児童の有する除法についての認識

－除法に関する問題作りによる調査を基に－

溝口　達也*・矢部　敏昭*
竹内　泰二**・栗岡　玲子**・林　　学**・大西　泰博**・杉谷　一司**・児島　幹夫**・加藤　典子**

Research on children's conceptions of division:
－Analysis of children's problem-making on division－

MIZOGUCHI Tatsuya*, YABE Toshiaki*
TAKEUCHI Taiji**, KURIOKA Reiko**, HAYASHI Manabu**, ONISHI Yasuhiro**, SUGITANI Kazushi**, KOJIMA Mikio** and KATO Noriko**

1．はじめに

21世紀を指向した学校教育では，子どもに真に「生きる力」を育てることが重要なことであり，とりわけ算数科においては，自分で問題を見つけ，自ら考え，主体的に判断し，よりよく問題を解決していく中で，「生きる力」が育っていくものと考える。

しかしながら，「数と計算」領域に限ってみても，子どもの実態としては，「計算はできるが，計算の意味が説明できない」といった現象が観察されたり（例えば，清水，1995），「解決の過程を説明できない」あるいは「問題の構造をつかんで演算決定をすることができない」といった傾向が少なからず観察される。このような状況において，ますます，演算の意味理解を図ったり，意味の拡張をはかる学習指導が重視される必要が生じる。

こうした背景の下に，我々は，四則計算の中でも特に意味理解が困難とされる除法の意味理解や意味の拡張を図る学習指導のあり方について検討する中で，児童が，除法についてどのような認識を有しているか，その実態を把握する必要が生じた。

以上のような前提の下に，本研究においては，以下の研究課題を解決することを目的とする：

児童は，除法についてどのような認識を有しているか，また，意味の拡張を図る際に，そのような認識は次の学習に対してどのように機能するか。

本研究においては，児童の除法に関する認識についての一般的傾向を知ることを主とするため，後述のように質問紙調査による量的方法をとるが，その際，除法の意味の拡張という前提に立つとき，特に小学校第5学年で指導される「小数の除法」（×小数）の場面に焦点を当てることで，その特徴を捉えようとするものである。

2．調　査

(1)　調査問題の開発

先行研究において，小数の乗法に関する実態調査については，これまでに様々なアプローチが試みられてきているが，小数の除法については，前者に比べれば比較的少ないといえる。例えば，Berenson, et al.（1996）では，“division”という語から子どもが連想する語を分析することで，子どもの除法についての信念を調査している。しかし，本研究においては，上述のように，「小数の除法」（小５）の場面における児童による意味の拡張に焦点を当てることから，子どもの演算決定あるいは立式との関連で，除法についての認識を捉えることをねらうものである。このとき，例えば，日野（1993）では，小数の乗法に関する調査の際に，問題文から立式を問うといった形式を採用しているが，本研究の場合，むしろ子どもの立式の背景となる子どもの有する認識を調査することを主とするため，《与えられた式に対する問題場面の想起》という質問形式を採用することとする。

以上のような議論を基に，以下のような調査問題を開発した。

【もんだい】例にならって，下の(1)～(4)のそれぞれの式で，こたえがもとめられるようなもんだいを作りなさい。

例　5＋8

はじめバスに５人のお客さんがのっていました。次の停留所で８人のお客さんがのってきました。バスにはいま，何人のお客さんがのっているでしょう。

(1)　12÷３
(2)　12÷30
(3)　1.2÷３
(4)　12÷0.3

(2)　調査の対象

鳥取県内の小学校第４学年から第６学年の児童257名を対象とした。各学年の内訳は以下の通りである。

	第４学年	第５学年	第６学年
人　数	123	67	67
学　校	A，B，C	D，E	F，G

(3)　調査の方法

上述の問題を質問紙形式によって実施した。各学校とも，調

*　鳥取大学教育地域科学部
**鳥取算数研究の会
キーワード：除法，問題作り，算数教育

査の実施は 1999年6月 に行われ，調査時間は15分程度であった。

⑷ 調査の結果

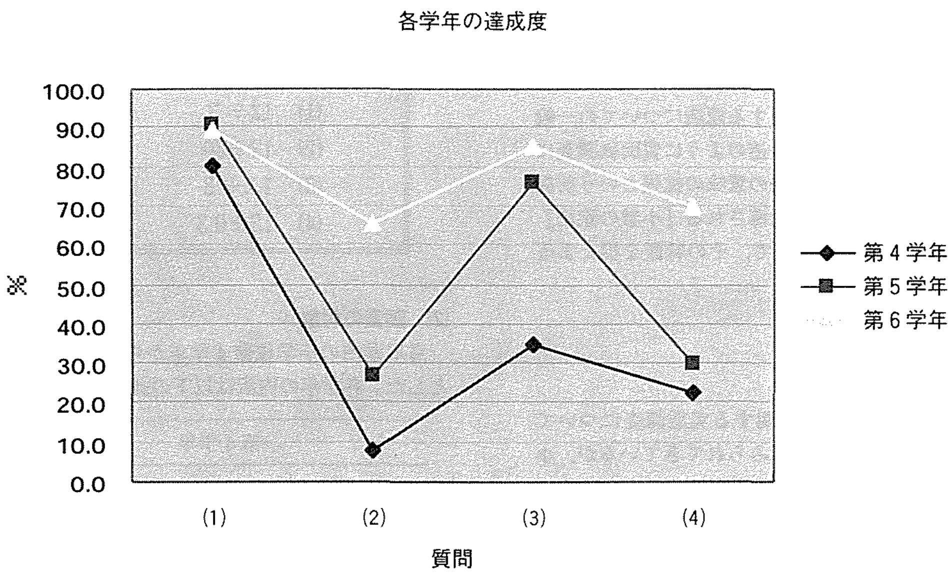
⑴～⑷についての各学年の達成度は，以下の通りである。これらを概観するとき，⑴については，いずれの学年においても非常に高い達成度が得られた。⑶及び⑷については，既習，未習の差が厳然と結果に反映されたといってよい。しかしながら，⑵については，第4学年においては未習のため，高い達成度が期待できないとしても，第5学年においては，⑶の結果と比較するときその達成度の低さが目立つ。第6学年についても，同様に，その達成度は高いものとは言えない。

⑴の達成度	正　答	誤　答	無記入	総　計
第4学年	99 (80.5%)	23 (18.7%)	1 (0.8%)	123
第5学年	61 (91.0%)	4 (6.0%)	2 (3.0%)	67
第6学年	60 (89.6%)	6 (9.0%)	1 (1.5%)	67

⑵の達成度	正　答	誤　答	無記入	総　計
第4学年	10 (8.1%)	73 (59.4%)	40 (32.5%)	123
第5学年	18 (26.9%)	35 (52.2%)	14 (20.9%)	67
第6学年	44 (65.7%)	22 (32.8%)	1 (1.5%)	67

⑶の達成度	正　答	誤　答	無記入	総　計
第4学年	43 (35.0%)	44 (35.8%)	36 (29.3%)	123
第5学年	51 (76.1%)	7 (10.5%)	9 (13.4%)	67
第6学年	57 (85.1%)	7 (10.4%)	3 (4.5%)	67

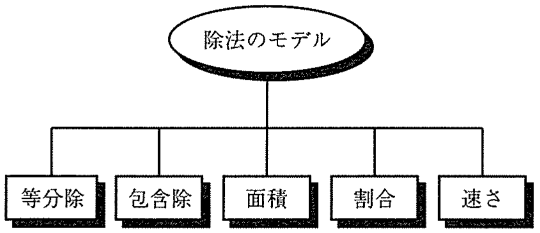
⑷の達成度	正　答	誤　答	無記入	総　計
第4学年	28 (22.8%)	44 (35.8%)	51 (41.5%)	123
第5学年	20 (29.9%)	12 (17.9%)	35 (52.2%)	67
第6学年	47 (70.2%)	13 (19.4%)	7 (10.4%)	67



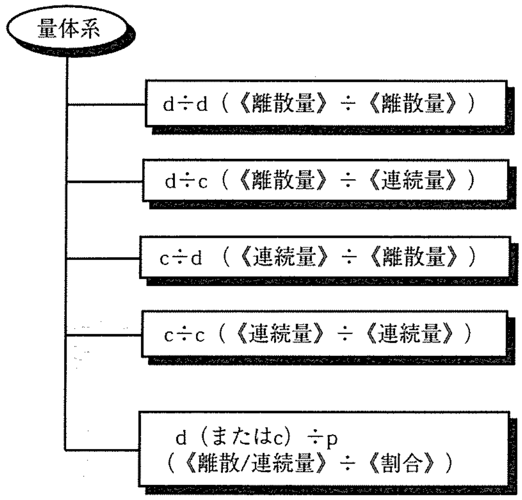
3．調査結果の分析

先行研究の吟味から，調査結果を分析する上で，２つの観点，すなわち，《除法のモデル》と《量体系》を設定する。

前者に関しては，すでに，Fischbein, et al.（1985）によって，《等分除モデル》と《包含除モデル》が示されているが，後述のように，本調査の結果から，新たに《面積》，《割合》，《速さ》の３つのカテゴリーをこれらに加えた５つのカテゴリーによって分析を試みる：



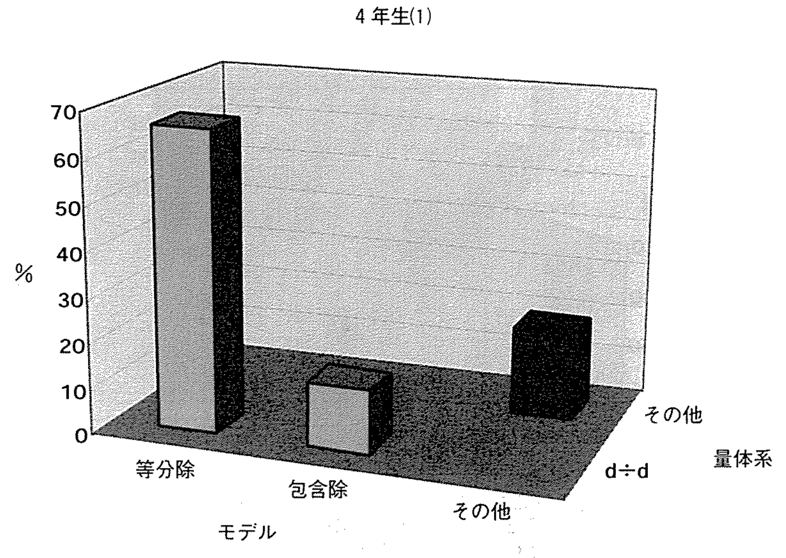
また，後者に関しては，日野（1993）による指摘を受けて，わり算の記号÷から連想されるもの（部分的な量等）とは別に，物理的な量体系に対する子どもの経験的な考えが本調査問題を解決する上で影響すると考え，大きく《離散量（d）》と《連続量（c）》，及びこれらに《割合（p）》を加えて，以下のような５つのカテゴリーによって分析を試みる：



(1)～(4)について，これらのカテゴリーによるクロス集計結果は以下の通りである。[注1]

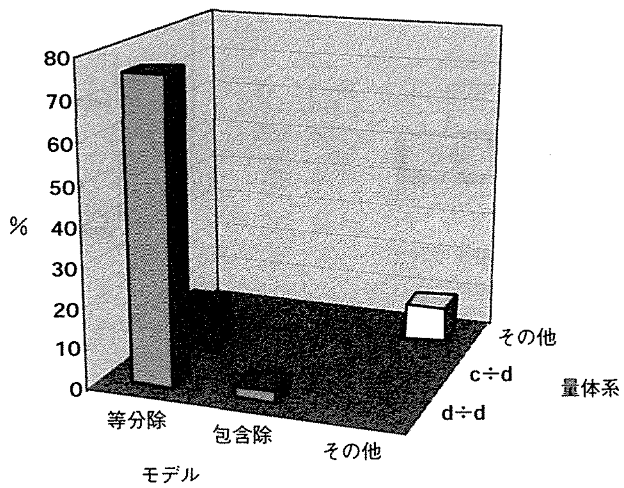
(1)　12÷3

第４学年	d÷d	その他	総計
等分除	82（66.7%）		82（66.7%）
包含除	17（13.8%）		17（13.8%）
その他		24（19.5%）	24（19.5%）
総計	99（80.5%）	24（19.5%）	123



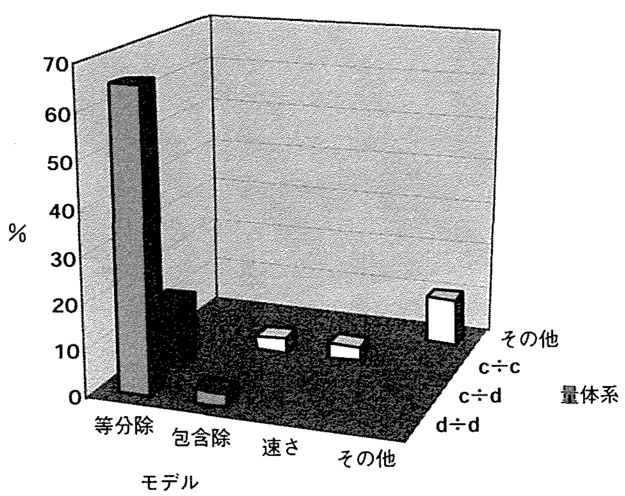
第 5 学年	d ÷ d	c ÷ d	そ の 他	総　計
等 分 除	51 (76.1%)	8 (11.9%)		59 (88.1%)
包 含 除	2 (3.0%)			2 (3.0%)
そ の 他			6 (9.0%)	6 (9.0%)
総 計	53 (79.1%)	8 (11.9%)	6 (9.0%)	67

5 年生(1)



第 6 学年	d ÷ d	c ÷ d	c ÷ c	そ の 他	総　計
等 分 除	44 (65.7%)	10 (14.9%)			54 (80.6%)
包 含 除	2 (3.0%)		2 (3.0%)		4 (6.0%)
速 さ			2 (3.0%)		2 (3.0%)
そ の 他				7 (10.4%)	7 (10.4%)
総 計	46 (68.7%)	10 (14.9%)	4 (6.0%)	7 (10.4%)	67

6 年生(1)



(1)については，3学年とも《等分除》と《d÷d》の組み合わせによる回答が大半を占める。

例1-1
はじめにあめが12こありました。3人で同じ数ずつ分けると1人何こずつになるでしょう。

《包含除》と《d÷d》の組み合わせとしては，次のような回答例があげられる。

例1-2　(4年生・女子)
12このボールを3つずつはこにつめます。はこはいくついるでしょう。

5，6年生で《d÷d》以外の量体系による作問を行なう回答が見られるのは，〈小数÷整数〉や〈÷小数〉の学習経験から連続量を扱う機会が増えたことによるものと考えられる。このようなものとして，次のような回答例があげられる。

例1-3　(5年生・男子)(《等分除》と《c÷d》)
はじめに12・のジュースがありました。これを3人で分けることにしました。1人は，何ℓになるでしょう。

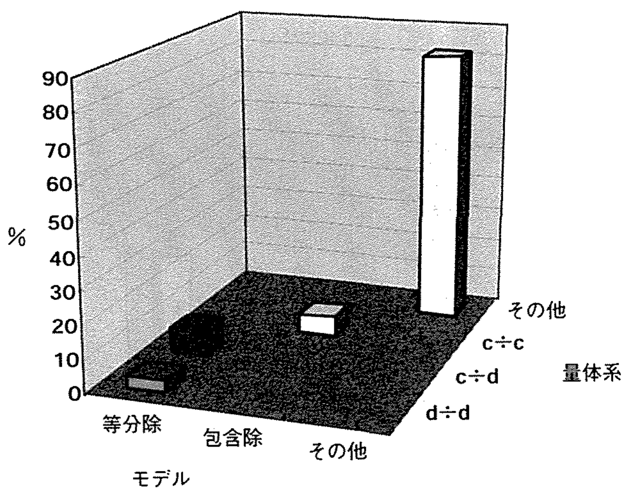
例1-4　(6年生・女子)(《包含除》と《c÷c》)
12mのリボンを3mづつ分けました。3mづつ分けたリボンは，何本になりましたか？。

例1-5　(6年生・男子)(《速さ》と《c÷c》)
まさる君の家からおじさんの家まで12kmあります。時速3kmで走ると何時間かかるでしょう。

(2)　12÷30

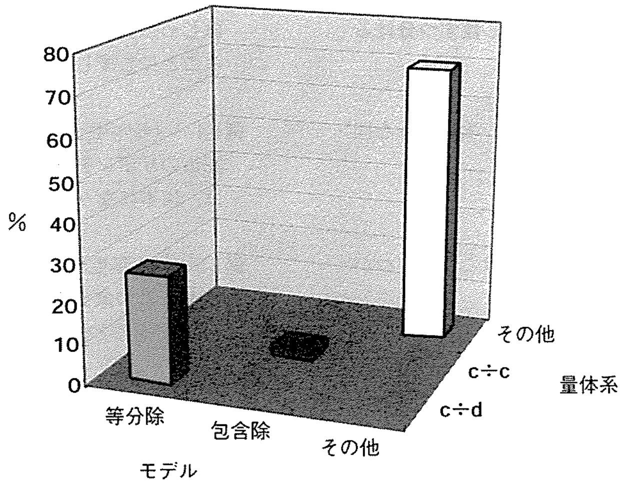
第4学年	d÷d	c÷d	c÷c	その他	総計
等分除	4 (3.3%)	10 (8.1%)			14 (11.4%)
包含除			7 (5.7%)		7 (5.7%)
その他				102 (82.9%)	102 (82.9%)
総計	4 (3.3%)	10 (8.1%)	7 (5.7%)	102 (82.9%)	123

4年生(2)



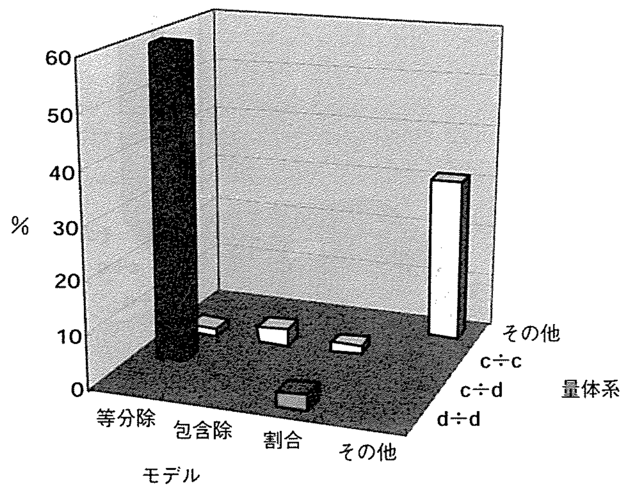
第5学年	c÷d	c÷c	その他	総計
等分除	18 (26.9%)			18 (26.9%)
包含除		2 (3.0%)		2 (3.0%)
その他			47 (70.1%)	47 (70.1%)
総計	18 (26.9%)	2 (3.0%)	47 (70.1%)	67

5年生(2)



第6学年	d÷d	c÷d	c÷c	その他	総計
等分除		40 (59.7%)	1 (1.5%)		41 (61.2%)
包含除			2 (3.0%)		2 (3.0%)
割合	2 (3.0%)		1 (1.5%)		3 (4.5%)
その他				21 (31.3%)	21 (31.3%)
総計	2 (3.0%)	40 (59.7%)	4 (6.0%)	21 (31.3%)	67

6年生(2)



上述のように全体を通してもっとも達成度の低い(2)については，4，5年生においては，正答者は，すべて《等分除》と《c÷d》の組み合わせによる回答である。

例2-1　（4年生・女子）（《等分除》と《c÷d》）
12mのひもがあります。30人に同じ長さずつわけます。なんmずつくばれるでしょう。

誤答例としては，次のような回答例があげられる。

例2-2　（4年生・男子）（《等分除》と《d÷d》）
12このなしを，30人で分けます。同じ数ずつ分けると，1人何こでしょう。

例2-3　（５年生・女子）（《包含除》と《c÷c》）
リボンが12mあります。30mずつにきると，30cmのリボンはいくつできるでしょう。

4，5年生において見られる除法の認識は，「何等分」「何人分」あるいは「１つ分」といった語で示される回答例が圧倒的に多く，被除数が除数よりも小さかったり，また割り切れない場合に，その問題場面を想起できないという傾向が指摘される。

6年生においても，正答者の多数は，4，5年生同様，《等分除》と《c÷d》の組み合わせによる回答であったが，いくつか特殊な正答が見られる。

例2-4　（６年生・女子）（《等分除》と《c÷c》）
12㎡のかべを，30分でしあげました。１分で何㎡のかべをしあげましたか。

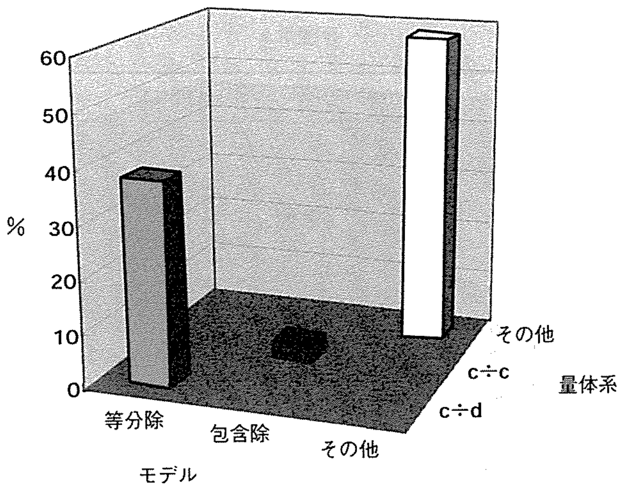
例2-5　（６年生・女子）（《割合》と《d÷d》）
南の駅には，12人お客さんがいます。北の駅には，お客さんが，30人います。南の駅の人数は，北の駅の人数の何倍でしょうか？

例2-6　（６年生・男子）（《割合》と《c÷c》）
今日のんだぎゅうにゅうは12ℓで昨日のんだぎゅうにゅうは30ℓのみました。12ℓは30ℓの何倍にあたるでしょう。

(3)　1.2÷３

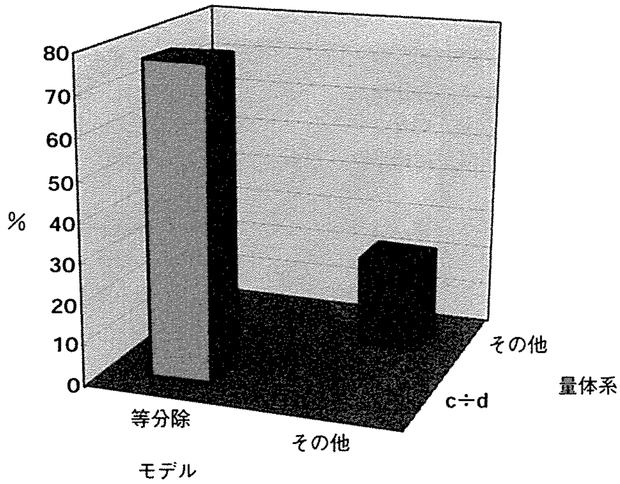
第４学年	c÷d	c÷c	そ の 他	総　計
等 分 除	47（38.2%）			46（37.4%）
包 含 除		4（3.3%）		5（4.1%）
そ の 他			72（58.5%）	72（58.5%）
総 計	47（38.2%）	4（3.3%）	72（58.5%）	123

4年生(3)



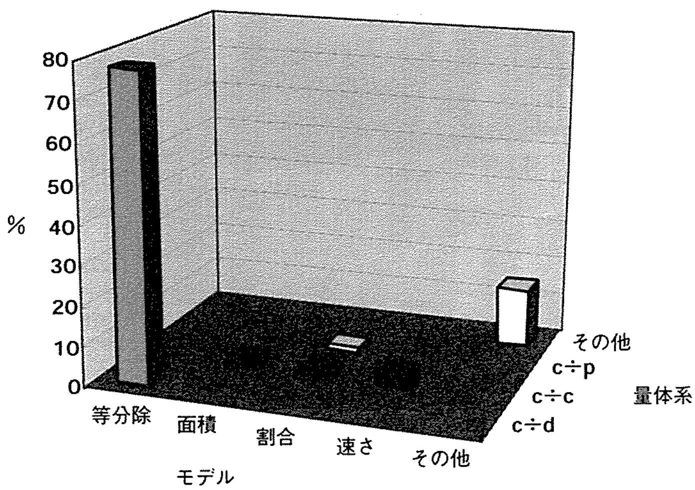
第５学年	c÷d	そ の 他	総　計
等 分 除	52（77.6%）		52（77.6%）
そ の 他		15（22.4%）	15（22.4%）
総 計	52（77.6%）	15（22.4%）	67

5年生(3)



第6学年	c÷d	c÷c	c÷p	その他	総計
等分除	52 (77.6%)				52 (77.6%)
面積		1 (1.5%)			1 (1.5%)
割合		1 (1.5%)	1 (1.5%)		2 (3.0%)
速さ		2 (3.0%)			2 (3.0%)
その他				10 (14.9%)	10 (14.9%)
総計	52 (77.6%)	4 (6.0%)	1 (1.5%)	10 (14.9%)	67

6年生(3)



(3)については，4年生においては未習のため，5，6年生の結果を見るとき，《等分除》と《c÷d》の組み合わせによる回答が正答者の大多数を占める。

例3-1　(5年生・女子)(《等分除》と《c÷d》)

1.2 ℓ のジュースがあります。そのジュースを3人で分けます。1人分は，何 ℓ になるでしょう。

また，6年生では，(2)同様，いくつかの特殊な正答例が見られる。

例3-2　（６年生・不明）（《面積》と《c÷c》）
面積が1.2㎡の長方形があります。横の長さが３mでたてのながさがわかりません。たての長さは，何mでしょう。

例3-3　（６年生・男子）（《割合》と《c÷c》）
あと，1.2kmでキャンプ場につきます。ここから３kmで公園です。キャンプ場は公園の何倍の道のりですか？

例3-4　（６年生・男子）（《速さ》と《c÷c》）
1.2kmを３時間で走るかめがいました。このかめは，時速何kmで走ったでしょう。

例3-5　（６年生・男子）（《速さ》と《c÷c》）
1.2kmの道のりを時速3時間で歩くと，何時間かかるでしょう。

例3-6　（６年生・女子）（《割合》と《c÷p》）
1.2kmあるハイキングコースを，歩いています。今ちょうど，1/3歩いたところです。何km歩きましたか。

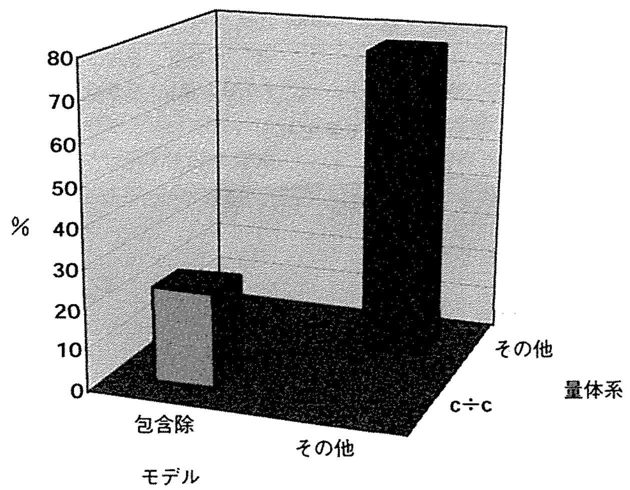
(3)は，被除数と除数の数としての関係は基本的に(2)と同じものである。すなわち，(2)の被除数及び除数をそれぞれ10で割った数の関係である。しかし，被除数が小数で表されることから，(2)に比べ，児童にとっては連続量を想起しやすいと考えられ，結果的に達成度は(2)よりも高いものとなっている。

さらに，６年生においては，少数ではあるが，速さや割合等の問題場面の経験から，除法の認識について，それまでの，「何等分」「何人分」あるいは「１つ分」といった語で示される認識にとどまらず，極めて多様な認識を示しているといえる。

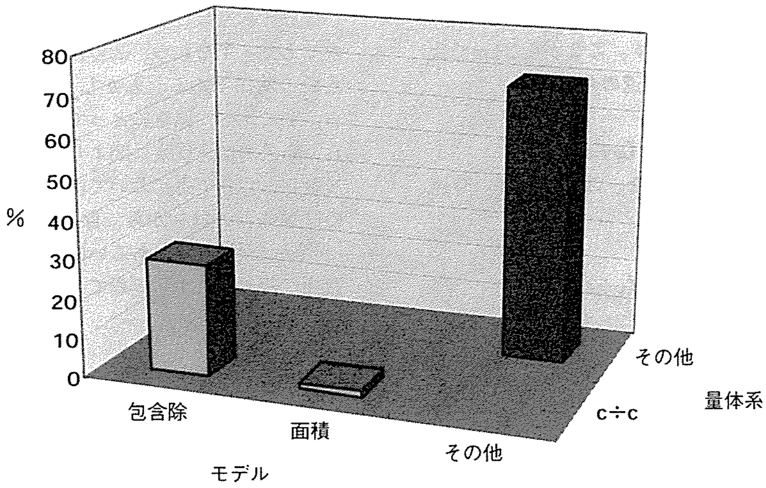
(4)　12÷0.3

第４学年	c÷d	その他	総計
包含除	29 (23.6%)		29 (23.6%)
その他		94 (76.4%)	94 (76.4%)
総計	29 (23.6%)	94 (76.4%)	123

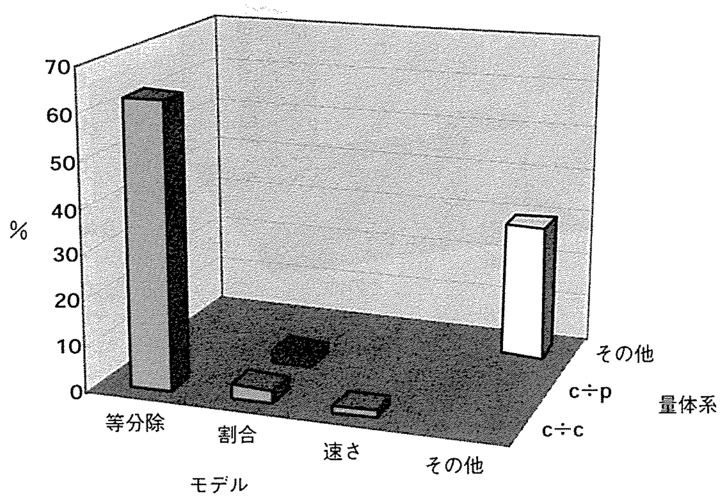
４年生(4)



第５学年	c÷c	その他	総計
包含除	19 (28.4%)		19 (28.4%)
面積	1 (1.5%)		1 (1.5%)
その他		47 (70.1%)	47 (70.1%)
総計	20 (29.9%)	47 (70.1%)	67



第6学年	c÷c	c÷p	その他	総計
包含除	42 (62.7%)			43 (64.2%)
割合	2 (3.0%)	2 (3.0%)		4 (6.0%)
速さ	1 (1.5%)			1 (1.5%)
その他			20 (29.9%)	20 (29.9%)
総計	45 (67.2%)	2 (3.0%)	20 (29.9%)	67



(4)については，《包含除》と《c÷c》の組み合わせによる回答が正答者の大多数を占める。

例4-1　（6年生・男子）(《包含除》と《c÷c》)

12mのリボンを，0.3mずつ一人の人に上げると何人にあげることになるでしょう。

除数に小数が用いられていることから，「何等分」等のような問題場面は成立しない。このため，4，5年生では未習ではあるものの，それまでの除法の認識が適用できず，無記入者が他の問題に比べ増えている。(3)とあわせて，6年生の結果を見るとき，被除数や除数に小数（分数）を用いることで，児童の除法の認識が飛躍的に深まる傾向にあることがうかがえる。

正答例としては，次の様な回答例が見られる。

例4-2　（5年生・女子）（《面積》と《c÷c》）
面積が12㎡の花だんがあります。その花だんのたては0.3mです。横は何mでしょう。

例4-3　（6年生・男子）（《割合》と《c÷c》）
12ℓのジュースは0.3ℓのジュースの何倍でしょう。

例4-4　（6年生・男子）（《割合》と《c÷p》）
ある豚肉があります。その肉の3割を取ってはかりに乗せると12kgでした。豚肉は初め何kgあったのでしょう。

例4-5　（6年生・男子）（《速さ》と《c÷c》）
時速0.3kmで12km進みました。何時間かかったでしょう。

4．おわりに：教授への示唆

本研究の結論として，児童の除法についての認識については，本文中に示した通りである。また，研究課題の後者については，次のように述べることが可能である：児童は，除法（被除数と除数）のタイプによって固定的なイメージを保有しがちである。特に，（整数a）÷（整数b）（a＞b）の学習で経験した《等分除》及び《包含除》の認識が強く，本研究の調査問題における「もんだい(2)」のように，この数の関係が保証されなくなるとき，問題場面をうまく想起できない。さらに，このことは，児童の有する除法のモデルの問題に関わるだけでなく，そうしたモデルと結びついて児童の作問に現れる量体系の問題とも関わる。これは，最初の学習経験が，逆に後の学習に対して障害として機能している（溝口, 1995）ことを意味する。すなわち，以前の学習においては，その目標において十分な達成を見たにも関わらず，次の学習においては，逆にそうした既有の認識が，困難の原因として機能しているのである。従って，特に，除法の意味の拡張が図られる「小数のわり算」（第5学年）においては，こうした子どもの有する除法のモデル，あるいは除法の場面に用いられる量体系について，十分な検討を要する。《等分除》及び《包含除》は，除法を基本的に乗法の逆演算と見たとき，（整数の範囲においては）同数累加の逆を行なっているといえる。「÷小数」の学習においても，やはり乗法の逆演算と見るとき，割合の考えが用いられていることが問題場面から適切に汲み取れるよう学習指導上配慮する必要がある。具体的には，必ずしも「1あたり量」を求めるような問題場面は，子どもの固執的な認識を克服する上で適切であるとは言えない。敢えて,「1あたり量」を求めることが問題の解決にならないような場面を想定することが望ましいと言える。(注2)

なお，本研究においては，質問紙調査で実施した各設問項目ごとの結果について分析を行ったが，一人の子どもの中で，各設問を通じてどのような回答の推移を示したかについては触れていない。これについては，残された課題として，指摘される。

注

1：なお，いくつかの箇所において，人数が達成度と異なる。これは，例えば，下のような事例の場合において，達成度としては，誤答とされたものの上記カテゴリーについての分析においては，分析の対象としたためである。
（事例）　(2)　12÷30
12ℓのジュースがあります。1日30ℓずつ飲むと何日間で全部飲めるでしょう。（4年生・女子）

2：学習指導の実際に関しては，栗岡他（1999）を参照。

引用・参考文献

Berenson, S. B., et al. (1996). Children's word meanings and the development of division concepts. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia* (*Spain*), 2-75－2-80.

Fischbein, E. et al. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education, 16* (1), 3-17.

日野圭子. (1993). 小数の乗法の学習における子どものインフォーマルな方法についての一考察. 三輪辰郎先生退官記念論文集編集委員会（編）. 数学教育学の進歩. 東洋館出版社. 283-301

栗岡玲子他. (1999). わり算の意味理解を図る学習指導法に関する一考察：数直線を活用して. 日本数学教育学会誌, 第81巻 臨時増刊, 第81回総会特集号(秋田大会), 118.

溝口達也. (1995). 認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ：極限概念を事例として. 日本数学教育学会誌 数学教育学論究63・64, 27-48.

清水美憲. (1995). 分数の除法に関する児童・生徒の認識：その硬直した「論理性」の問題. 日本数学教育学会誌 数学教育学論究63・64, 3-26.

Abstract

The purpose of this research is to answer the following questions: which conceptions do elementary students have for division, and how do these conceptions function to the next learning contexts in which students expand their meaning of division? In this research, we take the questionnaire method which students make a problem situation from a given expression. From analyzing data, some results are gained: the achievement percentage of the case of like 12 ÷ 30 is lower than others; students use models of division not only 《division into the same parts (*tobunjo*, in Japanese), 《division into the same objects (*hoganjo*, in Japanese), but also 《area》, 《proportion》, 《velocity》; etc. These research results suggest that students' conception become obstacles at the learning situations which expand the meaning of division.