除算方式と加算方式の，順位逆転率と必要条件

後藤 和雄，光多 長温

概 要

除算方式とは，定性要素評点を提案価格で除し，その中で数値の最も高い入札者が落札する方式である。加算方式とは，定性要素と価格要素を一定の割合の重みをつけて加えた評価点であり，その内で点数が高い入札者が落札する方式である。

加算評価方式と除算評価方式のどちらでも順位には大きな差はない，と言われている。しかし，重み w によっては，定性評価と価格評価の得点がある条件を満たせば，ある点 w を境にして順位が逆転する場合が存在する，ことを示した。さらに，除算方式と加算方式で順位が入れ替わる確率や，最低提案額を入れた提案者が１位である確率および定性評価が最高点である提案者が１位である確率を，定性評価は一様分布または一般分布を仮定し提案価格は指数分布または一般分布に従うことを仮定して，導いた。さらに，他の入札者より ε 以上の得点差をつけて，つねに１位である確率および k 位である確率を求めた。

Keywords: ＰＦＩ，ＰＰＰ，加算方式，除算方式，順位逆転率，総合評価方式，
division system，addition system

はじめに

[5] では，加算方式および除算方式の定式化をして，いくつかの性質を示している。これを基本にして，この論文では次の，順位が逆転する条件と確率・加算方式と除算方式の分布関数・ε 以上の差をつけて k 位である確率を求めた。すなわち，

１．除算方式と加算方式の具体例をあげ，重みによる順位が変化することをみる。得点を基準化して比べる場合, 加算方式と除算方式でどちらの方が順位が高いかをみる。除算方式と加算方式で計算した順位を比べたとき，任意の２つの順位が逆転する条件を，重み w（定性評価と価格評価との比較）を用いて調べ，その確率を求めた。さらに，加算方式および除算方式により任意の２つの提案者の順位が逆転する条件を求めた。一般化して，定性評価および価格評価をそれぞれ一般の分布とした場合の，加算方式および除算方式で順位が逆転する確率を求めた。

２．除算方式の分布関数を，定性評価を $[0,\ 100]$ 上の一様分布，提案価格比率 r は $[1,\ \infty)$ 上の任意の密度関数を仮定して求めた。また，加算方式と除算方式についての平均と分散を求めた。

３．最低提案価格を入れた入札者が総合得点において１位である確率を，除算方式および加算方式に対して，いくつかの分布を仮定して計算した。

４．定性評価が１位である入札者が総合得点において１位である確率を，除算方式および加算方式に対して，いくつかの分布を仮定して計算した。

５．一般の分布で，得点が ϵ 以上の差で $k(\geqq 1)$ 位である確率を加算方式および除算方式で計算した。

６．最後に，加算方式と除算方式との得点差，加算方式と除算方式の必要な条件を調べ，２つの方式を統合した一般総合評価方式を定義し，「加除算方式またはＭＧ方式」として新しく提案した。最後に，割引の概念および今後の問題点および検討課題を述べた。

注意．日本で一般的に使われている加算方式においては，最低入札価格を基準にしてこれを上回る（高い）割合に応じて減点を行っているため，最低入札価格以外の価格の差が小さくなる。フランスでは，わが国にあるような予定価格制度がないこともあり，最低価格ではなく，適当な価格をあらかじめ定めて，これを基準として加算方式を用いている。

1　具体例

加算方式と除算方式の性質を詳しく述べる事にする。加算方式および除算方式で計算した場合の順位が入れ替わることを具体例で示す。

加算・除算方式で計算しても順位は入れ替わないと，一般にいわれている。これに対する反例を具体例をあげて示す。[5] で定めた定式化により，

例．前提条件として

1. 価格要素：定性要素 $= 60:40 = 0.6:(1-0.6)$ とする。
2. 加算方式の価格評価は，最低提案価格を６０点とし，提案額が１０億増える毎に 10 点減少し，２００億以上を０点とする。

加算方式では [5, p.79] より

$$x_j(1-w)+[w(100-(r_j-1)\times T)]^+.$$

である。ただし，$T=100$ である。除算方式では [5, p.78]

$$\frac{x_j+(100-x_j)w}{r_j}=\frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}=\frac{100}{r_j}w+\frac{x_j}{r_j}(1-w)$$

である。

提案者	定性評価 x_j	提案価格 y_j	r_j	$\frac{x_j}{r_j}$	除算方式による評価	加算方式による評価
A	80 点	120 億	1.2	66.66	$66.66+16.66w$	80
B	70 点	110 億	1.1	63.63	$63.63+27.27w$	$70+20w$
C	60 点	100 億	1	60	$60+40w$	$60+40w$

したがって，w がとる値により，提案者Ａ，Ｂ，Ｃの除算方式による順位と加算方式による順位は次のようになる。

除算方式による順位は

$$\begin{cases} \mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C} & \text{if } 0 \leqq w < \dfrac{2}{7} \\ \mathrm{C} > \mathrm{B} > \mathrm{A} & \text{if } \dfrac{2}{7} < w \leqq 1 \end{cases}$$

となり，ある点 w の値を境にして，得点の順序が逆になる（図 1 を参照）。

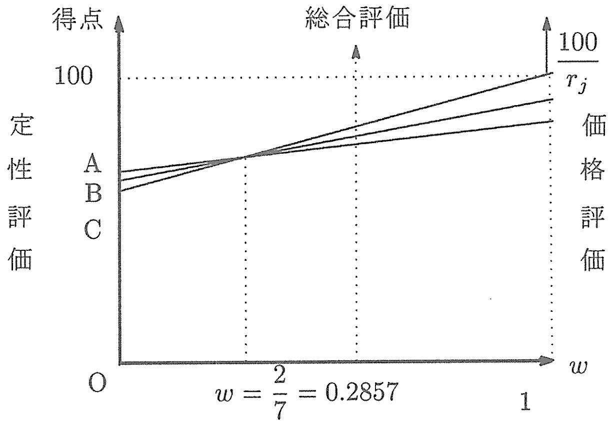


図 1: 除算方式での評価点数

加算方式による順位は

$$\begin{cases} \mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C} & \text{if } 0 \leqq w < \dfrac{1}{2} \\ \mathrm{C} > \mathrm{B} > \mathrm{A} & \text{if } \dfrac{1}{2} < w \leqq 1 \end{cases}$$

となり，ある点 w の値を境にして，得点の順序が逆になる（図 2 を参照）。

重みの付け方によって，得点の順序が逆になる例となっている。

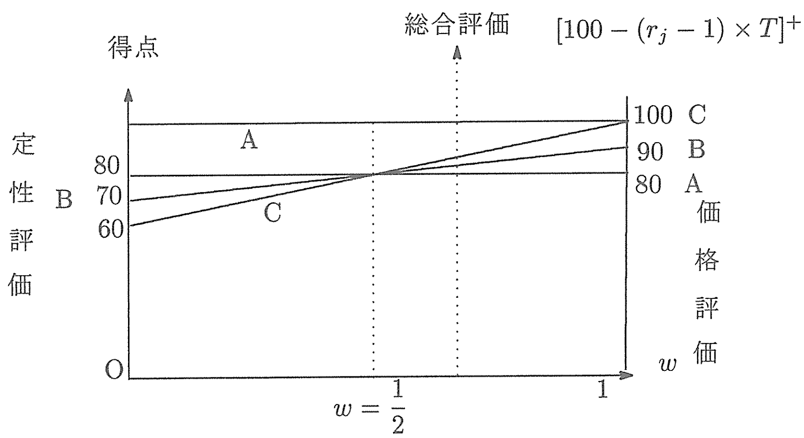


図 2: 加算方式での評価点数

除算方式と加算方式とでは，順番が入れ変わる重み w の値が異なる，ことがわかる。これらの例（図 1 と図 2）では，ある 1 点の重み w のみで得点 (順位) が入れ替わっている。一般的に入れ替

わりが起こるとすれば，ある重み w の前後 1 点のみで 2 つの提案者の得点 (順位) が入れ替わる。

2　加算方式と除算方式ではどちらがよい得点が得られるか

得点を基準化した場合，提案者 j に対して，加算方式と除算方式のどちらの方式の方がよい得点を得られるかを調べる。
加算方式では，

$$x_j(1-w)+[(100-(r_j-1)T)w]^+$$

が得点であり，除算方式では

$$\frac{x_j+(100-x_j)w}{r_j}$$

が得点である。ここで，最低入札金額を 1 として各入札金額を最低入札金額との比率 r_j を分母としているのは，単位の取り方で，y_j の絶対値が大きくなったり小さくなる。これにより，除算方式の値が変化するのを避けるためである。理由は，y_j の絶対値が大きく（単位を円から銭や，弱い通貨に交換すると）なれば，つねに任意の $0 \leqq w \leqq 1$ に対して，

$$\frac{x_j(1-w)+100w}{y_j} < x_j(1-w)+[(100-(y_j-Y)T)w]^+$$

となるからである。

加算方式では，最低提案者の価格評価は 100 点からの減点法である。

Theorem 2.1. 提案者 j に対して，加算方式と除算方式で計算した得点の順序が，重み w $(0<w<1)$ で，変わるための必要十分条件は

(1)　$100>(r_j-1)T$ の場合：

$$r_j>1, \quad \text{かつ} \quad T>\frac{100}{r_j}$$

を満たすときにかぎり，ある 1 点 w の前後のみで加算方式と除算方式の得点の大小が入れ替わる。
詳しくいえば，

$0 \leqq w < \dfrac{x_j}{x_j-100+Tr_j}$ のとき

$$\text{加算方式の得点} > \text{除算方式の得点}$$

$\dfrac{x_j}{x_j-100+Tr_j} < w \leqq 1$ のとき

$$\text{除算方式の得点} > \text{加算方式の得点}$$

(2)　$100<(r_j-Y)T$ のときは，つねに加算方式と除算方式での得点の大小が入れ替わる値 w が存在する。詳しくいえば

$0 \leqq w < \dfrac{x_j(r_j-1)}{100+x_j(r_j-1)}$ のとき

$$\text{除算方式の得点} < \text{加算方式の得点}$$

$\dfrac{x_j(r_j-1)}{100+x_j(r_j-1)} < w \leqq 1$ のとき

$$\text{加算方式の得点} < \text{除算方式の得点}$$

である。

(3) $r_j = 1$ の場合は，つねに除算方式の得点が加算方式の得点よりも高い。

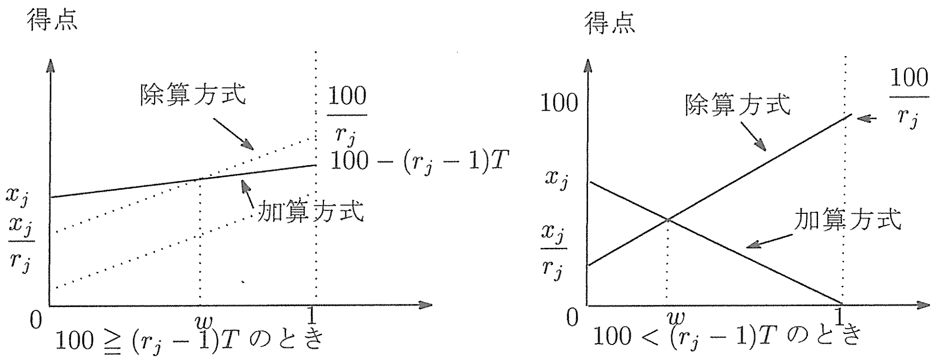


図 3: 除算方式と加算方式の得点に関する図

Proof. (1) $100 \geqq (r_j-1)T$ のとき，定義から加算方式では

$$x_j(1-w)+(100-(r_j-1)T)w$$

であり，除算方式では

$$\frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}$$

である。それぞれの関数は w の 1 次関数で連続である。

したがって，$w=0,\ 1$ での値を考慮すると，条件

$$r_j>1, \quad \frac{100}{r_j}>100-(r_j-1)T$$

すなわち，

$$r_j>1, \quad T>\frac{100}{r_j}$$

を満足するとき，(中間値の定理より）ただ一点 w $(0<w<1)$ で 2 つの 1 次関数は交わる。このとき，交点 w の値は

$$x_j(1-w)+(100-(r_j-1)T)w=\frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}$$

である。これを解いて

$$w=\frac{x_j}{x_j-100+Tr_j}$$

である。

(2) $100<(r_j-1)T$ のとき，定義から，加算方式では

$$x_j(1-w)$$

であり，除算方式では

$$\frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}$$

である。$w=0,\ 1$ のときの，加算方式と除算方式の値を調べ，２つの方式が w に関する１次式であることから，$r_j>1$ であるとき，２つの値が一致する w の値は，

$$x_j(1-w)=\frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}$$

のときであり，これを解いて

$$w=\frac{x_j(r_j-1)}{100+x_j(r_j-1)}$$

である。したがって，$0\leqq w<\dfrac{x_j(r_j-1)}{100+x_j(r_j-1)}$ のとき，

除算方式の得点 $<$ 加算方式の得点

$\dfrac{x_j(r_j-1)}{100+x_j(r_j-1)}<w\leqq 1$ のとき，

加算方式の得点 $<$ 除算方式の得点

である。

$r_j=1$ の場合はつねに，除算方式の得点が加算方式の得点よりも高い。 □

したがって，$r_j=1$ のときは，加算方式か除算方式で計算した場合，どちらかがつねに得点が高い。$T\leqq\dfrac{100}{r_j}$, すなわち $Tr_j<100$ の場合は，どのような重み w であっても，つねに加算方式の得点の方が高い。$Tr_j>100$ の場合は，重み $w=\dfrac{x_j}{x_j-100+Tr_j}$ より小さい w では除算方式の方が，より大きい重み w では加算方式で計算した方が得点は高い。

Example 2.1. 定性評価８５点，$\dfrac{\text{提案額}}{\text{最低提案額}}=r_j=1.2,\quad T=130$ の場合は，

重み $w<\dfrac{85}{128}=0.664$ のとき，

加算方式 $>$ 除算方式

重み $w>\dfrac{85}{128}=0.664$ のとき，

加算方式 $<$ 除算方式

である。

順位の一般的性質

一般に提案者が n 者いるとする。最大限 $n!$ 通りの順位の付け方が存在する。x 座標に x_j の値を，y 座標に y_j の値を，P 座標に重み w の値を対応させると，$(x,\ y,\ w)$ の３次元空間から順位という１次元離散空間への対応（写像）が，除算方式による評価の順位である。また，$(x,\ y,\ w,\ T)$ の４次元空間から順位という１次元離散空間への対応（写像）が，加算方式による評価の順位である。したがって，その写像は階段関数である。すなわち，x, y, w や T に関して，除算方式では $(x,\ y,\ w)$ や加算方式では $(x,\ y,\ w,\ T)$ の存在するある領域内では，順位は変化しない。順位が変化するという（距離を入れて，その）基準で領域を分けると，ボロノイ図形[1]が得られる。

[1]ボロノイ図形とは，平面や空間に点がいくつかあるとする。それを x_j, $1\leqq j\leqq n$ とする。このとき，平面や空間の点 x で x_j が最も近いとき，x は x_j 対応したボロノイ図形に属すと考える。こうして得られる。n 個の集合と境界を含めた全体をボロノイ図形という。

よって，各凸閉包[2]の内部では一定の順位をとる。凸閉包の頂点を通らずにすぐ隣の凸閉包に移る際に，ある２つの隣り合う順位が入れ替わる。境界上のときは同順位となる。

3　除算方式と加算方式で順位が入れ替わる確率(一様分布その１)

除算方式と加算方式により，提案者 i と提案者 j の順位が入れ替わる条件は，不等式

$$\left(\frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}-\frac{x_i(1-w)+100w}{r_i}\right)\Big((1-w)(x_j-x_i)-wT(r_j-r_i)\Big)<0$$

で表される。

$w=1$ のとき，

$$100T\cdot\frac{(r_j-r_i)^2}{r_ir_j}<0$$

となり，矛盾する。したがって，重み $w=1$ のとき，入れ替わりが起こる確率は 0 である。

重み $w\neq 1$ を固定 (fixed) する。ある特定の提案者 $(x_0,\ r_0)$ が与えられたとする。加算方式と除算方式で計算したとき，２つの方式により順位が入れ替わる確率を求める。

一様分布の場合に，まず，起こりうる具体例で考える。

前提条件は，定性評価点は６０点から９０点までの一様分布，提案価格は最低提案額 $r_j=1$ から c までの一様分布を仮定する。したがって，$60\leqq x,\ x_0\leqq 90,\quad 1\leqq r,\ r_0\leqq c$ である。

$$D_1=\left\{(x,r)\middle|\ \frac{x(1-w)+100w}{r}>\frac{x_0(1-w)+100w}{r_0},\ (1-w)(x-x_0)<wT(r-r_0)\right\}$$

$$D_2=\left\{(x,r)\middle|\ \frac{x(1-w)+100w}{r}<\frac{x_0(1-w)+100w}{r_0},\ (1-w)(x-x_0)>wT(r-r_0)\right\}$$

と定義する。このとき，

加算方式では得点は高いが，除算方式では得点の大きさが逆転される確率は，

$$\frac{\mathrm{Vol}(D_1)}{(90-60)(c-1)}$$

である。除算方式では点は高いが，加算方式では得点の大きさが逆転される確率は，

$$\frac{\mathrm{Vol}(D_2)}{(90-60)(c-1)}$$

となる。ただし，$\mathrm{Vol}(V)$ は領域 V の面積である。

$$u=x(1-w)+100w,\quad u_0=x_0(1-w)+100w,\quad du=(1-w)dx$$

と変換すると，D_1，D_2 はそれぞれ D_1'，D_2' に変換される。

$$D_1'=\left\{(u,r)\middle|\ \frac{u}{r}>\frac{u_0}{r_0},\ u-u_0<wT(r-r_0)\right\}$$

[2]集合 S が凸閉包とは，S の任意の２点を結ぶ線分上の各点もまた S の点であり，境界も含んでいる集合のこと

$$D_2' = \left\{(x,r) \middle| \ \frac{u}{r} < \frac{u_0}{r_0},\ u - u_0 > wT(r - r_0)\right\}$$

であり，$60(1-w)+100w \leqq u$, $u_0 \leqq 90(1-w)+100w$ である。

注意. 重み $w=1$ の場合には，逆転される確率は 0 である。

Theorem 3.1. 定性評価点は６０点から９０点までの一様分布，提案価格は最低提案額 $r_j=1$ から c までの一様分布を仮定する。重みを $w \neq 1$ とする。ある特定の提案者の定性評価を x_0, 提案価格を r_0 とする。 さらに，x_0, r_0 は一様分布をしていると仮定する。このとき，加算方式では得点は高いが，除算方式では得点の大きさが逆転される確率 K は，

$$K = \frac{\mathrm{Vol}(D_1)}{(90-60)(c-1)} = (1-w)^{-1}\frac{\mathrm{Vol}(D_1')}{(90-60)(c-1)}$$

である。ただし，$\mathrm{Vol}(D_1')$ （集合 D_1' の面積）は，以下のように与えられる。

（１） $\dfrac{u_0}{r_0} < Tw$ の場合（ $r - r_0 > 0$ ）で，かつ

1. $\dfrac{u_0}{r_0}c \leqq 90+10w$ かつ $u_0 + Tw(c-r_0) \geqq 90+10w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\Bigg[\left(u_0 + Tw(c-r_0) - \frac{u_0}{r_0}c\right)(c-r_0) - \left(u_0 + Tw(c-r_0) - (90+10w)\right)\left(c - \left(\frac{90+10w-u_0}{Tw} + r_0\right)\right)\Bigg]$$

2. $\dfrac{u_0}{r_0}c \leqq 90+10w$ かつ $u_0 + Tw(c-r_0) < 90+10w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\left(u_0 + Tw(c-r_0) - \frac{u_0}{r_0}c\right)(c-r_0)$$

3. $\dfrac{u_0}{r_0}c > 90+10w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{u_0}(90+10w) - \left(\frac{90+10w-u_0}{Tw} + r_0\right)\right)(90+10w-u_0)$$

（２） $\dfrac{u_0}{r_0} > Tw$ の場合 ($r - r_0 < 0$ ）で，かつ

1. $\dfrac{u_0}{r_0} \geqq 60+40w$ かつ $u_0 + Tw(1-r_0) \geqq 60+40w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\left(u_0 + Tw(1-r_0) - \frac{u_0}{r_0}\right)(r_0-1)$$

2. $\dfrac{u_0}{r_0} < 60+40w$ かつ $u_0 + Tw(1-r_0) \geqq 60+40w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\left[\left(u_0 + Tw(1-r_0) - \frac{u_0}{r_0}\right)(r_0-1) - \left(60+40w-\frac{u_0}{r_0}\right)\left(\frac{r_0}{u_0}(60+40w)-1\right)\right]$$

3. $\dfrac{u_0}{r_0} < 60+40w$ かつ $u_0 + Tw(c-r_0) < 60+40w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{u_0}(60+40w) - \left(\frac{60+40w-u_0}{Tw} + r_0\right)\right)(u_0 - (60+40w))$$

（1）の 1. 2. 3. の場合は，それぞれ図 4 の (ア)(イ)(ウ) である。

（2）の 1. 2. 3. の場合は，それぞれ図 5 の (ア)(イ)(ウ) である。

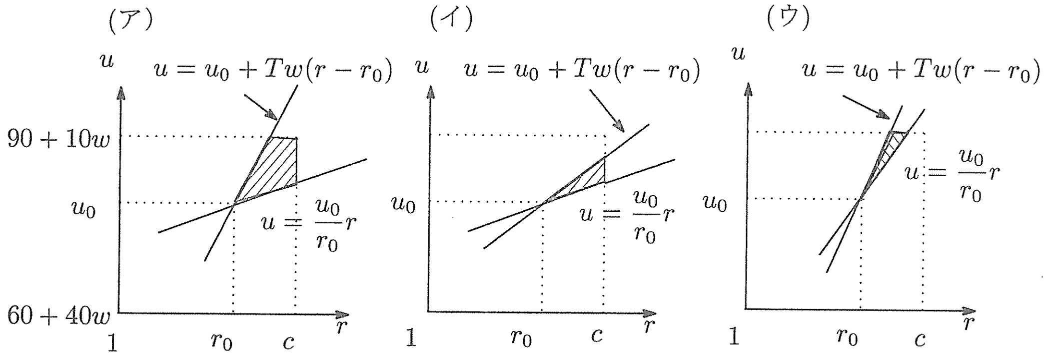


図 4: $\dfrac{u_0}{r_0} < Tw$ の場合

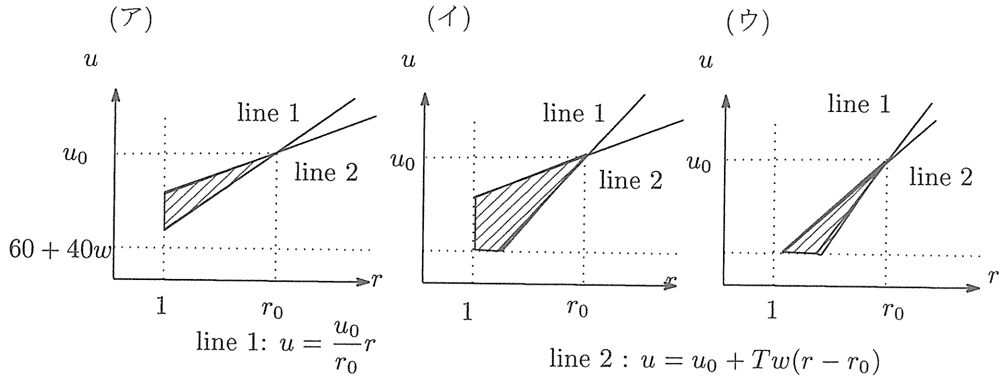


図 5: $\dfrac{u_0}{r_0} > Tw$ の場合

次に，$\mathrm{Vol}(D_2')$ を考える。

重み $w=1$ の場合に逆転される確率は 0 である。

Theorem 3.2. 定性評価点は６０点から９０点までの一様分布，提案価格は最低提案額 $r_j = 1$ から c までの一様分布を仮定する。重み $w \neq 0$ とする。ある特定の提案者の定性評価を x_0，提案価格を r_0 とする。 さらに，x_0，r_0 は一様分布をしていると仮定する。このとき，除算方式では得点は高いが，加算方式では得点の大きさが逆転される確率 G は，

$$G = \frac{\mathrm{Vol}(D_2)}{(90-60)(c-1)} = (1-w)^{-1}\frac{\mathrm{Vol}(D_2')}{(90-60)(c-1)}$$

である。ただし，$\mathrm{Vol}(D_2')$ （集合 D_2' の面積）は，以下のように与えられる。

（１） $Tw < \dfrac{u_0}{r_0}$ の場合 $(r - r_0 > 0)$ で，かつ

1. $\dfrac{u_0}{r_0}c \geqq 90 + 10w$ かつ $u_0 + Tw(c - r_0) \geqq 90 + 10w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\left(\frac{(90+10w)-u_0}{Tw} + r_0 - \frac{r_0}{u_0}(90+10w)\right)(90+10w-u_0)$$

2. $\dfrac{u_0}{r_0}c \geqq 90 + 10w$ かつ $u_0 + Tw(c - r_0) < 90 + 10w$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\Bigg[&\left(\frac{u_0}{r_0}c - (u_0 + Tw(c - r_0))\right)(c - r_0)\\ &- \left(\frac{u_0}{r_0}c - (90+10w)\right)\left(c - \frac{r_0}{u_0}(90+10w)\right)\Bigg]\end{aligned}$$

3. $\dfrac{u_0}{r_0}c < 90 + 10w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{u_0}c - (u_0 + Tw(c - r_0)\right)(c - r_0)$$

（２） $Tw > \dfrac{u_0}{r_0}$ の場合 $(r - r_0 < 0)$ で，かつ

1. $\dfrac{u_0}{r_0} \geqq 60 + 40w$ かつ $u_0 + Tw(1 - r_0) \geqq 60 + 40w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\left(\frac{u_0}{r_0} - (u_0 + Tw(1 - r_0)\right)(r_0 - 1)$$

2. $\dfrac{u_0}{r_0} \geqq 60 + 40w$ かつ $u_0 + Tw(1 - r_0) \leqq 60 + 40w$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D_2') =& \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{u_0}{r_0} - (u_0 + Tw(1 - r_0))\right)(r_0 - 1)\\ &- \left(60 + 40w - (u_0 + Tw(1 - r_0))\frac{60+40w-u_0}{Tw} + r_0 - 1\right)\Bigg]\end{aligned}$$

3. $\dfrac{u_0}{r_0} \leqq 60 + 40w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{60+40w-u_0}{Tw} + r_0\right) - \frac{r_0}{u_0}(60+40w)\right)(u_0 - (60+40w))$$

（１）の 1. 2. 3. の場合は，それぞれ図 6 の (ア)(イ)(ウ) である。
（２）の 1. 2. 3. の場合は，それぞれ図 7 の (ア)(イ)(ウ) である。

Example 3.1. Example 1.1 にある例では，重み $w = 0.6$, $T = 60$ である。最低提案額は１００億であるから，提案者Ｂのデータは $x_0 = 70$, $y_0 = 110$, $r_0 = 1.1$ である。定性評価は６０点から９０点まで，提案金額は $1 \leqq r \leqq c = 1.3$ までの一様分布であると仮定する。

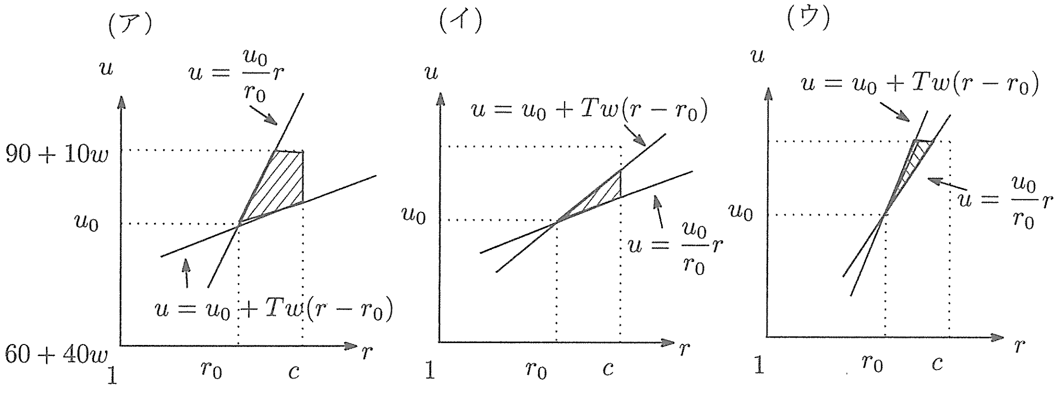
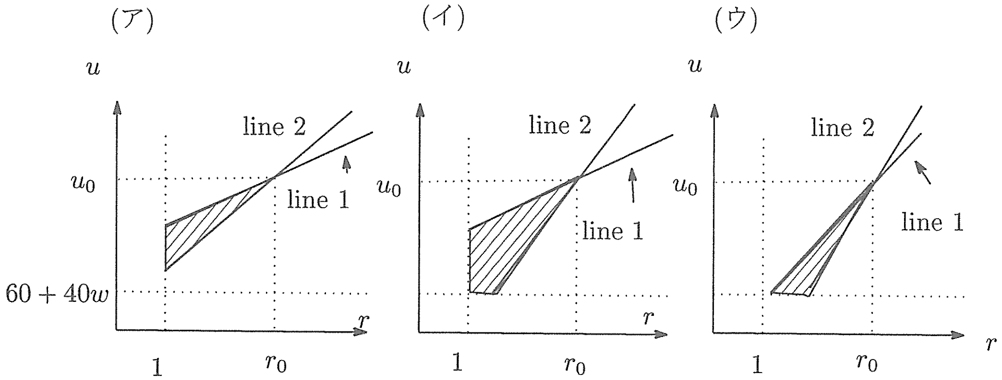


図 6: $\dfrac{u_0}{r_0} > Tw$ の場合



line 1: $u = \dfrac{u_0}{r_0}r$　　line 2 : $u = u_0 + Tw(r - r_0)$

図 7: $\dfrac{u_0}{r_0} < Tw$ の場合

加算方式では得点は高いが，除算方式では得点の大きさが逆転される確率 K は，D_1' の（2）の 1 の場合であるから，

$$K = (1 - 0.6)^{-1}\frac{\mathrm{Vol}(D_1')}{(90 - 60)(1.3 - 1)} = \frac{\frac{1}{2}(84.4 - 80)(1.1 - 1)}{0.4 \times 30 \times 0.3} = \frac{0.22}{0.4 \times 30 \times 0.3} = 0.0611\cdots$$

である。

除算方式では得点は高いが，加算方式では得点の大きさが逆転される確率 G は，D_2' の（1）の 2 の場合であるから，

$$G = (1 - 0.6)^{-1}\frac{\mathrm{Vol}(D_2')}{(90 - 60)(1.3 - 1)} = \frac{\frac{1}{2}((104 - 95.2)(1.3 - 1.1) - (104 - 96)(1.3 - 96/80))}{0.4 \times 30 \times 0.3}$$
$$= \frac{0.48}{0.4 \times 30 \times 0.3} = 0.133\cdots$$

である。

A，C についても同様に計算する。

$$\text{A}: x_0 = 80,\ y_0 = 120,\ r_0 = 1.2,\quad u_0 = x_0(1-w) + 100w = 92$$
$$\text{C}: x_0 = 60,\ y_0 = 100,\ r_0 = 1,\quad u_0 = x_0(1-w) + 100w = 84$$

であるから，加算方式では得点は高いが除算方式では得点の大きさが逆転される確率を K，除算方式では得点は高いが加算方式では得点の大きさが逆転される確率を G とすると，

	K 値	G 値
A	$0.1285\cdots$	$0.032\cdots$
B	$0.0611\cdots$	$0.133\cdots$
C	0	$0.3119\cdots$

となる。

例題 (Example) は重み w と最低提案価格 Y との差による減点を T とする。定性評価での得点は６０点から９０点までの一様分布をし，提案価格は Y から cY $(c > 1)$ までの金額も一様分布をしていると仮定する。このとき，得点 (定性評価点，提案価格) $= (x_j,\ y_j)$ は，$60 \leqq x_j \leqq 90,\ 1 \leqq \dfrac{y_j}{Y} = r_j \leqq c$ の範囲で，２次元空間（平面）上で一様分布をしている。

したがって，ある特定の者 (X という) の評価 $(x_0,\ y_0)$ が与えられたとき，加算方式の得点と除算方式の得点とが決まる。しかし，他の特定の者 (Z という) の得点は，一様分布しているものから任意に選ばれる，と仮定されている。したがって，加算方式では X の得点は Z よりも得点は高いが，除算方式では X が逆転される確率がある。その確率が K である。同様に，除算方式では X の得点は Z よりも得点は高いが，加算方式では X が逆転される確率がある。その確率が G である。

具体例では，

1. Ａは加算方式では他の特定の人より得点は高いが，除算方式では X に逆転され，得点が低くなる確率が 0.1285 である。
2. Ａは除算方式では他の特定の人より得点は高いが，加算方式では X に逆転され，点が低くなる確率が 0.032 である。

Ｂ，Ｃについても同様である。

これらＡ，Ｂ，Ｃを求める公式が，定理 3.1，定理 3.2 である。

このことを図で解説する。図８の２つの直線が $u = u_0 + Tw(r - r_0)$, $u = \dfrac{u_0}{r_0} r$ であり，２つの直線は点 (r_0, u_0) を通る。大きな外枠の四角形の面積を１とする。このとき，$\dfrac{u_0}{r_0} <> Tw$ に応じて，それぞれ右上の斜線で囲まれる面積が K や G の値となり，左下の斜線で囲まれる面積が G や K の値となる。一般には，図９のような６種類の場合が起こる。

直線 $u = u_0 + Tw(r - r_0)$ に Tw があるので，図から点 $(r_0,\ u_0)$ が平面 $[1,\ c] \times [60 + 40w,\ 90 + 10w]$ のどの位置に存在するかと w の値とで，K, G の値の大小が決まる。図８のようなグラフを用意して，２つの直線を描く。それから作られる２つの三角形か四角形の図形の面積を比較して，逆転される確率が求められる。

具体例の場合，提案者Ａ，Ｂ，Ｃの $(u,\ r)$-平面における図は図 10 である。長方形 $[1,\ 1.3] \times [84,\ 96]$ の面積（すなわち全確率）を１としたとき，図形 D_1', D_2' (斜線部分) に対応する面積に，$(1 - w)$

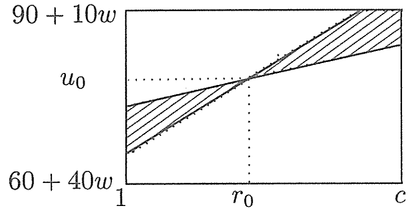


図 8: K, G の値の説明図

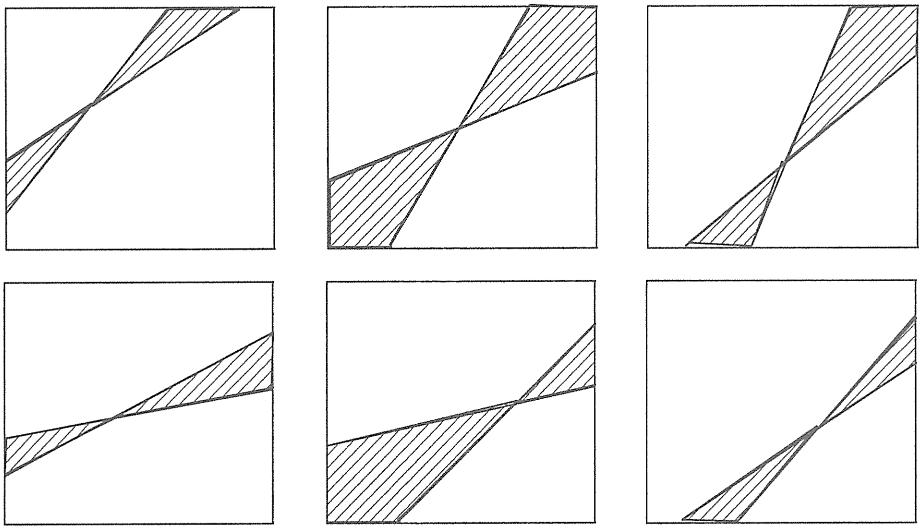


図 9: K, G の 6 種類の図

の逆数をかけたものが，それぞれ，加算方式では得点は高いが除算方式では得点の大きさが逆転される確率 K，除算方式では得点は高いが加算方式では得点の大きさが逆転される確率 G である。ただし，w は重みである。

4　除算方式と加算方式で順位が入れ替わる確率 (一様分布その 2)

ここでは，定性評価（非価格評価）と価格評価がともに一様分布であると仮定する。

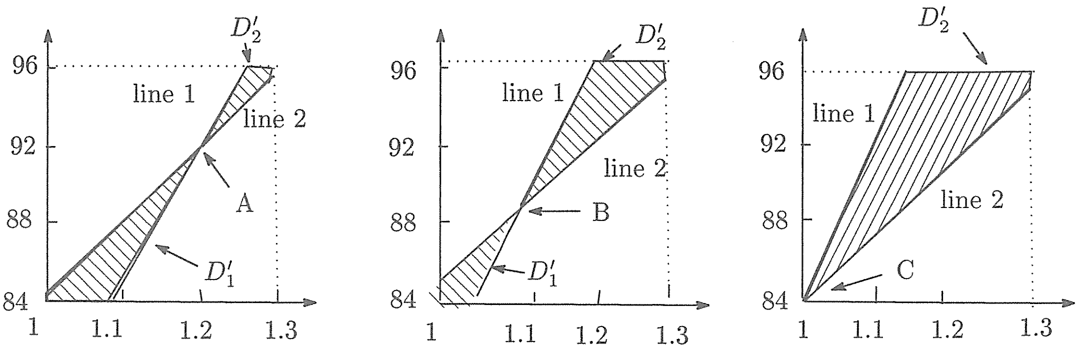
除算方式と加算方式により，i 番目 と j 番目の提案者の順序（順位）が変化する条件は

$$\left(\frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}-\frac{x_i(1-w)+100w}{r_i}\right)\Big((1-w)(x_j-x_i)-wT(r_j-r_i)\Big)<0$$

である。

$w=1$ のとき，

$$100T\cdot\frac{(r_j-r_i)^2}{r_ir_j}<0$$



line 1: $u = \dfrac{92}{1.2}r$
line 2: $u = 92 + 36(r - 1.2)$

line 1: $u = 80r$
line 2 : $u = 88 + 36(r - 1.1)$

line 1: $u = 84r$
line 2: $u = 84 + 36(r - 1)$

図 10: 具体例の図

となり，矛盾する。

したがって，入れ替わり（逆転）の起こる確率は 0 である。

重み $w \neq 1$ を固定 (fixed) する。ある特定の提案者 $(x_0,\ r_0)$ が与えられたとする。加算方式と除算方式で計算したとき，順位が入れ替わる確率を求める。

前提条件は，定性評価点は a 点から b 点までの一様分布，提案価格は最低提案額 $r_j = 1$ から c までの一様分布を仮定する。$a \leqq x,\ x_0 \leqq b,\quad 1 \leqq r,\ r_0 \leqq c$ である。集合 $D_1,\ D_2$ を

$$D_1 = \left\{ (x,r) \middle| \ \frac{x(1-w)+100w}{r} > \frac{x_0(1-w)+100w}{r_0},\ (1-w)(x-x_0) < wT(r-r_0) \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x,r) \middle| \ \frac{x(1-w)+100w}{r} < \frac{x_0(1-w)+100w}{r_0},\ (1-w)(x-x_0) > wT(r-r_0) \right\}$$

と定義する。このとき，

加算方式では得点は高いが，除算方式では得点の大きさが逆転される確率は，

$$\frac{\mathrm{Vol}(D_1)}{(b-a)(c-1)}$$

である。除算方式では得点は高いが，加算方式では得点の大きさが逆転される確率は，

$$\frac{\mathrm{Vol}(D_2)}{(b-a)(c-1)}$$

で求められる。

$$u = x(1-w) + 100w, \quad u_0 = x_0(1-w) + 100w, \quad du = (1-w)dx$$

と変換すると，$D_1,\ D_2$ はそれぞれ $D_1',\ D_2'$ に変換される。ただし，

$$D_1' = \left\{ (u,r) \middle| \ \frac{u}{r} > \frac{u_0}{r_0}, \quad u - u_0 < wT(r-r_0) \right\}$$

$$D_2' = \left\{ (x,r) \middle| \; \frac{u}{r} < \frac{u_0}{r_0}, \quad u - u_0 > wT(r - r_0) \right\}$$

であり，$a(1-w)+100w \leqq u,\ u_0 \leqq b(1-w)+100w, \quad 1 \leqq r,\ r_0 \leqq c$ である。

Theorem 4.1. 定性評価点は a 点から b 点までの一様分布，提案価格は最低提案額 $r_j = 1$ から c までの一様分布を仮定する。重み $w \neq 1$ とする。このとき，加算方式では得点は高いが，除算方式では得点の大きさが逆転される確率は，

$$\frac{\mathrm{Vol}(D_1)}{(b-a)(c-1)} = (1-w)^{-1} \frac{\mathrm{Vol}(D_1')}{(b-a)(c-1)}$$

である。ただし，$\mathrm{Vol}(D_1')$ は，以下のように与えられる。

（1） $\dfrac{u_0}{r_0} < Tw$ の場合（$r - r_0 > 0$）で，かつ

1. $\dfrac{u_0}{r_0}c \leqq b(1-w)+100w$ かつ $u_0 + Tw(c-r_0) \geqq b(1-w)+100w$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\Bigg[&\left(u_0 + Tw(c-r_0) - \frac{u_0}{r_0}c\right)(c - r_0) \\ &- (u_0 + Tw(c-r_0) - (b(1-w)+100w))\left(c - \left(\frac{b(1-w)+100w-u_0}{Tw} + r_0\right)\right)\Bigg]\end{aligned}$$

2. $\dfrac{u_0}{r_0}c \leqq b(1-w)+100w$ かつ $u_0 + Tw(c-r_0) < b(1-w)+100w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\left(u_0 + Tw(c-r_0) - \frac{u_0}{r_0}c\right)(c - r_0)$$

3. $\dfrac{u_0}{r_0}c > b(1-w)+100w$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}&\left(\frac{r_0}{u_0}(b(1-w)+100w) - \left(\frac{b(1-w)+100w-u_0}{Tw} + r_0\right)\right) \\ &\times (b(1-w)+100w-u_0)\end{aligned}$$

（2） $\dfrac{u_0}{r_0} > Tw$ の場合（$r - r_0 < 0$）で，かつ

1. $\dfrac{u_0}{r_0} \geqq a(1-w)+100w$ かつ $u_0 + Tw(1-r_0) \geqq a(1-w)+100w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\left(u_0 + Tw(1-r_0) - \frac{u_0}{r_0}\right)(r_0 - 1)$$

2. $\dfrac{u_0}{r_0} < a(1-w)+100w$ かつ $u_0 + Tw(1-r_0) \geqq a(1-w)+100w$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\Bigg[&\left(u_0 + Tw(1-r_0) - \frac{u_0}{r_0}\right)(r_0 - 1) \\ &- \left(a(1-w)+100w - \frac{u_0}{r_0}\right)\left(\frac{r_0}{u_0}(a(1-w)+100w) - 1\right)\Bigg]\end{aligned}$$

3. $\dfrac{u_0}{r_0} < a(1-w)+100w$ かつ $u_0+Tw(c-r_0) < a(1-w)+100w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_1') = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{u_0}(a(1-w)+100w) - \left(\frac{a(1-w)+100w-u_0}{Tw}+r_0\right)\right) \times (u_0-(a(1-w)+100w))$$

Theorem 4.2. 定性評価点は a 点から b 点までの一様分布，提案価格は最低提案額 $r_j = 1$ から c までの一様分布を仮定する。重み $w \neq 1$ とする。このとき，除算方式では得点は高いが，加算方式では得点の大きさが逆転される確率は，

$$(1-w)^{-1}\frac{\mathrm{Vol}(D_2')}{(b-a)(c-1)}$$

である。ただし，$\mathrm{Vol}(D_2')$ は，以下に与えられられる。

（1） $Tw < \dfrac{u_0}{r_0}$ の場合（ $r-r_0 > 0$ ）で，かつ

1. $\dfrac{u_0}{r_0}c \geqq b(1-w)+100w$ かつ $u_0+Tw(c-r_0) \geqq b(1-w)+100w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\left(\frac{(b(1-w)+100w)-u_0}{Tw}+r_0-\frac{r_0}{u_0}(b(1-w)+100w)\right)(b(1-w)+100w-u_0)$$

2. $\dfrac{u_0}{r_0}c \geqq b(1-w)+100w$ かつ $u_0+Tw(c-r_0) < b(1-w)+100w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u_0}{r_0}c-(u_0+Tw(c-r_0))\right)(c-r_0) - \left(\frac{u_0}{r_0}c-(b(1-w)+100w)\right)\left(c-\frac{r_0}{u_0}(b(1-w)+100w)\right)\right]$$

3. $\dfrac{u_0}{r_0}c < b(1-w)+100w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{u_0}c-(u_0+Tw(c-r_0))\right)(c-r_0)$$

（2） $Tw > \dfrac{u_0}{r_0}$ の場合（ $r-r_0 < 0$ ）で，かつ

1. $\dfrac{u_0}{r_0} \geqq a(1-w)+100w$ かつ $u_0+Tw(1-r_0) \geqq a(1-w)+100w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\left(\frac{u_0}{r_0}-(u_0+Tw(1-r_0))\right)(r_0-1)$$

2. $\dfrac{u_0}{r_0} \geqq a(1-w)+100w$ かつ $u_0+Tw(1-r_0) \leqq a(1-w)+100w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u_0}{r_0}-(u_0+Tw(1-r_0))\right)(r_0-1) - \left(a(1-w)+100w-(u_0+Tw(1-r_0))\frac{a(1-w)+100w-u_0}{Tw}+r_0-1\right)\right]$$

3. $\dfrac{u_0}{r_0} \leqq a(1-w)+100w$ のとき，

$$\mathrm{Vol}(D_2') = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a(1-w)+100w-u_0}{Tw}+r_0\right)-\frac{r_0}{u_0}(a(1-w)+100w)\right) \times (u_0-(a(1-w)+100w))$$

5　一般分布での除算方式と加算方式で順位が入れ替わる確率

Theorem 5.1. 定性評価の変数 x は同一な分布関数 $F(x)$ に従い，価格評価の変数 $r \geqq 1$ は同一な分布関数 $R(y)$ に従い，密度関数をそれぞれ $F'(x) = f(x)$, $R'(y) = r(y)$ と仮定する。このとき，加算方式では点は高いが，除算方式では得点の大きさが逆転される確率 K は，

$$K = \iint_{D_1} f(x)r(y)\ dxdy = \iint_{D_1'} f\left(\frac{u-100w}{1-w}\right) r(y)\frac{1}{1-w}dudy,$$

である。ただし，

$$u = x(1-w) + 100w, \quad u_0 = x_0(1-w) + 100w$$

$$D_1' = \left\{ (u,r) \,\middle|\, \frac{u}{r} > \frac{u_0}{r_0}, \quad u - u_0 < wT(r - r_0) \right\}$$

と表される。したがって，

(1)　$\dfrac{u_0}{r_0} < Tw$ の場合　（ $r - r_0 > 0$ ），

$$K = \frac{1}{1-w}\int_{r_0}^{\infty}\left[\int_{\frac{u_0}{r_0}y}^{u_0+wT(y-r_0)} f\left(\frac{u-100w}{1-w}\right)du\right]r(y)dy$$

(2)　$\dfrac{u_0}{r_0} \geqq Tw$ の場合（ $r - r_0 < 0$ ），

$$K = \frac{1}{1-w}\int_{1}^{r_0}\left[\int_{\frac{u_0}{r_0}y}^{u_0+wT(y-r_0)} f\left(\frac{u-100w}{1-w}\right)du\right]r(y)dy$$

である。

Theorem 5.2. 定性評価の変数 x は同一な分布関数 $F(x)$ に従い，価格評価の変数 $r \geqq 1$ はすべて同一な分布関数 $R(y)$ に従い，密度関数をそれぞれ $F'(x) = f(x)$, $R'(y) = r(y)$ と仮定する。さらに，

$$D_2' = \left\{ (u,r) \,\middle|\, \frac{u}{r} < \frac{u_0}{r_0}, \quad u - u_0 > wT(r - r_0) \right\}$$

と定義する。ただし，

$$u = x(1-w) + 100w, \quad u_0 = x_0(1-w) + 100w$$

である。

このとき，除算方式では点は高いが，加算方式では得点の大きさが逆転される確率 G は，

$$G = \frac{1}{1-w}\iint_{D_2'} f\left(\frac{u-100w}{1-w}\right) r(y)du\ dy$$

である。

(1)　$Tw < \dfrac{u_0}{r_0}$ の場合　（ $r - r_0 > 0$ ），

$$G = \frac{1}{1-w}\int_{r_0}^{\infty}\left[\int_{u_0+wT(y-r_0)}^{\frac{u_0}{r_0}y} f\left(\frac{u-100w}{1-w}\right)du\right]r(y)dy$$

(2)　$Tw \geqq \dfrac{u_0}{r_0}$ の場合　（ $r - r_0 < 0$ ），

$$G = \frac{1}{1-w}\int_{1}^{r_0}\left[\int_{u_0+wT(y-r_0)}^{\frac{u_0}{r_0}y} f\left(\frac{u-100w}{1-w}\right)du\right]r(y)dy$$

である。

確率の基本性質について述べる。X, Y を独立な確率変数とする。X と Y の分布関数をそれぞれ $F(x)$, $G(y)$ とする。密度関数が存在すれば，$F'(x) = f(x)$, $G'(y) = g(y)$ とする。

このとき，次のことが成立する。

1．(i) aX ($a > 0$ の定数) の分布関数は $F\left(\frac{1}{a}\right)$ である。

Proof.

$$\Pr(aX < x) = \Pr\left(X < \frac{x}{a}\right) = F\left(\frac{1}{a}\right)$$

□

2．$Z = X + Y$ の密度関数は

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

である。分布関数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)dF(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-t)dG(t)$$

である。

Proof. X, Y の結合密度関数は $f(x)g(y)$ である。Z, X の結合密度関数は $f(x)g(y) = f(x)g(z-x)$ であるから，

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$$

である。よって，

$$\begin{aligned}\Pr(X+Y<x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(X=t)\Pr(X+Y<x,\ X=t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)dF(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)dF(t)\end{aligned}$$

を得る。 □

3．$W = \frac{X}{Y}$ の密度関数 $h(w)$ は，

$$h(w) = \int_{-\infty}^{\infty} |t|\ f(wt)g(t)dt$$

である。

3'. $Y > 0$ とする。このとき，

$$\begin{aligned}\Pr\left(\frac{X}{Y} < x\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(Y=y)\Pr\left(\frac{X}{Y} < x,\ Y = yb\right)dy \\ &= \int_{0}^{\infty} g(y)\Pr(X < xy)dy = \int_{0}^{\infty} g(y)F(xy)dy = \int_{0}^{\infty} F(xt)dG(t)\end{aligned}$$

4．$aX + b$ (a, b は定数，$a > 0$) の分布関数は，

$$\Pr(aX + b \leqq x) = \Pr\left(X \leqq \frac{x-a}{a}\right) = F\left(X \leqq \frac{x-a}{a}\right)$$

5．X_1, X_2, ..., X_n は，分布関数が $F(x)$ からの無作為標本とする。それらの最大値の分布関数を $F_{(n)}(x)$，最小値の分布関数を $F_{(1)}(x)$ とする。このとき，

$$F_{(1)}(x) = 1 - \{1 - F(x)\}^n, \qquad F_{(n)}(x) = \{F(x)\}^n$$

が成り立つ。

Proof. X_1, X_2, ..., X_n が独立であることから，最大値の分布関数は

$$\begin{aligned} F_{(n)}(x) &= \Pr\{\max(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) \leqq x\} = \Pr(X_1 \leqq x,\ X_2 \leqq x,\ \ldots,\ X_n \leqq x) \\ &= \Pr(X_1 \leqq x)\Pr(X_2 \leqq x)\cdots\Pr(X_n \leqq x) = \{F(x)\}^n \end{aligned}$$

である。また，最小値の分布関数は

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x) &= \Pr\{\min(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) \leqq x\} = 1 - \Pr\{\min(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) > x\} \\ &= 1 - \Pr(X_1 > x,\ X_2 > x, \ldots, X_n > x) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > x)\Pr(X_2 > x)\cdots\Pr(X_n > x) = 1 - \{1 - F(x)\}^n \end{aligned}$$

である。

Corollary 5.1. 一般に，X_1, X_2, ..., X_n は，分布関数が連続分布 $F(x)$ からの無作為標本とする。標本を大きい順に並べたとき，順位 r 番目の値の分布関数を $F_{(n+1-r)}(x)$ とする。このとき，

$$F_{(n+1-r)}(x) = r\binom{n-1}{r}\int_{-\infty}^{x} F(t)^{n-r}(1-F(t))^{n-1}dF(t)$$

が成立する。

Proof. 順序統計量を $X_{(1)} \leqq X_{(2)} \leqq \cdots \leqq X_{(n)}$ とする。$X_{(1)}$, $X_{(2)}$, $\cdots$, $X_{(n)}$ は同じ母集団からの連続分布関数から選んだものであるから，同順位になる確率は 0 であることに注意して，どれを順位 r にするか選ぶ方法の数が n 通りで，残り $n-1$ 個からどの組み合わせを順位 r の値より小さくなるかを選ぶ選び方が $\binom{n-1}{r-1}$ である。よって，$n\binom{n-1}{r-1}$ 通りある。その各々に対して順位 r の値 $X_{(r)}$ の分布関数 $\Pr(X_{(r)} \leqq x)$ は，

$$\begin{aligned} &\Pr(X_{(r)} \leqq x) \\ &= n\binom{n-1}{r-1}\int_{-\infty}^{x} \Pr(X_{(1)} \leqq t,\ \cdots,\ X_{(r-1)} \leqq t,\ X_{(r+1)} > t,\ \cdots,\ X_{(n)} > t)\Pr(X_{(r)} = t)dt \\ &= n\binom{n-1}{r-1}\int_{-\infty}^{x} F(t)^{r-1}\left[1-F(t)\right]^{n-r}dF(t) = r\binom{n}{r}\int_{-\infty}^{x} F(t)^{r-1}\left[1-F(t)\right]^{n-r}dF(t) \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)}\int_{-\infty}^{x} F(t)^{r-1}\left[1-F(t)\right]^{n-r}dF(t) \end{aligned}$$

である。 □

6．$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ は，分布関数が $F(x)$ からの無作為標本とする。$X_j > 0\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ とし，$X = \min\{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\}$ とする。このとき，$\dfrac{X_j}{X}$ の分布関数は，

$$\begin{aligned}\Pr\left(\frac{X_j}{X} \leqq x\right) &= \int_0^\infty \Pr(X=t)\Pr\left(\frac{X_j}{X} \leqq x,\ X = t,\ X_j \geqq X\right)dt + \Pr\left(\frac{X_j}{X} = 1\right)\\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(1 - \{1-F(t)\}^n\right)(F(xt) - F(t))dt + \frac{1}{n}\\ &= \int_0^\infty n\{1-F(t)\}^{n-1}F'(t)(F(xt)-F(t))dt + \frac{1}{n}\\ &= \int_0^\infty n\{1-F(t)\}^{n-1}(F(xt)-F(t))dF(t) + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

である。 □

Example 5.1. $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ は区間 [1, 2] 上の一様分布とすると，分布関数 $F(x)$ は

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t < 1)\\ t-1 & (1 \leqq t \leqq 2)\\ 1 & (t \geqq 2)\end{cases}$$

である。$X = \min\{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\}$ とする。このとき，$\dfrac{X_j}{X}$ の分布関数 $G(x)$ は，

$$G(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1)\\ 1 & (x \geqq 2)\end{cases}$$

であり，$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，

$$G(x) = -2(x-1)\left(2-\frac{2}{x}\right)^n + \frac{n}{n+1}x\left(2-\frac{2}{x}\right)^{n+1} + (x-1)\frac{n+2}{n+1} + \frac{1}{n}$$

である。

Proof. $1 \leqq x \leqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\Pr\left(\frac{X_j}{X} \leqq x\right) &= \int_0^\infty n\{1-F(t)\}^{n-1}(F(xt)-F(t))dF(t) + \Pr\left(\frac{X_j}{X} = 1\right)\\ &= \int_1^{\frac{2}{x}} n(2-t)^{n-1}(x-1)tdt + \int_{\frac{2}{x}}^2 n(2-t)^{n-1}(2-t)dt + \frac{1}{n}\\ &= n(x-1)\int_1^{\frac{2}{x}}(2-t)^{n-1}(2-(2-t))dt + n\int_{\frac{2}{x}}^2 (2-t)^n dt + \frac{1}{n}\\ &= n(x-1)\left[\frac{-2}{n}(2-t)^n + \frac{1}{n+1}(2-t)^{n+1}\right]_1^{\frac{2}{x}} - \frac{n}{n+1}\left[(2-t)^{n+1}\right]_{\frac{2}{x}}^2 + \frac{1}{n}\\ &= n(x-1)\left[\frac{-2}{n}\left(2-\frac{2}{x}\right)^n + \frac{1}{n+1}\left(2-\frac{2}{x}\right)^{n+1} + \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}\right]\\ &\quad + \frac{n}{n+1}\left(2-\frac{2}{x}\right)^{n+1} + \frac{1}{n}\\ &= -2(x-1)\left(2-\frac{2}{x}\right)^n + \frac{n}{n+1}x\left(2-\frac{2}{x}\right)^{n+1} + (x-1)\frac{n+2}{n+1} + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

である。 □

6　除算方式の分布関数

Theorem 6.1. 定性評価 x_j は $[0,\ 100]$ 上の一様分布で，提案比率 r_j は $[1,\ \infty)$ 上の任意の密度関数 $r(t)$ をもつとし，その分布関数を $R(t)=\int_1^t r(t)dt$ とすると，$R(t)=0\ (t \leqq 1)$ である。

除算方式 $\dfrac{(1-w)x_j+100w}{r_j}$ の分布関数を $K(x)$ とする。このとき，

$$K(x)=1-\frac{x}{100(1-w)}\int_{\frac{100w}{x}}^{\frac{100}{x}} R(t)dt$$

である。

さらに，$r(t)$ を $t \geqq 1$ で定義された平均 λ の指数分布とすると，

$$K(x)=1-\frac{1}{w-1}+\frac{\alpha x}{100(1-w)}-\frac{\lambda x}{100(1-w)}\left(e^{-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{100}{x}-1\right)}-e^{-\frac{\alpha-1}{\lambda}}\right)$$

である。ただし，$\alpha=\max\left(1,\ \dfrac{100w}{x}\right)$ である。

Proof. $F(t)=\dfrac{t}{100}\quad(0 \leqq t \leqq 100)$，$F(t)=0\quad(t \leqq 0)$ かつ $F(t)=1\quad(t \geqq 1)$ である。

$$0 \leqq \frac{tx-100w}{1-w} \leqq 100, \qquad \frac{100w}{x} \leqq t \leqq \frac{100}{x}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
K(x) &= \Pr\left(\frac{(1-w)x_j+100w}{r_j} \leqq x\right) \\
&= \int_1^\infty \Pr(r_j=t)\Pr\left(\frac{(1-w)x_j+100w}{t} \leqq x\right)dt = \int_1^\infty r(t)\Pr\left(x_j \leqq \frac{tx-100w}{1-w}\right)dt \\
&= \int_1^\infty r(t)F\left(\frac{tx-100w}{1-w}\right)dt = \int_{\frac{100w}{x}}^{\frac{100}{x}} r(t)\times\frac{1}{100}\times\frac{tx-100w}{1-w}dt+\int_{\frac{100}{x}}^\infty r(t)dt \\
&= \frac{x}{100(1-w)}\int_{\frac{100w}{x}}^{\frac{100}{x}} t\cdot r(t)dt-\frac{w}{1-w}\int_{\frac{100w}{x}}^{\frac{100}{x}} r(t)dt+\int_{\frac{100}{x}}^\infty r(t)dt \\
&= \frac{x}{100(1-w)}\int_{\frac{100w}{x}}^{\frac{100}{x}} t\cdot r(t)dt+\int_{\frac{100w}{x}}^\infty r(t)dt+\frac{1}{w-1}\int_{\frac{100w}{x}}^{\frac{100}{x}} r(t)dt \\
&= \frac{x}{100(1-w)}\left\{\Big[tR(t)\Big]_{\frac{100w}{x}}^{\frac{100}{x}}-\int_{\frac{100w}{x}}^{\frac{100}{x}} R(t)dt\right\} \\
&\qquad +\left(1-G\left(\frac{100w}{x}\right)\right)+\frac{1}{w-1}\left(G\left(\frac{100}{x}\right)-G\left(\frac{100p}{x}\right)\right) \\
&= 1-\frac{x}{100(1-w)}\int_{\frac{100w}{x}}^{\frac{100}{x}} R(t)dt
\end{aligned}$$

を得る。次に，仮定から，$r(t)$ が平均 λ の指数分布

$$r(t)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t-1}{\lambda}}\quad(t \geqq 1), \qquad r(t)=0\quad(t<1)$$

で表せるから，

$$R(t)=1-e^{-\frac{t-1}{\lambda}}\quad(t \geqq 1), \qquad R(t)=0\quad(t<1)$$

である。したがって，除算方式 $\dfrac{(1-w)x_j+100w}{r_j}$ の分布関数 $K(x)$ は，$\alpha=\max\left(1,\dfrac{100w}{x}\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int_{\frac{100w}{x}}^{\frac{100}{x}} R(t)dt &= \int_{\frac{100w}{x}}^{\alpha} R(t)dt + \int_{\alpha}^{\frac{100}{x}} R(t)dt \\ &= \int_{\alpha}^{\frac{100}{x}} \left(1-e^{-\frac{t-1}{\lambda}}\right)dt + \int_{\alpha}^{\frac{100}{x}} R(t)dt = \left[t+\lambda e^{-\frac{t-1}{\lambda}}\right]_{\alpha}^{\frac{100}{x}} \\ &= \left(\frac{100}{x}-\alpha\right)+\lambda(e^{-\frac{1}{\lambda}(\frac{100}{x}-1)}-e^{-\frac{\alpha-1}{\lambda}})\end{aligned}$$

を得る。よって，

$$K(x)=1-\frac{1}{w-1}+\frac{\alpha x}{100(1-w)}-\frac{\lambda x}{100(1-w)}(e^{-\frac{1}{\lambda}(\frac{100}{x}-1)}-e^{-\frac{\alpha-1}{\lambda}})$$

である。ただし，$\alpha=\max\left(1,\ \dfrac{100w}{x}\right)$ である。 □

6.1 加算方式と除算方式の平均と分散

定性評価 x_j の平均を μ_x， 分散を σ_x^2，提案比率 r_j の平均を μ_r， 分散を σ_r^2 とする。このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\text{加算}) &= (1-w)\mu_x + w(100-(\mu_r-1)T) \\ \mathrm{V}(\text{加算}) &= (1-w)^2\sigma_x^2 + w^2T^2\sigma_r^2\end{aligned}$$

である。次に除算方式を考える。除算方式における平均 E(除算) は，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\text{除算}) &= \iint \frac{x(1-w)+100w}{r_j} r(y)f(x)dydx = \int \frac{r(y)}{y}dy\ \int (x(1-w)+100w)f(x)dx \\ &= \int \frac{r(y)}{y}dy\ ((1-w)\mu_x+100w)\end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}&\int \Big((x(1-w)+100w)-(1-w)\mu_x+100w\Big)^2 f(x)dx \\ &= \int (1-w)^2(x-\mu_x)^2 = (1-w)^2\sigma_x^2\end{aligned}$$

であるから，

$$\int (x(1-w)+100w)^2 f(x)dx - ((1-w)\mu_x+100w)^2 = (1-w)^2\sigma_x^2$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\text{除算}^2) &= \iint \left(\frac{x(1-w)+100w}{y}\right)^2 r(y)f(x)dydx \\ &= \int \frac{r(y)}{y^2}dy\ \int (x(1-w)+100w)^2 f(x)dx \\ &= \int \frac{r(y)}{y^2}dy\left((1-w)^2\sigma_x^2 + ((1-w)\mu_x+100w)^2\right)\end{aligned}$$

である。よって，除算方式における分散 V(除算) は，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\text{除算}) &= \mathrm{E}(\text{除算}^2) - \mathrm{E}(\text{除算})^2 \\ &= \int \frac{r(y)}{y^2}dy\left((1-w)^2\sigma_x^2 + ((1-w)\mu_x + 100w)^2\right) - \left[\int \frac{r(y)}{y}dy\ (1-w)\mu_x + 100w)\right]^2\end{aligned}$$

である。

7 最低提案額を入れた提案者が 1 位である確率

7.1 定性評価は一様分布で提案額の比は指数分布のとき

Theorem 7.1 (除算方式). 各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，定性評価 x_j は区間 $[0,\ 100]$ の一様分布，提案額の比 r_j は $[1,\ \infty)$ の平均 λ の指数分布であり，独立であると仮定する。このとき，最低提案額を入れた提案者の定性評価が x のとき, 除算方式ではつねに 1 位である確率は,

$$G(x)^{n-1}$$

である。ただし，$\alpha(t) = \dfrac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w}$ であり，

$$G(x) = \frac{x}{100} + \frac{\lambda}{100}\cdot\frac{x(1-w)+100w}{1-w}\left(1 - e^{-\frac{1}{\lambda}(\alpha(100)-1)}\right)$$

であり，w は重みである。

Proof. 一位である提案者が $j = 1$ であるとしても一般性を失わない。除算方式は，各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，

$$I_j = \frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}$$

である。平均 λ の指数分布の密度関数 $r(t)$ は

$$r(t) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t-1}{\lambda}} \quad (t \geqq 1)$$

であるから，指数分布の分布関数を $R(t)$ とすると，$R(t) = 1 - e^{-\frac{t-1}{\lambda}}$ $(t \geqq 1)$, その他のとき 0 である。各 $j \neq 1$ に対して，各 I_j の分布関数 $G(x) = \Pr(I_1 \geqq I_j)$ は,

$$\begin{aligned}G(x) =&\Pr(I_1 \geqq I_j) = \Pr\left(x_1(1-w)+100w \geqq \frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}\right) \\ =&\Pr\left(r_j \geqq \frac{x_j(1-w)+100w}{x(1-w)+100w}\right) = \int_0^{100}\Pr(x_j = t)\Pr\left(r_j \geqq \frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w}\right)dt \\ =&\frac{1}{100}\left(\int_0^x 1\ dt + \int_x^{100}(1-R(\alpha))dt\right) = \frac{1}{100}\left(x + \int_x^{100} e^{-\frac{t-1}{\lambda}}dt\right) \\ =&\frac{x}{100} + \frac{1}{100}\left[-\lambda\cdot\frac{x(1-w)+100w}{1-w}e^{-\frac{\alpha(t)-1}{\lambda}}\right]_{t=x}^{100} \\ =&\frac{x}{100} + \frac{\lambda}{100}\cdot\frac{x(1-w)+100w}{1-w}\left(1 - e^{-\frac{1}{\lambda}(\alpha(100)-1)}\right)\end{aligned}$$

である。よって，各 j は互いに独立であるから，求める確率は，

$$\Pr(I_1 \geqq I_j \quad \text{for all } j \neq 1) = \Pr\left(\max_{j\neq 1} I_j \leqq I_1\right) = G(x)^{n-1}$$

である。 □

Theorem 7.2 (加算方式). 各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，定性評価 x_j は区間 $[0,\ 100]$ の一様分布，提案額の比 r_j は $[1,\ \infty)$ の平均 λ の指数分布であり，独立であると仮定する。このとき，最低提案額を入れた提案者の定性評価が x のとき, 加算方式ではつねに 1 位である確率は,

$$\Pr(K_1 \geqq K_j \quad \text{for all } j \neq 1) = F(x)^{n-1}$$

である。ただし，w は重みで，$\beta(t) = \dfrac{1-w}{wT}(t-x)+1$ で，

$$F(x) = \frac{x}{100} + \frac{\lambda}{100}\cdot\frac{wT}{1-w}\left(1-e^{-\frac{1}{\lambda}(\beta(100)-1)}\right)$$

である。

Proof. 一位である提案者が $j=1$ であるとしても一般性を失わない。加算方式は，各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，

$$K_j = x_j(1-w) + w(100-(r_j-1)T)$$

である。平均 λ の指数分布の密度関数 $r(t)$ は

$$r(t) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t-1}{\lambda}} \quad (t \geqq 1)$$

であるから，指数分布の分布関数を $R(t)$ とすると，$R(t) = 1-e^{-\frac{t-1}{\lambda}} \quad (t \geqq 1)$, その他のとき 0 である。各 $j \neq 1$ に対して，各 I_j の分布関数 $F(x) = \Pr(I_1 \geqq I_j)$ は，

$$\begin{aligned}
F(x) =& \Pr(K_1 \geqq K_j) \\
=& \Pr\left(x_1(1-w) + w(100-(r_1-1)T) \geqq x_j(1-w) + w(100-(r_j-1)T)\right) \\
=& \Pr\left(x(1-w) - wT \geqq x_j(1-w) - wr_jT\right) \\
=& \int_0^{100} \Pr(x_j = t)\Pr\left(r_j \geqq \frac{1-w}{wT}(t-x)+1\right)dt \\
=& \frac{1}{100}\left(\int_0^x 1\ dt + \int_x^{100} \Pr\left(r_j \geqq \frac{1-w}{wT}(t-x)+1\right)\right)dt \\
=& \frac{x}{100} + \frac{1}{100}\int_x^{100}(1-R(\beta(t)))dt = \frac{x}{100} + \frac{1}{100}\int_x^{100} e^{-\frac{\beta(t)-1}{\lambda}}dt \\
=& \frac{x}{100} + \frac{1}{100}\left[-\lambda\cdot\frac{wT}{1-w}e^{-\frac{\beta(t)-1}{\lambda}}\right]_x^{100} = \frac{x}{100} + \frac{\lambda}{100}\cdot\frac{wT}{1-w}\left(1-e^{-\frac{1}{\lambda}(\beta(100)-1)}\right)
\end{aligned}$$

である。よって，各 K_j は互いに独立であるから，求める確率は，

$$\Pr(K_1 \geqq K_j \quad \text{for all } j \neq 1) = \Pr\left(\max_{j\neq 1} K_j \leqq K_1\right) = F(x)^{n-1}$$

である。 □

次に, すべて一様分布で最低提案額を入れた提案者の定性評価が x のときの確率分布関数を計算する。

Theorem 7.3 (除算方式). 各 $j=1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，定性評価 x_j は区間 $[a,\ b]$ の一様分布，提案額の比 r_j は $[1,\ c]$ の一様分布であり，独立であると仮定する。任意の非負実数を $\varepsilon \geqq 0$ とする。このとき，最低提案額を入れた提案者の定性評価が x のとき, 除算方式でつねに他の入札者より ε 以上の得点差をつけて 1 位である確率は $G(x)^{n-1}$ である。

ただし，$\alpha(t)=\dfrac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon}$ で，$t=t_c$ は

$$\alpha(t)=\frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon}=c$$

を満たし $t_0=\min(t_c,\ b)$ であり，$\alpha(t)=1$ を満たす $t=t_\varepsilon$ を用いて，x_ε は $x_\varepsilon=\max(a,\ t_\varepsilon)$ であり,

$$G(x)=\frac{x_\varepsilon-a}{b-a}+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\cdot\left(c(t_0-x_\varepsilon)-\frac{1}{2}\frac{x_\varepsilon(1-w)+100w}{1-w}(\alpha(t_0)^2-\alpha(x_\varepsilon)^2)\right)$$

であり，w は重みである。

Proof. 一位である提案者が $j=1$ であるとしても一般性を失わない。除算方式は，各 $j=1,\ 2,\ \ldots,$ に対して,

$$I_j=\frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}$$

である。r_j の密度関数は区間 $[1,\ c]$ 上でつねに $\dfrac{1}{c-1}$ であるから，分布関数を $R(t)$ とすると，$R(t)=1\ (t\geqq c),\quad \dfrac{t-1}{c-1}\ (1\leqq t\leqq c),\quad 0\ (t\leqq 1)$ である。

等式

$$\alpha(t)=\frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon}=1$$

を満足する t を $t_\varepsilon(\leqq x)$ とし,

$$x_\varepsilon=\max(a,\ t_\varepsilon)$$

と定義すると，各 $j\neq 1$ に対して，各 I_j の分布関数 $G(x)=\Pr(I_1\geqq I_j+\varepsilon)$ は,

$$\begin{aligned}
G(x)=&\Pr(I_1\geqq I_j+\varepsilon)=\Pr\left(x_1(1-w)+100w\geqq\frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}+\varepsilon\right)\\
=&\Pr\left(r_j\geqq\frac{x_j(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon}\right)=\int_a^b\Pr(x_j=t)\Pr\left(r_j\geqq\frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon}\right)dt\\
=&\frac{1}{b-a}\left(\int_a^{x_\varepsilon}1\,dt+\int_{x_\varepsilon}^b(1-R(\alpha(t)))dt\right)=\frac{x_\varepsilon-a}{b-a}+\frac{1}{b-a}\int_{x_\varepsilon}^{t_0}(1-R(\alpha(t))dt)\\
=&\frac{x_\varepsilon-a}{b-a}+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\int_{x_\varepsilon}^{t_0}(c-\alpha(t))dt\\
=&\frac{x-a}{b-a}+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\cdot\left(c(t_0-x_\varepsilon)-\frac{1}{2}\frac{x_\varepsilon(1-w)+100w}{1-w}(\alpha(t_0)^2-\alpha(x_\varepsilon)^2)\right)
\end{aligned}$$

である。ただし，$t=t_c$ は

$$\alpha(t)=\frac{t(1-w)+100w}{x_\varepsilon(1-w)+100w-\varepsilon}=c$$

を満たし， $t_0 = \min(t_c,\ b)$ である。よって，各 I_j は互いに独立であるから，求める確率は

$$\Pr(I_1 \geqq I_j \quad \text{for all } j \neq 1) = G(x)^{n-1}$$

である。 □

Theorem 7.4 (加算方式). 各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，定性評価 x_j は区間 $[a,\ b]$ の一様分布，提案額の比 r_j は $[1,\ c]$ の一様分布であり，独立であると仮定する。任意の非負実数を $\varepsilon \geqq 0$ とする。このとき，最低提案額を入れた提案者の定性評価が x のとき, 加算方式でつねに他の入札者より ε 以上の得点差をつけて 1 位である確率は $F(x)^{n-1}$ である。

ただし，$\beta(t) = \dfrac{1-w}{wT}(t-x) + 1 + \dfrac{\varepsilon}{wT}$ であり, $t = t_c$ は

$$\beta(t) = \frac{1-w}{wT}(t-x) + 1 + \frac{\varepsilon}{wT} = c$$

を満たし $t_0 = \min(t_c,\ b)$ であり，$\beta(t) = 1$ と満たす $t = t_\varepsilon$ を用いて x_ε は $x_\varepsilon = \max(a,\ t_\varepsilon)$ であり,

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{c-1} \cdot \left(c(t_0 - x) - \frac{1}{2}\frac{wT}{1-w}(\beta(t_0)^2 - \beta(x_\varepsilon)^2) \right)$$

であり，w は重みである。

Proof. 一位である提案者が $j = 1$ であるとしても一般性を失わない。加算方式は，各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して,

$$K_j = x_j(1-w) + w(100 - (r_j - 1)T)$$

である。r_j の密度関数は区間 $[1,\ c]$ 上でつねに $\dfrac{1}{c-1}$ であるから，分布関数を $R(t)$ とすると，$R(t) = 1\ (t \geqq c)$, $\dfrac{t-1}{c-1}\ (1 \leqq t \leqq c)$, $0\ (t \leqq 1)$ である。

等式

$$\frac{1-w}{wT}(t-x) + 1 + \frac{\varepsilon}{wT} = 1$$

となる t を $t_\varepsilon (\leqq x)$ とし $x_\varepsilon = \max(a,\ t_\varepsilon)$ と定義する。各 $j \neq 1$ に対して，各 K_j の分布関数 $F(x) = \Pr(K_1 \geqq K_j + \varepsilon)$ は,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \Pr(K_1 \geqq K_j + \varepsilon) \\
&= \Pr\Big(x_1(1-w) + w(100 - (r_1 - 1)T) \geqq x_j(1-w) + w(100 - (r_j - 1)T) + \varepsilon\Big) \\
&= \Pr\left(x(1-w) - wT \geqq x_j(1-w) - wr_jT + \varepsilon\right) \\
&= \int_a^b \Pr(x_j = t)\Pr\left(r_j \geqq \frac{1-w}{wT}(t-x) + 1 + \frac{\varepsilon}{wT}\right) dt \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\int_a^{x_\varepsilon} 1\ dt + \int_{x_\varepsilon}^b \Pr\left(r_j \geqq \beta(t)\right) dt\right) = \frac{x_\varepsilon - a}{b-a} + \frac{1}{b-a}\int_{x_\varepsilon}^{t_0} (1 - R(\beta(t)))dt \\
&= \frac{x_\varepsilon - a}{b-a} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{c-1}\int_{x_\varepsilon}^{t_0} (c - \beta(t))dt = \frac{x_\varepsilon - a}{b-a} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{c-1} \cdot (c(t_0 - x_\varepsilon) - N)
\end{aligned}$$

である。ただし，$t = t_c$ は

$$\beta(t) = \frac{1-w}{wT}(t-x) + 1 + \frac{\varepsilon}{wT} = c$$

を満たし，$t_0 = \min(t_c,\ b)$ であり，

$$N = \int_{x_\varepsilon}^{t_0} \beta(t)dt = \int_{x_\varepsilon}^{t_0} \left(\frac{1-w}{wT}(t-x) + 1 + \frac{\varepsilon}{wT} \right) dt$$

$$= \left[\left(\frac{1-w}{wT}(t-x) + 1 + \frac{\varepsilon}{wT} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{wT}{1-w} \right]_{x_\varepsilon}^{t_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{wT}{1-w} \Big(\beta(t_0)^2 - \beta(x_\varepsilon)^2 \Big)$$

である。よって，各 I_j は互いに独立であるから，求める確率は，

$$\Pr(I_1 \geqq I_j \quad \text{for all } j \neq 1) = F(x)^{n-1}$$

である。 □

8　定性評価が最高点である提案者が 1 位である確率

8.1　すべて一様分布で定性評価が最高点で提案価格の比が r のとき

Theorem 8.1 (除算方式)**.** 各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，定性評価 x_j は区間 $[a,\ b]$ の一様分布，提案額の比 r_j は $[1,\ c]$ の一様分布であり，独立であると仮定する。任意の非負実数を $\varepsilon \geqq 0$ とする。このとき，定性評価が最高点 x であった提案者の比率が r のとき，除算方式でつねに他の入札者より ε 以上の得点差をつけて 1 位である確率は $G(x,\ r)^{n-1}$ である。

ただし，$\alpha(t) = r \cdot \dfrac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r}$ であり，$t = t_c$ は

$$\alpha(t) = r \cdot \frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r} = c$$

を満たし，$T = \min(t_c,\ x)$，$X = \max\left(a, \dfrac{x(1-w)+100w-\varepsilon r}{r(1-\varepsilon)} - \dfrac{100w}{1-w}\right)$ であり，

$$G(x,r) = \frac{X-a}{b-a} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{c-1} \left(c(T-X) - \frac{1}{2r} \frac{x(1-w)+100w}{1-w} (\alpha(T)^2 - \alpha(X)^2) \right)$$

であり，w は重みである。

Proof. 一位である提案者が $j = 1$ であるとしても一般性を失わない。除算方式は，各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，

$$I_j = \frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}$$

である。r_j の密度関数は区間 $[1,\ c]$ 上でつねに $\dfrac{1}{c-1}$ であるから，分布関数を $R(t)$ とすると，$R(t) = 1\ (t \geqq c)$，$\dfrac{t-1}{c-1}\ (1 \leqq t \leqq c)$，$0\ (t \leqq 1)$ である。各 $j \neq 1$ に対して $x_j \leqq x$ であるから，各 I_j の分布関数 $G(x) = \Pr(I_1 \geqq I_j + \varepsilon)$ は，

$$G(x,\ r) = \Pr\left(\frac{x_1(1-w)+100w}{r} \geqq \frac{x_j(1-w)+100w}{r_j} + \varepsilon \right)$$

$$= \Pr\left(r_j \geqq r \cdot \frac{x_j(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^x \Pr(x_j = t)\Pr(r_j \geqq r\ \alpha(t))\,dt = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^X 1\ dt + \int_X^T (1 - R(\alpha(t)))dt\right)\\
&= \frac{X-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\int_x^T (c - \alpha(t))dt = \frac{X-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}(c(T-X) - M)\\
&= \frac{X-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\cdot\left(c(T-X) - \frac{1}{2r}\frac{x(1-w)+100w}{1-w}(\alpha(T)^2 - \alpha(X)^2)\right)
\end{aligned}
$$

である。ただし，$t = t_c$ は

$$
\alpha(t) = r\cdot\frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r} = c
$$

を満たし，$X = \max\left(a,\ \dfrac{x(1-w)+100w-\varepsilon r}{r(1-w)} - \dfrac{100w}{1-w}\right)$，　$T = \min(t_c,\ x)$ である。ここで，

$$
\begin{aligned}
M &= \int_X^T \alpha(t)dt = \int_X^T r\cdot\frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r}dt\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{x(1-w)+100w-\varepsilon r}{1-w}\left[\left(r\cdot\frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w}\right)^2\right]_X^T\\
&= \frac{1}{2r}\cdot\frac{x(1-w)+100w-\varepsilon r}{1-w}\left(\alpha(T)^2 - \alpha(X)^2\right)
\end{aligned}
$$

であることを用いた。よって，各 I_j は互いに独立であるから，求める確率は，

$$
\Pr(I_1 \geqq I_j \quad \text{for all } j \neq 1) = G(x,r)^{n-1}
$$

である。 □

Theorem 8.2 (加算方式). 各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，定性評価 x_j は区間 $[a,\ b]$ の一様分布，提案額の比 r_j は $[1,\ c]$ の一様分布であり，独立であると仮定する。任意の非負実数を $\varepsilon \geqq 0$ とする。このとき，定性評価が最高点 x であった提案者の比率が r のとき，加算方式でつねに他の入札者より ε 以上の得点差をつけて 1 位である確率は $F(x,\ r)^{n-1}$ である。

ただし，$\beta(t) = \dfrac{1-w}{wT}(t-x) + r$, $t = t_c$ は

$$
\beta(t) = \frac{1-w}{wT}(t-x) + r + \frac{\varepsilon}{wT} = c
$$

を満たし，　$T = \min(t_c,\ x)$，　$X = \max\left(a, x + \dfrac{wT}{1-w}\left(1 - r + \dfrac{\varepsilon}{wT}\right)\right)$ であり，

$$
F(x,r) = \frac{X-a}{b-a} + \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\cdot\left(c(T-X) - \frac{1}{2}\frac{wT}{1-w}(\beta(T)^2 - \beta(X)^2)\right)
$$

であり，w は重みである。

Proof. 一位である提案者が $j = 1$ であるとしても一般性を失わない。加算方式は，各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，

$$
K_j = x_j(1-w) + w(100 - (r_j - 1)T)
$$

である。r_j の密度関数は区間 $[1,\ c]$ 上でつねに $\dfrac{1}{c-1}$ であるから，分布関数を $R(t)$ とすると，$R(t) = 1\ (t \geqq c)$，　$\dfrac{t-1}{c-1}\ (1 \leqq t \leqq c)$，　$0\ (t \leqq 1)$ である。各 $j \neq 1$ に対して，各 K_j の分布関数 $F(x) = \Pr(K_1 \geqq K_j + \varepsilon)$ は，$x_j \leqq x$ であるから，

$$
F(x,\ r) = \Pr\Big(x(1-w) + w(100 - (r-1)T) \geqq x_j(1-w) + w(100 - (r_j - 1)T) + \varepsilon\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
&=\Pr\left(x(1-w)-wTr \geqq x_j(1-w)-wr_jT+\varepsilon\right)\\
&=\Pr\left(r_j \geqq \frac{1-w}{wT}(x_j-x)+r+\frac{\varepsilon}{wT}\right)=\int_a^x \Pr(x_j=t)\Pr\left(r_j \geqq \beta(t)\right)dt\\
&=\frac{1}{b-a}\left(\int_a^X 1\,dt+\int_X^T\left(1-R(\beta(t))\right)dt=\frac{X-a}{b-a}+\frac{1}{b-a}\int_X^T(1-R(\beta(t)))dt\right.\\
&=\frac{X-a}{b-a}+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\int_X^T(c-\beta(t))dt=\frac{X-a}{b-a}+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\left(c(T-X)-N\right)
\end{aligned}
$$

である。ただし，$t=t_c$ は

$$
\beta(t)=\frac{1-w}{wT}(t-x)+r+\frac{\varepsilon}{wT}=c
$$

を満たし，　$X=\max\left(a,\ x+\dfrac{wT}{1-w}\left(1-r+\dfrac{\varepsilon}{wT}\right)\right)$，　$T=\min(t_c,\ x)$ であり，

$$
\begin{aligned}
N&=\int_X^T\beta(t)dt=\int_X^T\left(\frac{1-w}{wT}(t-x)+r\right)dt=\left[\left(\frac{1-w}{wT}(t-x)+r\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{wT}{1-w}\right]_X^T\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{wT}{1-w}\left(\beta(T)^2-\beta(X)^2\right)
\end{aligned}
$$

である。よって，各 K_j は互いに独立であるから，求める確率は，

$$
\Pr(I_1 \geqq I_j \quad \text{for all } j \neq 1)=F(x,r)^{n-1}
$$

である。 □

次に，定性評価が x で，提案価格比が r である一様分布を仮定するとき，それが他の入札者より ε 以上の差をつけてつねに 1 位である確率および k 位である確率を求める。

Theorem 8.3 (除算方式)**.** 各 $j=1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，定性評価 x_j は区間 $[a,\ b]$ の一様分布，提案額の比 r_j は $[1,\ c]$ の一様分布であり，独立であると仮定する。任意の非負実数を $\varepsilon \geqq 0$ とする。このとき，定性評価が x で，提案者の比率が r のとき，除算方式でつねに他の入札者より ε 以上の得点差をつけて 1 位である確率は $G(x,\ r)^{n-1}$ である。

ただし，$\alpha(t)=r\cdot\dfrac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r}$，　$t=t_c$ は

$$
\alpha(t)=r\cdot\frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r}=c
$$

を満たす。$T=\min(t_c,\ b)$，$t=x_\varepsilon(\leqq x)$ は，　$\alpha(t)=1$ となる点 $t=t_0$ を用いて，$x_\varepsilon=\max(a,\ t_0)$ と定義し，

$$
G(x,r)=\frac{x_\varepsilon-a}{b-a}+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\left(c(T-x_\varepsilon)-\frac{1}{2r}\frac{x(1-w)+100w}{1-w}\left(\alpha(T)^2-\alpha(x_\varepsilon)^2\right)\right)
$$

であり，w は重みである。

Corollary 8.1. 定理と同じ条件を仮定する。定性評価が x で，提案者の比率が r である提案者が順位 k である確率 $F_{(k)}(x)$ は，定理において $\varepsilon=0$ とおいて $G(x,r)$ を用いて，　Remark 5.1 を用いると

$$
F_{(k)}(x)=k\binom{n-1}{k}\int_0^{G(x,r)} G^{n-1-k}(1-G)^{k-1}dG
$$

を得る。

Proof. 一位である提案者が $j=1$ であるとしても一般性を失わない。除算方式は，各 $j=1, 2, \ldots,$ に対して，

$$I_j = \frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}$$

である。r_j の密度関数は区間 $[1, c]$ 上でつねに $\dfrac{1}{c-1}$ であるから，分布関数を $R(t)$ とすると，$R(t)=1$ $(t \geqq c)$, $\dfrac{t-1}{c-1}$ $(1 \leqq t \leqq c)$, 0 $(t \leqq 1)$ である。各 $j \neq 1$ に対して，各 I_j の分布関数 $G(x, r) = \Pr(I_1 \geqq I_j + \varepsilon)$ は，

$$\begin{aligned}
G(x, r) =& \Pr\left(\frac{x(1-w)+100w}{r} \geqq \frac{x_j(1-w)+100w}{r_j} + \varepsilon\right) \\
=& \Pr\left(r_j \geqq r \cdot \frac{x_j(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r}\right) = \int_a^b \Pr(x_j = t)\Pr(r_j \geqq \alpha(t))\, dt \\
=& \frac{1}{b-a}\left(\int_a^{x_\varepsilon} 1\, dt + \int_{x_\varepsilon}^{T} (1 - R(\alpha(t)))dt\right) = \frac{x_\varepsilon - a}{b-a} + \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\int_{x_\varepsilon}^{T} (c-\alpha(t))\, dt \\
=& \frac{x_\varepsilon - a}{b-a} + \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\big(c(T-x_\varepsilon) - M\big) \\
=& \frac{x_\varepsilon - a}{b-a} + \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{c-1}\cdot\left(c(T-x_\varepsilon) - \frac{1}{2r}\frac{x(1-w)+100w-\varepsilon r}{1-w}(\alpha(T)^2 - \alpha(x_\varepsilon)^2)\right)
\end{aligned}$$

である。ただし，$t = x_\varepsilon (\leqq x)$ は，$\alpha(t)=1$ となる点 $t=t_0$ を用いて，$x_\varepsilon = \max(a, t_0)$ と定義し，$t=t_c$ は

$$\alpha(t) = r \cdot \frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r} = c$$

を満たし，$T = \min(t_c, b)$ である。ここで，

$$\begin{aligned}
M =& \int_{x_\varepsilon}^{T} \alpha(t)dt = \int_{x_\varepsilon}^{T} r \cdot \frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r}dt \\
=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{x(1-w)+100w-\varepsilon r}{1-w}\left[\left(r\cdot\frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w}\right)^2\right]_{x_\varepsilon}^{T} \\
=& \frac{1}{2r}\cdot\frac{x(1-w)+100w-\varepsilon r}{1-w}\left(\alpha(T)^2 - \alpha(x_\varepsilon)^2\right)
\end{aligned}$$

であることを用いた。

よって，各 I_j は互いに独立であるから，求める確率は，

$$\Pr(I_1 \geqq I_j \quad \text{for all } j \neq 1) = G(x, r)^{n-1}$$

である。□

Theorem 8.4 (加算方式). 各 $j=1, 2, \ldots,$ に対して，定性評価 x_j は区間 $[a, b]$ の一様分布，提案額の比 r_j は $[1, c]$ の一様分布であり，独立であると仮定する。任意の非負実数を $\varepsilon \geqq 0$ とする。このとき，定性評価が x で，提案者の比率が r のとき，加算方式でつねに他の入札者より ε 以上の得点差をつけて1位である確率は $F(x, r)^{n-1}$ である。

ただし，$\beta(t) = \dfrac{1-w}{wT}(t-x) + r + \dfrac{\varepsilon}{wT}$ であり，$t=t_c$ は

$$\beta(t) = \frac{1-w}{wT}(t-x) + r + \frac{\varepsilon}{wT} = c$$

を満たし，$T = \min(t_c,\ b)$ で，$t = t_\varepsilon$ は

$$\beta(t) = \frac{1-w}{wT}(t-x) + r + \frac{\varepsilon}{wT} = 1$$

を満たし，$x_\varepsilon = \max(a,\ t_\varepsilon)$ と定義され，

$$F(x,r) = \frac{x_\varepsilon - a}{b-a} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{c-1} \cdot \left(c(T - x_\varepsilon) - \frac{1}{2}\frac{wT}{1-w}\left(\beta(T)^2 - \beta(x_\varepsilon)^2\right) \right)$$

であり，w は重みである。

Corollary 8.2. 定理と同じ条件を仮定する。定性評価が x で，提案者の比率が r である提案者が順位 k である確率 $F_{(k)}(x)$ は，定理において $\varepsilon = 0$ とおいて $G(x,\ r)$ を用いて Remark 5.1 を適用すると，

$$F_{(k)}(x) = k\binom{n-1}{k}\int_0^{F(x,r)} F^{n-1-k}(1-F)^{k-1}dF$$

である。

Proof. 一位である提案者が $j = 1$ であるとしても一般性を失わない。加算方式は，各 $j = 1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，

$$K_j = x_j(1-w) + w(100 - (r_j - 1)T)$$

である。r_j の密度関数は区間 $[1,\ c]$ 上でつねに $\dfrac{1}{c-1}$ であるから，分布関数を $R(t)$ とすると，$R(t) = 1\ (t \geq c)$, $\dfrac{t-1}{c-1}\ (1 \leqq t \leqq c)$, $0\ (t \leqq 1)$ である。各 $j \neq 1$ に対して，各 K_j の分布関数 $F(x,\ r) = \Pr(K_1 \geqq K_j + \varepsilon)$ は，$x_j \leqq x$ であるから，

$$\begin{aligned}
F(x,\ r) =& \Pr(K_1 \geqq K_j + \varepsilon) \\
=& \Pr\Big(x(1-w) + w(100 - (r-1)T) \geqq x_j(1-w) + w(100 - (r_j - 1)T) + \varepsilon\Big) \\
=& \Pr\left(x(1-w) - wTr \geqq x_j(1-w) - wr_jT + \varepsilon\right) \\
=& \Pr\left(r_j \geqq \frac{1-w}{wT}(x_j - x) + r + \frac{\varepsilon}{wT}\right) = \int_a^b \Pr(x_j = t)\Pr\left(r_j \geqq \beta(t)\right)dt \\
=& \frac{1}{b-a}\left(\int_a^{x_\varepsilon} 1\ dt + \int_{x_\varepsilon}^b (1 - R(\beta(t)))\right)dt = \frac{x_\varepsilon - a}{b-a} + \frac{1}{b-a}\int_{x_\varepsilon}^b (1 - R(\beta(t)))dt \\
=& \frac{x_\varepsilon - a}{b-a} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{c-1}\int_{x_\varepsilon}^T (c - \beta(t))dt = \frac{x_\varepsilon - a}{b-a} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{c-1}\left(c(T - x_\varepsilon) - N\right)
\end{aligned}$$

である。ただし，$t = t_\varepsilon$ は

$$\beta(t) = \frac{1-w}{wT}(t-x) + r + \frac{\varepsilon}{wT} = 1$$

を満たし，$x_\varepsilon = \max(a,\ t_\varepsilon)$ と定義され，$t = t_c$ は $\beta(t) = c$ を満たし，$T = \min(t_c,\ b)$ と定義され，

$$\begin{aligned}
N =& \int_{x_\varepsilon}^T \beta(t)dt = \int_{x_\varepsilon}^T \left(\frac{1-w}{wT}(t-x) + r + \frac{\varepsilon}{wT}\right)dt \\
=& \left[\left(\frac{1-w}{wT}(t-x) + r + \frac{\varepsilon}{wT}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{wT}{1-w}\right]_{x_\varepsilon}^T = \frac{1}{2} \cdot \frac{wT}{1-w}\left(\beta(T)^2 - \beta(x_\varepsilon)^2\right)
\end{aligned}$$

である。よって，各 K_j は互いに独立であるから，求める確率は，

$$\Pr(I_1 \geqq I_j \quad \text{for all } j \neq 1) = F(x,\ r)^{n-1}$$

である。 □

9　一般分布で得点が ε 以上の差で k 位である確率

定性評価が x で，提案価格比が r である一般分布を仮定するとき，それが他の入札者の入札者より $\varepsilon > 0$ 以上の差をつけてつねに 1 位である確率および k 位である確率を求める。

Theorem 9.1 (除算方式). 各 $j = 1, 2, \ldots,$ に対して，各 $j = 1, 2, \ldots,$ に対して，定性評価 x_j は区間 $[a, b]$ の微分可能な分布関数 $X(t)$ に従い，提案額の比 r_j は $[1, c]$ の分布関数 $R(t)$ に従う確率変数で，独立であると仮定する。任意の非負実数を $\varepsilon \geqq 0$ とする。このとき，定性評価が x で，提案者の提案価格の比率が r のとき，除算方式でつねに他の入札者より ε 以上の得点差をつけて 1 位である確率は $G(x, r)^{n-1}$ である。

ただし，$\alpha(t) = r \cdot \dfrac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r}$ であり，$t = t_c$ は

$$\alpha(t) = r \cdot \frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r} = c$$

を満たし，$T = \min(t_c, b)$，$t = x_\varepsilon (\leqq x)$ は $\alpha(t) = 1$ となる点 $t = t_0$ を用いて $x_\varepsilon = \max(a, t_0)$ と定義され，

$$G(x, r) = X(T) - X(a) - \int_{x_\varepsilon}^{T} X'(t) R(\alpha(t)) dt$$

であり，w は重みである。

Corollary 9.1. 定理と同じ条件を仮定する。定性評価が x で，提案者の提案価格の比率が r である提案者が順位 k である確率 $F_{(k)}(x)$ は，定理において $\varepsilon = 0$ とおいて $G(x,r)$ を用いて，Remark 5.1 を用いると，

$$F_{(k)}(x) = k \binom{n-1}{k} \int_0^{G(x,r)} G^{n-1-k}(1-G)^{k-1} dG$$

である。

Proof. 一位である提案者が $j = 1$ であるとしても一般性を失わない。除算方式は，各 $j = 1, 2, \ldots,$ に対して，

$$I_j = \frac{x_j(1-w)+100w}{r_j}$$

である。各 $j \neq 1$ に対して，I_j の分布関数 $G(x, r) = \Pr(I_1 \geqq I_j + \varepsilon)$ は，

$$\begin{aligned}
G(x, r) =& \Pr\left(\frac{x(1-w)+100w}{r} \geqq \frac{x_j(1-w)+100w}{r_j} + \varepsilon\right) = \Pr\left(r_j \geqq r \cdot \frac{x_j(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r}\right) \\
=& \int_a^b \Pr(x_j = t) \Pr\left(r_j \geqq \alpha(t)\right) dt = \int_a^b X'(t)\Big(1 - R(\alpha(t))\Big) dt \\
=& \int_a^{x_\varepsilon} X'(t) dt + \int_{x_\varepsilon}^{T} X'(t)\Big(1 - R(\alpha(t))\Big) dt = \int_a^T X'(t) dt - \int_{x_\varepsilon}^{T} X'(t) R(\alpha(t)) dt \\
=& X(T) - X(a) - \int_{x_\varepsilon}^{T} X'(t) R(\alpha(t)) dt
\end{aligned}$$

である。ただし，$t = x_\varepsilon (\leqq x)$ は $\alpha(t) = 1$ となる点 $t = t_0$ を用いて，$x_\varepsilon = \max(a, t_0)$ と定義し，$t = t_c$ は

$$\alpha(t) = r \cdot \frac{t(1-w)+100w}{x(1-w)+100w-\varepsilon r} = c$$

を満たし，$T=\min(t_c,\ b)$ である。

よって，各 I_j は互いに独立であるから，求める確率は，

$$\Pr(I_1 \geqq I_j \quad \text{for all } j \neq 1) = G(x,r)^{n-1}$$

である。 □

Theorem 9.2 (加算方式). 各 $j=1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，定性評価 x_j は区間 $[a,\ b]$ の微分可能な分布関数 $X(t)$ に従い，提案額の比 r_j は $[1,\ c]$ の分布関数 $R(t)$ に従う確率変数で，独立であると仮定する。任意の非負実数を $\varepsilon \geqq 0$ とする。このとき，定性評価が x で，提案者の提案価格の比率が r のとき，加算方式でつねに他の入札者より ε 以上の得点差をつけて 1 位である確率は $F(x,\ r)^{n-1}$ である。

ただし，$\beta(t)=\dfrac{1-w}{wT}(t-x)+r+\dfrac{\varepsilon}{wT}$ であり，$t=t_c$ は

$$\beta(t)=\frac{1-w}{wT}(t-x)+r+\frac{\varepsilon}{wT}=c$$

を満たし， $T=\min(t_c,\ b)$ であり，$t=t_\varepsilon$ は

$$\beta(t)=\frac{1-w}{wT}(t-x)+r+\frac{\varepsilon}{wT}=1$$

を満たし， $x_\varepsilon=\max(a,\ t_\varepsilon)$ と定義され，

$$F(x,r)=X(T)-X(a)-\int_{x_\varepsilon}^{T} X'(t)R(\beta(t))dt$$

であり，w は重みである。

Corollary 9.2. 定理と同じ条件を仮定する。定性評価が x で，提案者の比率が r である提案者が順位 k である確率 $F_{(k)}(x)$ は，定理において $\varepsilon=0$ とおいて $G(x,\ r)$ を用いて， Remark 5.1 を用いると，

$$F_{(k)}(x)=k\binom{n-1}{k}\int_0^{F(x,r)} F^{n-1-k}(1-F)^{k-1}dF$$

である。

Proof. 一位である提案者が $j=1$ であるとしても一般性を失わない。加算方式は，各 $j=1,\ 2,\ \ldots,$ に対して，

$$K_j=x_j(1-w)+w(100-(r_j-1)T)$$

である。各 $j\neq 1$ に対して，各 K_j の分布関数 $F(x,\ r)=\Pr(K_1 \geqq K_j+\varepsilon)$ は，$x_j \leqq x$ であるから，

$$\begin{aligned}
F(x,\ r) =& \Pr(K_1 \geqq K_j+\varepsilon)\\
=& \Pr\Big(x(1-w)+w(100-(r-1)T) \geqq x_j(1-w)+w(100-(r_j-1)T)+\varepsilon\Big)\\
=& \Pr\left(x(1-w)-wTr \geqq x_j(1-w)-wr_jT+\varepsilon\right)=\Pr\Big(r_j \geqq \frac{1-w}{wT}(x_j-x)+r+\frac{\varepsilon}{wT}\Big)\\
=& \int_a^b \Pr(x_j=t)\Pr\left(r_j \geqq \beta(t)\right)dt=\int_a^{x_\varepsilon} X'(t)dt+\int_a^b X'(t)\Big(1-R(\beta(t))\Big)dt\\
=& \int_a^{x_\varepsilon} X'(t)dt+\int_{x_\varepsilon}^{T} X'(t)\Big(1-R(\beta(t))\Big)dt=\int_a^T X'(t)dt-\int_{x_\varepsilon}^{T} X'(t)R(\beta(t))dt
\end{aligned}$$

$$=X(T)-X(a)-\int_{x_\varepsilon}^{T}X'(t)R(\beta(t))dt$$

である。ただし，$t=t_\varepsilon$ は

$$\beta(t)=\frac{1-w}{wT}(t-x)+r+\frac{\varepsilon}{wT}=1$$

を満たし， $x_\varepsilon=\max(a,\ t_\varepsilon)$ と定義され，$t=t_c$ は $\beta(t)=c$ を満たし，$T=\min(t_c,\ b)$ と定義される。

よって，各 K_j は互いに独立であるから，求める確率は，

$$\Pr(I_1 \geqq I_j \quad \text{for all } j\neq 1)=F(x,\ r)^{n-1}$$

である。 □

10 加算方式と除算方式との得点差

定性評価点と提案価格比 $\left(=\dfrac{\text{提案価格}}{\text{最低提案価格}}\right)$ を，それぞれ x, r とする。

除算方式では

$$I=\frac{x+(100-x)w}{r}=\frac{(1-w)x+100w}{r}$$

であり，加算方式では

$$K=x(1-w)+w(100-(r-1)T)$$

である。全微分の公式より，

$$dI=\frac{\partial I}{\partial x}dx+\frac{\partial I}{\partial r}dr=\frac{1-w}{r}dx-\frac{x+(100-x)w}{r^2}dr,$$
$$\frac{dI}{I}=\frac{1}{I}\left(\frac{1-w}{r}dx-\frac{x+(100-x)w}{r^2}dr\right)$$

であり，

$$dK=\frac{\partial K}{\partial x}dx+\frac{\partial K}{\partial r}dr=(1-w)dx-wTdr$$
$$\frac{dK}{K}=\frac{1}{K}\Big((1-w)dx-wTdr\Big)$$

である。

したがって，除算方式では，総合評価点には提案価格による**バイアスが生じる。**加算方式では，総合評価点の減少に提案価格による**バイアスは生じない。**

さらに，

$$\frac{dK}{dI}=\frac{(1-w)\dfrac{dx}{dr}-wT}{\dfrac{1-w}{r}\cdot\dfrac{dx}{dr}-\dfrac{x+(100-x)w}{r^2}}$$

である。

提案価格 1 単位の変化に対する定性評価の変化率を $\dfrac{dx}{dr}=\eta$ で定義する。このとき，

$$(1-w)\eta=wT$$

となるように η を定める。すなわち，提案価格比 r の 1 単位の変化が，定性評価点 x の $\dfrac{wT}{1-w}$ 単位の変化に対応すると仮定する。このとき

$$\frac{dK}{dI} = 0$$

となり，I の変化による K の変化はない，という**ニュートラル状態**となっている。

ただし，$(1-w)x + (100-rT)w \neq 0$ である。

同様に

$$\frac{1}{\eta} = \frac{dr}{dx} = \frac{(1-w)r}{x+(100-x)w}$$

のとき，すなわち x（定性）の 1 単位の変化が，提案価格 r の $\dfrac{(1-w)r}{x+(100-x)w}$ 単位の変化に対応すると仮定する。このとき，

$$\frac{dI}{dK} = 0$$

となり，K の変化による I の変化はない。ただし，$(1-w)x + (100-rT)w \neq 0$ である。

テイラー (Taylor) の公式より，$|x| < 1$ のとき $0 < \xi < x$ を満たす ξ が存在して，

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}x^2 = 1 - x + \frac{1}{(1+\xi)^3}x^2$$

であるから，

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{1+(r-1)} = 1 - (r-1) + c_1(r-1)^2, \qquad 0 < c_1 < 1, \quad c_1 \to 1 \quad \text{as} \quad r \to 1,$$

である。よって，

$$\begin{aligned}
K - I &= \Big[x(1-w) + w(100-(r-1)T)\Big] - \frac{x+(100-x)w}{r} \\
&= \Big[x(1-w) + w(100-(r-1)T)\Big] - (x+(100-x)w)\Big(1-(r-1)+c_1(r-1)^2\Big) \\
&= (r-1)\Big[x+(100-x)w - wT\Big] - c_1(r-1)^2(x+(100-x)w) \\
&= (r-1)\Big[(1-w)x + (100-T)w\Big] - c_1(r-1)^2(x+(100-x)w)
\end{aligned}$$

を得る。ただし，c_1 は 0 と 1 の間の値である。

式 $K-I$ を分析する。

$r=1$（最低提案額）付近では，(加算) $-$ (除算) > 0 となる。具体例ではほとんど正である。具体例では $T = 60$ である。$[(1-w)x + w(100-(r-1)T)]$ は，$100-(r-1)T$ と x を $(1-w):w$ に内分する値である。$K - I < 0$ ならば加算の得点は低い。しかし，$w = 0.5$ 付近で $T = 60$（最低１００億で１０億毎に 6 点，比率 0.1 毎に 6 点の減点）の付近では，r が大きくなるときを除き，加算 $-$ 除算 > 0 となる。

具体例で $w = 0.5$ のとき,「人による評価である定性評価 6 点の差が，提案額で 1 割の差である」。したがって，イギリスで行われている評価方式のように,「２段階の方式を採用するべき」である。そうすれば,「ある品質を保ったという条件の下で，最後は価格だけの競争になれば，より安く公共

サービスを得ることができる」と考えられる。さらに，途中と最後の結果において，定性評価の事後評価が重要である。

等高線について

I と K の値を $(r,\ x)$-平面で計算し，等高線を描くと次のことがわかる。（図は省略する）

（x 座標，y 座標）＝(提案比率，定性評価点)-平面で考える。左上が一番標高が高い。

加算方式では，重み $w=0$ のとき，水平な等高線となり，$w=1$ のとき，縦に平行な等高線となる。その間の w では，等高線が右に進むにつれて上がるような等高線となり，傾きが急になる等高線となる。

除算方式では，重み $w=0$ のとき，右に進むにつれて上がるような等高線となり，w のとき，縦に平行な等高線となる。その間の w では，等高線が右に進むにつれて上がるような等高線であり，傾きが急になる等高線が描ける。

加算方式と除算方式は同じような傾向である。しかし，$w=0$ に近いとき，除算方式は，提案額の値が効く傾向がある。加算方式は，提案額（価格評価）と非価格評価との単なる内分公式である。

１単位の変化をみるために，微分すると，$w=1$ に近いとき，加算方式では

$$\frac{dK}{K}=\frac{1}{K}\left((1-w)dx-wTdr\right)$$

であり，定性評価の変化が全体に与える変化が小さくなる。

除算方式では

$$\frac{dI}{I}=\frac{1}{I}\left(\frac{1-w}{r}dx-\frac{x+(100-x)w}{r^2}dr\right)$$

となり，価格をより反映する。

具体例では，加算の方が，得点が高くなる。（提案比，定性）＝$(r,\ x)$ とすると，提案比 $r=1$ で差がなく，$r=1.4$ で最大１０点の差がでる。その間の r では，その間の数をとる滑らかな曲面になる。

普通の場合：重み w と $(r,\ x)$ 平面図を調べると，（極端な場合でないかぎり）除算方式と加算方式の得点には大きな差はない。しかし，$r=1$ の近傍において，加算方式よりも除算方式の方が価格の差がよく効く。

点 $(r,\ x)$ をプロットした場合，等高線の傾きが除算と加算では異なるので，総合順位に差が発生する場合があることが分かる。等高線の図表に点 $(r,\ x)$ をプロットすることによって，提案価格と定性評価とはどのような関係にあるのか容易に分析できる。

11　加除算方式の必要条件

非価格要素点数を x，$\dfrac{\text{提案価格}}{\text{最低提案価格}}$ を $r(\geqq 1)$ とする。価格ウェイト w $(0\leqq w\leqq 1)$ が与えられたときの，点 $(x,\ r)$ の総合評価点を $I(x,\ r,\ w)$ とする。提案価格点と非価格要素点をそれぞれ

$f(x,\ r)$ と $g(x,\ r)$ とする。総合評価点は，価格ウェイト w の重み付けであるから，内分公式

$$I(x,\ r,\ w) = wf(x,\ r) + (1-w)g(x,\ r)$$

すなわち，凸線型結合で表すことが妥当である。これを仮定する。

除算方式は

$$\frac{100w + (1-w)x}{r}$$

である。加算方式は

$$(1-w)x + w[100 - T(r-1)]^+$$

であるが，後の加除算方式の定義に意味をもたせるために，新しい加算方式として，次の**新加算方式**を，

$$(1-w)x + w\frac{100}{r}$$

と定義し，提案する。

除算方式，加算方式，新加算方式を表 1 にまとめる。

表 1: 各方式の割引

	提案価格 $f(x,r)$	非価格要素 $g(x,r)$	$f_1(r)$	$g_1(r)$
除算方式	$\frac{100}{r}$	$\frac{x}{r}$	r	r
加算方式	$[100-T(r-1)]^+$	x	$\frac{100}{[100-T(r-1)]^+}$	1
新加算方式	$\frac{100}{r}$	x	r	1
加除算方式	$\frac{100}{r^2}$	$\frac{x}{r}$	r^2	r
	w 価格ウェイト	$(1-w)$ 非価格ウェイト		

表 1 から，$f(x,\ r)$ と $g(x,\ r)$ の意味を考える。

提案価格点 $f(x,\ r)$ は，r が 1 から離れるに従い，１００点から割り引かれた点数 $\frac{100}{f_1(r)}$ である。ただし，割引 $f_1(r)$ $(r \geqq 1)$ は単調増加関数で $f_1(1) = 1$ である。また，非価格要素点 $g(x,\ r)$ は，r が 1 から離れるに従い，非価格要素点（定性評価点）x 点から割引かれた点数 $\frac{x}{g_1(r)}$ である。ただし，割引 $g_1(r)$ $(r \geqq 1)$ は単調増加関数で $g_1(1) = 1$ である。

さらに，加除算方式を定義するために，$f_1(r)$, $g_1(r)$ に次の条件を仮定する。

価格がより強く効くために，r が 1 から離れるに従い，(万有引力のような引力が割引にも働くと考えて,）提案価格評価点は，r^2 で割引かれ，

$$f(x,r) = \frac{100}{r^2}$$

であると仮定する。

次に，非価格要素評価点について考える。提案価格（r の値）が高いと，いろいろなサービスやモノを立派に見せることなどが可能である。すなわち非価格要素点が高くなると予想される。このことを何らかの形で補正する必要がある。それを価格で割引くことができる，という考え方をする。この考えは，単位価格 (円）当たりの非価格評価点が最も高い提案者を採択する，という考え方に基づく除算方式と同じである。よって，その割引は

$$g(x,r)=\frac{x}{r}$$

で達成されると仮定する。

以上をまとめて，総合評価方式 $I(x,\ r,\ w)$ として，

$$I(x,\ r,\ w)=wf(x,r)+(1-w)g(x,r)=w\frac{100}{r^2}+(1-w)\frac{x}{r}=\frac{\left(w\dfrac{100}{r}+(1-w)x\right)}{r}$$

を提案する。加算方式における提案価格の所が普通の加算方式とは異なるが，式 $I(x,\ r,\ w)$ は除算方式と新しい加算方式（新加算方式）を統合した式になっている。加算方式と除算方式のよいところを含んでいる式である。この式を**加除算方式**と定義する。以上をまとめて，

Theorem 11.1 (**一般加除算方式**). 総合評価方式 $I(x,\ r,\ w)$ として次の加除算方式が成り立つ。提案価格点と非価格要素点をそれぞれ $f(x,\ r)$, $g(x,\ r)$ とする。重みを w とする。ただし，x は非価格点で $0\leqq x\leqq 100$,，r は基準化された提案価格で $r=\dfrac{\text{提案価格}}{\text{最低提案価格}}\geqq 1$ とする。$f(x,\ r)$ は r のみの関数 $f(r)$ で r について単調減少関数であり，$g(x,\ r)$ は x については単調増加であり r に関しては単調減少関数であるとする。このとき，総合評価方式は一般的に

$$I(x,\ r,\ w)=wf(r)+(1-w)g(x,\ r)$$

である。表 1 のように $f(x,\ r)=f(r)$,　$g(x,\ r)$ を選ぶと，普通の意味での加算方式および除算方式が得られる。

Corollary 11.1 (加除算方式，MG 方式). $f(r)=\dfrac{100}{r^2}$,　$g(x,\ r)=\dfrac{x}{r}$ とおくと，

$$I(x,\ r,\ w)=\frac{1}{r}\left(w\frac{100}{r}+(1-w)x\right)$$

となる。新加算方式と除算方式を統合したようなものとなる。これを**加除算方式**または**ＭＧ方式**とよぶ。

注意. 非価格 x によって価格 r が決まると考えるのではなく，価格 r により x が決まると考える。一般的には $f(x,\ r)$ は x の関数とも考えられるが，x についての価格の変動は $g(x,\ r)$ に含まれ説明されると考える。よって，$f(x,\ r)$ は $f(r)$ と仮定できる。

非価格要素得点 x を**割引く考え方**について考察する。

新加算方式は $\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{100w}{r}+(1-w)x\right)$ であり，除算方式は $\dfrac{100w+(1-w)x}{r}$ である。$w=0$ の場合は，価格ウェイトが 0 の場合であり，２つは同じ式 $\dfrac{x}{r}$ となる。すなわち，目的とする対象の「仕様」が完全に行政側によって決められ，提案者側には何らの工夫の余地もないことを意味する，と

考えられる。たとえば，特定の鉛筆１本を買うことを考える。この場合，仕様は決まっているのでなるべく安く買うこと（提案価格が最低であるべき）が望ましい。非価格要素点 x について評価すると，鉛筆２本，３本を提案した提案者の方がよい評価 x が得られると考えられる。しかし，それでは提案価格が高くなることが考えられる。このことを割引く（調整する）ためには，いろいろな割引が考えられる。$\frac{x}{r}$ とするのが，単位当たりの価格という意味で，これがまずは第１近似である。物理的な単位量で測れる場合は $\frac{x}{r}$ が妥当であると考えられる。すなわち，サービスについても，$\frac{x}{r}$ とするのが妥当である。これは除算方式の基本概念である「単位価格当たりの非価格評価点が最も高い提案を採択する」と同値である。一般的には，$\frac{x}{f(r)}$ である。ただし，$f(r)$ は r に関する単調増加関数で，$f(1) = 1$ を満たす関数である。

表 2:

$r =$ 提案価格 / 最低提案価格	1	1.1	1.2	1.3	r	1.5	$\cdots$	2
(1)　$100/r$	100	91	83	77	$100/r$	67	$\cdots$	50
(2)　$100/r^2$	100	82.6	69	59	$100/r^2$	44	$\cdots$	25
(2) の (1) に対する誤差（%）	0	9.2	16.9	23		34	$\cdots$	50

表 2 より，$\frac{100}{r}$ を $\frac{100}{r^2}$ に変えると，$1 \leqq r \leqq 1.3$ のとき相対誤差は 0 から 23 %以下である。図 11 より，価格比率 r が強く効くことがわかる。

$\frac{100}{r}$ と $100 - T(r-1)$ $(T = 100)$ の表 3 をかき，グラフ（図 11 ）を描く。後者 $y = 100 - T(r-1)$ は，r が大きくなると，価格評価 y は 0 以下となることが問題である。

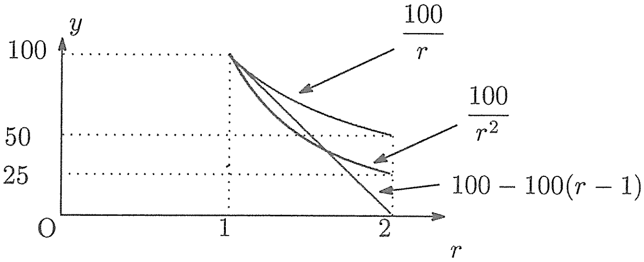


図 11: $\frac{100}{r}$,　$\frac{100}{r^2}$ と $100 - T(r-1)$ のグラフ

表 3 より，$1 \leqq r \leqq$ のとき，$100 - 100(r-1)$ に対する $\frac{100}{r}$ の相対誤差は 9.1 %以下である。このとき，加算方式と除算方式の計算方式による違いは，$1 \leqq r \leqq 1.3$ のとき最大 9.1 %の相対誤差である。この現象から，加算方式と除算方式には大きな差はないと一般的にいわれる理由である。しかし，この論文で示したように重み w によっては異なるので，注意が必要である。

表 3:

r	1	1.1	1.2	1.3	1.4	$\cdots$	2
$\frac{100}{r}$	100	91	83	77	71	$\cdots$	50
$100-100(r-1)$	100	90	80	70	60	$\cdots$	0
誤差 (%)	0	1.1	3.8	9.1	15.5	$\cdots$	100

12 問題点と検討課題

定性評価や提案金額が決まっていても，それらの重み付けである w の与え方に注意が必要である。

定性評価が最高点で提案金額が最低金額である場合は，どのような w や除算方式や加算方式であっても順位は１位であるが，そうでない場合には恣意的に順位を操作できる w が存在する可能性がある。それを防ぐためには，重み w は定性評価や提案前に，将棋の「封じ手」として管理者が，w の値を保管して，提案提出・採点後に開封することが，よいのではないか。

次のような問題点と検討課題が存在する。

１．除算方式または加算方式で１位となったものが，２位となったものに対して，その評価において，有意な差があるかどうかをどのように判断することが妥当であるか。

２．

（１） 定性評価には有意な差が認められるか，すなわち評価点の付け方は妥当であるのか。作為はないのか。

（２） ２つの提案価格には有意な差は認められるか。さらに，不当に安い価格をつけていないか。そうでないならば，本当に「手抜きなく」つくり，実行 (Build, Operation) ができるのか。計画中やサービスの途中で，実行不可能になる確率の見積もりは可能か。

（３） 評価する式の重み w や T は妥当であるか。w, T を考えている値の近傍において，順位が入れ替わることはないか。そのようになる w と T の集合の妥当性は検討されたのか。

３．重み w や T および定性評価点の付け方の問題点を，それらの分布関数について，現実の現象（具体的事例）で研究する必要がある。

参考文献

[1] 山田康治，後藤和雄，光多長温，ＰＦＩ事業における行政と民間のコスト比較－地域の具体例をベースにして－，地域学会 第４２大会 論文集 (2005)．

[2] 光多長温，後藤和雄，ＰＦＩのＶＦＭ計算における公共事業の公共と民間とのコスト比較に関する研究報告書，平成１５・１６年度科学研究費報告書　課題番号：15530160，平成 17 年 5 月 (2005).

[3] 山田康治，後藤和雄，光多長温，ＰＦＩ事業における行政と民間のコスト比較－地域の具体例をベースにして－，地域学研究 第３６巻第４号, 1031–1042(2007).

[4] 光多長温，後藤和雄，ＰＦＩのＶＦＭ計算における公共事業の公共と民間とのコスト比較に関する研究報告書，平成１５・１６年度科学研究費報告書　課題番号 : 15530160，平成 17 年 5 月 (2005).

[5] 後藤和雄・光多長温，ＰＦＩ事業における総合評価方式，鳥取大学大学教育総合センター紀要，第４号，(2007), 71–84.

Kazuo Goto: University Education Center, 鳥取大学大学教育センター
Nagaharu Mitsuta: Faculty of Regional Sciences, 鳥取大学地域学部
680–8550, Tottori city, Japan.

e–mail : goto@uec.tottori-u.ac.jp 後藤 和雄
: mitsutan146@p00.itcom.net 光多 長温

(2008年10月７日受理)