

数学教育における教師教育教材の 開発に関する研究

数学科教育教室 笹 田 昭 三
数学科教育教室 矢 部 敏 昭
鳥取県算数・数学教材開発研究会*

A Study on the Development of Teaching and Learning Materials
for Teachers in Mathematical Education

Shôzô SASADA, Toshiaki YABE, Tottori Mathematics Education Study Group*

I 研究の目的

本研究は、数学教育に志しをもつ学生、また、数学教育の実践に携わる教師に対して、教材開発の視点と教材研究のあり方について、その示唆を与えることを目的とし、そのための教師教育用の教材開発と開発の理論の検討を行うものである。

今回の教育課程の基準は、小学校においては平成4年度から全面実施されており、また、中学校においては平成5年度から全面実施されることになっている。この新しい教育課程の実施に向けては、さまざまな教師への期待と児童・生徒への願いが盛り込まれている。本研究との関わりからその重要な視点を挙げれば、それは評価への期待である。

従来、ややもすると子どもをランクづけし、他者との比較を無意識のうちに行ってきた評価であったかも知れない。また、このことは知らず知らずのうちに、子どもの内に序列化を芽生えさせてきた危惧もないとは言えない。このような反省に立って、今回新たに打ち出された評価の視点は、第1に、指導の改善に役立つ評価であること、第2に、児童・生徒の学習の可能性を伸長させる評価であること、第3に、学習者の情意的な側面に及ぶ評価であること、である。つまり、評価は教師にとっても子どもにとっても、共に伸び成長する過程としての評価としてとらえることができ、また、評価はこれらのねらいを達成するための手段である、という認識に立つことができる。

教師が、具体的な教材に即して評価の視点をもつためには、一方で教育目標（教育内容）の教育

* 安治真由美（鳥取大学教育学部附属中学校教諭）、矢木美明（鳥取県青谷中学校教諭）
林 学（鳥取大学教育学部附属小学校教諭）、齋尾宏伸（鳥取県八橋小学校教諭）
横山ひとみ（鳥取市修立小学校教諭）、杉本仁詞（鳥取県八東小学校教諭）
高木政寛（鳥取県船岡小学校教諭）

的価値を分析することが必要であり、他方、その上に立った算数・数学科の独自の数学的価値の追求が必要なものとする。

したがって、本研究は、このような評価観に立って、望ましい教材研究と教材開発のあり方を追求し、教師教育用の教材研究・教材開発モデルの作成とその実践的検討を行うものである。そこで、本研究の目的は、第1に教師教育用の教材研究・教材開発として、教材開発の12の視点を取り上げる。第2に、教材研究・教材開発の方法論的モデルを提示し、そのモデルに即した授業実施案に至る素材の教材化と授業の構想と設計の検討過程を明示するものである。さらに、第3に授業実施案と実施後の評価・検討を行うものである。

II 本研究における教材開発の視点

本研究は、まず算数・数学科の学習を通して、子どもたちに何を教えるのか、という立場から考察をはじめることとした。それは、何を教えるのか、ということが教師の教材観に関わる問題だからである。そして、このことは算数・数学科のそれぞれの教材に対する数学的な価値の追求を不可欠とし、算数・数学教育の目標に関する分析につながると考えたからである。

本研究の方法としては、杉山吉茂氏の主張する教材分析12の視点⁽¹⁾を基礎として検討をはじめた。算数・数学教育の目標に述べられている動詞に着目すると、「知識・理解に関すること」「能力に関すること」「態度・習慣に関すること」の3つがあることがわかる。つまり、知識・理解に関することは、「～を知る」「～を理解する」「～を身につける」と述べられているものに当たる。

また、能力に関することは、「～の能力を育てる」「～の能力を養う」「～ができるようにする」に当たり、さらに、態度・習慣に関することは、「～の態度を育てる」「～の態度を養う」と述べられているものに当たるのである。

また、算数・数学科の具体的な内容について、その対象は大きく「数学の発生や数学を創造すること」「数学的知識と技能」「数学の応用と有用性」「数学の性質と特徴」の4つに分類することができる。

そして、これらを理解、能力、態度と組み合わせることによって、以下に示す教材分析の12の視点が見い出せるのである。本論では、これを「教材開発の12の視点」と呼び、考察をさらに進めるものである。

教材開発の12の視点

- ① 数学の発生や創造について知る
- ② 数学を創造することができる力を育てる
- ③ 数学を創造、発展させようとする態度を伸ばす
- ④ 数学的な知識、技能を理解する
- ⑤ 数学的な技能を駆使する
- ⑥ 数学的な知識、技能を知ろうとする意欲をもっている
- ⑦ 数学的知識が有用であることを知る
- ⑧ 場面や目的に応じて数学を用いることができる
- ⑨ 数学を活用しようとする態度を身につける
- ⑩ 数学のよさ、特徴、価値を知る
- ⑪ 形式化したり、一般化したりすることができる

- ⑫ より単純、明瞭、能率的なものにしようとする態度を身につける
(視点⑦、⑧の下線部分は著者らが加筆したところである。)

これら教材開発の12の視点は、4分類3項目の組み合わせによって導き出されるのであるが、さらにそれぞれの視点の見方について詳述する。視点①～③は、数学の発生や数学を創造することに対応する事柄であり、視点④～⑥は数学的知識と技能、視点⑦～⑨は数学の応用と有効性、視点⑩～⑫は数学の性質と特徴、にそれぞれ対応する事柄である。そして、4つに分類されたこれらの算数・数学科の具体的な価値に対して、その内わけがそれぞれ知識・理解、能力、態度・習慣の3つの項目に分けられているのである。例えば、視点⑥は「数学的知識と技能」の分類項目に属し、かつ目標分析の「態度・習慣」に関する事柄に当たる。また、視点⑦は「数学の応用と有効性」の分類項目に対応し、かつ「知識・理解」に関する事柄に当たるのである。

このような視点を設定して教材開発を行う意義は、算数・数学科の目標である数学的な考え方や態度・習慣といったものについて、その具体的な内容に即して明らかにすることができることにある。また、目標の分析が具体的な教材(内容)に即して明らかにされることは、言い換えれば評価の視点と場が常に設けられることであり、さらに、実践的な指導後の補いも可能になると考える。

III 研究の焦点と研究方法

教育実習生が、実地指導に当たったの中核的能力ともいえる教授スキルを効果的に獲得していくためには、児童・生徒を視野に入れた教材研究と教材開発の能力と態度を養っていくことが極めて重要である。そこで、本研究では、教授スキルの効果的獲得を促す教材開発の方式を追究し、算数・数学科における教材開発モデルを提示する。

1 教材研究と教材開発⁽²⁾

教育実習における教材研究や教材開発は、まず教科書教材の研究から始まる。教科書教材を研究し、それが担う教育的価値を分析し、教育目標(教育内容)にたちかえる。そこで得た結果を吟味した上で、教科書教材を使うことに問題ないことを確認できた場合、授業で教科書を利用し、研究・分析で明確になった教育的価値や教育目標に沿って学習指導を展開する。これがいわゆる「教材研究」であり、下図のフローチャートでは、YESの分岐ルートに沿った矢線ルートがそれを示す。

これに対して、教育目標(教育内容)までたちかえるところまでは教材研究の場合と同じであるが、そこで得られた結果を吟味してみると、教科書教材では、その展開や地域性などを考慮して十分とはいえない場合がある。この場合は、その不足点を補った教材を自ら作るとか、教育目標に合った全く新しい教材を開発する。これが、いわゆる「教材開発」であり、下図のフローチャートでは、NOの分岐ルートに沿った矢線ルートがこれを示している。

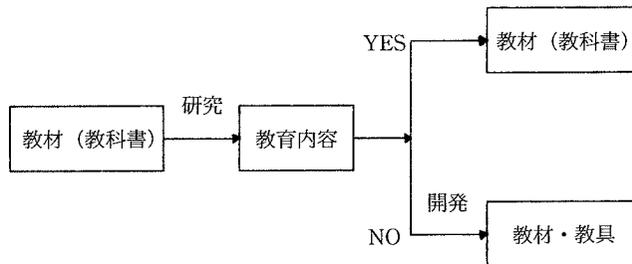


図1 教材研究と教材開発

2 教材開発の5段階

教材開発は次の5段階を踏み、それぞれのステップが重要である⁽³⁾。

第1段階 教材研究

- ① 指導内容の把握・目標の吟味 ② 重点内容の明確化

第2段階 素材 (問題) 探し

- ③ いろいろな資料から探す ④ 問題を実際に解く

第3段階 素材をアレンジして教材化する

- ⑤ 問題 (場面) を変形し、授業にのせられる問題にする

第4段階 授業の構想と設計

- ⑥ 授業を流すための具体的な指導方法・手順を考える

第5段階 授業での実証と修正

- ⑦ 実際に授業する
⑧ 授業を反省して、教材の修正をする

3 指導計画案・授業実施案の検討 (研究の焦点)

2で述べた教材開発の5段階のうち、第3段階～第5段階における、素材の教材化と授業構想、指導計画案の再三にわたる検討と修正、さらに授業実践による実証と修正、これらのプロセスは教材開発では極めて重要である。また、このプロセスを体験することによって、教材研究や教材開発の視点が明確になり、教師の教材開発の力量を一層高めていくものとする。

そこで、本研究では、(教育内容) → (指導計画案の検討・修正) → (授業実施案) → (授業実践による検討・評価) → (学習指導プログラム)、といったプロセスにおける「検討・修正」「検討・評価」にとくに焦点を当て、教材開発の研究を行った。その際に重要なことは、焦点である「検討」の視点としては、1で論じた「教材開発の12の視点」を活用して、指導計画案・授業計画案をそれぞれ検討したことである。この研究方法と研究の焦点を図解すれば、次のようなフローチャートとなる。

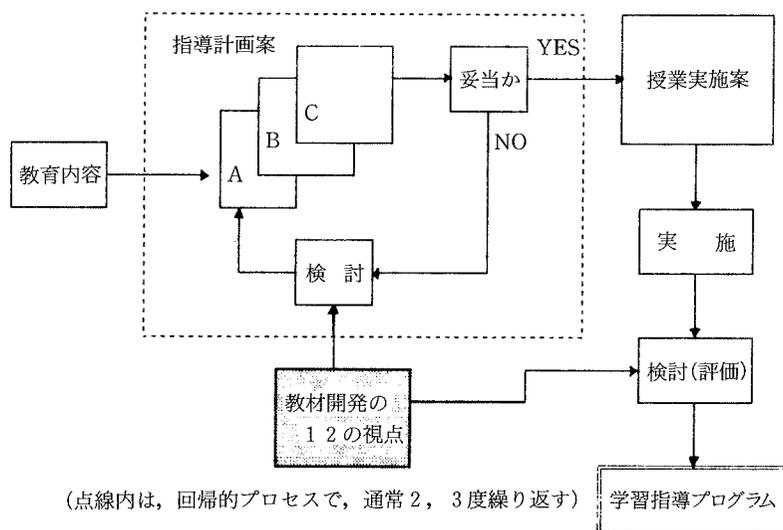


図2 教材研究・教材開発の方法論的モデル

4 研究方法

II. III 1, 2, 3で論じてきたことが、教師教育用として著者らが構築した、教材研究と教材開発の理論であり、方法論的モデルである。

この理論・モデルの妥当性や有効性を検討するために、教育実践研究指導センターの教材開発班算数・数学グループによる共同研究として、平成4年9月から6カ月間にわたって、理論的・実践的検討と考察を行った。その概要は次の通りである。

- ① 「教材開発の視点」と「教材研究・教材開発モデル」の検討（平成4年9月）
- ② 素材の発掘と指導計画案（1次案）の作成（「視点」からの検討）（平成4年10月）
- ③ 指導計画案の再帰的検討と授業実施案の作成（平成4年10月～11月）
- ④ 授業実施とその評価考察（平成4年11月～12月）
- ⑤ 研究の総括的考察（平成1月～2月）

IV 研究の内容

1 素材の教材化と授業の構想と設計

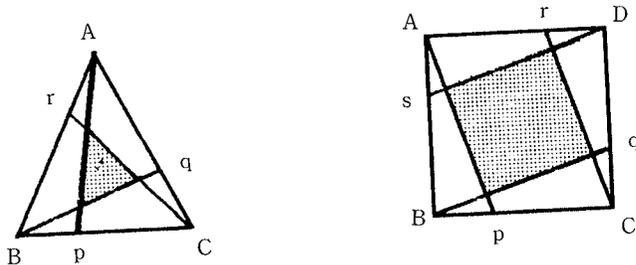
III. 3で既に述べた教材研究・教材開発の方法論的モデルに沿って、授業実施案に至るまでの素材の教材化と授業の構想と設計の検討過程について述べる。ここでは、その事例として、次節の授業実施案の中から、中学校第2学年「課題学習（図形と合同）」を取り上げて論述したい。

中学校における課題学習は、生涯にわたる学習の基礎を培う観点に立って、自ら学ぶ目標を定め、何をどのように学ぶかという主体的な学習の仕方を生徒に身につけさせることにある。そして、これまで学んできた数学的な知識や技能を駆使して、数学的な概念、原理、法則を発見し、獲得していく学習を構成することが大事である。また、本単元「図形と合同」では、基本的な平面図形についての理解を深めていくわけであるが、その際、図形の性質の考察における数学的な推論の意義

と方法とを理解し、推論の過程を的確に表現していくことが重要なねらいとなる。

(1) 素材の教材化

本素材として、まず考えたものは、「正多角形の各頂点から、それぞれ等距離に点を取り、向かい合う頂点と直線で結ぶことによって正多角形の内部に作られる多角形を考察の対象とする」というものである。



この素材は、どんな正多角形においても常に、正多角形の内部に作られる多角形は、正多角形になるところに数学的な不思議さがあり、生徒に知的好奇心を呼び起こすことができるであろうと考えた点にある。しかし、素材が見い出されたからといって、教材化できたわけではない。本素材を教材化していくためには、上述の素材を「教材開発の12の視点」から検討し、教育的価値及び数学的価値の視点から考察していくことが必要である。

本素材は、第1に、正三角形の内部に作られる三角形が正三角形になることの発見が生徒に期待でき、また、なぜ正三角形になるのかの証明には、既習の三角形の合同条件が活用できる。つまり、本素材は、既習の知識や数学的な原理、法則を使って、新しい問題を解決しようとする態度に当たる教材開発の視点が含まれるのである。第2に、正三角形において見い出された数学的な性質は、正方形、正五角形、正六角形、……である正多角形についても同様な法則として生徒に発見され、また、その根拠は三角形の合同条件から導き出せる。つまり、本素材は、数学的な発展を可能にする素材であるということができ、その追究の過程においては、類推の考えが機能するのである。言い換えれば、数学のもつよさや数学の性質、特徴に当たる教材開発の視点が含まれている。第3に、原問題である正三角形を出発点として課題は次々と発展し、また、正 n 角形の内部に作られる正多角形の考察へ発展することが可能である。さらに、内部に作られる図形が正多角形であることの証明においては、形式化したり一般化したりしていく能力に当たる教材開発の視点が含まれるのである。

以上の検討を経て、本素材は教材開発の12の視点の中から、視点③「数学を創造、発展させようとする態度を伸ばす」、視点⑩「数学のよさ、特徴、価値」、及び視点⑪「形式化したり、一般化したりすることができる」の3つの視点が設定されるのである。

次に、本素材を教材化していくためには、問題（場面）を変形し、授業にのせられる問題にすることが必要である。生徒は、前単元までに三角形の合同条件については学習しているが、それを証明に適用することには慣れていない。また、仮定や結論から考えて手順を論理的に構成するといった証明の進め方についても不慣れである。

そこで、正多角形の基本図形である正三角形を原問題として取り上げることにした。そして、

原問題を考察していく中で、正多角形の内部に作られる図形の性質に気づかせ、その証明を考え、さらに、証明した結果を正多角形へ適用していくといった展開を考えたのである。

(2) 授業の構想と設計

授業を構想し設計していくためには、問題（場面）の検討と合わせて、具体的な指導方法と手順を考えることが必要である。前述した通り、本素材は正三角形を原問題として、正方形、正五角形、正六角形、……へと課題を次々と発展させるに適した素材である。また、正多角形の内部に作られる図形の考察に当たっては、生徒に数学的な発見とその根拠に基づいた論証の進め方を指導するに適した課題でもある。

そこで、一般の正多角形まで発展させることを考えて、指導計画案として2時間を設定した。第1時では、原問題である正三角形の内部に作られる図形の考察に焦点を当てることにした。まず、生徒に題意に即した作図を行わせ、次に、作図によって見いだされた図形を生徒同士で考察させることにより、その図形が正三角形になることを発見させたい。そのために、課題の提示はオープンな形で提示することにした。それは、生徒に一層発見感を与えられると考えたからであり、さらに証明の必要性ももたせ得ると考えたからである。その後、確かに正三角形になることの証明を、三角形の合同条件を適用して論理的に組み立てる論証の進め方と意義を指導する展開を構想した。第2時では、第1時において見いだされた図形の性質が、正方形、正五角形において成り立つかどうかを問題とする課題を提示した。その証明においても、生徒は三角形の合同条件を適用することになる。しかし、正三角形の場合と比べて、証明の方法は一段と複雑なものとなり、生徒にとって思考を十分に働かせるに値する課題であると考えた。さらに、その後の課題の発展として、正六角形以上の正多角形を考察の対象とし、生徒の主體的な学習への取り組みを期待する展開を工夫し、設定した。つまり、一般の正多角形においても成り立つ性質として見いだされた性質を一般化していく授業を意図したのである。

以上、授業実施案に至るまでの素材の教材化と授業の構想と設計について述べてきたが、この検討の過程において、教材研究・教材開発の方法論的モデルは、教材開発の12の視点と教材開発の5段階のうち、特に第3段階と第4段階の機能について、その重要性が明らかにできたものとする。上述の検討過程は、他の4つの授業実施案についても同様な検討を繰り返し行ったものであり、詳しくは次節の授業実施案の作成と実施後の検討を参照されたい。

2 授業実施案の作成と実施後の検討

§1 小学校2年「かけ算九九の構成」

(1) 教材開発の視点と教材観

1) 視点について

視点⑤については、乗法に関して成り立つ性質であるところの、乗数が1増えれば積は被乗数分だけ増えること、交換法則や被乗数を既習の段の被乗数の和として見る分配法則などを使って、乗法九九を構成して行くことにより、数を多面的に見ることが可能となってくる。これは、以後のかけ算の学習においても、一つの数を他の数の積としてみるなど、他の数と関係づけて見ることができたり、簡単な3学年のかけ算にも挑戦できたりするよさをもっている。また、このような取り組みをすることによって、第3学年以降の割り算においても生きてくると

考えられ、数を多面的にみる態度を養うことは大切なことであると考ええる。

視点⑥については、ただ単に「6の段の九九を構成しましょう」ではなく、一つの問題場面を設定しかけ算で立式させ、発展させて「増えると」「減ると」という問題意識を持たせて九九構成へとつなげていく。これは、その場面・目的に応じてかけ算を用いるよさにふれることができ、生活の具体的場面でかけ算を用いることが自然な状態で可能になると考える。

視点⑨については、ある方法で問題が解決できたら他の方法でも解決できないか、既習の段のかけ算は使えないかなどのいろいろな見方ができることに気づくことを通して、数学を活用しようとする態度を養っていくことができると考える。

2) 教材観について

かけ算は、一つの大きさが決まっているときに、そのいくつつにあたる大きさを求めるという場合に用いられる演算である。

児童は、第1学年で2とびや5とびの数え方をしたり、5個ずつ10個ずつのように適当な大きさをまとめて数えたりするなどの学習を通してかけ算の素地を培っている。また、これまでのかけ算の学習において同数累加の簡潔な表現としてかけ算の式に表すよさや、かけ算九九を記憶することによってこの結果が容易に求められるよさについて学習してきた。これ以後のかけ算の学習においては、具体的なことがらに即してかけ算の式に表したり式をよんだりすることや、かけ算九九を構成する過程でかけ算に関して成り立つ性質を用いた数の表し方をして効率的にかけ算九九を構成することに主なねらいがある。これは、かけ算九九表を考察して数を多面的にみられるようにすることや、さらに計算の工夫、計算の確かめに生かすことへと発展していくために重要な点であると考ええる。

そこで、指導にあたっては、アレー図をいろいろな角度から考察しながら、かけ算に関し成り立つ性質を用いて自力で九九を構成させたい。その際、乗数の1からの構成ではなく途中から扱うことにより、数についての見方や考え方を深めていくことができると考える。また、かけ算九九は乗法計算における基礎的な技能であるので、十分習熟させ、さらに具体的な問題場面に活用できるよう高め、かけ算を積極的に活用していこうとする態度を育てていきたい。

(2) 指導実施案

1) 実施学年・実施年月日 第2学年 平成4年11月6日

2) 指導目標

- ・乗法の構成原理や乗法の性質に関心を持ち、進んで6の段の九九を構成しようとする。
- ・既習の九九をもとに、乗法の性質を用い6の段の九九構成の仕方を工夫することができる。
- ・乗法の用いられる場で立式し答えを求めるとともに、6の段の九九の正しい唱え方を知る。

3) 指導過程

教師の主な働きかけ	児童の活動・反応
1. 問題を提示する。 しいのみを6こつけた首かざりを見せ必要感や興味・関心をもたせる。	1. 問題を理解し、課題をつかむ。

(問題)

いしのみ6こずつでくびかざりを作ります。5つ作るには、いしのみが何こいるでしょう。

○大事な数字や言葉を手掛かりに立式させる。

・机間巡視し、 5×6 と立式した生徒には「1つの大きさ」が6、「いくつ分」が5であることをおさえる。

「くびかざりの数を1つずつふやしていくと何こいるでしょう。」
「また、くびかざりの数を1つずつへらしていくと何こいるでしょう。」

・大事な数字や言葉を見つけ3段階で立式する。
 6 この5つ分 $\rightarrow 6$ の5つ分 $\rightarrow 6 \times 5$

(課題)

6×5 の答えのもともめ方をいろいろ考えて、6の段の九九を作ろう。

2. 既習の2~5の段のかけ算九九と同じくみやりきまりがあることに気づかせ、見通しを立てさせる。
- 既習の2~5の段のかけ算九九や九九構成の仕方は使えないか考えさせる。
- 見つけた順のやり方で答えを求めたり九九構成したりせず、一番やりたい方法や簡単だと思う方法からやってみよう指示する。

2. 結果や解決の方法を見通す。
- ・6を5回たす。6をかける数の回数をたす。
 - ・6を5回たし、前の答えに6をたす(ひく)。
 - ・ 5×6 をして、
 - ・2の段と4の段の答えをたし、
 - ・3の段の答えを2回たし、
 - ・5の段の答えにける数をたし、

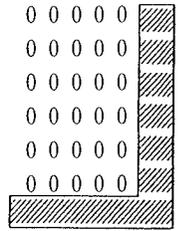
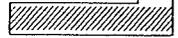
3. 自分の立てた見通しに従って追及させる。
- 児童の活動状況を座席表に記入し、必要に応じて、ヒント・指示カードを提示し個に応じた指導を行う。

3. 自分で追及する。

①の同数累加で解決している児童への手立て—
もっと手際よい方法はないか考えさせ、答えが6ずつ増えていること、6をたす回数が1回ずつ増えていることなどから、前の答えに6をたして行けばいいことに気づかせたい。

- ①同数累加
- ・図で考える
 - 0 0 0 0 0 $6 \times 5 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$
 - 0 0 0 0 0 $6 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36$
 - 0 0 0 0 0
 - 0 0 0 0 0 $6 \times 1 = 6$
 - 0 0 0 0 0 $6 \times 2 = 6 + 6 = 12$
 - 0 0 0 0 0

②の方法で解決している児童への手立て—
この方法は分かりやすいが、既習の2~5の段のかけ算を使って求める方法はないか考えさせ、いろいろな見方ができると気づかせる。
 $6 \times 5 = 3 \times 5 + 3 \times 5 = 30$ $6 \times 5 = 5 \times 6 = 30$

- ②同数累加とかけ算の構成原理
- ・アレー図(おぼじき数)
 - 0 0 0 0 0  ・乗数に±1をすれば
 - 0 0 0 0 0 答えが±6になるので
 - 0 0 0 0 0 前の答えに±6をする
 - 0 0 0 0 0 $6 \times 5 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$
 - 0 0 0 0 0 $6 \times 6 = 30 + 6 = 36$
 - 0 0 0 0 0 $6 \times 7 = 36 + 6 = 42$
 - 0 0 0 0 0
 -  $6 \times 4 = 30 - 6 = 24$

③④⑤の方法で解決している児童への手立て—
友達に説明できるようことばで書かせて準備させるとともに、他の方法で確かめさせる。また、早く簡単に見つけたり構成したりできるのはどの方法か考えさせたい。

- ③分配法則
- ・ $6 = 2 + 4$ から2の段と4の段の九九のたし算をする
 - $6 \times 5 = 2 \times 5 + 4 \times 5 = 10 + 20 = 30$
 - $6 \times 6 = 2 \times 6 + 4 \times 6 = 12 + 24 = 36$
 - ・ $6 = 3 + 3$ ・ $6 = 5 + 1$

<p>○それぞれの考え方の過程を認めた上で、より効率的な方法はないか追及させる。</p> <p>○それぞれの考え方の代表者を机間巡視で見つけ、発表の準備をさせておく。</p> <p>4. 被乗数や乗数、積のしくみやきまりに着目させながらアイデアのすばらしさを認め、自分の考えとの異同を明確にさせた上で、よりよい考え方へ練り上げさせる。</p> <p>○アレー図（おはじき表）で説明させ、かけ算のしくみやきまりについて、より理解を深めさせる。</p> <p>○単位量に着目させ、$6=2+4$, $6=3+3$, $6=5+1$などに気づかせ九九構成の見方を広げさせる。</p> <p>5. 本時の学習で分かったことを自分の言葉でまとめさせ学習をふり返らせる。</p> <p>○発展として、6×10, 6×11の答えを見つけさせる。</p> <p>○6の段の九九の唱え方を知らせ、全員で唱えさせる。</p> <p>○本時の学習について「ふり返りカード」に書かせ、自己評価を促す。</p>	<p>④分配法則や交換法則とかけ算の構成原理</p> <ul style="list-style-type: none"> ・分配法則または交換法則を使って求めた答えに±6をしていく。 <p>⑤交換法則</p> <ul style="list-style-type: none"> ・乗数と被乗数を入れかえ既習の段のかけ算に直して求める。乗数(2~5), その他は②の方法で求める。$6 \times 5 = 5 \times 6 = 30$ <p>○考えを隣席児童に説明し、明確にする。</p> <p>4. みんなで練り上げる。</p> <p>○自分の考えと比べながら発表を聞く。</p> <p>○質問したり話し合ったりしながら、全員でより手際よい方法へと練り上げていく。</p> <p>5. 学習をふり返る。</p> <p>○本時の学習で分かったことをまとめる。</p> <p>○本時の学習で分かったことを使って6×10, 6×11の答えを見つけ発表する。</p> <p>○6の段の九九の唱え方を知り、練習する。</p> <p>○「ふり返りカード」に書き、自己評価をする。</p>
---	---

(3) 指導計画案・実施案の検討

かけ算九九の構成、教科書では具体物の「一つ分の大きさ」のものを「いくつ分」か順に並べてあり、 $\square \times 1 \rightarrow \square \times 9$ へと構成するようになっている。この方法を、以下に示すように教材開発の3つの視点から検討を加えた。

視点⑧については、初めから「 \square の段の九九を作しましょう。」では、 $\square \times 1 \rightarrow \square \times 9$ の順に計算をすればよいという問題でしかなく、場面や目的に応じて数学を用いるという技能を育てて行く問題とはなりにくいと考えた。そこで、児童の生活の中から興味・関心のもてる具体的な問題場面を設定し、問題に必然性をもたせることにした。生活科の一環として「とび出せ◇◇◇たんけんたい」として児童たちと近くの樗谿公園まで出かけ、秋を袋いっぱいみつけて持ち帰り、それを使って飾りやおもちゃを作るという学習の中に「しいの実 \square こずつで首かざりを作ります。 \square 人分では、しいの実が何こいるでしょう。」という算数の問題を設定することにした。

視点⑨については、この問題場面では、順に答えを見つければ自然に九九構成ができ上がっているということになり、簡単にできてしまうと、他の効率よい方法を既習事項を使って見つけていこうとする態度は養いにくくなるということが考えられた。さらに視点⑤についても、乗数が1増えれば積は被乗数分増えるという性質を用いて容易に構成していくことができ、交換法則や分配法則

を用いることなどの見通しが立てにくいのではないかと考えた。そこで、「しいのみ□こずつで首かざりを作ります。班の人数分(本学級は5人)の首かざりを作るには、しいのみが何こいるでしょう。」という問題を設定し、問題文中の□×5を既習事項を駆使して解くことから構成へとつなげるようにした。

実施後の考察として、必要感や興味・関心のもてる問題を設定するという意図から、教師が金色のモールにしいの実6個を通した首かざりをつけて授業を始めたため、児童の問題への取り組みの動機づけが出来、意欲的で主体的な学習の展開となり、期待した反応を得る事ができた。

課題として、多くの反応が得られるのはよいが、練りあげの段階でそれぞれの考えの説明に時間がかかり過ぎ、十分な練りあげの時間を確保することが難しい。今後、発表力をさらに伸ばす必要があると考えられる。

§2 小学校3年「円の概念の指導」

(1) 教材開発の視点と教材観

1) 本教材における教材開発の視点

本教材では、教材開発の視点として、①「数学を創造することができる力を育てる」と②「数学を創造、発展させようとする態度を伸ばす」の2つを中心に考える。また、授業展開を考える上では、次のようなことを念頭に置いて考えることにする。

いろいろな数学的関係を内包するような図的モデルや物的な教具などから操作活動を媒介とする概念形成を行うことができる展開を考える。

①「数学を創造することができる力を育てる」視点について

この視点は、図-1のような現実に近い場面より数学を抽出することができる力を育てるものである。図-1の段階は、算数の問題というよりも、生活の事象に結び付いている問題である。子どもたちの、みんなから等しい点を探すための意図的な働きかけ、即ち、巻尺や紐をもってきたりすることによって、事象の数理化が行われる。それが数学を創造することができる力を育てることになると考える。円が始めから与えられていて、「円とは、コンパスでかいたような形ですよ。さあ、円の性質を探しましょう。」という活動よりも、円の概念を自ら追究する方が数学の創造を体験することにつながると考える。

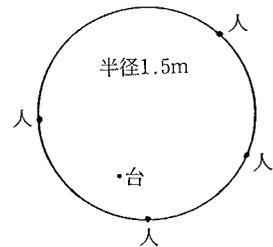


図-1

②「数学を創造、発展させようとする態度を伸ばす」視点について

この視点は、現実に近い問題場면을解決することによって、一つの問題形成を図るという態度を育てるものである。また、日常の事象を数学を通してながめるという態度を養うものである。さらに、次に述べるようなモデルを活用して問題解決を図るような態度を養うことにもつながる。大きいものでやって失敗するかも知れない場合に、小さい扱いやすい物をモデルとしてやってみる。そこでできた正しいことを大きいもの(現実の問題)に戻すというモデルの活用も考えられる。

2) 教材観

円形の物体は身の回りにたくさんあるけれども、その中心が明示されている場合はわりに少ない。一松信氏は、「そういう円形の物体の大きさを表せ、といわれたら、その『さしわたし』、すなわち、その内で1番遠い2点の距離をとるのが、自然の着想ではなかろうか。」と述べている。我々が、鳥取砂丘の大きさを聞かれたとき、「東西16キロ、南北2キロ。」と答える。これだけで大まかな大き

さを伝えることができる。これがさしわたしの例である。また、このさしわたしは、弧に対する径にもなっている。径とは「まっすぐ結ぶ道」のことである。円でいうと直径に当たる。円とは、さしわたしがどこも同じ長さの図形といえるのである。大きさを表す自然な着想から得られた直径が円の定義にならず、直径は半径の2倍と間接的に表される。そこで、一松信氏は、「1点Oから一定の距離にある点の全体」という円の定義に達するには、「かなりの思考が必要だったろう。」とも述べている。

円の概念の指導に関しては、多くの実践がある。その多くの実践は、中心より円周を決める授業である。ここで考える授業は、輪投げゲーム（円周上から輪投げをするとき、輪投げ台をどこに置けば不公平なく輪投げができるかを考える）を通して、円の中心及び半径・直径を知らせていくという方法である。この輪投げゲームによる方法は、数学的定義とは逆の方法である。

即ち、中心から円周を決めるのではなく、円周から中心を決めていくものである。本時は、図1-1のような問題場面を設定し、円の中心を探すという活動を行わせる。このような学習活動が「丸い」ということから「どこかある1点からの距離が一定」という円の本質を抽象化していく過程が必要である。

(2) 指導実施案

- 1) 実施学年と実施年月日 鳥取大学教育学部附属小学校3年1組 平成3年7月1日
- 2) 指導目標 円とは、中心から等しい長さの点の集まりであることを理解させる。
- 3) 指導過程

教師の主な働きかけ	児童の活動・反応
<p>1. 問題設定</p> <ul style="list-style-type: none"> ・缶の縁をなぞったような輪があります。その上に立って輪投げをします。自分が投げたい場所に立ってそこにシールを貼りなさい。投げる場所は変えてはいけません。(投げる位置から等距離にならないように輪投げ台を置いていく。) ・不公平が起こらないようにするためには、どこに輪投げ台を置けばよいですか。 ・各班で一人、自分が真ん中だと思える位置にシールを貼ってみんなから等しい長さになっているか確かめなさい。 <p>2. 自力解決</p> <ul style="list-style-type: none"> ・不公平が起こらないように輪投げをするためには、どこに置けばよいか、15分間考えなさい。考えるときに使いたい道具があれば、先生に相談しなさい。 	<p>1. 問題設定</p> <ul style="list-style-type: none"> ・みんなから同じ長さの所です。 ・真ん中へんです。 ・だいたい同じだが、少し違う。 <p>2. 自力解決</p> <ul style="list-style-type: none"> ・巻尺を使って、直径らしき所を1箇所測り、その半分の所を中心とする。 ・巻尺を使って、直径らしき所を2, 3箇所測り、交わる場所を中心とする。 ・床にかいた輪と同じ大きさの紙を四半分に折って直角になった所を中心にする。

<p>3. 集団解決</p> <ul style="list-style-type: none"> • どのように考えたか発表しよう。 <p>4. 思考実験</p> <ul style="list-style-type: none"> • 今決めた点に輪投げ台を置けば、人数が6人になっても、不公平が起こらないか考えなさい。 • 7人, 8人, 9人…37人…では, どうか予想しなさい。「もし, 不公平にならないとしたら…だ。」もし不公平になるとしたら…だ。」というように考えなさい。 • 一人が一つの輪の上にシールを貼りなさい。 (中心に紐を固定して回し, 中心と輪の上の点との長さが等しいことを確認する。) <p>5. まとめ</p> <ul style="list-style-type: none"> • 輪投げ台を置いた点と, 君達が立っている点とは, どんな関係にありますか。 (用語「円・半径」と円の定義を知らせる。) 	<p>3. 集団解決</p> <ul style="list-style-type: none"> • 巻尺, 紐を使って等しい長さにある点を探した。 • 一番長い長さを求め, その半分の点を決め, その点からみんなの所までの長さを測ってみると, 長さが同じになった。 • 直角を作るのと同じ折り方をして, 直角の所からみんなまでの長さを測ってみると, 同じ長さになった。 <p>4. 思考実験</p> <ul style="list-style-type: none"> • 不公平は起こらないと思う。 • もし, 不公平が起こらないとしたら, 台から円周上の点は, おそらく等距離のはずだ。もし不公平になるとしたら, 今までの4人, 5人の位置がずれるから, おかしい。だから, 中心は動かないはずだ。 <p>5. まとめ</p> <ul style="list-style-type: none"> • すべての長さが同じになっている。
--	---

(3) 指導実施案の検討と考察

1) 指導計画案ができるまで

数学的な定義に基づいて, 円を構成していくのか, それとも中心を発見させ, そこから円を眺めさせ, 数学的な定義を得させるのか, どちらが「数学を創造する」という立場に近いのか議論がなされた。結論として, 後者の方が, 児童がもっている概念を分析する有益な習慣を与えることにつながると考えたのである。定義を発見した後で, 定義に基づいて, 円を構成したり, 定義に基づいて考えたりする力をつければよいと考えたのである。

2) 実施後の考察

①輪投げゲームという場面設定について

算数の問題というよりも, 子どもたちの生活に結び付いている問題である。そのため, 不公平な場所に置いた輪投げ台を中心らしき所に置くという活動がすぐ行われた。このことから, 中心を探すという課題は理解しやすいものであったと考える。

②中心を予想する場面について

この場面は, 自分が真ん中だと思える位置にシールをはり, そこで本当にいいのか検証していこうとする態度を育てることにつながる。これは, 「数学を創造, 発展していこうとする態度を伸ばす」というねらいに当たると考える。なぜなら, 最初のシールは直観かも知れないが, 2つ目, 3つ目のシールは, 実測に基づいて誤差を縮めようとする活動になるからである。

③巻尺や紐を持って来た場面について

事象の数理化，即ち，公平であるための条件（みんなから長さが等しい点）を探するという活動が行われた場面である。この場面の学習活動によって，「数学を創造することができる力を育てる」ことを主たるねらいにする授業になったと考える。また，中心らしきところを見つけて遊んでいる班がみられたので，他の方法でその点を中心かどうか検証させるという指導が必要であったと考える。

④円と同じ大きさの円盤を4つ折りにして，中心を決めた場面について

円盤を4つ折りにするという発想は，「直角」を作ることと，折り紙遊びから理解しているであろう「折り返しの原理」から生まれたと考える。この操作活動から発見された仮の中心から，4人までの長さを測り，同じ長さであることを確認するという活動がなされた。ここで，5人，6人，7人・・・と増やし，点を取り，仮の中心から，新たにとった点までの長さが同じであるかどうか思考実験をすることによって，仮の中心が真の中心となることを理解させることができた。最後に，中心から円周まで紐を貼り，円周上を回るといふ活動することによって，仮の中心から，どの円周上の点までの長さが等しいことを理解させることができたと考える。これらの活動は，「形式化した，一般化したりする」といふ活動として捉えることができる。これは，「数学を創造，発展させようとする態度を伸ばす」ことにつながるものである。

⑤黒板でのまとめの場面について

ここでは，今日の授業で得た円に対する見方を引き出し，円の定義及び「円，中心，半径」の用語を指導した場面である。

§3 小学校4年「小数のかけ算」

(1) 教材開発の視点と教材観

1) 視点について

本教材は，以下に示す2つの視点⑧，⑤から教材開発を試みたものである。

視点⑧では，乗数が小数に変わったとしても，既習の内容である（整数）×（整数）の乗法の形式は保存し，小数の場面において，単位の考えを用いて処理することができることが大切となる。この視点では，数学的な知識を，場面や目的に応じて，選択・活用し，多様なアプローチをしながらよりよいものを求めていくことをねらっている。

視点⑤では，既習の数学的スキルを，見直しをもちながら，駆使して問題解決にあたることをねらっている。図や表に表し単純化したり構造化したりして考えることや，計算法則を用い10倍して10で割ることで，整数として考えることができるなどの数学的スキルをどう使うことができるか，場の設定が大切である。

そこで，内容面では，問題把握において，既習の（整数）×（整数）をどう適用して，どのように説明するかが重要なポイントになる。（小数）×（整数）においても，整数同士と同じ構造であることを明らかにする必要がある。

次に，方法面では，式表示は形式的には分かるが，既習事項にどう結びつけて考えるようにできるかである。そのために，見通しの段階で，結果の見通しとして，小数を切り捨てと切り上げをした整数のかけ算をして，その間に積があることに気付くことである。また，自力解決する際には，図や表を用いて単純化したり，線分図に表して構造化したりすることによって，多様なアプローチが可能になる。特に，数直線を使って分割された1単位のいくつ分という見方は，1つ分が小数のときでも適用できることが分かる。加えて，理解の方法で，関係的理解ができるように，具体的な操作などの活動や思考実験を用いることが大切である。

また、思考面及び態度面では、既習内容のうち、帰納的に 2 倍、3 倍と整数と同様にして考えていくこともあるが、数学的なアイデアを生かしていき、そのよさがわかるような考え方に着目することが大切である。数理的な処理のよさを追究していく数学的な思考や態度は、筆算形式を作りだすことにつながるのである。さらに、自分の解決の様子をふり返る場を設定することが必要である。そして、児童のそのような態度を評価していくことが、態度面を育てることになる。

2) 教材観について

小数は、整数だけで数値化することができない事象をとらえるために整数と同様の構造をもとに拡張的発展的に考え出された数である。

児童は、3 学年で、かさや長さの端数部分の表現として小数を学習し、1/10の位の小数の加法計算や減法計算をする小数の理解を図っていて、4 学年では、1/1000の位まで拡張し、小数が整数と同じ十進数であることを扱い、その上で1/1000の位の小数の加減計算を学習してきている。

本単元では、小数の乗除のうち、(小数)×(整数)、(小数)÷(整数)の乗除計算と(整数)÷(整数)=(小数)の場合を扱い、小数の数としての理解をいっそう深めていくことをねらいとしている。この計算では、被乗数、被除数の小数を1/10、1/100など位を単位として考えさせることによって数値化してとらえ、その結果をもとに1を単位とした見方で見直していき、整数の乗除計算と同じように対処すればできるということの理解をねらっている。また、手順を形式的におさえるのではなく、単位の考えと関係づけながら形式化をはかることも重要なねらいである。

(2) 指導実施案

1) 実施学年・実施年月日 第4学年 平成4年11月26日

2) 指導目標 (小数)×(整数)の意味を理解し、小数に1位数をかける簡単なかけ算ができる。

3) 指導過程 (1次1時間目)

教師の主なはたらきかけ	児童の活動・反応
<p>1. 問題場面の提示</p> <p>□ℓの液肥が入れているジョロが4つあります。全部で何ℓあるのでしょうか。</p> <p>○中の量が見えないので、□の中に入る適当な数をあてはめましょう。</p> <p>○□を使って、式を考えよう。</p> <p>○□の中に、数を入れて考えよう。</p> <p>○(整数値だけの場合)少数の場合はどんな数が考えられますか。</p> <p>○液肥が3.6ℓ入りのジョロだと、どんな式になりますか。</p> <p>○今までの計算とどこが違いますか。</p> <p>(小数)×(整数)の求め方を考えよう。</p> <p>2. 結果や解決の見通し</p> <p>○3.6×4の答えはどれくらいになるか予想しよう</p>	<p>1. 問題の設定場面を理解し、課題をつかむ。</p> <p>○2, 3, 5, 1.5, 1.8…</p> <p>○□×4</p> <ul style="list-style-type: none"> ・2ℓのとき、2×4 ・1.5ℓのとき、1.5×4 ・3ℓのとき、3×4 <p>○3.6×4</p> <p>○かけられる数が小数になっている。</p> <p>2. 結果や解決の見通しを立てる。</p> <p>○3.6×4の結果の予想</p> <ul style="list-style-type: none"> ・4×4=16 ・3×4=12 ・12より大きく、16より小さい ・15くらい

○ 3.6×4 の計算の仕方を考えよう。

○見通しの立たない児童には、情景図やヒントカードを与えて、自分の見通しを持たせる。

3. 見通しに従って、自力で解決

・机間巡視をし、座席表を使い、児童の考えを把握する。

・累加だけや図だけの考えで終わっている児童には0.1を単位とした見方ができるように支援する。

・解決の見通しの立たない児童には、助言をしたりヒントカードを与えたりする。
(印刷します、線分図など)

4. 集団で解決

○どのように考えたか、発表しよう。

・単位の考えを認め、そのよさに気付くよう支援する。

・既習の内容を活用している点を評価していく。

・図や表を利用して、わかりやすく説明している点を認めていく。

・必要に応じて、数学的な考え方のよさをおさえる。

○問題の答えをはじめに立てた見通しと比べて確かめよう。

5. 学習のまとめと練習

○ 3.6×4 の計算の仕方をいってみよう。

○同じように 0.2×6 の計算の仕方を答えなさい。

○練習問題をしましょう。

$$0.6 \times 7 = \quad 2.4 \times 3 =$$

6. ふり返り

○今日の学習をふり返って、算数日記を書きなさい。

○ 3.6×4 の解決の仕方

・たし算でやってみる ・ l を $d\ l$ にして考える

・ $0.1\ l$ をもとにして考える ・線分図を使う
・ 3.6 を3と 0.6 に分けて考える ・図を書く
・10倍して10で割る

3. 見通しに従って自力で解決

$$3.6 + 3.6 + 3.6 + 3.6 = 14.4$$

$$3.6 + 3.6 = 7.2 \quad 7.2 + 3.6 = 10.8 \quad 10.8 + 3.6 = 14.4$$

$$3.6 \times 1 \rightarrow 3.6 \quad 3.6 \times 2 \rightarrow 7.2 \quad 3.6 \times 3 \rightarrow 10.8$$

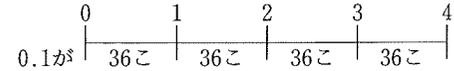
$$3.6 \times 4 \rightarrow 14.4 \text{ と}$$

・10倍して整数にして10で割る

$$3.6\ l = 36d\ l \quad 36 \times 4 = 144 \quad 144d\ l = 14.4\ l$$

$$3.6\ l \text{ は } 0.1\ l \text{ が } 36\ \text{こ}, \quad 36 \times 4 = 144$$

$$0.1 \text{ が } 144\ \text{こで } 14.4\ l$$



4. それぞれの考えを出し合い、よりよい方法をみんなで練り合う。

・たし算で、 ・10倍して、10で割って

・図を書いて、1こ分が 0.1 で36こ4こ分だと 0.1 が144こで、 $14.4\ l$

・ l を $d\ l$ に直して、 $36d\ l$ が4こで、 $36 \times 4 = 144d\ l = 14.4\ l$ ・線分図を書いて

・ 3.6 は 0.1 が36こと考えて、 3.6×4 は 0.1 が 36×4 で144こ。 0.1 が144こで 14.4

○はじめ立てた見通しと比べてみる

・答えは予想と同じくらいだった。

5. 学習のまとめをする

○ 3.6 は 0.1 が36、 36 を4倍して144

$$0.1 \text{ が } 144\ \text{こで } 14.4$$

○ 0.2 は 0.1 が2、2を6倍して12 0.1 が12こで1.2

○練習問題を

$$\cdot 0.6 \times 7 = 4.2 \quad \cdot 2.4 \times 3 = 7.2$$

6. 算数日記を書く

○自己の学びをふり返り、自己評価する。

(3) 指導計画案・実施案の検討

1) 検討のプロセスについて

①問題提示の過程をふり返って

よい問題づくりの視点として、どんな素材を開発するかが問題になる。身近な数値ということが上げられるが、教科書主体の問題づくりでは、児童の実態やねらいとする数学的な考え方を狭い範囲でしかとらえることができない場合がある。まず、数値をどうするのかを問題にした。純小数と

して 0.3×4 、帯小数として 3.2×4 、繰り上がりのある帯小数として 3.6×4 を児童の実態に合わせて、問題の数値を考えなければならない。ある程度の抵抗があると同時に、ねらいに沿ったものでなければならない。始めに隣学級で、純小数を扱った授業をしてみると、なるほど内容的には理解されるが、小数のかけ算の単元全体の見通しは立てにくいようであった。

素材については、問題場面をどう設定するかは、液量を使うことによって、操作的な活動が期待できたり、数量を図示してとらえたりすることができるメリットがあると考え、牛乳パックの200mlを0.2lとして、6日分にすることも考えた。しかし、帯小数における問題は、小数のかけ算のよさが感得できるので、なじみが少ないが、液肥を使うことにした。その際、ジョロを素材に使うようにしたのは、問題場面を最初に児童に見えないようにして、数量を既習の整数値から、小数值までの範囲で児童による問題づくりが可能になると考えた。条件不足のものから、整数の場合を想定し、既習の範囲でできるかけ算の演算決定を基盤においた。このことによって、児童は数の範囲を無理なく小数にまで拡張しようと考えたのである。

②「数学的な考え方」を生かす指導について

「数学的な考え方」として児童は意識していることはないのであるが、教師が教材に向かうときに、学習内容やねらいばかりでなく、数学的な考え方や数学的な態度についての指導観をしっかりとっておかなければならない。つまり、教材研究の確かさが大切であると考えられる。

本時の数学的な考え方や数学的な態度の主なもの、ア)単純化の考え…小数を整数に置き換えて、見積りができる、図や表にして考える。イ)加法の考え…累加の考えで、自分なりに解法できる。ウ)帰納的な考え…2倍、3倍として整数の場合と同様に考える。エ)式についての考え…10倍して、後で10で割るという式変形して考える。オ)単位の考え…1dlを単位として考える、0.1lを単位として考える。カ)基本的な性質の考え…3.6を3と0.6に分けて考える。キ)構造化の考え…線分図に書いて考える。となり、このような考え方は、教材研究の視点を発端として考察を深める機会となったのである。

2) 指導実施案の検討・考察

①児童の多様な考えを練り上げる際の時間設定や、一般化の視点での教師サイドの事前の反応予想を含めて教材研究において、練り上げる段階の取り扱いや取り上げ方をあらかじめ意図しておく必要がある。また、児童の実態把握を十分し、学習中の机間巡視を通して座席表などに記録していくことが必要である。

②数学的な考えを教師が明確にしておく、そのよさを示して、児童に感得させることができる。児童の主体的な活動とはいっても、教師が十分おさえておかないと、児童は単に活動しているだけになってしまう。主体的な学習活動を支援する教師のあり方を十分に考えておく必要がある。

③見通しをもった指導をするために、教師が各段階でどう比較検討していくか、どう一般化させていくか、どう発展的内容につなげるかを考慮しておかなければならない。

§4 小学校6年「立体」

(1) 教材開発の視点と教材観

1) 本教材は、以下の4つの視点から教材開発を試みるものである。

視点④「数学的な知識、技能を理解する」について

三角柱を作成することをねらいとして、展開図を考えることになる。直観力と念頭操作を通してなるべくたくさんの展開図を考え出していきたい。考え出された展開図を各構成要素に着目して、

位置関係、つながりなどを考察することで、三角柱についての理解を深めていくことができる。また、構成、分解などの操作活動を通して、三角柱と展開図を統合的にみたり、どの展開図が簡便であるか考えたりすることで、論理的な思考を深めていくことができる。それが、立体図形についての見方、考え方を豊かにし、概念を深めていくことになる。

視点⑤「数学的な技能を駆使する」について

4学年での立方体の展開図についての学習経験を生かし、三角柱の展開図はどこの辺を切り開いていけばよいか、念頭操作の中で分解し、その過程で構成し、各構成要素の位置関係を確かめながら考えていくことになる。また、展開図は、ユニークに、そして合理的にかくことができることも大切だと考える。例えば、3つの側面をくっつけてかく場合や離してかく場合、どのようにすれば簡単で、正確にかくことができるか、そのときの底辺をどこにつければよいかなどを考えて作図していくことが大事な能力、技能と言える。そして、底面をかく場合は、既習事項である三角形の作図方法を生かすことになる。

視点⑥「数学的な知識、技能を知ろうとする意欲をもっている」について

新しい評価の観点と関連して考えるならば、関心・意欲・態度と捉えることができる。ここでは上記の④、⑤の視点に立った学習に興味をもって、意欲的に取り組むことである。三角柱からその展開図を考えるとき、よりたくさん展開図を見つけようとする。より構成、分解がしやすい展開図を考えること。より合理的に展開図をかこうとする。そして、これらの活動を楽しんで行なうことであるとする。また、他の多角柱や円柱についてはどうだろうかと思発展的に考えていこうとすることも大事にしたい。

視点⑧「場面や目的に応じて数学を用いることができる」について

例えば、基本的な立体の表面積を求める問題において、展開図を頭に浮かべることで、能率的に求める方法を見つけ出すことができる。また、生活の中では、運動会のとんがり帽子などを作成する際、使用する厚紙などの大きさを展開図に分解してみることで見積もることもできるのである。

2) 教材観

本教材は、基本的な立体図形である角柱、円柱及び角すい、円すいの概念形成をねらいとしている。そのために、これらの立体図形を平面に表現したり、平面から立体を想定、作成しながら、立体図形についての理解を深め、立体や空間に対する豊かな感覚をもてるようにしていく。

指導にあたっては、実物模型の立体の観察を通して、その特徴について自由に表現させ、立体に関する興味、関心を喚起させたい。そして、それぞれの立体の共通点や相違点に気づかせ、観点をもって、仲間わけなどができるようにしたい。また、構成要素や位置関係に目を向けて考察し、特徴や性質について整理し、立体図形に対する理解を深めたい。さらに、立体図形を平面図形に表す方法として、展開図などを考えていくが、分解、構成という念頭操作や具体的操作活動を通し、相互の関係を捉えるようにし、立体図形に対する見方や考え方を豊かにしていきたい。

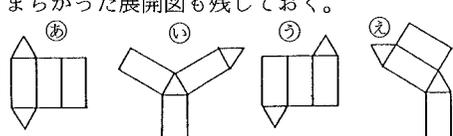
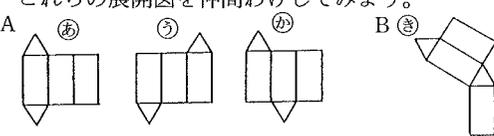
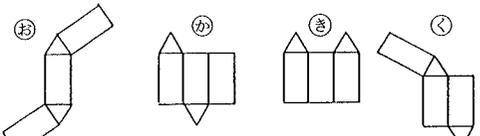
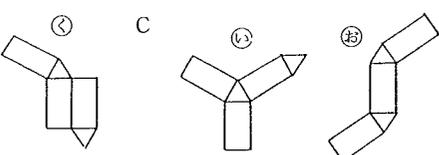
(2) 指導実施案

1) 実施学年と実施年月日 第6学年 平成4年11月18日

2) 指導目標

- ・角柱とその展開図を筋道立てて考えることを通して、その相互関係をつかむ。
- ・角柱の展開図からかき方が分かり、それを組み立てて角柱を作ることができる。

3) 指導過程 (1 次 3 時間目)

教師の主な働きかけ	児童の活動・反応
<p>1. 学習課題の提示</p> <p style="text-align: center;">展開図のかき方を考えて、三角柱を作ろう。</p> <ul style="list-style-type: none"> 4 学年の立方体の展開図を想起させ、見通しを立てやすくする 自力解決 (三角柱の展開図を考えよう。) できるだけ、たくさん展開図を考えよう。 展開図はフリーハンドでかかせる。 考えが浮かばない児童には、3 つを切り離した側面と、2 つの底面を与え、補助教材とする。 まちがった展開図も残しておく。  <p>3. 集団解決</p> <ul style="list-style-type: none"> この中でできないものはありますか、あればその理由を説明してください。 それぞれの図を念頭操作で構成させる。 これらの展開図を仲間わけしてみよう。  <ul style="list-style-type: none"> これらの展開図の中で、三角柱がより簡単に作れる展開図はどれだろう。 五角柱、六角柱などのことも考慮して考えさせる。 <p>4. 学習のまとめと次時の課題</p> <ul style="list-style-type: none"> A グループと B, C の中から一つずつ選んで、作図し、三角柱を作ってみよう。 <p style="text-align: center;">展開図のかき方を考えて、円柱を作ろう。</p>	<p>1. 学習課題を把握する。</p> <p>2. 三角柱の展開図を考える。</p> <ul style="list-style-type: none"> 念頭操作で、分解、構成してみる。 辺、面などの各構成要素の位置関係、つながりに着目して考える。  <p>3. 集団解決</p> <ul style="list-style-type: none"> き は底面が一方に偏っていて、平行に向き合うことができない。 側面のまとまりに着目して仲間分けをする。  <ul style="list-style-type: none"> 分解、構成では、A のグループが分かりやすい。 構成要素の関係や、つながりは A のグループが分かりやすい。 作図では、斜めの線が少なく、側面がまとまっている方がやりやすい。 <p>4. 学習のまとめと次時の課題</p> <ul style="list-style-type: none"> 三角柱を作り、自分の考えを確かめる。

(3) 指導計画案・実施案の検討

1) 指導計画案の修正

子どもたちがのびのびと楽しんで学習できるものにしたいて考えて取り組んだ。なぜなら、高学年になるに従って算数に対して苦手意識を持つ子が多くなり、それに伴って学力の差も広がってくるからである。そして、重苦しい雰囲気の中で学習するという悪循環を生んでいるからである。その点、この教材は、一つの答えを考え、正解しなければならないというのではなく、自分なりに複数の展開図を考え出していくことになるので、どの子も自信を持って意欲的に取り組める教材で

ある。しかし、指導計画素案の段階では、子どもたちの楽しい活動を意識し過ぎて、簡便な展開図の考察に重点を置くものになってしまった。これでは、この教材本来の位置付けから離れることになる。そこで、この教材を数学的位置付けと前述の教材開発の視点から見直し、指導案を修正していった。ここでは、立体図形の概念形成、立体や空間に対する豊かな感覚や直観力、論理的思考力を育成していくことをねらっている。そこで、指導実施案の3の場面を修正した。具体的には、展開図を構成、分解という観点から検討する場を多くし、三角柱と展開図を各構成要素に着目し、相互の関係を考慮できるようにした。それに伴って、簡便な展開図の考察では、あまり深入りしないようにした。

2) 指導実施後の考察

学習課題については、どの子も理解でき、すぐに作業に取り組むことができた。考えた展開図をフリーハンドでかいていくようにしたのも、視覚的に浮かんだイメージがすぐに表現でき、作業が能率的に進むので、よりたくさんの展開図をかこうとする意欲を持ち続けることができたと思う。しかし、指導内容が多すぎて、本時で大切にしたい3、4の場面の時間が少なくなってしまった。本時の学習は3から始めた方が良かったと思われる。この3つの場面では、組み立てることのできない展開図を複数取り扱い、なぜできないのか話し合うことから、逆に組み立てることのできる展開図の条件を考えていくこともできたと思われる。そのような活動ができれば、より展開図と立体図形の相互の関係を捉えることができたり、統合的に見たりすることができ、立体図形に対しての概念が深まるものと思われる。また、論理的な思考力を育てることもできる。次に、簡便な展開図についての考察は、4の活動を体験した後の感想として、どの展開図が良かったか簡単に振り返る程度にしたい。4で大切なことは、3で考えたことを実際に展開図をかいて、三角柱を作り上げていくことを通して、確かめ、評価していくことである。そこで、必要な場合はもう一度、2や3にもどって、自分たちの思考の過程を辿って、見直していくようなこともできるのである。このように考察してみると、視点⑤と⑥に関しては、子どもたちの学習している姿の中に見出すことができたが、視点④については深まりが足りなかった。視点⑧は、本時の学習の成果として、次時以降の学習で生かすことができる。

発展問題、または残された課題として、この教材を教材開発の視点で見直していきながら感じたことについて述べてみたい。算数・数学の目標からの分析を「知識・理解に関すること」「能力に関すること」「態度・習慣に関すること」の3つに分け、その対象との組合せの12の視点で教材を開発していくことは、その教材の位置付けを明確にすることができ、大変指導しやすかった。今後の課題として、この目標分析を「関心・意欲・態度」「数学的な考え方」「表現・処理」「知識・理解」の4つの観点で分析するならば、評価との関係で、教材の位置付けが一層明確になるのではないかとと思われる。また、教材によっては、視点を統合させて捉えていくことも必要なものと思われる。

§5 中学2年生「課題学習（図形と合同）」

(1) 教材開発の視点と教材観

1) 視点について

これからの中学校数学に求められるものとして課題学習がある。これは、概念や原理・法則を単に結果や知識として覚えるのではなく、それが創造的に構成されていく過程をみつけ、確かめ、納得し、よさを感得できる学習のことである。また、基礎・基本の定着を図るために、問題解決的なアプローチを取り、基本的な法則や技法が活用できる問題を提示することによって、豊かな解決過

程を体験させることが求められている。そこで、生徒が自主的な学習の中で、ひとつの課題を発展的に解決していくような課題を作ろうとした。

本課題では、直観的に生徒が図形の性質を発見して、それを証明するという授業の流れを取る。このとき、証明の根拠として三角形の合同条件などの基本的な性質を利用したり、課題を進展させる「数学的な考え方」や数学的活動を体験させようとしたのである。

ところで、本教材を実践しようとする過程で視点③と視点⑩と視点⑪の3つから教材開発を見直した。まずは、視点③と視点⑩である。つまり、課題開発の出発点であった視点である。これは、教師が一方的に課題を与えるのではなく、生徒が作図をし、生徒が班活動による話し合いで問題解決していく過程を通して、「数学を創造、進展させようとする態度を伸ばす」という思考活動を活発にしていこうという視点③のねらいである。そして、この課題学習自体が、正三角形から正方形、正五角形……と、課題を次々と進展させ、一般化してゆく視点⑩である。この課題を通して、一般化する筋道を体験させるというねらいである。このねらいを達成するために、生徒たちに「正方形はどうなるか。「正方形はどうなるか。正六角形はどうなるか。」といった疑問を抱かせ、正 n 角形でも同じことがいえそうだという一般化に向けた規則の発見を導くといった授業の流れを考えた。そのため、オープンエンドの形で課題をだすことにした。そして、生徒の各個人が発見した性質を班で話し合い、正三角形を出発点にして、正 n 角形まで進展させるとしたのである。

次に、視点⑩であるが、正三角形という最も簡単な図形で、発見した「正三角形の中の正三角形」という性質が、三を四、五、六と変えて行っても、同様に成り立つ性質がある。しかも、その証明していく過程で、「同様なことは、同様な証明でできる」という数学の考え方(類推)を用いる。このことから、「数学のよさ、特徴、価値」を感じることに通じると考えた。

2) 教材観について

「図形と合同」の指導内容においては、「分かり切っていることを、なぜ、証明するのか」という生徒が持ちがちな疑問に対応して、自らが、図形の性質を考え、発見し、自らが納得したことを、他人にも納得してもらおう説明をすることの大切さがある。また、基本的な図形の性質を演繹的に確かめることを、ねらいのひとつとしている。そこで、この点を踏まえながら、数学で取り組んでいる今日的な課題としての「課題学習」を位置付けたい。つまり、数学的な見方や考え方ができるようになるための知識・理解や技能として習得させ、必要に応じて利用できるようにしてゆくのである。このことから、「図形の性質を発見」できる課題、基礎的な定理を利用して証明できる課題、そして、そのことが物事を数学的にとらえ、数学的な処理ができる能力や態度の育成を図れる「課題学習」の必要性がある。ここでは、数学的な見方として、同じことは同じやり方でできるという考え方「類推」の有効性や、一つの性質をより一般的な性質へと発展的に考えようとする態度の育成を狙った課題を設定した。

(2) 指導実施案

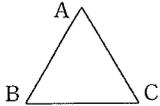
1) 実施学年と実施年月日

鳥取大学教育学部附属中学校 第2学年 平成4年12月8日(火)

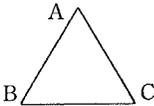
2) 指導目標

この課題学習では、基本の三角形の合同条件を利用した証明ができる。その証明を振り返り、類推することから、一般の多角形についても正多角形ができることを証明できる。また、生徒が主体的に学習に取り組むような態度を育成する。

3) 指導過程 1時間目 (正三角形の内にできる三角形)

教師の主な働きかけ	児童の活動・反応
1. プリントを配布し、問題を提示する。	1. プリント1に取り組む。
<p>右図の正三角形ABCの三つの辺BC, CA, AB上に、 $BP = CQ = AR$となるような3点P, Q, Rをとり、AP, BQ, CRをむすぶ。このとき、この作図をしなさい。</p>	
2. 題意を掴み、3点P, Q, Rをとり、AP, BQ, CRを作図させる。 (机間巡視し作図を点検)	2. プリントに3点P, Q, Rをとり、各自で作図し、点の位置関係を理解する。
3. 図の中の性質を問う。	3. 作図した図から、個人で考える。
<p>作図した図では、どのようなことがいえますか。いろいろ考えましょう。</p>	
<ul style="list-style-type: none"> ・「3つ以上見つけなさい」と指示する。 	<ul style="list-style-type: none"> ・さまざまな視点で図形を考える。
4. 班で話し合わせる。(机間巡視) <ul style="list-style-type: none"> ・正確な作図をさせ、直観で答えてもよい。 ・出来る三角形が正三角形であることはすぐ発見できるから、それ以外のことも考えて多様な視点で図形を見るようにさせる。 	4. 多様な視点で図形を考え、班で話し合う。 <ul style="list-style-type: none"> ・内側に出来た三角形が正三角形である。 ・角度が60度。 ・合同な三角形がある。 ・外側の正三角形を縮小した正三角形が内側に出来る。
5. 話し合いの結果を発表させる。 全班長起立して発表	5. 簡単な説明を交えて、話し合いの結果を発表する。
(他の発見したところだけ残る)	<ul style="list-style-type: none"> ・正三角形ができたが多く、しかも、それを疑うことがない。 ・合同な三角形があるから。など
6. 内側に出来た三角形が正三角形か問う。 ・見本の図形を示し、正三角形でないと言う。	6. 先生の出した自分たちの発表に対する疑問に答えるため、証明を始める。
<p>正三角形の内に作図して出来た三角形が、正三角形であることを証明しなさい。</p>	
7. 班の中で、証明の発表をさせ、OHPシートに書かせる。 ・使った定理なども説明させる。	7. 班の中で発表し、友達の証明を聞く。 <ul style="list-style-type: none"> ・使った定理などを確かめる。 ・協力して発表できるようにする。
8. 全体に発表させる。	8. 他の班と自分たちの証明と比べてみる。
9. 授業のまとめ	9. 授業のまとめを行い、数学の有用性を感じる。

4) 指導過程 2 時間目 (正多角形の内にできる多角形)

教師の働きかけ	生徒の活動・反応
1. 前時の課題を簡単に振り返らせる。	1. 前時の課題を思い出す。
<p>右図の正三角形ABCの三つの辺BC, CA, AB上に, $BP=CQ=AR$となるような3点P, Q, Rをとり, AP, BQ, CRをむすぶ。このとき, どんなことが言えるでしょ うか。証明しましょう。</p>	
<ul style="list-style-type: none"> 他の発見も簡単に言わせる。 	<ul style="list-style-type: none"> 他の発見も簡単に説明する。
2. 条件を変えたら, どうなるかを班で話し合わせ, 発表させる。	2. いろいろな場合を班で話し合い, 発表する。 <ul style="list-style-type: none"> 三角形を多角形にするとか, その他の視点もでてくる。
<p>右の図の正方形ABCDの辺上BC, CD, DA, AB上 に$BP=CQ=DR=AS$となるような4点P, Q, R, S をとり, AP, BQ, CR, DSをむすぶとき, どんなこと がいえるでしょうか。</p>	
4. 4点P, Q, R, Sをとり, AP, BQ, CR, DSを作図させる。(机間巡視し点検する)	4. プリント4点にP, Q, R, Sをとり, 各自で作図する。
5. 班で話し合わせる。 正三角形のとき同じだという考えが出てきたら, 班ごとに証明に取り掛からせる。	5. 班で話しあう。 <ul style="list-style-type: none"> 内側に出来た四角形が正方形である 角度が90度 正三角形の場合と同じことが言える。
6. 正方形ができたのを証明させる	6. 各自で証明する。
<p>正方形の内に作図して出来た四角形が, 正方形であることを証明しなさい。</p>	
5. 証明の発表をさせる。 <ul style="list-style-type: none"> 説明せずに, 使った定理などは, 力の班に言わせる。 	5. 班で証明したことを発表する。 <ul style="list-style-type: none"> 使った定理などを確かめながら聞く。
6. 問題を一般化して考えさせる。	6. さまざまな, 正多角形の場合を考える。
<p>同様なことについて, できるだけたくさんの種類の正多角形で調べてみましょう。</p>	
7. 班で, どんな多角形にするのか話し合わせn点 P_1, \dots, P_n をとり, AP_1, \dots, AP_n を作図させる。(正確な作図でなくてもよい)	7. 班で話し合った正多角形を, プリントに書き, さらにn点 P_1, \dots, P_n を作図し, 位置関係を把握する。
8. 班での証明を発表させる <ul style="list-style-type: none"> 三角形の合同を利用して証明させる。 正五角形などから扱う。 	8. これまでの証明を利用して証明する <ul style="list-style-type: none"> 三角形の合同を利用して証明する 出来るだけ多くの正多角形でやられる。

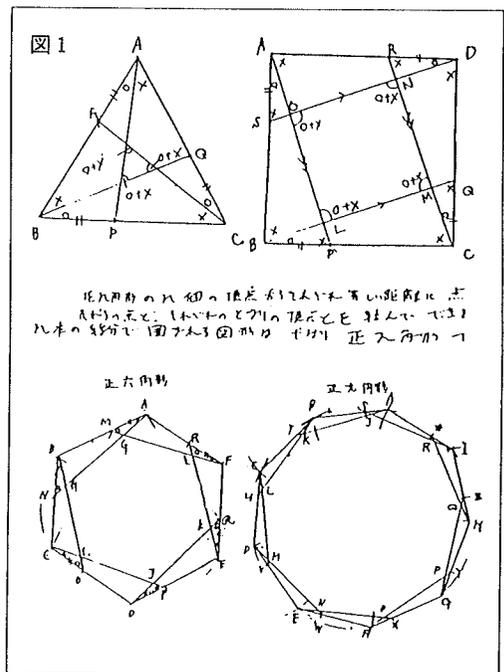
<p>9. 一般化の視点で考えさせる。</p> <ul style="list-style-type: none"> • n 角形の場合は簡単に触れる。 <p>10. 授業のまとめをする。</p>	<p>9. 具体的な図形でなく、一般化した図形で考える</p> <ul style="list-style-type: none"> • n 角形の場合を扱う。 <p>10. 一般化する考え方や自分たちの発見を検証することの難しさや楽しさを感じる。</p>
---	---

(3) 指導計画案・実施案の検討

本課題学習では、問題を一般化してゆく発展的な視点③、視点⑪と、同じ証明法ができるのではないかという類推の視点⑩が大切である。そのため、問いのない学習課題を載せたワークシートを配布し、作図という操作活動を通して題意を理解させる。その上で、教師の発問によって、図形の性質について「発見」する課題を、生徒が持つようにする。生徒が学習活動で行った図形の性質に対する直観的な「発見」を、すべて疑う第三者的な態度で、手続きを踏んだ説明としての証明を行うという生徒の問題理解の転換を図らなければならない。そのために、生徒の意識づけとして、誤った作図を提示して直観的な理解でなく、論証を求めするように、生徒の話し合いを誘導する。このとき、基本的な証明として、三角形の合同条件を利用して図形の性質の真偽を証明することのよさを感じさせることもできる。

ところが、実際に指導してみたところ、たいていの生徒は、正三角形の中に出来る三角形が正三角形であることや正多角形の中に正多角形ができることは簡単に見つけることができる。しかし、それに満足して、他の正多角形について、同様な性質があるかどうかを考えてみようとはしなかった。出来た三角形が正三角形であることは、作図により多くの生徒が直観的にわかるため、その正当性について疑問をだし議論しようとする状況がおこらない。これは、直観的な発見がしやすいこの課題の特徴でもある。そこで、直観的に発見した図形の性質に対して、「正しいのか」と“ゆさぶる”ことが学習場面では大切である。そこで、教師は、生徒の発見をはじめは視点③で「正しくない」と“ゆさぶり”，次に視点⑩で課題に取り組みせ、生徒の「発見」を視点⑪でさらに“ゆさぶる”のである。

また、図形の性質を発見するような直観を大切にすると同時に、その直観を疑うという本学習課題のねらいを達成するためにも、班で十分に話し合わせる時間と自己の証明を振り返られる時間を確保することが必要である。また、多くの種類の正多角形の証明に取り組みせることで一般化の証明につなげたいと考えた。しかし、図1のように、正三角形のあとで、まず一般的な正多角形での性質を予想して、そののちに五角形や六角形…など具体的な正多角形で考えた方が、視点③や視点⑪の観点からもよかったと感じた。



また、作図を軽く見る傾向がある生徒たちに、操作活動としての作図の有用性を感じるように作

図に取り組ませるか。生徒たちの持つ“あたりまえ、見ればわかる”という直観に対して、教師の“ゆさぶり”方などについては、次年度の課題として残っている。また、生徒たちの話し合いの質を数学的な討議の段階とするための具体的な手立てと教材開発の12の視点との関係についても、次年度の課題として残っている。

V 研究のまとめと今後の課題

本研究は、教師教育用の教材研究・教材開発モデルの作成とその実践的検討を行ったものである。ここでは、教材開発の12の視点と、著者らが構築した教材研究・教材開発の方法論的モデルについてその成果を述べ、まとめとするものである。

1 教材開発の12の視点について

教材開発の12の視点を設定する過程においては、算数・数学教育の目標の分析から見い出された3つの項目と具体的な内容の分析から見い出された4つの項目の、いずれを主たる軸にして組み合わせるかの議論を行った。この議論は、結果として「12の視点」の理解を深めることになったとともに、教材の数学的な価値の追究の仕方を学ぶ上でも有意義であったと考える。それは、実践に携わる教師にとって、ややもすると「どのように教えるか」という方法論が、「何を教えるか」という目標論に先行しがちになるところを、教育内容の教育的価値や算数・数学教育における数学的価値の追究の大事さを再確認することができたからである。そして、このことは教師教育にとってとりわけ重要な視点であると思われる。

2 教材研究・教材開発の方法論的モデルについて

本研究においては、素材の教材化と授業構想、指導計画案の再三にわたる検討と修正を行った。その際、Ⅲ.3に示した回帰的プロセスは、常に教材開発の12の視点から検討・修正を繰り返したものであり、方法論的モデルとして妥当なものであったと思われる。それは、このモデルを自覚して活用する教師にとって、常に教材の教育的価値と数学的な価値の視点を認識させることになったからである。

また、このモデルの作成に当たっては、ある特定の教材に対して適用できるように考え出されたものではなく、算数・数学科のどの教材に対しても一般性・普遍性をもつモデルとして構築したものである。したがって、本稿で取り上げられなかった他の教材に対しても同様な検討が行えるものとする。さらに、授業実施後の検討・評価に際しても、12の視点と合わせてこのモデルは、具体的な内容に即した検討・評価が行えるものとする。

3 今後の課題

この教材研究・教材開発の方法論的モデルは、一般性・普遍性のあるモデルであると考えながら、しかしながら、実際、本研究で実践的検討を行った教師たちは、10年以上の経験をもつ教師であった。教育実習生や経験の浅い教師にとって果して有効に働くものであるかどうかは、さらなる活用の必要がある。今後、教育実習中の指導やその事前・事後の指導等で活用し、検討を加えていく必要があると思われる。また、このモデルの活用においては、より簡略したモデルへ改善していくことも今後の課題である。

引用・参考文献

- (1) 杉山吉茂：「力がつく算数科教材研究法」 明治図書（1990），pp.24-28
- (2) 横山利弘：「教材に関する理論の展開」 鳥取大学教育学部卒業論文（1993），pp.62-84
- (3) 忘水廣：「算数科・教材開発のマニュアル」 明治図書（1991），pp.20-31
- (4) 一松信：「数のエッセイ」 中央公論社（1972），pp.89-92

（1993年4月20日受理）