図形領域における論証指導と
作図ツールの活用

石田　篤

指導教官：矢部敏昭

Ⅰ．研究の目的と方法

本研究の目的は，証明（あるいは論証幾何）にはどのような価値があるのかを明らかにし，そして，授業において，どのように作図ツールの活用を結びつけるか，について考察していくことである。

研究の方法として，まず，論証指導で問題とされていること，論証幾何の価値などを文献研究により明らかにし，そのような価値はどのような思考をすることにより得られるのかについて考察する。そして，そのような思考と作図ツールの活用の結びつきについて考察した後，具体的な題材を通じて，作図ツールの活用場面について考察し，この考察をもとに，活用の利点・問題点を分析する。最後に，作図ツールの活用へ向けた今後の課題を述べる。

Ⅱ．本論文の構成

（1 ページ 40 字×40 行，71 ページ）

Ⅲ．研究の概要

３．１「批判的に考える」とは

本研究で文献を取り上げた杉山吉茂氏，及びフォセットの考え方に基づき，「批判的に考える」とは，どのような考え方をすることを言うのか，その定義づけを試みた。それに先立ち，杉山氏の次の指摘を取り上げた。

『一般に，証明とは，ある判断の真なることを，既に正しいと認められた判断から論理的に導き出すことによって示すことであるとされる。この証明（あるいは論証）を意味する言葉として，proof と demonstration がある。まず，demonstration は，「表示する」という意味に根ざしており，真なることを「外へ向けて示す」ことを意味している。これに対して，proof は，「調べる」という意味から出ていて，「探り針で探る」という意味を持っている。すなわち，demonstration は「外へ」示すことを意味し，proof は「内へ」探りを入れていくことを意味する。』

これをもとに，「批判的に考える」ことの定義を試みた。本研究において，「批判的に考える」とは，proof の持つ意味のように，「内へ」探りを入れていくという立場に立って，数学的な思考を深めるための考え方，言い換えると，ある問題が解けたら終わりではなく，「本当にこれでよいのか」，「この条件を変えても問題が解決できるのではないか」，「他にも解法があるのではないか」などといった反省的な思考をもとにして，それらのことについて検討し，数学的な思考を深めていこうとする考え方をすること，と定義する。この考え方は，本研究で考察してきた論証幾何の価値を見出すために重要な考え方であると考える。

３．２　「批判的に考える」を検証する

ここでは，具体的な題材を例に取り上げ，上述の定義に基づいて，「批判的に考える」ことを検証していくことにする。次に取り上げる問題を，本研究において，「正三角形の発展問題」と名づけ，その証明を示す。

<u>問題</u>　正三角形ＡＢＣと，辺ＢＣをＣの方向に延長し，その上に点Ｅをとって ＣＥを１辺とする正三角形ＤＣＥがある。ＡＥとＢＤを結ぶとき，ＡＥ＝ＢＤとなることを証明せよ。

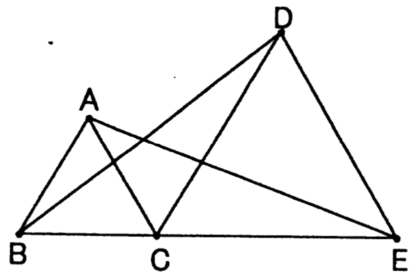

図　１

（証明）

△ＡＣＥと△ＢＣＤで,
△ＡＢＣ，△ＤＣＥはともに正三角形だから,
ＡＣ＝ＢＣ…①，ＣＥ＝ＣＤ…②
また，∠ＡＣＥ＝∠ＢＣＤ
　　　　　　＝60°＋∠ＡＣＤ…③
①②③より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので,
△ＡＣＥ≡△ＢＣＤ
よって，ＡＥ＝ＢＤ　（ｑ．ｅ．ｄ．）

この問題において，「批判的に考える」とは，次のようなことを考えることとしたい。

<u>批判的に考える（１）</u>

問題では，3点，C，Eが一直線上にあることが条件になっているにもかかわらず，証明においてはこの条件は使われていない。

→3点B，C，Eは一直線上になくてもＡＥ＝ＢＤはいえるのではないか。

→この条件を変えても，証明の仕方はほとんど変わらないのではないか。

この考えをもとに，図2，図3における証明を考えると，図2については，前述の証明と全く同じになる。図3については，③の条件を導く過程が次のように異なる。

∠ＡＣＥ＝∠ＢＣＤ

＝60°－∠ＡＣＤ

このように考えることができるのは，上のように考えたことによるものと考える。

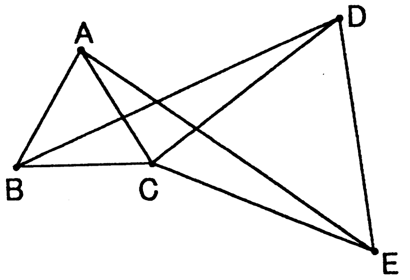

図　2

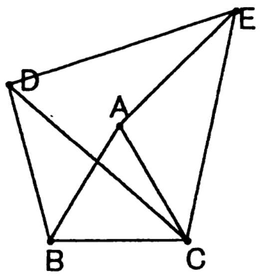

図　3

批判的に考える（2）

ＡＥとＢＤの交点をＦとおくと，∠ＡＣＢ＝∠ＡＦＢ＝60°になるのではないか。（図4）

→正三角形という条件に依存するのではないか。

→正方形のときにはどうなるのか。

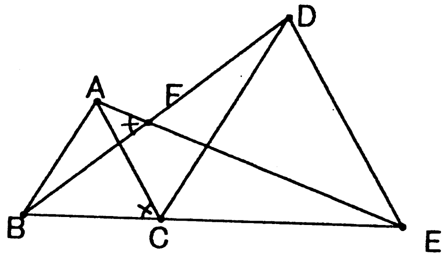

図　4

そこで，正三角形を正方形にすると，図5のようになる。

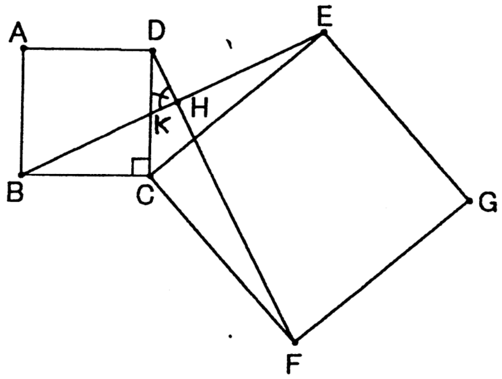

図　5

まず，ＢＥ＝ＤＦも同様の証明ができる。

（証明）

△ＢＣＥと△ＤＣＦで，

□ＡＢＣＤ，□ＥＣＦＧはともに正方形だから，

ＢＣ＝ＤＣ…①，ＣＥ＝ＣＦ…②

また，∠ＢＣＥ＝∠DCF

＝90°＋∠DCE…③

①②③より，2辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ＢＣＥ≡△ＤＣＦ

よって，ＢＥ＝ＤＦ　（ｑ．ｅ．ｄ．）

さらに，図5のように，ＢＥとＤＦの交点をＨ，ＤＣとＢＥの交点をＫとする。このとき，△ＢＣＫと△ＤＨＫに着目すると，上述の証明から，∠ＣＢＫ＝∠ＨＤＫ，さらに，∠ＢＫＣと∠ＤＫＣは対頂角で等しいから，ＢＥとＤＦのなす角は９０°であることがわかる。これで，上述の疑問が解決されたことになる。

批判的に考える（3）

∠ＡＣＢ＝∠ＡＦＢより，２つの角はＡＢを弧とする円周角と見ることができる。
→4点A，B，C，Ｆは同じ円周上にあるのではないか。

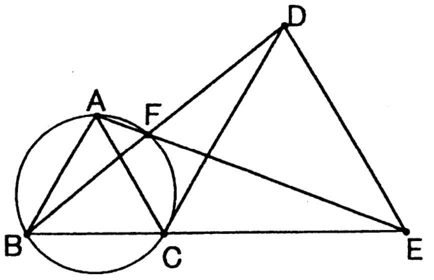

図　6

批判的に考える（４）

批判的に考える（１）で△ＤＣＥを，点Ｃを中心に回転させたが，交点Ｆはどのように動くか。
→円を描くのではないか。
→批判的に考える（３）の円（図６）と関係があるのではないか。

このように，「批判的に考える」においては，前述したように，内に探りを入れ，疑問をもつことから出発していると言える。つまり，問題を見返すことにより，問題に内在する価値を見出そうという考え方がそこにあると考えられる。

Ⅳ．研究の結果

まず，論証指導においては，証明の必要を感じない，証明を難しいと感じる生徒が多くいるという問題，さらに，ある問題に対して，その証明ができればそれでよいと考える生徒や，正しい証明をして見せることをもって指導をしたものと考える教師がいるという問題などがあると考える。このような問題が生じる大きな原因として，証明に内在する価値を見出すことを意識した指導がなされていないことなどが考えられる。そこで，本研究において，「批判的に考える」こと，証明を見返すことが証明に内在する価値を見出すために必要であることを考察してきた。特に，「批判的に考える」ことは，証明以外の試行錯誤や，発展的な活動・探求といった活動を含むという点で重要であり，このような思考を生徒ができるような指導をすることが，今後，さらに重視されなければならないと考える。

また，作図ツールの活用にあたっては，本研究における「批判的に考える」ことと結びつくことが重要であると考える。本研究においても，いくつかの題材で実際に試行し，その中から，重心を求めるという創造的活動には，作図ツールの活用は不向きであることを見出してきたが，本研究で扱っていない他の題材，例えば，座標平面に関する題材や空間図形に関する題材などについても，実際の試行を通して判断しなければならないと考える。本研究では，実際の授業における活用・試行は行っていないが，実際の試行の中でも授業における活用が最も重要であると考える。

そして，本研究では，特に，論証指導において「批判的に考える」ことと作図ツールの活用を結びつけて考察してきたが，どちらの価値も十分なものにするためには，本研究で考察してきたような作図ツール活用の利点・問題点を見出す，そして，作図ツールの活用を評価する，といったことが重要であると考える。そのようなことが教師に求められると同時に，この課題は，作図ツールの活用と同様，実際の試行を通して判断されなければならないと考えるものである。

主要参考・引用文献

杉山吉茂. (1986). 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導. 東洋館出版.