公理的方法と数学教育

数学科教育教室　笹　田　昭　三

序

公理的方法は数学の本質とかかわるものであり，現代数学の性格や役割を特徴づけるものである。公理的方法は演繹体系を構成していくときの基本的な考え方であるが，それと同時に，今日の数学の変貌をもたらし，諸科学への広汎な数学の応用を可能にしたのも，この公理的方法のなせる業である。学校数学においても，このような数学における公理的方法の機能を無視できない。この公理的方法の考え方をいかにわかりやすく指導するか，これが今日の数学教育における大きな課題の一つとなっている。

本論文では，この課題へのアプローチとして，まず数学における公理的方法や公理の性格について分析，考察する。次に，学校数学の目的と照らし，学校数学において公理的方法を取扱うことの意義やその指導のあり方について論究する。最後に，高等学校における公理的方法の指導についての展開案を提示したい。

Ⅰ　数学の本質的性格と公理

数学の本質的性格はいうまでもなく「あらゆるものを証明しつくす」ということにある。赤氏は，数学がギリシャ以来現代数学に至るまで大きな変貌をとげてきたが，この「あらゆるものを証明しつくす」という性格に関しては，ギリシャ以来連綿と続いている数学の性格である,[1]とのべている。

公理の考えは，この数学の本質的性格である「あらゆるものを証明しつくす」ことと密接な関連をもって生まれたものである。一般に証明とは，ある判断の真なることを，既に正しいと認められた判断から論理的に導き出すこととされている。たとえば哲学辞典（平凡社）によれば，証明されるべき判断を可証命題，その理として選ばれる判断を論拠ということにすれば，証明とは，論拠を前提とし，可証命題を結論とする推論のことである,[2]としている。ところで，数学の本質が「すべてのものを証明しつくす」ということであっても，これは事実上不可能といわざるを得ない。証明の論拠に用いた命題を証明しなければならず，そのためには新らたな命題を証明の論拠として用いなければならない。さらにまた，その新らたな命題をもある命題を論拠として証明しなければならない。これは，原理的には無限の操作を要求するものであり，人間の力をもってしては不可能なことである。この無限の連鎖を断ち切るためには，どうしても，あらゆる証明の根本前提として無証

明命題の設定が必要である。この演繹体系としての，証明の根本前提として設定されるのが公理である。すなわち，数学の本質的性格である「あらゆるものを証明しつくす」ということも，原理的には「ごく少数の公理を設定し，これからすべてのものを論理的に導き出す」ということによって実現される。この「ごく少数の公理を設定し，それからすべてのものを論理的に導き出す」という考え方に基き，理論を構成していくのが，いわゆる公理的方法である。

この「ごく少数の公理からすべてのものを論理的に導き出す」という思想は，紀元前4世紀のギリシャにおいて創成された。また，Euclidは，幾何学という恰好の舞台の上で，この思想を見事に実演してみせたのである。このように，数学における公理的方法の原点はEuclidの原論である。しかし，このEuclidの原論に用いられる公理・公準の意味は，公理とは「自明の真理である」とか，公準とは「確実だと仮定してよいほどの簡単明瞭な幾何学の事実である」，という意味に用いられている。また，考察対象はあくまでもわれわれの現象空間内の図形や立体であり，その取り組み方も直接的・即物的であった。たとえば，公理的方法の原理からすれば無定義用語とすべき点・直線・平面の用語の定義も，原論では，現象空間内の実在の理念的状態の説明で行なっている。しかし，この定義は後の証明に役立つようなものでなく，数学的に全く意味のないものである。このような公理・公準の意味やその取り組み方からして，Euclidの原論は実体の模写を意図したものである。すなわち，Euclidの幾何学はわれわれの現象空間内の図形や立体に関する一つの「自然科学」に他ならない,[3]のである。

現代においては，この公理ということばは極めて洗練された意味に用いられている。哲学辞典によれば，「一つの理論の中から，無定義概念をいくつか取り出し，これら無定義概念を含むいくつかの命題をつくり，これを無証明命題すなわち公理とする。そして，この理論のうちにあらわれる他の概念はすべて，これらの無定義概念によって定義せられ，他の命題はすべて，これらの公理から証明せられるように理論を組み立てる。このようにして得られた理論を公理論という。[4]」このような新しい公理観に立つ現代数学は，著しい抽象的傾向を帯び，諸対象の中に潜む構造を抽出し，これを公理で規定してその構造を考察の対象とする。この構造の源泉（すなわち公理の源泉）は，多くの場合外界の事象にあり，これらの分析によって創造されるが，ひとたび設定されると後の数学の構成はこれらの事象から自由であり，拘束されない。数学の命題の真理性はこれらの事象における事実関係から独立している。すなわち，数学は単一の具体的対象の構造を考察するものでもなく，また対象を直接的・即物的に考察しない。この意味で，現代数学はもはや自然科学ではない,[5]のである。

このような数学の変貌が，単に自然科学のみならず，人文・社会の諸科学への巾広い数学の応用をもたらし，数学をして現代社会において欠くことのできない位置にならしめた。このことが数学教育現代化の大きな背景となっているのである。

このように，「あらゆるものを証明しつくす」という数学の本質的性格が変らないとしても，上述のような公理の意味のちがいが，数学をして，別の面で大きな変貌をとげさしたのである。

II　公理的方法の進化と数学思想の流れ

前章で，「あらゆるものを証明しつくす」という数学の本質的性格は変らないが，公理観のちがいが数学の様相を大きく変えた，と述べた。まさに公理観の変遷が数学思想の流れともいえる。本

章では，このことについて概観する。

古代ギリシャの公理主義　ユークリッド原論の公理・公準の意味に対する従来の通説は，さきに述べたように，「自明の真理」とか「確実だと仮定してよいほどの簡単明瞭な幾何学の事実である」ということであった。これに対して，伊東氏の著述[6]によれば，古代ギリシャの演繹的数学の形成を考証した，ハンガリーの古典学者サボー教授（A. Szabó ）の最近の研究は，極めて斬新な着眼によって，従来の通説を覆えそうとするものであり，いかに自明的に見える公理でさえ，原初的には既に自明とは考えておらず論争の的であった，としている。

すなわち，古代ギリシャの弁証法において，論者が議論のための前提を相手に要請する場合，相手がこの要請する前提を認容して合意するときは，この前提は共通の前提となるが，このときの要請を「ヒュポテシス」という。これに反して相手の同意が得られない場合，議論を進める必要上，論者の一方から要請しておくのが，「アイテーマタ」および「アキシオーマタ」である。これらは表面上はともに要請を意味するが，議論の出発点として上記のような差異がある。ユークリッド原論における公準および公理は，当時それぞれ「アイテーマタ」，「アキシオーマタ」を意味しており，自明の真理と考えられたものでなく，また論者の間で認容される「ヒュポテシス」でさえなかった，と論じている。また，このようなギリシャの論証的数学の形成に決定的影響を与えたのが，ParmenidesとZenon で代表されるエレア学派であった，としている。後世，この学問成立の根拠が次第に忘れられ，公理・公準の内容を皮相的に経験空間の直観に結びつけて，自明な理と考えるに至った，[7]のである。

ユークリッド原論の公理・公準が，原論成立期において「自明の真理」であったか，議論の出発点としての「合意なき一方からの要請」であったか，のいずれにしろ，考察対象である現象空間内の図形や立体の性質を追述し，「あらゆるものを証明しつくす」という精神にしたがい，根拠・根源を求め，段々とさかのぼって少数の命題に煮つめて得られたものである，ということは疑う余地はない。すなわち，Euclidは，Zenonの逆理を引っ提げて論争するエレア学派を十分意識しながらも，現象空間内の図形の世界の実体を模写し，これを公理化したのである。このことは，原理的には無定義用語とすべき点・直線・平面などの基本的概念の用語を敢えて定義していることや，公理・公準として選ばれた命題が実際に検証可能なものとして，19世紀までの哲学者・数学者に承認されていた事実からも了解できよう。つまり，Euclidの幾何学は現象空間内の図形に関する一つの自然科学である。

新公理主義　非ユークリッド幾何学の発見が現代数学の根本理念である，Hilbert の新公理主義の誕生の契機となった，ということは数学史上の周知の事実である。非ユークリッド幾何学の発見の歴史は，ユークリッド幾何学の平行線の公理が通俗的な意味から公理的体裁を有しないことの注目より端を発し，これを除いた他の公理よりこれを演繹しようとして，長い間の空しい努力を費やし，その結果到達したものであった。[8]この新しい幾何学の発見とそれらのモデルの発見[9]によって，それぞれ矛盾のない，互に対立する複数の幾何学が存在するという事態が生じた。ところが，幾何学がわれわれの身のまわりにひろがる現象空間に関する自然科学であるという立場に立つ以上，幾何学は一つでなければならない。したがって，その何れかは砂上の楼閣として捨て去らねばならない。しかし，一方では，この何れの幾何学も人間の知性が構築した体系であって，その美しさは何ものにもかえがたい，したがってその何れも捨てがたいという願望があった。[10]

この願望を実現するためには，数学が自然科学から精神的に独立し，「砂上の楼閣」の構築への

道を進まざるを得ない。ところが，当時数学がこの道を進むことを正当化する有力な根拠が徐々に生れつつあった，と赤氏はいう。[11]すなわち，現実には存在しない思惟可能なものを想定することによって，数学の実用度が著しく増大し，また既成の数学理論が典雅に整理される，という事実である。たとえば，虚数，無限遠点，イデアル数などの理想的要素を導入することによって既成の理論が典雅に整理され，これが間接的に実用に寄与し，従前に比較にならないほど実用度を高めた，ということである。このような背景によって，遂に数学が自然科学から訣別する時期が到来する。その訣別の宣言は，D. Hilbert（1862―1943）によって，次のようになされた。

「数学は思惟可能なあらゆるものを対象とする。ここに思惟可能とは，それを規定する条件，すなわち公理が矛盾を含まないということに他ならない。」[12]

これが現代数学の根本理念であって，「新公理主義」とよばれている。

このようにして，数学は自然科学から脱皮し，独立した。公理は真理である必要がない。というより，真理かどうかを問題とすること自身が無意味とされる。定理の意味は，その真実性にあるのでなく，それが公理系から証明されたという点だけである。かくして，ユークリッド幾何も非ユークリッド幾何も同等の論理的価値をもつに至った。これらが共存することを明確に意識するためには，やはり新公理主義の出現をまたねばならなかったのである。

現代数学と構造　現代数学の考察の対象は構造である。現代の数学者は，ある対象を考察する際，まずその構造を分析する。そして，その構造をより簡単ないくつかの構造に剝離し，その個々の構造を追求する。最後に，それらの成果を適当に綜合して，もとの対象を知ろうとする。赤氏は，現代数学がこのような姿になったのは，新公理主義と構成主義の合流の当然の帰結として，次のように説明する。[13]

理想的要素の導入によって，数学理論が拡張・整理され，同時に理論の実用度も高められた。しかし，理想的要素はあくまでも想像上のものであり，その実在性は極めて薄弱である。そこで，19世紀の数学者達は，理想的要素に対応する具体物を，すでに数学的に実在すると確認されたものから構成する，という努力をした。たとえば，虚数を「二つの実数の順序対」として構成することや，射影平面を球面上で対心点を同一視して構成することなどが，それである。このような傾向が理想的要素でない既成の要素まで及び,「あらゆるものを構成する」という思想を生むに至った。Dedekind（1831―1916）による有理数の切断としての実数の構成，二つの整数の順序対としての有理数の構成，二つの自然数の順序対しての整数の構成，などはすべてこの思想に基くものである。この「あらゆるものを構成する」という思想を構成主義とよぶ。この思想と新公理主義と合流して，次のような数学観が生まれた。

「数学は思惟可能なものをその対象とする。そして思惟可能とは，既知の集合から集合論的操作で構成されることをいう。」[14]

ところで，あるものを構成するとはどういうことか。Hamilton（1805―1865）が虚数を「二つの実数の順序対」として構成したのは，虚数そのものを構成したのではなく，虚数全体の集合がもつべき構造と全く同じ構造をもった一つのものを構成したにすぎない。すなわち，あるものを構成するとは，それと全く同じ構造をもったものを，既知の集合から構成することを意味する。その背景には，同じ構造をもつものは数学的に同じ「機能」をもつ，という考え方がある。このような経過をへて，数学者の関心は，次第に対象それ自身から，その対象のもつ「構造」へ移っていった，と赤氏は述べる。

かくして，現代数学の考察の対象は構造であるが，その構造を規定するのが公理である。すなわち，「一つの数学的構造を定義するには，集合の要素を結び合わせる一つあるいは二つ以上の関係を与える。次に，この与えられた関係がいくつかの条件を満足させることを要請する。これが考えている構造の公理である。ある一つの構造の公理論をつくるということは，そこで考えている要素に関する他のすべての仮定を捨象して，純粋に構造の公理からの論理的帰結を導くに他ならない。[15]」

このような数学の変貌は，数学の各分科を統合し，また数学の応用としても，単に自然科学のみならず，人文・社会科学などへの幅広い数学の応用をもたらす因をつくったのである。また，数学教育の現代化として，学校数学での「構造への着目」とか「公理的方法の指導」などの要請は，このような背景に由来するものである。

Ⅲ　公理の性格

本章では，数学における公理の性格について，次章では，数学における公理的方法について，それぞれ分析・考察する。このような考察は，学校数学で公理的構成を取り扱う場合，その指導の背景として欠くことのできないものと考える。

1．公理は理論の前提として要請（設定）された無証明命題である。

通常，数学の公理については，命題の論理的理由づけについての無限の遡行を断ち切るために設定された無証明命題として説明される。この無証明命題の設定は，Ⅰ章で述べたように，数学が,「あらゆるものを証明しつくす」ことを意識し，それを人間の力（有限の操作）で実現するために案出された，演繹体系を構成するための唯一の方途である。

2．公理は無定義概念の内含的定義[16]である。

どのような学問の領域においても理論の厳密な展開を行なうためには，まず第一にその中で使用される用語の意味を明確にしなければならない。しかし，一つの体系内で用いる用語をすべて定義しようとすることは不可能である。一つの用語を定義するには他のいくつかの用語が必要である。さらに，これらの用語を定義するには新しい他の用語が必要である。しかし，われわれ人間の力ではこのような無限の遡行は許されない。また，この遂行を不用意に有限回に限定すれば，辞書などにみられる循環的定義に陥る危険がある。そこで，演繹体系においては，この循環論法ないしは無限の遂行となる因果を断ち切るために，体系内の用語を二つのグループ，つまりその体系内の他の用語によって定義されるものと，定義されないもの（無定義用語）とに分ける。演繹体系における出発点は，この無定義用語の選択であるが，この場合選択された無定義用語群は体系の中の用語をすべて定義できるものでなければならない。それでは一体，これら選ばれた無定義概念はどのような意味・内容が与えられるのか。前述のように，演繹体系においては，定義に関する用語の系と論理的理由づけに関する命題の系の二つの系が考えられる。数学では，この二つの系を統一するために公理的方法をとる。すなわち，できるだけ少ない無定義用語のリストを選び，次にこの無定義用語で構成されるできるだけ単純な命題のリストを選び，これを公理系とする。そして，公理系を構成する文が真であるという観点でのみ，無定議用語の意味・内容が与えられ，それ以外の意味は何ら与えられない。つまり，無定義用語の意味・内容は公理系だけによって規制される。この無定義用語と公理系との関係は，代数学における変数と方程式の関係に似ている。たとえば，方程式　$x^2+y^2=1$　では，変数の組（x,y）がある範囲のものであれば，個々のどの数の組でもよいのであ

るから，この意味でｘ，ｙは一意に定義されない。しかし，変数ｘ，ｙの動きうる範囲は関係 $x^2+y^2=1$ で規定されている。すなわち，ｘ，ｙは内含的に関係 $x^2+y^2=1$ で定義されている。このように，数学における公理系は無定義用語の内含的定義を与える。

3 公理系と構造（公理が構造を規定する）

数学における公理的方法は，用語の定義づけに関する系と命題の論理的理由づけに関する系とにおける無限の遡行を断ち切る方途として，この二つの系を公理系によって統一した。この際，公理系を構成する命題が真であるという観点でのみ無定義用語の意味・内容が与えられ，それ以外の意味は与えられない。もちろん，無定義用語がもつ慣用的意味や公理系の源泉からくる直観的内容は一切捨て去られる。つまり，公理的方法は，公理系の源泉がもつ直観的内容から形式を意識的に切り離なし，公理系によってのみその抽象形式を規定する，と見ることができる。要するに，公理系が抽象形式すなわち数学的構造を規定する，といえる。

また，公理系は諸対象の本質的構造の抽象の結果でもある。たとえば，群論の公理系は，整数の集合における加法，有理数の集合（０を除く）における乗法，移動・変換における合成，ベクトルにおける加法，など諸対象の中に潜む共通の演算構造を明澄な洞察で認め，これを抽象した結果である。

N. Bourbaki は，公理的方法と構造に関連して，「公理主義の目的は単なる論理・形式のためではない，これは公理主義の一面にすぎないのである。公理主義がその本来目的としているのは数学のもつ深い明澄性である」[17]とのべ，次のような説明を加えている。すなわち，皮相な観察者が外見上全く異なった二つ以上の理論としか見ないところに，才能ある数学者はこれらに著しい類似性を発見し，これらに思いがけない統一を与えることがある。このようなとき，公理的方法は，その発見の深い理由を探り出し，もとの理論の特有の外見のために，その外衣の下に隠れている共通構造を抽出し，これを各理論に共通な記号や用語で表現する。これが，これらの理論の本質的構造を抽象して得られた，新しい理論の公理系となる。この場合，新しい理論において演繹される論理的帰結は，それぞれのもとの理論の特有の言語に直すことができる。すなわち，構造の公理論を作ることは，各理論での退屈な反復を避けることができ，数学における思考の経済性に連がるのである。

このように，新しい公理的方法の機能は，単に理論の論理・形式を整えるということだけでなく，むしろこれは従であって，主とするところは諸理論の統合，新理論の創造にあるのである。この場合の重要な働きは，構造の抽象であり，構造の公理化である。最近数学教育の現代化として，学校数学における「構造への着目」がしきりに強調されている。この「構造への着目」も，上記のような新しい公理的方法の考え方に結びつかない限り，それは形式の押しつけとなり，教育的に不毛のものとなろう。

4．公理系と解釈（解釈の多価性と数学の応用）

公理的方法における公理系と無定義用語の関係は，無定義用語の意味・内容が公理系だけによって規定される，ということであった。すなわち，無定義用語は公理系だけに規定されるという点で，その意味・内容の取り方に任意性があった。ここに，公理系の解釈という概念が生ずる。

「Σが公理系であるとき，Σの解釈とは，Σのなかの無定義用語に何か意味を与えて，変項のあらゆる値に対し，どの公理もすべて正しい命題であるようにすることをいう。このとき，公理系Σの一つの解釈によって，公理はいずれも意味ある概念についての正しい命題となる。この公理系Σの解釈によって定まる概念を，一般に公理系Σのモデルとよぶ。」[18]

たとえば，群の公理系において，要素の集合を整数全体とし，結合関係を加法演算（＋）とみれば，公理はいずれも意味ある正しい命題となる。したがって，この意味づけは群の公理系の一つの解釈を与え，この解釈によって定まるモデルが整数の集合の加法演算の構造である。同じく群の公理系において，集合を合同変換の集合とし，結合関係を変換の合成とみれば，これも群の公理系の一つの解釈を与え，その解釈によるモデルは合同変換群である。また，ユークリッド幾何学のデカルトのモデル[19]は，点を実数の順序対（x,y），直線を1次方程式　$ax+by+c=0$　を満足する順序対（x,y）の全体，平面を順序対（x,y）の全体，点（p,q）が直線　$ax+by+c=0$　を通るとは　$ap+bq+c=0$　なること，などの解釈によって構成されたものである。すなわち，このモデルは平面解析幾何である。

公理系は諸対象の構造を抽象することによって得られるが，公理系の解釈はこの逆であり，いわば抽象化の逆演算といえる。したがって，多くの諸対象に共通に存在する構造を抽象して得られた理論は，多くの解釈を許し，多くのモデルを提供する。

数学の応用と公理系の解釈は密接な関係がある。われわれが生存する宇宙を一つのユークリッド空間と考えてみることは，公理主義的なユークリッド幾何学に一つの解釈を与えることである。量子力学的状態をヒルベルト空間の点で表現することも，ヒルベルト空間の一つの解釈を与えることである。[20]　群論は，数学の他分野への応用，素粒子物理学への応用など，数学の応用としては最も豊かな応用をもたらすものであるが，その応用はすべて群の公理系の解釈を通して行われる。このように，数学の応用はつねに公理系の解釈を通して行われる。したがって，多くの解釈を許す数学的理論は豊かな応用をもたらす。これは数学における重要な側面である。数学にこのような機能を賦与したのは，一つには対象の直観的内容からその形式を意識的に切り離した，新公理主義の思想であり，さらには現代数学が考察の対象を構造に目をむけた点にある。

5．公理と実在（理論の前提としての受容性）

公理は演繹体系の出発点である。公理系の選択については，次章で述べる公理系の無矛盾性が要請されるが，他は非常な任意性がある。それでは，この無矛盾性以外は数学者が自由に公理系を設定してよいのか。しかし，それでは，得られた演繹体系の多くは何らわれわれに価値を与えず，数学を不毛の学問に堕する結果となるのである。この点の警告を発している二人の数学者の言葉を紹介する。第一の引用はF. Kleinのものであり，第二の引用はR. Courantのものである。

「そのさい理論の法則だけが満足され，とくにでき上った理論体系に矛盾がないことだけに注意しさえすれば，任意の公理をまったく無制限につくることができるのである。私はこのような立場には決して賛成できない。それはすべての科学の死だと考える。私の考えでは，幾何学の公理は任意のものでなく，一般に空間の直観に基づき，一つ一つの内容がその有効性によって決定されるような合理的命題である。」[21]

「数学は無矛盾以外は数学者が自由に創れる公理から演繹された結果の系である，という主張のなかには，科学の生命に対する脅威が含まれている。もし，この主張が正しいならば，数学はいかなる知的な人も引きつけることができないだろう。また，それは定義と規則と理論だけをもつ，動機も目標もない，単なるゲームに堕することになろう。」[22]

それでは，数学がこのような不毛に堕する危険を救うのは何か。それは公理と実在との関わり合いであり，それに対する配慮であろう。

19世紀の末，Hilbert はユークリッド幾何を再編成し，より厳密な立場で初等幾何学の公理系を

確立した。また，Peanoは数の世界で自然数の公理系を確立した。これらの理論は，図形あるいは数という特定の世界の中で，推論の根拠を求めて構成されたものであって，公理系はそれらの世界をそれぞれ特徴づける。これらは，いわば実体の公理化というべきものである。それゆえ，これらの理論は厳密な論理体系というだけでなく，意味あるものとして迎えられている。現代数学は，いろいろの対象や数学的実在をその本質部分まで分解し，その共通の構造を抽象し，その構造を考察の対象とする。このようにして得られた抽象理論においては，概念も定理も糸の切れた風船の如く宙に浮いて見え，全く実在性に乏しい。しかし，これらは解釈という操作によって，多くの具体的な理論へ応用され，また現実世界における新しい関係についての推測を与える。この現実の合理的側面の抽象とその応用の多産性のゆえ，現代数学はその確固たる存在理由を確保できるのである。すなわち，いかに抽象的な公理系であろうとも，その背後に実在がある。いわば，実在は公理の母体である，といえる。

このように，有益な公理系の選択は，実在に対する偉大な直観や創造力が要求される，実にデリケートなことである。数学の思考の方向を決定するものとして，人間の精神とは別の拠りどころが存在するのである。それは実在であり，実在の合理的側面である。結局，公理は，それを設定する数学者の個人的なものでなく，それが理論の前提として妥当であること，あるいはそれを前提として論を進めていくことの意義を，議論に参加する者から認容されるものでなければならない。この理論の前提としての受容性を保証するものとして，公理と実在の関わり合いがあるのである。

6．公理は数学の自由性・自律性の立脚点である。

G. Cantor は「数学の本性は，その自由性にある」と述べている。この思想は，数学の本性は思考の完全な自由にあり，数学は思惟可能なものをその対象とする，という思想と考えられる。数学は自然科学と異なり，自然空間や他の実在の性質の解明を目的とすることから本来自由である。**3**，**5**で述べているように，公理設定に至る過程で実在の機構に暗示や教示を受けるが，ただ設定後に上記のような拘束を受けない。つまり，数学と数学の応用すなわち公理系とその解釈は完全に区別されるのである。また，数学は思想・宗教・政治などの外界の価値観に左右されない。それは，数学はその基礎を学説や経験の上に置かないので，学説・経験の発達や変遷のために動揺し，改廃されることがないからである。この意味で，数学は自由性，自律性をもつ。この数学の自由性・自律性を保証する立脚点が公理そのものである。

Ⅳ 公理的方法の分析

1．公理系の無矛盾性

無矛盾性 公理体系はいかなる事情のもとにおいても矛盾のないものでなければならない。矛盾性は，体系の中の用語がもっているような特別な意味とは何ら関係なく，その体系の抽象的な論理構造だけに関わりをもつ。つまり，ある公理系が矛盾しているとは，論理的に相反する二つの定理をともにその公理系から導き出すことができる，ということである。ここで，なぜわれわれが公理体系が矛盾しているか否かを注意しなければならないかという理由を考えてみたい。解釈された体系（解釈によって無定義用語に特別の意味を与えた体系）の場合は，矛盾の発見によって，その体系の公理全部が同時に真であり得ないことがわかる。したがって，推論の前提が偽となり，それから論理的に導き出された命題の真理性は保証されない。また，解釈されない体系（無定義用語に特

別の意味を与えない）の場合は，矛盾の発見によって，すべての公理を真とするようにその体系を解釈する道があり得ない，ということがわかる。[23] どのような解釈によっても真となり得ない公理系は，われわれに何らの意味ある応用をもたらさず，全くの空理空論となる。このような体系は研究の対象として価値もなく，不毛のものである。

このように，公理系における無矛盾性は，その理論体系の存在理由として必要欠くべからざるものである。

無矛盾性テストと解釈　公理系が無矛盾であると断定することは極めて困難なことである。あらゆる可能な定理を眼前に揃べて，論理的矛盾の有無を細かに調べることができない限り，公理系が無矛盾であると断定できない。しかし，もうこれ以上定理が出てくることはあり得ない，と確信をもっていえるところまで行き着くことができるか。また，定理の数が膨大で，しかも複雑さを極めているため，互いに矛盾する定理を見損う危険がないか。では一体，一つの体系が無矛盾であるか否かをいかにして発見できるだろうか。

相対的な無矛盾性のテストの方法として，解釈によるモデルの構成がある。つまり，その公理系のすべての公理が確かに真となるような解釈の仕方を見つけることである。このような解釈によるモデルの存在は，前項で述べた理由から公理系の無矛盾性を保証する。ただし，この方法には限界があり，解釈された陳述の真実性についてわれわれは確固とした完璧な知識を備えていなくてはならない。すなわち，解釈された陳述の真実性について何らの疑いがないときのみ，公理系の無矛盾性が証明されたことになる。

無矛盾性の証明のために，ある公理系のモデルを数学の他の分科のなかに求めることがよく行われる。たとえば，KleinとRiemannは非ユークリッド幾何学の無矛盾性を示すために，ユークリッド幾何学の中にモデルを構成した。[24] この場合，もしユークリッド幾何学が矛盾を含んでいたら，一体どういうことになるだろうか。設定したモデルがユークリッド幾何学の枠組の中にあるから，ユークリッド幾何学が無矛盾であれば非ユークリッド幾何学も無矛盾である，としか結論できない。すなわち，非ユークリッド幾何学の相対的な無矛盾性の証明を与えたにすぎない。また，Hilbert は，ユークリッド幾何学の無矛盾性を証明するために，いわゆるデカルトのモデルを構成した。[25] その構成は，Ⅲ章の**4**で述べたような，点，直線と呼ぶことにした対象の系とそれらの相互関係の系からなるもので，ユークリッド幾何学の公理系の解釈が実数の理論の対応する定理に基いて正しいと結論されるものである。したがって，Hilbert の証明は，実数の公理系が無矛盾であればユークリッド幾何学の公理系も無矛盾である，という相対的な無矛盾性の証明である。このように，公理系のモデルの構成は相対的無矛盾性の証明を与える。モデルを構成した基盤に深い確信があればあるほど，それは無矛盾性を信ずる強力な根拠をわれわれに与える。また，このような仮定のもとに，われわれは理論の展開を続けるのである。

現在，無矛盾性の絶対的証明法は確立されていない。絶対的なテスト方法が開発されていない以上，公理系の無矛盾性のテストはモデルの構成に依存せざるを得ない。ここに，無矛盾性と公理系の解釈の間に密接不離な深い関係があるのである。

2．公理系の二つの類型

数学の公理系について論ずるとき，公理系は二つのタイプに分けて考えられる。Ⅲ章**4**で述べたように，公理系は無定義用語に意味・内容を与えることによっていろいろの解釈を許す。このとき，解釈によって得られるモデル２種をどのようにとっても常に同型のとき，公理系はカテゴリカル（

(categorical) な公理系であるといわれる。ただし，２種のモデルM, M′が同型であるとは，Mの全体集合からM′の全体集合の上への全単射な写像 f があって， f によっても逆写像f^{-1}によっても一方の演算や関係が保たれることである。つまり，カテゴリカルな公理系はただ一通りの型の解釈しか許さない公理系である。他方，公理系が同型でない２種以上のモデルの解釈を許すとき，この公理系は非カテゴリカル (non-categorical)な公理系であるという。この公理系の２類型は，解釈の単一性・多価性からくるもので，その公理系をもつ理論の特徴や応用と密接に関連してくるのである。

カテゴリカルな公理系　カテゴリカルな公理系は，解釈の単一性からもわかるように，対象の特徴づけを目的として，一つの対象を抽象化・形式化することによって得られた公理系である。いわゆる実体の公理化である。抽象化によって得られた記号や無定義用語はその指示する実体を背後にもつ。Euclidは直観的空間の基本的性質をあますところなく取り出し，それを整理することによって，彼の公理系を創り上げた。19世紀末には，Hilbert はEuclid の原論の欠陥を検討することによって，より厳密な立場からユークリッド幾何を再編成し，新しい公理系を確立した。また，Peano は，自然認識のもう一つの基盤である数の世界において，自然数の公理系を完成した。ここで大切なことは，これらの公理系がカテゴリカルであること，つまりこれらの公理系を満たすものは，それぞれユークリッド空間，自然数ただ一つに限る（同型の意味で）ということである。すなわち，いくつかの簡単な命題でもって，Hilbert の公理系は空間を完全に模写し，Peanoの公理系は自然数を論理的に描写したのである。このように，カテゴリカルな公理系は，空間や数などの特定な対象の中で，推論の根源的根拠を求め，対象の特徴づけを目的として構成されたものである。

非カテゴリカルな公理系　非カテゴリカルな公理系は，一つの対象の特徴づけではなく，諸対象の中の構造の抽象や操作の抽象によって構成される。Ⅱ章で述べたように，非カテゴリカルな公理系こそ，現代数学を特徴づけるものである。現代数学は，前世紀までの数学と様相を一変し，いろいろの対象をその本質部分まで分解し，共通構造を抽象する。このような「構造への着目」によって，新しい公理系が設定され，群の理論，ベクトル空間の理論や距離空間の理論のようないろいろの抽象理論が演繹，展開される。これらの公理系は，一つの対象の特徴づけをしたものでなく，多くの対象の中に共通にある基本構造を抽象して得られたものだから多くの解釈を与える。したがって，これらの公理系で展開される理論は，その解釈の多価性のゆえ，多くの具体的な理論に応用される。この解釈の多価性が非カテゴリカルな理論の特徴であり，非カテゴリカルな公理化の効用をもたらすものである。外見では全く異種の対象と思われるものが，同一の公理系で結ばれ，同一の公理系のモデルとして統合される。このように，非カテゴリカルな公理系は，従来の複数の科学であった数学を，基本構造に着目することによって，単一の科学としての数学に仕上げる役割を果たしている。

要するに，カテゴリカルな公理系は対象の特徴づけであり，非カテゴリカルな公理系は構造の抽象である。したがって，前者では，できるだけ簡潔な公理系で対象を特徴づけることが問題となり，他方後者では，いかにして本質的で有益な構造を抽象するかが問題となる。

３．公理的方法に基く数学理論の３類型

この節では，東京理科大学教授柴田氏の考え方を紹介する。柴田氏は，公理に基いて展開される数学理論を，次の三つに分類している。[26]

非カテゴリカルな理論

カテゴリカルな理論　　歴史的展開

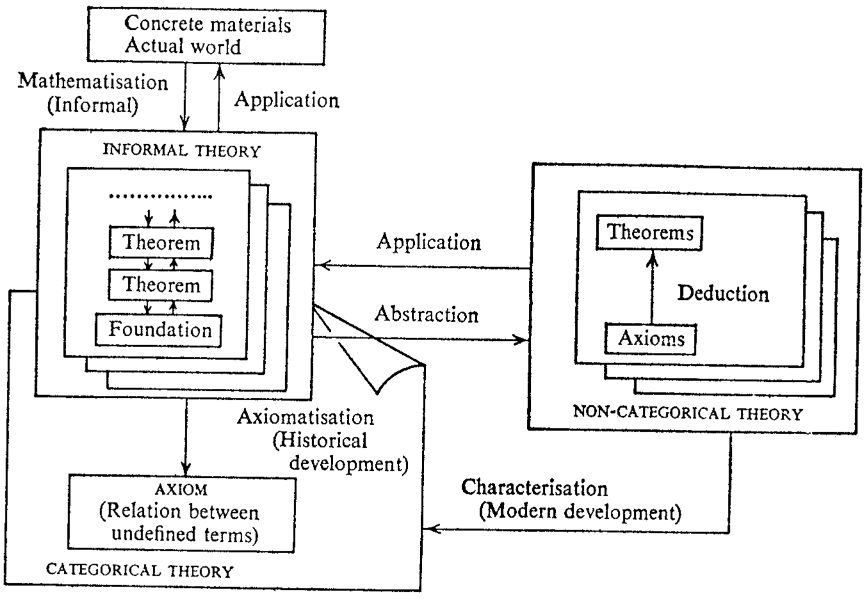
カテゴリカルな理論　　現代的展開

非カテゴリカルな理論は，非カテゴリカルな公理系に基いて展開される数学であり，いわゆる構造の理論である。この理論は抽象・演繹・応用の三つの段階から構成されており，各段階ともこの理論では重要である。また，この理論を展開あるいは学習するためには，各段階とも具体的な理論についての十分な理解が要求される。たとえば，代数的諸概念，群・環・体の理論や線形空間，距離空間などの理論は，それぞれ非カテゴリカルな理論の例である。

カテゴリカルな理論の歴史的展開は，カテゴリカルな公理系に基いて展開される理論のことである。これらの理論は，特定の対象の中で，推論の根拠を求め，対象の特徴づけを目的として構成されたものであり，いわば実体の公理化である。Hilbert のユークリッド幾何や Peano の自然数論は，それぞれカテゴリカルな理論の歴史的展開の例である。

特定の対象がいくつかの基本構造をもち，かつそれらの基本構造の綜合として特徴づけられることがあり得る。すなわち，特定の対象がいくつかの非カテゴリカルな理論の綜合として特徴づけられる。このような特徴づけを，カテゴリカルな理論の現代的展開とよぶ。たとえば，実数は制限完備な順序体として特徴づけられ,[27] ユークリッド平面は内積をもった2次元線形空間として特徴づけられる。これらは，カテゴリカルな理論の現代的展開の例である。

さらに，柴田氏は，この数学の3類型と学校数学との間の相互関係を分析し，その分析の模様を次の図表にまとめている。[28]（Diagram 1）



(**Diagram 1**)

この図表において，Concrete material・Actual world と Informal Theory の関係の部分が，いわゆる学校数学の世界であるとして，次のような解説を与えている。この学校数学の世界では，

(1) 現実世界からより理論的世界への数学化

(2) Informal な理論の展開

(3) 具体的世界への応用

の3段階がある。(1)と(3)の段階では，抽象化，形式化のような活動が繰り返えされ，経験や直観が重要な役割を果たす。また，(2)段階では，Informalな意味ではあるが，演繹的考察や帰納的考察の多くの機会がある。この学校数学における3段階は，厳密さの違いがあるが，非カテゴリカルな理論の3段階に似ている，としている。

Informal Theory と Non-categorical Theoryとの相互関係は，前述のカテゴリカルな理論の3段階を示したものである。Informal Theory から Categorical Theoryへの移行関係は，一つの対象に関するInformal な理論を分析し，その推論の根拠を追求して公理化するものである。すなわち，それは実体の公理化であり，カテゴリカルな理論の歴史的展開である。また，Non-categorical Theory から Categorical Theoryへの移行関係は，特定の対象をいくつかの非カテゴリカルな理論の綜合として特徴づける関係を示すものであり，すなわち前述のカテゴリカルな理論の現代的展開を示すものである。

柴田氏のこの分析は，現代数学と学校数学との関連での洞察が深く，またその呈示も簡潔で明確である。これは，公理的方法をどうとらえるか，学校数学としての公理的方法はどうあるべきか，などを考える際の，貴重な参考となるものと考える。

4．公理的方法の利点と弱点

公理的方法の利点　数学が公理的方法をとることの意義・利点として，次のようなことが考えられる。

(1) 公理的方法は，理論の責任の所在を明確にする。

公理的方法は，定義に関する系と命題の論理的根拠に関する系を，公理系によって統一している。これによって，循環論法や論理的不明確に陥ることが回避され，定理の証明も容易となり，証明の厳密性が強化された。また，数学は絶対的真理について何一つ述べていない。つまり，数学における結果というものは，いつも前提（公理系）があっての話である。Pを公理とすればQという結果が得られる。この場合，Pを前提として認めればQという結果も認めなければならないといっているだけで，Qが絶対的に正しいなどとは少しもいっていないのである。このように，公理的方法は，その理論の正当性の唯一の根拠を公理系においている。この意味で，公理的方法はその理論の責任の所在を明確にしているといえる。

(2) 公理的方法は労力節約の方策である。

この利点は非カテゴリカルな理論の特徴である。非カテゴリカルな理論は，多くの対象の中にある基本構造を抽出し，その基本構造に関する演繹体系を創る。直観的内容を切り離した「構造」の理論は演繹が容易であると同時に，その理論で得られた結果はすべて抽象の素材にした対象に適用できる。また，この「構造」の理論は，従来無縁と思われた分野への数学の応用をもたらすことがよくあるのである。（Ⅲ**3**，**4**参照）このように，非カテゴリカルな理論は，各具体的な理論での退屈な反復を避けることができ，数学における思考の経済性に連がるのである。

(3) 公理的方法は数学の分科を同化・統一する。

Bourbaki 学派は，数学の全分科に潜む構造を分析し，共通の基本構造として，順序構造，代数的構造，位相構造を抽出した。そして，これらの基本構造に着目して，単一の科学としての数学の

建設をめざしている。[29] このように，数学をして同化・統合の方向に向かさせしめたものは，まさに対象の直観的内容からそれらの形式を意識に切り離した，新公理主義に他ならない。

(4) 公理的方法は数学的対象を特性化する。

カテゴリカルな理論の歴史的展開は単一の公理系による対象の特徴づけである。また，カテゴリカルな理論の現代的展開は複数の非カテゴリカルな公理系による対象の特徴づけである。

(5) 公理的方法は理論を一般化したり，新しい理論を創造する。

数学的な主題の公理的取り扱いは，いろいろな事実の間の相互関係の細かい網の目を解きほぐし，構造の本質的な理論的骨組を示すのに最も自然な適切な方法である。また，概念の直観的な意味・内容を捨象し，形式的な構造について集中的に考察することは，直観的な意味・内容に拘泥する行き方では見落すかもしれないような一般化を容易にする。たとえば，n次元ユークリッド空間における距離関数の本質的性質を抽象して一般距離空間の公理系が設定された。[30] また，Hausdorff は，距離空間における近傍族が満足する構造を抽出して彼の抽象空間論を創り，一般位相空間論の門戸を開いた。[31] これらは，公理的方法に基いての理論の一般化である。このような例は他の分野でも極めて多い。

また，既存の公理系を改造することによって，新しい数学が誕生することがある。周知のように Lobachevski， Bolyai，Riemann は，Euclid の第5公準の代りにその否定命題を公準に組み入れることによって，新しい非ユークリッド幾何学を創造した。これは，既存の公理系を改造することによって，新しい数学を創造した典型的な例といえる。また，P. J. Cohen はこのような手法を集合論における連続体仮説の問題に採用している，[32] という。このように，公理的方法は新しい数学の分野の創造にも寄与し，研究上の有力な利器にもなっているのである。

(6) 公理的方法は，多くの解釈と広汎な数学の応用を生む母体である。

これについては，既にⅢ章4，5でふれている。

公理的方法の弱点　何事も完全なものはない。数学における公理的方法もまたその例外ではないのである。公理的方法は，さきに述べたような豊かな利点をもつが，現在のところ次のような弱点をはらんでいる。

公理的方法は，無定義用語とそれらの内含的定義である公理系，論理的演繹，および「ことば」としての集合論を基礎としている。竹内氏は，現代数学の各分野では，公理系を確立することによって数学内部での形式化を果しているが，演繹論理や集合概念については，普遍的なものとして何の顧慮もなく無意識に用いられている，[33] と指摘している。もし，基礎としての論理や集合論に欠陥があるのであれば，演繹された定理は信用できない。実際，Cantor の素朴集合論には，Russell のパラドックスなど多くの矛盾が含まれていることが指摘されている。このような基礎に関する問題が現代の公理的方法の弱点である。このような問題に関連して，前原氏は「数学の形式化」を次の3段階に分けて考察している。[34]

第1段階　数学の公理化（公理主義）
第2段階　集合論の公理化（公理的集合論）
第3段階　論理の公理化（証明の形式化）

そして，通常「抽象数学」と呼ばれる数学理論はすべて第1段階の形式化の洗礼を受けただけで，第2，第3段階の形式化を受けていない，としている。したがって，数学における公理的方法の上記の弱点を補強するためには，第2，第3段階の形式化が必要であろう。なお，第2，第3段階の

形式化は，集合論におけるパラドックスの排除や数学における証明の形式の確立をめざしているものである。これらは数学基礎論の専らの研究対象である。

次は，公理主義万能論に対する批判というべきものである。その批判というは，数学を公理化すれば，たちまち形式化された内容から数学的本質が外へ絞り出されてしまう，という考え方である。数学上の重要な発見や啓発的な洞察は公理的な手続きによるのではめったに得られない。直観によって導かれる構造的な考え方こそ数学の原動力の真の源である。つまり，公理形式は表現としては理想的であろうが，公理的方法が数学の本質を構成するなどと考えるのは誤った危険な考え方だ，[35]というのである。さきに引用した，Klein や Courant の言葉[36]も，このような立場からの警告であろう。

しかし，これらの批判は，公理的方法の外的な形式面だけを攻撃しているように思われる。Ⅲ章**3**でも述べたように，新しい公理的方法の機能は，単に理論の論理・形式を整えることだけでなく，むしろこれは従であって，主とするところは諸理論の統合，新理論の創造にあるのである。この場合の重要な働きをなすのは，構造の抽象であり，構造の公理化である。この意味で，公理的取扱いにおける抽象・演繹・応用の３段階は，数学の研究の上でも，数学の学習の上からも必須・不可欠のものである。抽象を欠いた形式，応用を欠いた演繹は，数学的本質を絞り出した，屍の骨格にすぎない。学校数学で公理的取扱いをする場合，この点十分肝に銘ずべきである。

Ⅴ　学校数学における公理的方法

１．公理的方法の指導の意義

指導の意義　Ⅱ章で述べたように，公理的方法は，数学の本質というべき「あらゆるものを証明しつくす」という根拠を追求する精神に基いて，人間の思考の到達した偉大な成果である。また，Ⅲ，Ⅳ章で考察したように，この公理的方法の考え方は，単に論理・形式という面だけでなく，その中に極めて重要な数学的考え方を含み，また豊かな機能をもっている。ここでは，学校数学として公理的方法を取扱うことの意義について考えたい。

まず第１に，公理的方法の指導は，根拠を追求し，その根源をさかのぼって理論の立場を築く，という理論科学の基本的考え方を教える。　学校数学においても，この「根拠を追求する」という精神を大切にしている。たとえば，現行学習指導要領では，小学校の算数科の目標の中に「…，筋道を立てて考え，……」をうたい，また中学校・高等学校の数学科の目標の中でも「……，論理的に考え，……」とのべている。これらは何れも，学校数学の中で根拠を追求する精神を大切にし，そのような能力や態度を養うことをめざしているものである。中学校までの段階では，その根拠の追求に限度があり，原理・法則に基いての計算や適用，天下りの教育的公理（基本性質・法則）の設定による局所論証などに終っている。このような取扱いは，この段階の児童・生徒の論理的な面の成熟度や取扱う教材のことを考慮すれば，当然のことゝ考える。しかし，このような局所論証の方法だけでは，「根源をさかのぼってその立場を築く」という考え方を習得することができない。「根源をさかのぼってその立場を築く」という考え方は，数学のみならず演繹体系を構成している理論科学に共通な基本的考え方である。高等学校が普通教育の完成をめざしていることを併せて考えるとき，高等学校のある段階で，この基本的な考え方を自覚的に学ぶことは極めて意義あることと考える。

第2に，公理的方法の指導は，簡単な命題群で考察対象を特徴づけることを教える。 この「対象を簡単な命題群で特徴づける」という考え方は，対象を考察する際にその場，その場で推論したり，判断するということではなく，複雑な対象を分析してそれを原理的に，法則的に把握するという考え方である。この考え方は，数学以外の分野にも転移できる考え方であり，それを学ぶことは意義あることと考える。

第3に，公理的方法の指導は，構造に着目することの意義や現代数学の性格・役割についての理解を助ける。 この構造に着目することの意義や数学の役割などを理解するためには，Ⅳ章でのべたように，いわゆる非カテゴリカルな理論の学習が必要である。現今，数学教育の現代化として，このような内容を学校数学で取扱うことを要請している。この背景として，Ⅱ章で述べたような数学の変貌が，諸科学への広汎な数学の応用をもたらし，現代社会において欠くことのできない位置を数学に与えた，ということがあるのである。これについては，次項「数学教育の現代化と公理的方法」において述べることにする。

第4は，文化・教養的意義というべきものである。 これは，上述の意義とかなり重複する面もあるが，敢えて掲げることにする。公理的方法は，根拠を追求するという精神に基いて，人間の思考が到達した偉大な成果である。しかも，上述のような豊かな機能や考え方を含むものである。高等学校が普通教育の完成を目ざすものであれば，高等学校教育において，このような人間が獲得した成果を取扱うことをもくろむことは当然のことであり，大いに意義あることと考える。また，高等学校段階では，生徒の論理的な面の成熟度も十分であり，数学的な経験や素材についての知識も漸次豊かになり，適切な教材によっては公理的方法の指導も十分可能であると考える。

数学教育の現代化と公理的方法　公理的方法について，その形式だけでなくその精神を植えつけよう，というのが数学教育現代化の大きな目標の一つになっている。この背景について考えてみたい。これは数学の応用と密接不離な関係があるのである。

近世数学は，古代ギリシャの幾何学と東方の代数学とを融合統一した，Descartes の解析幾何学の創始によって幕が開かれた。ついで，ニュートン力学の発生とともに，解析幾何学の基礎の上に微分積分学が樹立された。Newton の思想からすれば，微分積分学は力学と別物でなく，自然科学のものであった。[37] この微分積分学が力学の必須の武器として重用され，工学の異常な発展をもたらしたのは周知の事実である。このような状況が，数学をして「物理学の手段」とみる偏見を生むに至ったのである。今世紀初頭の数学教育の改良運動は，このような数学の有用性の観点で，数学教育の改良を唱えたものである。この精神で改良された学校数学は，算数 → 代数・幾何 →解析幾何 → 微分積分学 → 微分方程式 という力学に通ずる道であり，まさに物理数学教育である。現在のカリキュラムは，別の面で種々の手当てが講じられているが，大筋において変わることがない。

現代数学は，その性格を自然科学から独立・脱皮し，構造への着目と解釈の多価性による広汎な応用という新しい性格を確保し，いわゆる非カテゴリカルな理論がその主流となった。そこでは，自然現象とはいわず社会現象とはいわず，同じ構造が認められるところならどこでも応用作業が開始される。このような現代数学の変貌によって，従来は数学の応用と無縁であった分野，生物学，社会科学，経営・管理，企画等にはなばなしい数学の応用が認められるようになった。これは，Ⅲ章3，4でみたように，新しい公理的方法の所業なのである。このような現代数学の有用性に着目して，学校数学を改革しようというのが，数学教育現代化の根本精神といえよう。

この数学教育現代化の目標として，学校数学における「構造への着目」とか「公理的構成」が唱えられている。しかし，上記のような背景を考えるとき，これらの取扱いは新しい公理観，公理的方法の考え方に結びつかないかぎり，その指導は不毛のものとなろう。このような意味で，新しい学校数学の教材として，抽象・演繹・応用の３段階を具備した非カテゴリカルな理論の教材の開発が望まれる。

2．学校数学としての「公理的方法」の型について

一口に公理的方法といっても，取扱う内容によってその様相が異なる。Ⅳ章**3**でのべたように，柴田氏は公理に基いて展開される数学を３類型に分類した。それらの三つの型の数学は同じく公理的方法をとっているが，その性格と目的とするところが大いに異なった。さらに，自然科学や社会科学の問題で，事物・状況を数学化し，これをよりよい公理系に精練して考察するという，公理に基いてのアプローチがある。したがって，学校数学としての「公理的方法」を考える場合，どのような型の公理的方法を選ぶべきか，また選ばれた型では指導上どのような配慮が必要か，ということが問題となろう。そこで，学校数学としての「公理的方法」を次の３類型に分けて考える。なお，Ⅳ章**3**での分類の「カテゴリカルな理論の現代的展開」は，それを取扱うに至るまでの準備の問題から，到底学校数学で取り上げられるものでなく，したがってこれは次の分類から除外した。

① 実体の公理化

② 構造の抽象による公理化

③ 事物・状況を数学化して，これをよりよい公理系に精練する公理化

①は，いわゆるカテゴリカルな理論の歴史的な展開である。ここでは，対象を分析し，より根源的な拠りどころを求め，これに基いて体系を構成していくことが主眼となる。この「根拠を追求し，その根源的立場を構築していく」という考え方は，理論科学に共通な考え方である。また，①は，単に論証の基盤を形式的に与えるのではなく，対象にみなぎる直観的なものを論理的なものに表現する。すなわち，対象の論理的模写を与える。これは，数理科学における数学的モデルの設定に通ずる考え方であり，「事象を数学的にとらえ，……」という数学教育の目標に合致するものである。したがって，高等学校数学科のカリキュラムは，①の教材化を是非含むべきものと考える。現行の高等学校数学ⅡＢにおける「平面幾何の公理的構成」はこの立場での教材化であると考える。

②は，いわゆる非カテゴリカルな理論である。ここでは，諸対象に共通にある本質的構造に着目し，その構造について考察される。この理論には抽象・演繹・応用の３段階があり，どの段階とも重要であり，何れとも欠くことができない。これは②の教材化で留意しなければならない点である。とくに，構造の抽象と解釈の多価性が②の特徴であり，これこそ現代数学の性格や役割を特徴づける。数学教育の現代化として，学校数学における「構造への着目」とか「公理的方法の指導」が強調されているが，これは②の教材化を指向しているものである。このように，②の教材化は高等学校のカリキュラムの中で無視できない存在である。しかし，抽象・演繹・応用の３段階を満足に展開するためには，その基礎として，取扱う「構造」に関連する教材についての豊かな知識が必要である。すなわち，②の教材化には，取扱う「構造」が背景に多くの既習の素材をもつこと，興味ある定理が演繹されること，定理の解釈が各素材に意味ある結果や展望をもたらすこと，などが必要な条件となる。このように，②の教材化には，教材の選択やその展開にかなりの困難点が含まれている。実際，群やブール代数の構造の教材化の企てがあるが，それは，第１段階の抽象と例探がしによってその概念に親しむことに終っているか，あるいは第１，第２段階に相当長い時間を費やし

ながら，得られた定理は殆ど興味あるものはない，という結果になっている。[38]

③は，自然科学や社会科学における数学的モデルの公理的アプローチといえよう。③の教材化は，事象を数学的にとらえる能力を養う上でも，数学の応用や役割についての理解を深かめる上でも極めて有意義なことである。例としては，H. G. Steiner による中等教育を対象としての展開例（投票の場の公理化）[39] や J. G. Kemeny — J. L. Snell による例（順位の選好に関する公理的アプローチ）[40] などがある。しかし，③を本格的に展開するためには，その基礎として，②の非カテゴリカルな理論についての理解が必要であり，また対象とした自然科学や社会科学の事象についての専門的な知識が要求される。したがって，我国の現状からすれば，③の教材化は高等学校ではかなり困難であり，①，②の基礎の上で大学段階で行なわれるべきものと考える。なお，①，②の取扱い方によっては，③の考え方を補うことができると考える。また，③の素朴な形での取扱いは可能であるとも考える。

3．「学校数学としての公理的方法」についての構想

1では，学校数学において公理的方法を指導することの意義とその必要性について述べた。ここでは，それを受けて，学校数学としての公理的方法の指導のあり方について論じたい。

2で考察したように，高等学校数学科の教材として考えられる「公理的方法」の教材の型は，①，②の二つであるが，これらは一方は実体の公理化であり，他方は構造の抽象である。①型の理論を用いて公理系の解釈の多価性や数学の応用の多様性を理解させることは不可能である。また，単一の②型の理論で実体の特徴づけを行なうことはできない。すなわち，①，②の型は全くその性格を異にするものであって，一方を他方の代用にできない。しかも，この何れも学校数学として軽視できない，極めて重要な数学的考え方を内蔵している。結局，高等学校における「公理的方法」の指導は，この①型，②型の二つの型を含むべきであり，指導順序としては，先ず①型の指導，次いで②型の指導とするべきであると考える。また，指導の時期としては，生徒の論理的な面を成熟度や数学的な経験，素材についての準備の程度，応用やその後の学習への発展，などを考慮するならば，高等学校第2学年の後半に位置づけるのが適当であると考える。

以上のような考えに基いて，学校数学として「公理的方法」を取扱う際の指導の目的および指導についての基本的考え方を次のように定めたい。

指導の目的　総括的には，数学における公理の意味と公理的構成を理解させることを目的とするが，指導を焦点化するために，次のような目標を掲げる。

(1) 事象を分析し，事柄の根拠を追求して根源的な要素の関係を求め，それに基いてその事象に関する諸命題を構成しつつ，体系を作り上げていく，科学の普遍的な考え方を理解させる。

(2) 抽象・演繹・応用の3段階をもつ理論を学習することによって，現代数学の性格や役割についての理解を深める。

(3) 数学において，構造に着目することの意義を理解させる。

指導についての基本的な考え方　ここでは，以上の構想に基き，学校数学としての公理的方法を指導する際に配慮すべき点，とくに教材選択ならびに指導上の留意点についての基本的な考え方を述べる。

(1) 高等学校の公理的方法の指導として，①「実体の公理化」，②「構造の抽象による公理化」の二つの型の理論を取扱う。指導は第2学年を対象として行ない，指導順序は①型から②型の順とする。

(2) ①型の理論については，実体の公理化という観点からも既習事項を生かすのがよい。すなわち，先行学年で設定した教育的公理（基本性質，原理，法則）の根拠をさらに追求し，より根源的な根拠を求め，それに基いて体系が構成される様子を学習させる。このような既習内容を生かすことは，さらに根源を求めることの意味やその必要性が理解され易く，また指導時間の節約の上からも適当である。この意味で，①型の教材としては，先行学年でかなり論理的に取扱われている素材が望ましい。日本の数学教育の現状からすれば，平面幾何がこの条件を満たし，また直観的な対象を論理的に表現するという，実体の公理化の精神からも最もふさわしいものと考える。したがって，①型の教材としては平面幾何が適当であると考える。

(3) 前節2で述べたように，②型の教材は抽象・演繹・応用の3段階を必ず含むものでなければならない。この教材の指導は，数学の性格や役割を理解させるのが一つのねらいである。したがって，抽象される構造は抽象の背景に多くの既習の素材をもち，また演繹された定理もそれらの素材に対して興味ある解釈をもたらすものであって，構造の抽象や解釈の多価性に対する理解が容易となるようなものが望ましい。また，学校数学としての「公理的方法」である以上，その理論はあまり大規模でないのがよい。とくに，砂をかむような長い演繹の結果が興味うすい定理だけというのは論外である。さらに，取扱う理論が数学の上で基本的な概念であり，その後の学習に十分生かせるものであれば，その指導は一層有意義なものとなろう。結局，②型の公理系の選択やその指導については，次のような配慮が必要であろう。

(a) 形式が単純であること。

(b) 抽象される「構造」が既習の多くの教材に認められ，かつその「構造」の抽象が自然で無理でないものが望ましい。

(c) 演繹が困難でなく，有益な定理に比較的早く到達できることが望ましい。しかも，演繹は論理的に厳密でなければならない。

(d) 多くの解釈を許し，興味ある応用が見い出されること。すなわち，適当な素材による定理の解釈が有益で後の数学の学習にプラスになるようなものを含むことが望ましい。

(e) その公理系による理論そのものが，数学の上でも重要で基本的であることが望ましい。

(4) 公理は，生徒にとって，落下傘で落したようなものであってはならない。生徒に，公理の必要性と設定されたものが最初の根拠として妥当なものであることを感得させることが大切である。

Ⅲ章5において，いかに抽象的・形式的な表現の公理系でも，実在との関わり合いがあり，実在の合理的な側面を抽象して得られたものであると述べた。また，このような実在との関わり合いが公理系をして対象を特徴づけたり，豊かな応用をもたらす。ここに，数学の存在理由，すなわち公理を議論の前提とすることの受容性が確保される，とも述べた。このことは，学校数学としての「公理的方法」を指導する場合も極めて重要なことである。したがって，①型の指導の場合は，根拠を追求して得られた公理系は図形の世界の合理的な側面を抽出したものであること，またこれで平面幾何の命題のすべてが導かれること，つまりこの公理系が平面幾何を特徴づけるものであること，をおさえおくことが大切である。②型の指導の場合も，公理系が既習の多くの素材や経験事象のある関係などの中に共通にある合理的側面を抽象して得られたものであるから，これを前提として推論すれば思考の節約に連がり，極めて有意義であることをおさえることが肝要である。

Ⅵ　高等学校における公理的方法の指導

1．平面幾何の公理的構成

(1)　実体の公理化の展開例として平面幾何の公理的構成を選ぶことの理由

実体の公理化の展開例を，数の世界でとるか図形の世界でとるかは議論の分れるところである。その中で平面幾何を選んだのは，前章Ⅴでもふれたように，次のような理由からである。

第一に，局所的展開ではあるが，生徒が中学校において図形の論証を学習しているということである。中学校で学習した命題の証明を分析してその根拠を明かにしたり，また無証明命題（基本性質）の根拠をさらに追求することによって，より根源的な根拠を求め，それに基いて平面幾何を再構成する。このような既習内容を生かすことは，根源を追求することの意味や必要性が理解されやすく，また論理体系としての全体像も理解されやすいものと考える。

第二に，実体の公理化の根本精神は具体的な事象の数学化というべきものであり，すなわち直観の論理化といえよう。この点，平面幾何の対象は点であり直線であって，その背後に視覚的実在をもち，直観の論理化の教材としては恰好のものである。このような直観的な図形の世界において，その基本的な性質を点や直線などの関係で論理化することは，具体的なものについての数学化の経験を与え，数学教育上極めて有意義なことである。この意味では，数の世界はかなりの抽象的性格をもち，図形の世界に劣る，といえる。

第三に，実体の公理化に関する数学史上の発生的順序である。平面幾何の公理化は，不完全ではあったが，古代ギリシャの時代に意識的に行れており，数の世界での公理化は19世紀に完成された。このような数学史上の発生順序は数学教育における教材選択では考慮されなければならない。

(2)　平面幾何の公理的構成の展開

現行の数学ⅡＢの教科書では，公理系の設定までの道程は各様で，演繹的方法と公理についての簡単な説明の後，平面幾何学では次の命題群を公理として用いるとして天下り的に設定しているものや，中学校での定理の証明をふり返り，中学校で根拠として用いた基本性質の根源をさらにさかのぼれば一層根源的な，次のような命題（公理）に達するとして設定しているものや；さらに設定の仕方も，一度に一括設定しているものや，項目毎に考察してその必要都度設定しているものなど，そのいき方は多様である。しかし，その何れも，実体の公理化という観点で眺めるとき，必ずしも十分でないように思われる。そこで，実体の公理化と公理の意味を理解させるための指導展開としては，とくに公理への導入を重視した，次の４段階からなる平面幾何の公理的構成の指導が妥当なものであると考える。

[1]　公理への導入
[2]　公理の設定
[3]　公理からの演繹
[4]　まとめ

[1]　**公理への導入**　この段階では，中学校で取扱ったある定理の根拠を次々に掘り下げていき，その根源的根拠として公理の必要性を知らせる。この場合の素材としての定理は，その根拠を追求

したときに，次の段階で設定する公理の大部分のものが顕われるものが望ましい。次の例は，田中氏の指導展開例[41]の中にも見られるものであるが，この段階の素材としては適当なものであると考える。

（例） 次の定理を証明してみよう。

「三角形の内角の和は２直角である。」

（指導展開の概要）

この定理の証明は，三角形を△ＡＢＣとするとき，∠ＸＡＣ＝∠ＡＣＢ となるような半直線ＡＸを引くことによってできる。その証明を注意深く調べることによって，その根拠として次の事柄を用いていることを気づかせる。

ⓐ 「一つの直線の指定された側に，この直線上のある線分と与えられた角に等しい角をつくる半直線は唯一つ存在する。」

(ア) 「１平面上の２直線に他の１直線が交ってできる錯角が等しければ，その２直線は平行である。」

(イ) 「平行な２直線に他の１直線が交ってできる錯角は等しい。」

次に，(ア)の根拠を追求すれば，これは背理法を用いて証明でき，そのとき次の事柄をその根拠に用いていることがわかる。

ⓑ 「直線は，その上の点によって，二つの部分に分けられる。」

ⓒ 「線分ＡＢと半直線ＯＸがあるとき，半直線ＯＸ上にあって，ＯＣ＝ＡＢとなるような点Ｃがただ一つ存在する。」

ⓓ 「異なる２点を通る直線はただ一つである。」

ⓔ 「２辺とその夾角が等しい三角形は合同である。」

さらに，(イ)の根拠を追求すれば，(ア)と次の事柄をその根拠として証明できることがわかる。

ⓕ 「直線外の１点を通り，その直線に平行な直線はただ一つ存在する。」

なお，ⓐの「一つの直線の指定された側に」ということを説明できるためには，

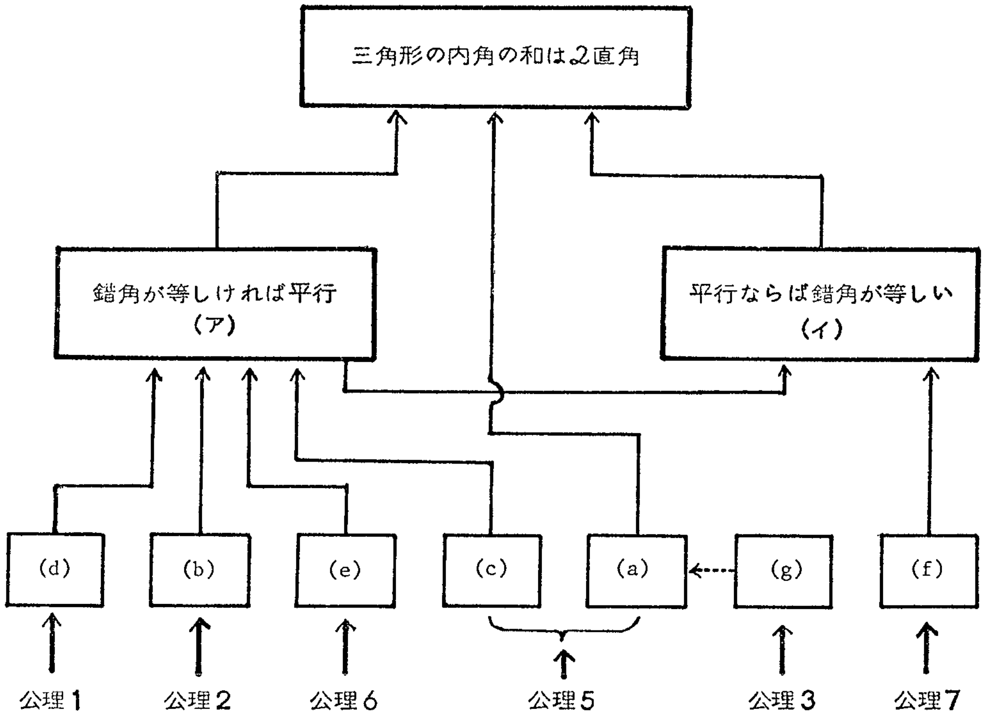
ⓖ 「直線が平面を二つの部分に分ける。」

という分割公理が必要であることもわかる。

以上の推論の追求の跡を図示すれば，次頁の図表のような関係となる（Diagram ２）。

このような考察の後に，推論の根拠を追求していくことは際限がなく，原理的にはどうしても，いくつかの基本的な事柄を認めなければならないことを理解させる。そして，この推論の最初の根拠とする基本的な事柄を公理ということを知らせる。この場合，少くとも公理の性格としての「議論の前提としての受容性」については，おさえておく必要があろう。

次に，さきの推論の根拠の追求の結果得られた，ⓐ～ⓖの事柄は，これ以上簡単な事柄から導くことは極めて困難であることを体験的に悟らせ，これらを公理として選ぶことの必要性を感得させる。また，平面幾何を構成するには，ⓐからⓖまでの事柄の他に，もう一つ線分や角の計量に関する公理を導入すればよい，ということにふれる。またこの際，これら公理として選ばれた命題は，平面における図形の性質を分析し，その根拠を追求することによって得られた図形の基本的な性質を表わしたものであることを強調したい。このことは，公理系によって平面幾何を特徴づけることの理解に連がり，極めて大切なことである。



(Diagram 2)

[2] **公理の設定**　この段階では，演繹的方法について解説し，原理的に公理と無定義用語の必要性を理解させ，[1]で抽出した基本的な図形の性質を検討，整備しながら平面幾何の公理系を設定する。この場合，次のようなことに留意したい。

① 公理系の設定は，一度に一括して設定するのでなく，点と直線，角，移動，合同，平行線などのように，それぞれの項目で検討しながら設定するべきである。公理の設定は，[1]で抽出した根拠としての図形の性質を，体系を構成するための基礎，平面幾何を特徴づけるための法則に転化させるものである。したがって，生徒自らが再び図形の性質を検討し，[1]で抽出した性質を演繹体系の基礎として，平面幾何の特徴づけの法則として整備し，精練していくことが極めて大切である。このような取扱いによってこそ，公理系は生徒にとって天下りではなく，自らの探究の基礎となるのである。このような展開をするためには，一括設定ではなく，項目毎順次検討して設定していくいき方がよい。またこのいき方は，定義の系とも調和がとれ，無理なく展開できると考える。

② 各公理を設定する際には，できるだけ他の曲面や曲線など図形の性質と比較し，設定する公理が直線や平面の特性を抽出しているものであることを確認させることが大切である。このことは，公理として採用することの妥当性や実体の公理化としての平面幾何の公理的構成の意味，などの理解に直接連がる大切な見方である。

③ 計量の公理4　を設定する。これは実数の仮定という論理的難点があるが，それによって，線分の長さや角の大きさ，線分や角の合同を明確にすることができる。現行の数学ⅡBの教科書では，このような計量の公理を表に出していないものが多いが，その中には，証明の中で辺の長さや

角の大きさを無定義のままで実数の性質を背景として用いているものが目立つ。このような意味から，計量に関する公理を明確にし，意識的にこれを根拠として用いることは，高等学校の数学としては適当であると考える。

④ 二辺夾角相等の合同条件を公理6とする。これは，三角形の合同の定義を運動の考えを用いないで，要素（辺・角）の相等によって行なうことに密接に関連する。すなわち，これを公理から除外することによって，証明が煩瑣になることや「形や大きさを変えない運動」などのようなあいまいさをもつ用語を含む公理を導入しなければならないこと，などのデメリットを考慮してのことである。

⑤ 無定義用語は点，直線，平面とする。また，集合を仮定し，図形は点集合とする。

このような考え方に基づき，高等学校における平面幾何の公理系としては，次のようなものを選ぶのが適当であると考える。

公理1 異なる2点を通る直線は1つあって，ただ1つである。

公理2 直線はその上の1点によって2つの部分に分けられる。

公理3 平面は，その上の任意の直線 l によって，2つの部分に分けられる。

その異なる部分に属する2点を結ぶ線分は，直線 l に交わり，同じ部分に属する2点を結ぶ線分は，直線 l と交わらない。

公理4 (1) 1つの線分を単位に定めて，任意の線分を測ることができ，その値は正の実数である。

(2) 1つの角を単位に定めて，任意の角を測ることができ，その値は正の実数である。

公理5 (1) 線分ＡＢと半直線ＯＸがあるとき，ＯＸ上にＯＣ＝ＡＢとなる点Ｃは，1つあって，ただ1つである。

(2) 角∠ＡＢＣと半直線ＯＸがあるとき，直線ＯＸによって分けられた平面の2つの部分のうち，指定された方にあって，∠ＸＯＹ＝∠ＡＢＣとなる半直線ＯＹは，1つあって，ただ1つである。

公理6 2つの三角形 △ＡＢＣ，△A′B′C′において，

ＡＢ＝A′B′，ＡＣ＝A′C′，∠Ａ＝∠A′

ならば △ＡＢＣ≡△A′B′C′ である。

公理7 直線外の1点を通ってその直線に平行な直線は，1つあって，ただ1つである。

3 公理からの演繹

実体の公理化としての平面幾何の公理的構成の主要部分は，むしろ1，2の段階であり，3段階で多くの命題を証明することがこの教材の目的ではない。しかし，中学校で基本性質として図形の論証の基礎とした，合同条件，平行線の性質などの内容までは演繹する必要がある。そして，中学校で学習した平面上の図形の性質は，公理1から公理7までの公理系を根拠として証明されることを知らせ，結局は，平面幾何で取扱う図形の性質を特徴づける根源は，この7つの公理であること，すなわちこの公理系で平面幾何が特徴づけられること，を押さえることは極めて大切なことである。

また，この段階では，2で設定された公理系から厳密に証明することが大切である。この厳密に証明することの意味と無定義用語とは密接な関連がある。われわれは，定義の系の無限の遡行を断ち切るために，点，直線，平面を無定義用語に選び，それを用いて他の用語の定義をしている。また，これらの用語で，実在の点，直線，平面の関係を抽象して公理系の命題を表現している。しかし，演繹において，各命題における点・直線・平面の実在的な意味・内容や参考図にこだわると，

厳密な証明ができず，まちがった証明を与えることがある。そこで，このような実例[42]を示すことによって，命題の証明を厳密にするためには，無定義用語の直観的な意味・内容を一切捨て，点，直線，平面は公理系に示された性質だけをもつと考えるべきことを徹底させることが大切である。このような指導は，「無定義用語は公理系によって内含的に定義される」ことの理解を容易にするものと考える。

④ **まとめ**　この段階では，次の点に留意しながら平面幾何の公理的構成のまとめについての学習をする。

① 演繹体系を構成するには，命題の証明の根拠に関する系の出発点としての公理系と用語の定義に関する系の出発点としての無定義用語が必要であることを確認する。

② 平面幾何の公理系は平面上の図形の性質の根拠の根源を追求することによって得られたこと，またこの公理系によって平面幾何学の諸性質が証明されることをおさえる。つまり，設定した公理系は平面幾何を特徴づける性格のものであることを理解させる。

③ ③段階で，証明を厳密にするために，無定義用語はその直観的意味・内容を捨てて公理系に示された性質だけを満足するものと考えるべきことを強調した。このことは，つまり「無定義用語は公理によって間接的に定義される」ということである。この考え方は，数学の公理的方法における基本的な考え方であることを知らせる。

④ ③の考え方をさらに徹底し，無定義用語や公理系の解釈についての意味を理解させるために，Ⅲ章**4**で述べたデカルトのモデルを可能な範囲で利用することは意義あることと考える。デカルトのモデルは，平面幾何の公理系を座標幾何の概念で解釈することによって得られるものである。②で設定した公理系では，公理6の解釈は困難であるが，他の公理の解釈は高校生として無理なく導くことができる。

このようなモデルの簡単な取扱いは，無定義用語が直観的実在そのものだけを指示するものでなく，公理系をみたすものであれば，抽象的な数の場とか1次方程式をも対象とできることの理解を強化させるであろう。また，この取扱いによって，座標幾何は平面幾何の公理をすべて満足し，したがって平面幾何のすべての結果を含み得る，ということを理解させることができる。すなわち，今まで，無意識に認めていたことがら

「座標幾何学で証明されるすべての命題はユークリッド幾何で正しい」

に対する明確な保証を与えることになろう。このような見方，おさえは数学教育上極めて大切なことであると考える。

2．同値関係の指導

(1) 非カテゴリカルな理論のひな形として同値関係を選ぶことの理由

Ⅴ章**2**でも述べたように，非カテゴリカルな理論の教材は，抽象・演繹・応用の3段階を無理なく含むものでなければならない。さらに，このような教材を取扱うことの教育的見地からすれば，抽象される構造はその背景に多くの既習の素材をもち，抽象や解釈の多価性に対する理解が容易であること，また演繹が長い砂をかむような道程を含まないことが望ましい。柴田氏は，学校数学の中に背景としての素材をもつ抽象概念，群・整域・順序集合・ブール代数・体・線形空間・距離空間・確率について，学校数学として取扱い可能と思われる定理を調べ，高々群論の部分群の位数に

関する定理および整域のＬＣＭ・ＧＣＭの定理が取扱い可能であると指摘している。[43] 群の概念は構造が簡単であり，非カテゴリカルな理論の典型というべきものであるが，比較的長い演繹の道程の結果が上記の定理一つであり，またその応用の理解にはかなりの知識が必要である。整域の理論は背景の素材が少ない。また，ＬＣＭ・ＧＣＭの定理であれば，各素材，整数・多項式で既に行なっているものであり，構造の抽出による効用を理解させる上で難点がある。

このように，非カテゴリカルな理論の教材化は困難な問題を含んでいるが，この中で比較的難点の少ない教材化として同値関係の指導を考えてみた。以下が，この同値関係の指導を導入することの意義・理由についての著者の考え方である。

① 小規模ではあるが，非カテゴリカルな理論を展開する際に必須な３段階のすべてを展開できる。抽象段階では，構造の抽象に際しての素材が既習内容に十分あり，その抽象に無理がない。演繹段階では，簡単な定理が数個で十分ではないが，それだけに学習に無理がない。応用段階では，中学校での既習内容の合同・相似による類別や分数の類別，または剰余類やベクトルなどの類概念を明確にすることができる。さらに，このような類概念の明確な把握は類の演算の考察や数の拡張の本格的な展開を可能にする。

② 同値関係は，数学で最も多く用いられる概念であり，学校数学の既習素材にこの関係をみたす例が多い。また，われわれの社会環境や自然環境の中にもその例が極めて多い。このような類例の多い共通構造を抽出し，それを簡潔な形式で表現し，その特徴を考察することは数学教育上極めて大切なことである。

③ 演繹体系は実に単純で小規模であるが，同値関係の理論をすべて展開できる。

④ 演繹される「類別に関する定理」は数学では基本的なことがらであり，到るところで用いられる。また学校数学においても，同一視の概念，類概念は到るところに顕われる重要な考え方である。しかし，これに対する生徒の理解は十分でない。この生徒の類概念に対する弱さが，高等学校におけるベクトルの学習や大学における数学の学習の大きな障害になっている。これは，生徒のもつ漠然とした類概念は日常の言語生活を通して自然につくられたものであり，それを一度も学校教育で純化することがなされていない，という事情によるものと考えられる。この意味でも，高等学校において同値関係を取扱うことは意義あることと考える。

⑤ 公理的方法の特徴というべき，「労力節約・思考の経済」，「公理による構造の規定」などの意味が端的に理解できる教材である。

以上が同値関係の教材化の意義や利点である。しかし，何といっても，理論が小規模であること，演繹される結果に生徒を興奮させるような意外性がないこと，がこの教材の難点として上げられよう。前者に対しては，「実体の公理化」と「構造の公理化」の二つの型の教材を取扱うという立場から，あまり長い展開のものは適当でなく，むしろこの程度の規模で非カテゴリカルな理論の特徴を生徒に理解させることができれば，という考え方である。また，後者については，上記①，④の教育的意義がそれを補うものと考える。

(2) 指導展開案の概要

1 同値関係の抽象

○ 同値関係の抽象　次のような既習素材の例を取り上げ，これらの関係はいろいろ異なった面もあるが，共通な性質としてどんなものがあるかを考えさす。

(1) 図形の集合Ｓにおける面積が等しいという関係（＝）

(2)　図形の集合Sにおける合同であるという関係（≡）
(3)　図形の集合Sにおける相似であるという関係（∽）
(4)　直線の集合Sにおける向きが同じという関係（//）
(5)　整関数の集合Sにおいて，導関数が同じであるという関係（$\stackrel{d}{=}$）
(6)　人間の集合Sにおいて，年令が等しいという関係（$\stackrel{a}{=}$）

・・・・・・・・・・・・

この考察から，共通な性質として次の三つの性質を抽出する。

(I)　$x \varepsilon S$　ならば，$x \ \Box \ x$.
(II)　$x \ \Box \ y$　ならば，$y \ \Box \ x$.
(III)　$x \ \Box \ y$　かつ　$y \ \Box \ z$　ならば，$x \ \Box \ z$.

大小関係や垂直の関係のような，(I)〜(III)のすべてを同時に満足しない例を考えさせることによって，性質(I)・(II)・(III)は，何かの観点で同じとみる関係に共通にある性質であることを確認する。また，その確認のための他の例による確かめも試みる。

○　同値関係の公理の設定　(I)・(II)・(III)がこのような多くの関係に共通に成り立つ性質であるから，これを基にして推論して得られる結果は，(I)・(II)・(III)を満足する関係に共通に成り立つ。したがって，(I)・(II)・(III)を推論の基礎（公理）として考えていくことは，別々に考えることより思考の経済に連がる，として次の公理を設定する。また，□を新しい記号「〜」で表わす。

同値関係の公理　Sを任意の集合とし，その元を小文字x，y，z，… で表わし，また 〜 はSの元の間のある2項関係とする。この 〜 が公理Ⅰ，Ⅱ，Ⅲを満足するとき，〜をSにおける同値関係であるという。

公理Ⅰ　$x \varepsilon S$ならば，$x \sim x$　である。
公理Ⅱ　$x \sim y$ならば，$y \sim x$　である。
公理Ⅲ　$x \sim y$かつ$y \sim z$ならば，$x \sim z$である。

（定義）公理Ⅰを反射律，公理Ⅱを対称律，公理Ⅲを推移律という。

○　既習内容や社会事象，自然事象の中で，同値関係を満足するものやⅠ・Ⅱ・Ⅲの一部を満足するが同値関係でないものの例を探がす。

② 公理からの演繹

次のように，定理を順次演繹する。この場合，証明は厳密でなければならない。

（定義）　$S(x) = \{y \varepsilon S \mid x \sim y\}$

定理1　$x \varepsilon S$　ならば，$S(x)$ は空集合でない。とくに，xは$S(x)$の元である。

定理2　$x \sim y$　ならば，$S(x)$ と$S(y)$ は同じ集合である。

系　$S(x)$ のどの元によっても$S(x)$ は完全に決定される。

（定義）$S(x)$ を同値類といい，$S(x)$ のどの元も$S(x)$ を代表するという。また，$S(x)$ の任意の元を$S(x)$ の代表元であるともいう。

定理3　$S(x)$ と$S(y)$ が共通元をもつならば，$S(x) = S(y)$ である。

系　$S(x) \neq S(y)$ならば，$S(x) \cap S(x) = \phi$ である。

（定義）　Sの部分集合の族$M = \{A_i \mid i \varepsilon I\}$ が次の条件をみたすとき，MをSの類別という。

(1)　$\phi \notin M$.

(2)　A，B ε **M**，A ≠ B　ならば，A ∩ B ＝ ϕ である。

(3)　S ＝ ∪ {A_i　| i ε I}．

また，各 A_i をこの類別の類という。

定理４　同値類の族 {S(x) | x ε S} はSの類別となる。すなわち，Sにおける一つの同値関係は一つのSの類別を与える。

（定義）　定理４におけるSの類別を，同値関係～　に対応する類別という。

定理５　Sを集合，**M**をSの類別とする。このとき，２項関係　x ～ y　を，２元x，yがともに**M**の同じ類に属する，と定義すれば，関係～はSの同値関係となる。

（注意）このように，同値関係と類別とは密接な関係がある。同値関係～から同値類への類別を作ることと，類別から同値関係～を作ることは互いに逆の対応である。

定理６　Sを集合，～と $\overset{*}{\sim}$ をSにおける二つの同値関係とする。このとき，２項関係 x ≈ y を，

x ～ y　かつ　x $\overset{*}{\sim}$ y

を満足するときと定めれば，関係 x ≈ y はSの同値関係となる。

問　定理６において，２項関係　x ≋ y を，

x ～ y　または　x $\overset{*}{\sim}$ y

と定めれば，関係≋はSの同値関係となるか。

定理７　X，Yを空でない集合とし，f：X→Yを一つの写像とする。関係 ～ をYにおける同値関係とする。このとき，Xにおける２項関係 x ≈ y を，

f (x)～ f (y)

と定めると，関係≈はXにおける同値関係となる。

③　解釈と応用

①　いろいろな解釈　公理Ⅰ・Ⅱ・Ⅲを満足する，既習内容や社会事象に関する具体的な関係で，各定理を解釈する。この場合，各解釈において，それぞれの定理の具体的な意味を考える。例えば，定理７で，Xをあるクラスの生徒の集合，Yを自然数の集合，fを生徒番号の対応とする。そして，関係～を「３で割ったときの余りが等しい」関係とすれば，Xの関係≈はそのクラスを３班に分ける組分けを与えるなど。もちろん各定理の解釈は複数でなければならず，また生徒に考えさせるのがよい。

②　類概念の明確化　定理４の解釈を通して，合同や相似による類別の数学的な意味や剰余類の概念，有理数の概念，ベクトルの概念，原始関数の概念などの既習の類概念を明確にする。とくに，ベクトルの概念の場合は定理６の解釈も必要である。

③　剰余類の演算構造　中学校第２学年で剰余系の構造についての取扱いがなされているが，それはかなり直観的に展開されている。そこで，ここでは同値関係を用いて，剰余類にも自然に演算を導入・定義できることを示し，中学校での剰余系の取扱いの裏づけをする。

④　整数から有理数への拡張　ここでは，整数の演算や大小関係の性質を仮定して，順序対による有理数への拡張を行なう。この展開では，類別による有理数体の構成，演算や大小関係の定義など，いたるところで同値関係の考えが活用される。時間的な問題や生徒の負担などを考慮して，大小関係の検討については省いてもよい。

④　数学の性格と構造

この段階では，同値関係の学習をふり返りながら，数学の性格や役割などについて解説する。同

値関係の公理は，既習内容や身のまわりの事象によくある「ある観点で同一視する」関係に共通ある性質を抽出して得られたものである。いわば，「ある観点で同一視する」関係に共通にある構造（性質）を端的に表現したのが，公理Ⅰ，Ⅱ，Ⅲである。したがって，この公理Ⅰ・Ⅱ・Ⅲから導かれた定理は，「ある観点で同一視する」関係のいずれにも適用され，それぞれ具体的な意味を与えた。このように，多くの関係に共通にある基本的な性質を抽出してこれを公理とし，この公理に基いて一般的に考察する方法は，それぞれ個別に考察する方法より，労力節約・思考の経済に連がるのである。

現代の数学は全くこれと同じ性格をもっている。現代数学は個々の対象を個別に考察・研究するのではなく，多くの対象に共通にある基本的な構造（性質）を抽出し，この基本構造について考察するのである。したがって，そこで得られた結果は，自然事象といわず社会事象といわず，その基本構造をもつ対象に応用されるのである。現代数学が広汎な応用をもたらすに至ったのは，数学が対象そのものでなく，多くの対象に共通にある基本構造に目を向けたからである。

上記のような解説をした後，数学が考察の対象とする基本構造はいろいろあるが，既習内容や身の周りの事象の中に多く見られる構造として，たとえば，群の構造や順序構造があるとして，それらを紹介，解説する。ただし，この取上げ方は，構造の抽象と公理設定およびその構造の例さがし程度にとどめる。そして，このような多くの対象から抽出された「構造の理論」は豊かな応用をもたらすということにふれ，構造に着目することの意義を理解させる。

3．以上が「高等学校における公理的方法の指導」についての著者の構想である。さらに細密な具体案を作成し，その実践指導を試みたい。またこの構想は，日本の数学教育の現状ということにかなり制約されての立案であり，理想的なものでも完全なものでもない。しかし，教育課程の変革は飛躍的なものでなく連続的な変革でなければならないと考える。今後ともこの主題を研究テーマとして，さらに検討・吟味を重ねたい。とくに，非カテゴリカルな理論のよりよい教材の開発に努力したい。

Ⅶ　結　　語

公理的方法は数学の本質とかかわるものであり，現代数学の性格や役割を特徴づけるものである。公理的方法は演繹体系を構成していくときの基本的な考え方であるが，それと同時に，今日の数学の変貌をもたらし，諸科学への広汎な数学の応用を可能にしたのも，この公理的方法のなせる業である。学校数学においても，このような数学における公理的方法の機能を無視することができない。この公理的方法の精神をいかにわかりやすく指導するか，これが今日の数学教育における大きな課題の一つである。そこで，本論文では，数学における公理的方法や公理の性格を考察し，また学校数学の目的とも照らし，学校数学としての「公理的方法」はいかにあるべきかを論述した。

公理的方法に基づく数学の理論は大きく二つの型に分けられる。一つは，対象を分析しより根源的な拠りどころを求め，それに基いて体系を構成していくことを主眼とする。いわば，実体の公理化である。他の一つは，諸対象に共通にある本質的構造を抽象し，その構造について考察する。いわば，構造の公理化である。これらは全く性格の異なるものであり，その何れも学校数学として軽視できない，重要な数学的考え方を含んでいる。そこで，著者はこの二つの型の適当な理論を教材

化して高等学校の数学科で指導すべきことを論述した。実体の公理化としての教材は，中学校の数学科の指導内容やその教材にふさわしい素材の性格などを考慮して，平面幾何の公理的構成が適当であると考える。また，構造の公理化としての教材としては，同値関係の公理を取扱うのが適当であると考え，その教材化を試みた。

学校数学の教材としての正当性には，その教材に関する理論上の合理性のみならず，学習者の受容性に関する指導実践上の保証が必要である。そこで，本稿での提案を具体化し，機会をみて指導実践したいと考えている。また，このような実践を通して，「学校数学としての公理的方法」の指導のあり方をさらに精練していきたい。

注

1) 〔24〕, p. 273.
2) 〔9〕, p. 1288.
3) 〔24〕, p. 274.
4) 〔9〕, p. 413.
5) 〔24〕, p. 281.
6) 〔10〕, pp. 311—328 ; 〔11〕, pp. 95—111.
7) 〔27〕, p. 93.
8) 〔19〕, pp. 49—70.
9) 〔19〕, pp. 86—91.
10) 〔24〕, p. 277.
11) 〔24〕, pp. 277—278.
12) 〔24〕, p. 278.
13) 〔24〕, pp. 279—280.
14) 〔24〕, p. 280.
15) 〔15〕, p. 39.
16) 〔31〕, p. 30.
17) 〔15〕, p. 35.
18) 〔32〕, p. 35.
19) 〔21〕, pp. 51—58.
20) 〔16〕, p. 176.
21) 〔14〕, pp. 259—260.
22) 〔5〕, p. 231.
23) 〔2〕, p. 70.
24) 〔19〕, pp. 86—90.
25) 〔7〕, pp. 63—69.
26) 〔8〕, pp. 262—271 〔26〕, pp. 170—172.
27) 〔12〕, pp. 564—568.
28) 〔8〕, p. 263 ; 〔26〕, p. 170.
29) 〔15〕, pp. 31—48.
30) 〔3〕, p. 190.
31) 〔6〕
32) 〔23〕, p. 145.
33) 〔29〕, p. 1.
34) 〔16〕, pp. 170—178.
35) 〔4〕, p. 224.
36) 本論文 Ⅲ章**5**.
37) 〔24〕, p. 282.
38) 〔5〕, p. 244.
39) 〔28〕.
40) 〔13〕, pp. 9—26.
41) 〔30〕, p. 96.
42) 〔32〕, p. 406.
43) 〔8〕, p. 270 ; 〔26〕, p. 171.

引用・参考文献

〔1〕 秋月康夫編： 改訂高等学校学習指導要領の展開（数学科編），明治図書（1971）.

〔2〕 S.F.Barker： 数学の哲学, 培風館 (1968).
〔3〕 N.Bourbaki： 数学史, 東京図書 (1970).
〔4〕 R.Courant & H.Robbins： 数学とは何か, 岩波書店 (1969).
〔5〕 H.B.Griffiths & A.G.Howson： Mathematics — Society and curracula —, Cambridge Univ. Press (1974).
〔6〕 F.Hausdorff： Grundzüge der Mengenlehr , Leipzig (Veit) (1914).
〔7〕 D.Hilbert： 幾何学基礎論, 清水弘文堂 (1970).
〔8〕 A.G.Howson ed.： Developments in Mathematical Education , Cambridge Univ. Press (1973).
〔9〕 平凡社編： 哲学辞典, 平凡社 (1967).
〔10〕 伊東俊太郎： 純粋数学の起源, 思想 (岩波書店) , No. **513** (1967), 311—328.
〔11〕 伊東・原・村田： 数学史, 筑摩書房 (1975).
〔12〕 彌永・小平： 現代数学概説Ⅰ, 岩波書店 (1966).
〔13〕 J.G.Kemeny & J.L.Snell： 社会科学における数学的モデル, 培風館 (1969).
〔14〕 F.Klein： 高い立場からみた初等数学4, 東京図書 (1961).
〔15〕 F.Le Lionnais 編： 数学思想の流れ, 東京図書 (1974).
〔16〕 前原昭二： 数学とは何か, 総合科学出版 (1974).
〔17〕 文部省編： 新しい数学教育 (高等学校編) , 東洋館出版 (1971).
〔18〕 中島・大野編： 数学と思考, 第一法規 (1974).
〔19〕 中沢貞治： いろいろな幾何, 共立出版 (1967).
〔20〕 NCTM： Insights into modern mathematics , Washington, D.C. (1957).
〔21〕 A.B.パガレロフ： 幾何学の基礎, 内田老鶴圃 (1975).
〔22〕 笹田昭三： 論理と数学教育, 鳥取大学教育学部研究報告 (教育科学) , **9** (1967) , 51—82.
〔23〕 Scientific American 編： 数学とはどんな学問か, 講談社 (1970).
〔24〕 赤攝也： 現代数学の思想と数学教育の現代化, 思想 (岩波書店) , No. **513** (1967), 273—283.
〔25〕 柴垣和三雄： 線形代数に直結した幾何学序説, みすず書房 (1972).
〔26〕 柴田敏男： 学校数学と Axiomatics , 日本数学教育学会誌, **55** (1973), 170—172.
〔27〕 塩見健之祐： 公理・演繹の省察に関する指導の考察, 京都教育大学教育研究所紀要, 第18号 (1972), 90—98.
〔28〕 H.G.Steiner： Examples of exercises in mathematizations on the secondary school level, ESM **1** (1968), 181—199.
〔29〕 竹内外史： 数学基礎論, 共立出版 (1968).
〔30〕 田中不二夫： 公理的構成について理解を深めるための指導, 日本数学教育学会誌, **57** (1975), 93—102.
〔31〕 H.Weyl ： 数学と自然科学の哲学, 岩波書店 (1966).
〔32〕 R.L.Wilder ： 数学基礎論序説, 培風館 (1969).
〔33〕 米山国蔵： 数学の精神・思想・方法, 東海大学出版会 (1968).
〔34〕 高等学校数学ⅡB教科書, 8社 (学研書籍・池田書店・実数出版・啓林館・教育出版・大阪教育図書・三省堂・東京書籍).

The Axiomatic Method and Mathematical Education

Shôzô Sasada

The axiomatic method is essentially concerned with the very nature of mathematics and characterizes the character and function of modern mathematics. This method is the fundamental notion for the construction of a deductive system and at the same time it is this axiomatic method that has caused the transfiguration of mathematics today and made possible the wide application of mathematics to sciences. This function of the axiomatic method in mathematics cannot be ignored in school mathematics. How to treat this method plainly in school mathematics is one of the chief problems in mathematical education. Thus in the present paper were examined the character of the axiom and the axiomatic method in mathematics, and then was considered how the axiomatic method should be treated in school mathematics.

The theory of mathematics based on the axiomatic method can be devided into two main types. One is aiming principally at the construction of a system by analyzing the object and tracing as far back as possible to its origin. This type may be called "axiomatization of a substance." The other consists of the abstraction of the essential structure in common with all the objects and its examination. This type may be calld "axiomatization of a structure." The one is quite different in character from the other, but either of them contains important mathematical thinking which cannot be treated lightly in school mathematics. The present writer is of opinion that some appropriate theories of the two types should be used for the teaching of mathematics in senior high schools. As for the preparation of the teaching materials in senior high schools, careful consideration must be given to the contents and the level of mathematical education in junior high schools. In the present writer's opinion, the axiomatic construction of plane geometry is most appropriate for the teaching materials of axiomatization of a substance, and axioms of equivalence for those of axiomatization of a structure.

Needless to say, the reasonable teaching materials in school mathematics do not depend only on the rationality of the theory as to the teaching materials, but also on its confirmation by practice. Therefore, the propositions offered in the present paper must be put into practice and confirmed. Through the process of putting them into action in schools the treatment of the axiomatic method in school mathematics will be refined.