，いかなる要請が認められ得るか議論することで図形に見積りが要請される状況を「所与の形を言葉で説明する状況」「所与の形を拡大・縮小する状況」「所与の形を概測する状況」に分類した。

(2) 図形の見積り過程を考察するとき，大半がその見積りを行う個々人の思考過程が対象となる。しかし，その思考過程というのは，本来直接的に観察不可能であるため，解釈し捉えなければならない。これを受けて，van Hiele の洞察に依拠した。図形の見積りに関する個々人の思考過程は，その表れとして洞察を位置づけることにより，そのとき個々人が状況に与えていると思われる洞察が生起する構造を解釈し捉えることで考察し得た。

また，Peirce の感覚の本性についての議論に基づき，図形の見積りが図形感覚に依存するという関係を明確にした。この関係から，図形の見積りに関する個々人が状況に与えたと思われる構造を構成する要素を見出すことを要請するのが，図形感覚であると説明付られた。

(3)(1)，(2) の理論的枠組を基に，図形の見積りの具体的な諸事例を考察した結果，よりよい図形の見積りは，状況で要請されることに対して「妥当性」と「効率のよさ」をもった図形感覚が認められることが示せた。さらに，個々人の図形の見積りに認められる図形感覚の傾向を捉えることで，その個々人の図形感覚を判断するための枠組が得られた。

(4)(3) の個々人の図形感覚を判断する枠組によって，実際の子どもたちの図形の見積りを評価した結果，特に，所与の形を言葉で説明する状況における要請を性質として受け取るための図形感覚が，所与の形を概測する状況における要請を受けとる性質としての図形感覚と比べて，比較的に育まれていないことが指摘し得た。

また，今後の課題は次の通りである。

(1) 本研究において同定した図形の見積りを分類するとき，考えられる事例の特性を抽出することによって分類項目となる状況を得た。こ

れは，図形の見積りが要請されるすべての状況を埋め尽くすこととになり得ない。図形の見積りの状況の分類についての検討が必要となる。

(2) 本研究における諸事例の考察は，もっぱら本研究で分類した状況によるものである。つまり，理論的枠組の適用はこの分類においてのみ有効となる。

(3) 本研究で構築した図形感覚を評価するための枠組は，諸事例の考察から顕在化し得た図形感覚を機械的に組み合わせ構築したものであり，個々人の図形感覚の傾向を捉えたものに過ぎない。個々人の図形感覚を把握するためには，顕在化し得たそれぞれの図形感覚の相関性についての検討が必要となる。

(4) 本研究で指摘した教授に対する示唆は，子どもを持つ図形感覚に対する問題点を提起したに過ぎない。そのような問題をいかに解決していくかについて提言していくことが，今後の課題である。

注

- 1) 本研究において，「既知の図形」というのは，一般的な児童・生徒が形そのものを同定でき名辞できる形であるが，その形における様々な性質や求積公式までは知らない形のことを呼ぶ。例えば，六角形，星形，楕円など。
- 2) 本研究において，「基本図形」というのは，一般的な児童・生徒がその形について様々な性質や求積公式などをよく知った形のことを呼ぶ。子どもが 1) の「既知の図形」と区別するものである。例えば，ある子どもにおいては，正方形，平行四辺形は「基本図形」であるが，一般の四角形は「既知の図形」と区別されることがあると考え得る。

主要引用・参考文献

- ・ Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. pp. 420-464.
- ・ 伊藤説朗. (1993). 数学教育における構成的方法に関する研究 [上]. 明治図書. pp. 167-225.
- ・ NCTM. (1989). Standard 9 Geometry and Spatial Sense, *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. pp.48-50.
- ・ Peirce, C. S. (1980). 人間記号論の試み, 世界の名著 59 パース/ジェイムズ/デューイ. (山下正男. 他訳). 中央公論社. (原著出版は 1868 年). pp. 128-168.
- ・ Piaget, J. (1970). 構造主義. (滝沢武久, 佐々木明. 訳). 白水社.

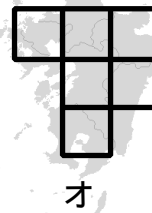
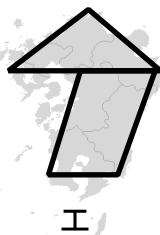
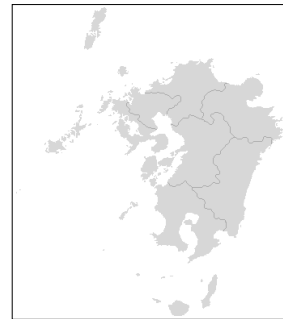
- Rays, B. J. & Rays, R. E. (2000). 数感覚のいくつかの要素と算数.(陸新生訳), 新しい算数研究, No.353. pp. 4-7.
- Sinclair, H. (1970). Different Types of Operator Structure, *PIAGETIAN Cognitive-Development Research and Mathematical Education*. pp. 53-65.
- Sowder, J. (1992). Estimation and Number Sense, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. pp. 371-389.
- 山脇雅也. (2001). van Hieleの洞察に関する一考察, 科学教育学会研究報告 15(6). pp.23-26.
- 山脇雅也. (2001). 図形の見積りに関する子どもの思考過程:洞察に基づく解釈, 第34回数学教育論文発表会論文集. pp.85-90.
- van Hiele, P. M. (1986). *STRUCTURE AND INSIGHT A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.

資料：調査問題

これはテストではありません。成績に関係しないので、よく読んで、あなたの思うとおりに答えて下さい。

年 組 名 前 _____

右の図は九州の地図です。
この地図から九州のおよその形を下のア～オのように表しました。



次の(1), (2), (3)のときあなたの考えにもっとも近いものはどれですか？
同じ記号は 何度 選んでもかまいません。

- (1) 九州の形を知らない人に対して、およその形を言葉で教えるときの表し方。
- (2) 九州の形を はさみで切りぬく前に、おおまかに切るときの表し方。
- (3) 九州のおよその面積を求めるときの表し方。

(1)
(2)
(3)