

分数計画法の最適水力地点選定法への適用

林 農・河合 一*¹・松本 宗久*²
山口 顕司*³・吉野 章男・若 良二

機械工学科・*¹社会開発システム工学科
*²鈴木自動車(株)・*³米子工業高等専門学校

(1990年9月1日受理)

Fractional Programming Applied to Optimal Sequencing of Hydro-Power Stations

by

Tsutomu HAYASHI, Hajime KAWAI*¹, Munehisa MATSUMOTO*²
Kenji YAMAGUCHI*³, Fumio YOSHINO and Ryoji WAKA

Department of Mechanical Engineering

- * 1 Department of Social Systems Engineering
- * 2 Suzuki Motor Co., LTD.
- * 3 Yonago National College of Technology

(Received September 1, 1990)

At the first stage of a water survey for a river, it is important to select the optimal water power site. The most important condition to be satisfied is for the site to take out the greatest and most economical amount of water energy as possible. A new method of selecting the optimum economic water power site has been proposed in a separate study, along with a fractional programming method used in the real computation by computer. This paper describes the fractional programming method in detail.

Key words : Fractional Programming, Optimal Sequencing, Hydro-Power Stations

1. はじめに

無公害・無尽蔵であり、古くからエネルギー源として親しまれてきた水力資源をさらに見直し有効に利用することは、エネルギー資源の乏しいわが国にとってきわめて重要である^{1) 3)}。この水力資源は海面で蒸発した水が雨となって地表に降り、河川となって海へ注ぎ、その海水はまた蒸発するという循環サイクルを持ち、そのサイクル中に置かれた水力発電所は地球の環境を乱すことが少ないので、環境保全の見地からも将来に渡って益々その重要度を増すに違いない。さらに、火力発電のエネルギー源である化石資源の枯渇などの危急時には、さらに重要なものとなるであろうと予想される。

わが国のエネルギー事情から言えば、最も多くのエネルギー量を抽出できる水力地点を探索する方法の開発や最大電力よりもむしろ取得可能電力量を優先した開発計画を立てることが重要である。もちろん、これらの計画は経済的にも成り立つものでなければならない。

著者らは、取得水力エネルギーを最大にする最適水力地点のみならず、発電所の工事費当りの発生電力すなわち電力費用率を考慮した経済的最適水力地点の選定法について研究を進めてきて、その基本概念と計算法を確立しようとしている。経済的最適水力地点の計算では、取得エネルギーと総費用の比を最大にする式を求めて、分數計画法を適用して電子計算機援用による計算を行う方法を提案する。

ここでは、分數計画法そのものの方法を整理して、適用に当たった参考資料を提供しようとするものである。さらに、具体的適用例として、経済的最適水力地点選定法の計算を若干試みる。

2. 分數計画法

2.1 分數計画法の基礎

一般に分數 $\frac{A(x)}{B(x)}$ の最大値を求める問題は、 $f(x) = A(x) - \lambda B(x)$ の最大値を求める問題に置き換えられる。すなわち、 $\frac{A(x)}{B(x)}$ に対して、 λ を適当に選び、 $A(x) - \lambda B(x) = f(x; \lambda)$ とおき、 $\max f(x; \lambda) = 0$ が成り立つならば、この時の x^* , λ^* は最適解である。なぜなら、

$$\max_x \frac{A(x)}{B(x)} = \lambda^* \quad \dots (1)$$

とおくと、ある λ の値に対して

$$\max f(x) = A(x^*) - \lambda B(x^*) \quad \dots (2)$$

とすると、任意の x に対して

$$A(x^*) - \lambda B(x^*) \geq A(x) - \lambda B(x) \quad \dots (3)$$

が成立する。

$\lambda = \lambda^*$ のときには、

$$\max f(x) = A(x^*) - \lambda^* B(x^*) = 0 \quad \dots (4)$$

が成立する。したがって、

$$A(x^*) - \lambda^* B(x^*) \geq A(x) - \lambda^* B(x) \quad \dots (5)$$

したがって、任意の x に対して

$$\lambda^* B(x) \geq A(x) \quad \dots (6)$$

したがって、全ての x に対して

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \lambda^* \geq \frac{A(x)}{B(x)} \quad \dots (7)$$

が成立する。

2.2 関数再帰方程式への適用

$$\begin{cases} P_n(j) = g_n(j) + P_{n-1}(j) & \dots (8) \\ C_n(j) = h_n(j) + C_{n-1}(j) & \dots (9) \end{cases}$$

のように漸化式で表される2つの式があるとする。ただし、 j は離散値である。これらの比 $P_n(j)/C_n(j)$ を最大とする j を求める問題は次のようにして解くことができる。すなわち、

$$\begin{aligned} f_n(j; \lambda) &\equiv P_n(j) - \lambda C_n(j) \\ &= \{g_n(j) - \lambda h_n(j)\} \\ &\quad + \{P_{n-1}(j) - \lambda C_{n-1}(j)\} \\ &= \{g_n(j) - \lambda h_n(j)\} + f_{n-1}(j; \lambda) \end{aligned} \quad \dots (10)$$

とおいて、その最大値を求めて、

$$\begin{aligned} f_{n, \max} &= \max_j f_n(j; \lambda) \\ &= \max_j [\{g_n(j) - \lambda h_n(j)\} \\ &\quad + f_{n-1}(j; \lambda)_{\max}] \quad \dots (11) \end{aligned}$$

最大値が $f_{n, \max} = 0$ のときの解, j^*, λ^* が最適解であり,

$$\max_j \frac{P_n(j)}{C_n(j)} = \frac{P_n(j^*)}{C_n(j^*)} = \lambda^* \quad \dots (12)$$

を満足する.

3. 経済的最適水力地点選定法

ある川に沿って n ケ所の発電所を設けて, その河川からできるだけ多くのエネルギーを, 経済的に成立する範囲で得ようとする計算手法を最適水力地点選定法と呼ぶ. 計算の便宜上, 流域面積 $A(k)$ と標高 $H(k)$ が流路延長距離 $L(k)$ の関数として表すことができ, 且つ, その変数は $k=0$ から始まる離散データ $(0, 1, 2, \dots, k)$ であるものとする. 発電所数が n ケ所の場合の発電出力 P_n および工事費 C_n が, 流域面積 $A(k)$, 標高 $H(k)$ および流路延長距離 $L(k)$ によって表せるものと仮定して, その比が最大となる位置すなわちデータ点 k を求める.

例えば, 発電所数 $n=1$ の時, データ点 $k=1$ までの流域で得られるエネルギーと工事費はそれぞれ

$$P_1(1) = PH(1, 0), \quad C_1(1) = CH(1, 0) \quad \dots (13)$$

で表されるものとする. 一般に, データ点 k までの範囲に n 箇所の発電所を下位から順に,

$$(\text{放水口, 取水口}) = (s_i, r_i), \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad 0 = s_1 < r_1 \leq s_2 < r_2 \leq \dots \leq s_{n-1} < r_{n-1} \leq s_n < r_n \leq k \quad \dots (14)$$

の地点にとつた時の総エネルギー量及び総工事費をそれぞれ, $P_n(k; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n)$, $C_n(k; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n)$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} P_n(k; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n) &= \sum_{i=1}^n PH(r_i, s_i) \\ &= \begin{cases} PH(k, s_n) + P_{n-1}(s_n; s_1, r_1, \dots, s_{n-1}, r_{n-1}), & r_n = k \text{ のとき} \\ P_n(k-1; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n), & r_n \leq k-1 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n(k; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n) &= \sum_{i=1}^n CH(r_i, s_i) \\ &= \begin{cases} CH(k, s_n) + C_{n-1}(s_n; s_1, r_1, \dots, s_{n-1}, r_{n-1}), & r_n = k \text{ のとき} \\ C_n(k-1; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n), & r_n \leq k-1 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots (16) \end{aligned}$$

$P_n(k; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n)$ を総エネルギー量の評価関数としてその最大を求めた結果から決定される発電所の取水口及び放水口の位置を最適水力地点と定義する.

総エネルギー量と総工事費との比, すなわち電力費用率を定義し

$$PC_n(k; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n) \equiv \frac{P_n(k; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n)}{C_n(k; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n)} \quad \dots (17)$$

$PC_n(k; s_1, r_1, \dots, s_n, r_n)$ を経済性の評価関数として, その最大条件より求めた地点を経済的最適水力地点と定義する.

4. 分数計画法的最適水力地点選定法への適用

発電所数 $n=1$ のとき, 一般に k の範囲では,

$$P_1(k; 0, j) = PH(j, 0), \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad \dots (18)$$

$$C_1(k; 0, j) = CH(j, 0), \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad \dots (19)$$

である。

$$PC_1(k;0,j)_{\max} = \max\{PH(k,0)/CH(k,0), PC_1(k-1;0,j)_{\max}\} \quad \dots (20)$$

である。ここで

$$\lambda^*_{1,j} \equiv \frac{PH(j,0)}{CH(j,0)} \quad \dots (21)$$

とおくと、

$$f_1(k;\lambda) = PH(k,0) - \lambda CH(k,0) \quad \dots (22)$$

は、 $f_1(k;\lambda)_{\max} = 0$ のときの λ が $\lambda^*_{1,k}$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} PC_1(k;0,j)_{\max} &= \max\{\lambda^*_{1,k}, \lambda^*_{1,k-1}, \dots, \lambda^*_{1,2}, \lambda^*_{1,1}\} \\ &= \max_j \{\lambda^*_{1,j}\} \quad (j=1,2,3,\dots,k) \end{aligned} \quad \dots (23)$$

改めて、

$$f_1(k;\lambda)_{\max} = \max\{PH(k,0) - \lambda CH(k,0), f_1(k-1;\lambda)_{\max}\} \quad \dots (24)$$

とおけば、 $f_1(k;\lambda)_{\max} = 0$ から求めた $\lambda = \lambda^*_{1,k}$ は $PC_1(k;0,j)_{\max} = \max\{\lambda^*_{1,k}, \lambda^*_{1,k-1}, \dots, \lambda^*_{1,2}, \lambda^*_{1,1}\}$ を満足する。

$f_1(k-1;\lambda)_{\max} = 0$ から求められた $\lambda = \lambda^*_{1,k-1}$ は唯一決まっているので、 $f_1(k;\lambda)_{\max} = 0$ の解を求めるには、 λ を少しずつ変えながら解を捜す必要はなく、 $PH(k,0) - \lambda CH(k,0) = 0$ から求めた $\lambda^*_{1,k}$ と $\lambda^*_{1,k-1}$ の大小関係を比較して大きいほうを $f_1(k;\lambda)_{\max} = 0$ の解と決めればよい。

発電所数 $n = 2$ のとき、同様に、

$$P_2(k;0,r_1,s_2,j) = PH(j,s_2) + PH(r_1,0) \quad (j=1,2,3,\dots,k) \quad \dots (25)$$

$$C_2(k;0,r_1,s_2,j) = CH(j,s_2) + CH(r_1,0) \quad (j=1,2,3,\dots,k) \quad \dots (26)$$

$$PC_2(k;0,r_1,s_2,j)_{\max} = \max_j \left| \begin{array}{l} \{PH(k,1) + PH(1,0)\} / \{CH(k,1) + CH(1,0)\} \\ \{PH(k,2) + P_1(2;0,j)\} / \{CH(k,2) + C_1(2;0,j)\} \\ \vdots \\ \{PH(k,k-1) + P_1(k-1;0,j)\} / \{CH(k,k-1) + C_1(k-1;0,j)\} \\ P_2(k-1;0,r_1,s_2,j) / C_2(k-1;0,r_1,s_2,j) \end{array} \right| \quad \dots (27)$$

ここで、 $\lambda^*_{2,j} \equiv \frac{P_2(k;0,r_1,s_2,j)}{C_2(k;0,r_1,s_2,j)}$ とおき、式 (24) と同様に $f_2(k;\lambda)_{\max}$ を定義すれば

$$f_2(k;\lambda)_{\max} = \max \left| \begin{array}{l} \{PH(k,1) + PH(1,0)\} - \lambda \{CH(k,1) + CH(1,0)\} \\ \{PH(k,2) + P_1(2)\} - \lambda \{CH(k,2) + C_1(2)\} \\ \vdots \\ \{PH(k,k-1) + P_1(k-1)\} - \lambda \{CH(k,k-1) + C_1(k-1)\} \\ P_2(k-1) - \lambda C_2(k-1) \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \max \left| \begin{array}{l} \{PH(k,1) - \lambda CH(k,1)\} + f_1(1; \lambda)_{\max} \\ \{PH(k,2) - \lambda CH(k,2)\} + f_1(2; \lambda)_{\max} \\ \vdots \\ \{PH(k,k-1) - \lambda CH(k,k-1)\} + f_1(k-1; \lambda)_{\max} \\ f_2(k-1; \lambda)_{\max} \end{array} \right| \\
&= \max_j \left| \begin{array}{l} \{PH(k,j) - \lambda CH(k,j)\} + f_1(j; \lambda)_{\max} \\ f_2(k-1; \lambda)_{\max} \end{array} \right| \quad (j=1,2,3,\dots,k-1) \quad \dots (28)
\end{aligned}$$

$f_2(k; \lambda)_{\max} = 0$ より求めた λ は $\lambda^*_{2,j}$ の最大値と一致するので、 $PC_2(k; 0, r_1, s_2, j)_{\max} = \lambda^*_{2,k}$ を求めることができる。

一般に、発電所数 $n = n$ のとき (但し $n \leq k$)、同様に

$$\begin{aligned}
PC_n(k; 0, r_1, \dots, s_n, j) &= \max_j \left| \begin{array}{l} \frac{\{PH(k,n-1) + P_{n-1}(n-1; 0, r_1, s_2, \dots, s_{n-1}, r_{n-1})\}}{\{CH(k,n-1) + C_{n-1}(n-1; 0, r_1, s_2, \dots, s_{n-1}, r_{n-1})\}} \\ \frac{\{PH(k,n) + P_{n-1}(n-1; 0, r_1, s_2, \dots, s_{n-1}, j)\}}{\{CH(k,n) + C_{n-1}(n-1; 0, r_1, s_2, \dots, s_{n-1}, j)\}} \\ \vdots \\ \frac{\{PH(k,k-1) + P_{n-1}(k-1; 0, r_1, s_2, \dots, s_{n-1}, r_{n-1})\}}{\{CH(k,k-1) + C_{n-1}(k-1; 0, r_1, s_2, \dots, s_{n-1}, r_{n-1})\}} \\ P_n(k-1; 0, r_1, s_2, \dots, s_n, j) / C_n(k-1; 0, r_1, s_2, \dots, s_n, j) \end{array} \right| \\
&= \max_j \left| \begin{array}{l} \{PH(k,j) + P_{n-1}(j)\} / \{CH(k,j) + C_{n-1}(j)\} \\ PC_n(k-1; 0, r_1, s_2, \dots, s_n, j) \end{array} \right| \quad \dots (29) \\
&\quad (j=n-1, n, n+1, \dots, k-1)
\end{aligned}$$

上の方程式は比較すべき各項が割算であるので、分数計画法を適用して、これを差の形に変換した方程式の関数 $f_n(k; \lambda)$ を導入すれば、

$$\begin{aligned}
f_n(k; \lambda)_{\max} &= \max \left| \begin{array}{l} \{PH(k,n-1) - \lambda CH(k,n-1)\} \\ + \{P_{n-1}(n-1; 0, r_1, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1}) - \lambda C_{n-1}(n-1; 0, r_1, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1})\} \\ \\ \{PH(k,n) - \lambda CH(k,n)\} \\ + \{P_{n-1}(n; 0, r_1, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1}) - \lambda C_{n-1}(n; 0, r_1, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1})\} \\ \vdots \\ \{PH(k,k-1) - \lambda CH(k,k-1)\} \\ + \{P_{n-1}(k-1; 0, r_1, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1}) - \lambda C_{n-1}(k-1; 0, r_1, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1})\} \\ \\ P_n(k-1; 0, r_1, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1}) - \lambda C_n(k-1; 0, r_1, s_2, \dots, r_{n-1}, s_{n-1}) \end{array} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \max \left| \begin{array}{c} \{PH(k, n-1) - \lambda CH(k, n-1)\} + f_{n-1}(n-1; \lambda)_{\max} \\ \{PH(k, n) - \lambda CH(k, n)\} + f_{n-1}(n; \lambda)_{\max} \\ \vdots \\ \{PH(k, k-1) - \lambda CH(k, k-1)\} + f_{n-1}(k-1; \lambda)_{\max} \\ f_n(k-1; \lambda)_{\max} \end{array} \right| \\
 &= \max_j \left| \begin{array}{c} \{PH(k, j) - \lambda CH(k, j)\} + f_{n-1}(j; \lambda)_{\max} \\ f_n(k-1; \lambda)_{\max} \end{array} \right| \quad (j=n-1, n, n+1, \dots, k-1) \quad \dots (30)
 \end{aligned}$$

この関数再帰方程式を $f_n(k; \lambda)_{\max} = 0$ とおいて、 λ について解いた解 $\lambda = \lambda^*_{n,k}$ は $PC_n(k)_{\max} = \max | \lambda^*_{n,k}, \lambda^*_{n,k-1}, \dots, \lambda^*_{n,n} |$ を満足する。但し

$$\lambda^*_{n,j} \equiv \frac{P_2(k; 0, r_1, s_2, \dots, s_n, j)}{C_2(k; 0, r_1, s_2, \dots, s_n, j)} \quad \dots (31)$$

である。実際の計算では $f_n(k-1; \lambda)_{\max} = 0$ より求めた $\lambda^*_{n,k-1}$ を $f_n(k; \lambda)_{\max}$ の各項に代入してそれらの項が全て負であれば、 $f_n(k; \lambda)_{\max} = f_n(k-1; \lambda)_{\max}$ で、 $\lambda^*_{n,k} = \lambda^*_{n,k-1}$ が成り立っているので、 $\lambda = \lambda^*_{n,k-1}$ を解とすることができ、それ以上の繰り返し計算の必要がなく、計算時間を節約することができる。

5. 具体的計算例

計算のために取り上げた河川は、飛騨山脈に沿って岐阜県を縦断し、木曾川に流下する飛騨川である。図1は流れ込み式水力発電所の概念図を示す。標高60mの木曾川との合流点から山頂の標高3000mまでの流路延長は147.94km、総流域面積は2120.74km²で、流路に沿う総データ点数は328点である。流路長L(km)と流域面積A(km²)及び標高H(m)の関係は図2に示す。

計算条件としては無圧水路の場合とし、 $a = c = 1/1000$, $b = 1/200$, $\theta = 45^\circ$ と仮定した。

この飛騨川のデータを用いて、最下流発電所標高 H_0 を300mとし、最上流側取水口を1200mまでの範囲とした時、発電所数 n が1から4までの範囲の場合について発電所を途中空きを置かず連続に配置するものとして電力費用率 $PC_n = P/C$ の値が最大となる水力地点の選定を行った。また、各段の出力 P と工事費 C も計算し、その結果を図3、図4、図5、図6に示す。図6中丸印は最下流側発電所標高 H_0 を、+印は取水口標高を示す。

この場合、発電所数 n が違っても電力費用率 P/C の値はさほど違わないが $n = 2$ の場合の $P/C = (P_1+P_2)/(C_1+C_2)$ が154.45で最大となっている。即ち、発電所を2箇所設置することが経済性の面から最良であると言えることができる。この時、図4、図5、図6に示すように、下流側取水口標高は954.311m、上流側取水口標高は1190.61mであり、総出力 ΣP は116225.7(kW)、総工事費 ΣC は752.49(億円)である。

しかし、各段毎にみると $n = 2$ の場合の上流側発電所の電力費用率 P/C の値は、162.72で他より大きい。この時の取水口標高と放水口標高はそれぞれ1190.61m, 954.311mである。しかし、いたずらに高い標高の地点に発電所を設置しても P/C の値は大きくなならない。 $n = 3$ の場合の最上流側発電所と $n = 4$ の場合の最上流側発電所は P/C の値が小さく、取水口標高が殆ど1200mであり、落差は10m程度である。

発電所数 $n = 2$ と $n = 3$ で最適位置が異なっている。しかし、 $n = 2$ の場合の P/C が154.45に対して $n = 3$ の場合の下流側2個の発電所の総 P/C , 即ち $(P_1+P_2)/(C_1+C_2)$ は154.44で僅かに $n = 2$ の場合よりも小さい。 $n = 2$ の場合の取得エネルギー P の総和 (P_1+P_2) が116225.7(kW)であるのに対して、 $n = 3$ の場合の下流側2個の発電所の取得エネルギー

ギーの総和(P_1+P_2)は 129964(kW)であり、こちらの方が大きく、取得エネルギーの観点から言えば $n = 3$ の下流側2個の発電所の選択の方が良い。また、 $n = 3$ の場合の3箇所全てのPの総和およびCの総和から求めた $P/C = (P_1+P_2+P_3)/(C_1+C_2+C_3)$ は153.87であり、 $n = 2$ の場合の上流側に同じ位置に3個目の発電所を設置した場合は153.81であり、殆ど変わらない。電力費用率P/Cが同じ程度であればできるだけ取得エネルギーが大きい方が望ましいと思われるので、 $n = 2$ の場合の発電所の最適位置よりも $n = 3$ の場合の下流側2つの発電所を選ぶ方が良いということが分かる。従って、経済性のみで判断するのは少しばかり危険であり、同時に取得エネルギーの量も考慮していく必要があることがわかる。

6. おわりに

経済的最適水力地点の選定に際しては、総出力を総工事費で除して得られる電力費用率を評価関数として導入した。その評価関数を最大にする計算では割り算が含ま

れているので多大な計算時間を要する場合が多い。そこで本論文では割り算を減算に変換して演算する分数計画法を導入して、経済的最適水力地点の選定法に適用する場合について詳しく述べた。またその具体的適用例も示した。

文 献

- (1) HAYASHI T., YOSHINO F., WAKA R., YAMAMOTO Y. "OPTIMAL SEQUENCING OF MICRO HYDRO-POWER STATIONS" Proceeding of The Third Asian Congress of Fluid Mechanics, Sept. 1-5 (1986) 507-510
- (2) 林 農, 吉野章男, 若 良二, 最適水力地点の選定法, ターボ機械 15巻 12号 (1987) 743-749
- (3) 林 農, 吉野章男, 若 良二, 松本宗久, 水力発電所の最適位置, 第4回 ソフトウェア コンファレンス プロシーディングス (1988) 163-166

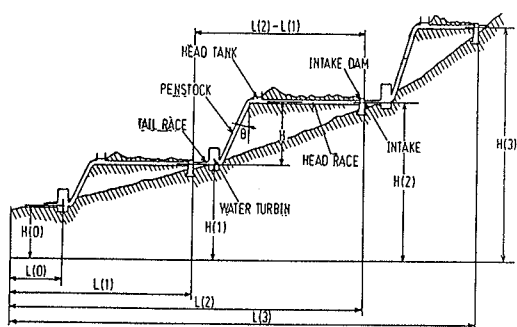


図1 発電所配置図

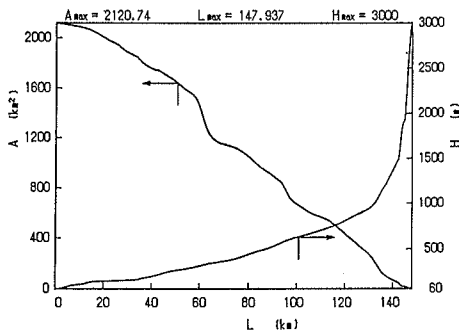


図2 飛騨川 H-A-L 線図

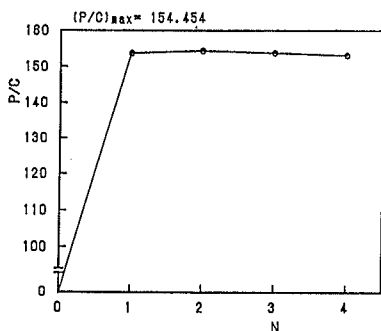


図3 $H_0=300m$, 落差に制限無しの場合の電力費用率 P/C

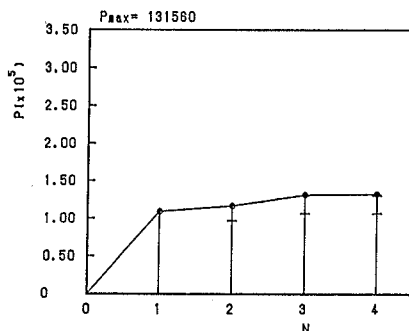


図4 $H_0=300m$, 落差に制限無しの場合の取得エネルギー P

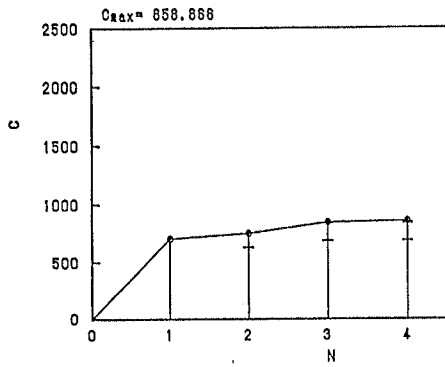


図5 $H_0=300\text{m}$, 落差に制限無しの場合の
工事比 C

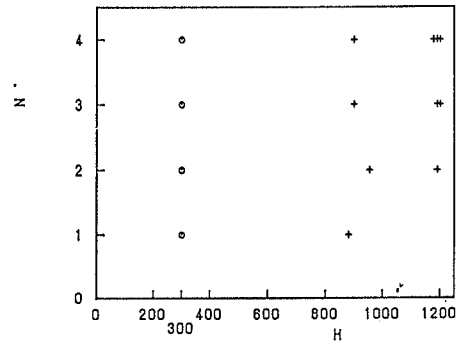


図6 $H_0=300\text{m}$, 落差に制限無しの場合の
取水口標高H