

論 理 と 数 学 教 育

数学科教育教室 笹 田 昭 三

I 数学教育の現代化と論理指導

(1) 数学教育の現代化

数学教育現代化の根源は、現代数学の飛躍的な発展と科学技術のめざましい進歩にあるといわれている。現代数学の著しい発展によって、数学に依存する分野が、科学技術や自然科学のみならず、行政、産業、社会科学など多くの分野に拡大された。とくに、電子計算機の開発は、各分野における記号的定式化の開拓と相まって、今まで適用不可能であったあらゆる分野に、数学の適用を可能にしている。また、電子計算機の開発、オートメーションの普及で象徴される科学技術の進歩は、このような事態に即応できる多くの人材の育成を要請している。この人材養成の基礎として数学教育の革新が問題にされ、さらに数学の適用範囲の著しい拡大が、学校数学における指導内容の質的再検討の必要性をひき起している。

また、現代数学は、前世紀から今世紀にかけて近世数学の殻から脱皮し、その性格を一新して著しい発展を遂げた。その結果、古典数学に基礎をおく教育数学と現代数学との間に、どうにもならないほどの大きなギャップが生じた。ここにも、数学教育現代化の強い要請がある。

このような背景のもとに、教育の変革が要請されているが、これは単に現代社会からの要求という一面的なものとして考えるべきでない。それは、現代の社会において

- ① 科学を獲得しなければ、自己の存在を検証し得ないという現代の人間の要求
- ② すべての人間を技術革新にのみこまらずにはおかない現代の社会の要求

の二重の要求¹⁾として考えるべきであろう。欧米における数学教育現代化の発想は、上位30%のためのカリキュラムとか、優秀児教育など、②の要請に重点をおいているように思われる。教育は、社会の要請に対応して変革されるのは当然であるが、その際に、①の声なき要請を無視したり、考慮の外におくことは許されない。

数学教育においては、生徒の能力差という大きな障害があり、これにいかに対処するかが数学教育における大きな問題となっている。そして、その対処策として、能力差に応じたクラス編成やカリキュラム編成が考えられている。しかし、たとえ画一的なカリキュラム編成が不可能であっても、コースによって将来が閉ざされたり、著しく不利になるような、袋小路のコース編成、カリキュラム編成は絶対に許されるべきものでない。すべての生徒が将来の社会において自己の存在を確保できるように、教育課程の編成を考えなければならない。すなわち、数学教育の現代化も創造性の開発も、限られた英才について問題にするのではなく、一般のすべての生徒に対して、等しく考えていくべき問題であろう。

(2) 現代人と論理

経済・科学・技術の進歩は、それを支える情報の膨大な累積を生じ、それを適切に処理することが、現代および将来の社会に生きる人々にとって、必要欠くべからざるものになってきている。そして、その情報処理の働きとしての論理と数学、とくに論理の科学としての記号論理学の知識を有効に生かす必要がますます増大している。²⁾

また、社会人の学習においても、学校教育における学習においても、科学技術の発展、学問の進歩に伴う情報の累積、学習内容の増大は、実質的にあまり向上のない人間の学習能力、記憶能力を圧倒している。この現象は今後ますます顕著となるであろう。このような事態における学習は、一般化による統一的・統合的学習や体系化による組織的学習によって、その学習の効率化を図らなければならない。学習の効率化は、この「一般化による統合的学習」、「体系化による組織的学習」によるべきことを、N. Bourbaki は数学の現代的再建である「数学原論」を通して例証している³⁾、また、J. S. Bruner は「教育の過程」でそれを示唆している⁴⁾。この一般化による統合的学習には、一般化できる能力、すなわち抽象化の考え、帰納・類比的考えなど発見的論理が重要な役割を果たす。また、体系化による組織的学習には、体系化するための演繹的推論能力が要求されるであろう。このように、学習の効率化を図る上でも、論理は重要な役割を果たす。

さらに、電子計算機の進歩と計算数学やサイバネティクスの発達によって、人間の頭脳の労働の領域で、機械がことごとく人間にとって代り、人間の能力を凌いでいる。とりわけ、絶大な記憶能力、高速計算能力、人間の理性では理解しがたい自然や社会現象の解析能力においては、とても人間が電子計算機に太刀打ちできない。このような現状から将来を想像すると、最も素朴な機械的な作業を人間がやり、頭脳的な作業を機械がやるという皮肉な図が想定される。ここに、将来人間が機械に隷属することなく、機械に対して優位に立ち、人間らしく生きるための条件が問題となる。人間が機械に対して優位に立てる頭脳の活動は、その過程が一定の算法で定式化できない創造活動であるといわれている⁵⁾。それゆえ、人間性の確保のためにも、今後の教育では、創造性の開発がますます重要な課題となるであろう。したがって、数学教育の現代化においても、創造性と密接な関連をもつ発見的論理の指導が重視されなければならない。

(3) 論理指導の必要性について

各国の数学教育現代化の動きの中で、論理指導の重要性が叫ばれているが、それは、(2)で述べた現代における論理の意義を反映していると考えられる。我国においても、今年4月、中学校の新学習指導要領が発表され、その中で、新しい領域「集合と論理」を設けて、論理指導を意識的に行なう構えを見せている。おそらく、現在着手されている高等学校の学習指導要領改訂案においては、記号論理の初歩が導入されるであろう。

数学で論理を重んずるのは当然のことで、現行学習指導要領においても、中学校では図形教材を中心として演繹的論証、帰納・類比的思考を強調しており、また高等学校においては、とくに「数学と論証」という項目を設けて、体系的に論理を進める方法を体得させようとしている。

さて、この教育課程のもとでの成果はどのようなものであったか。著者の中学生、高校生を対象とする形式的推論力の調査⁶⁾によれば、

- ① 定理の逆・裏を推論の根拠にしたり、また常識的判断に支配されて誤まった推論を発見できない者が多い。
- ② 形式的推論力は学年が進むにつれてそれほど伸びていない。また、論証指導による成果がみられるほどには、顕著な上昇を示さない。
- ③ また、中学生でも、集合など論理に関係する教材を指導すると、そのような指導を受けなかった高校生より論理性が確かになる。

が指摘された。また、仲田氏の調査⁷⁾においても①と同様のことが、中島氏の調査⁸⁾では②と同様のことが指摘されている。

従来の数学教育においては、論理的思考を養う教材として、ギリシヤ以来の伝統もあり、専ら幾何教材が主役を果すものと考えられてきた。その結果、幾何教材は論理的思力の練成と図形の性質の探究という2重の目標を負われ、この過重負担が中学校における論証指導を困難なものとし、結局論理的思考の練成という目標が十分達成できず、上記の調査が示すような結果になったと考えられる。遠山氏も「論理的な思考を養うのに幾何教育はあまり成巧していない。幾何教育の中には発見の論理を養う素材が多く見られるが、幾何教材が検証の論理を養うのに適しているとは思われない。むしろ、幾何教育は図形もしくは空間の性質を研究するという目標を主とし、論理的思考は論理的思考として、別途意識的に教育するべきである。」⁹⁾と述べている。

また、高等学校における「数学と論証」においては、学習指導要領における指示が、単に、大きな項目とわずかな用語をあげただけで、どんな教材で、どんな方法で実践し、どこまで指導するかが明示されていない。このことが、実践段階において、種々の教科書を生んで統一性を欠き、現場の教育に混乱をきたしている。結局、教育現場においては、「数学と論証」は継子扱いにされ、その指導は形骸化している。

さきに述べたように、現行指導要領においても、論理の重要性を認め、その育成・練成を目標としながら、その成果が得られなかったのはなぜか。それは、上記のように、論理的思考の育成という目標と他の目標とを抱合わしたこと、というよりむしろ、他の目標達成の途上に用具的に日常的な論理的思考を持ち込んだ指導に終わったということであろう。さらに、高等学校における「数学と論証」では、精神だけを掲げ、内容を与えなかったことが、初期の目標が達成できなかった大きな原因と考えられる。

(2)で述べたように、現代人にとって論理は不可欠なものになっている。今後の数学教育においては、ますます論理指導が重要視されるであろう。そこでの論理指導は、従来のような目標の抱合わせや精神主義でなく、論理を正面から取り上げ、各発達段階に応じた論理指導を、意識的に、組織的に行なう必要があると考える。

II 発見の論理と論証の論理*

一つの立言がなされたとき、それに対して二つの問いが生ずる。

- ① この立言がどのようにして思いつかれたか？
 ② この立言を真として受け入れる根拠は何か？

第一の問いは発見についての問いであり、第二の問いは根拠づけについての問いである。この第一の問いに対して説明される推論方法、思考過程、心理的働きが、「発見の論理」に関することがらであり、第二の問いに対して説明される推論方法、思考過程が論証の論理すなわち「演繹的論理」である。論理あるいは論理的という言葉は広い意味と狭い意味に用いられる。論理の狭い意味は、上記②の問いに対するような演繹的論理を指すもので、その典型としていわゆる三段論法があげられる。記号論理はこの演繹的論理を対象とする。また、広い意味での論理は、第一の問いに対する発見の論理をも含め、人間が有効に推論を進める場合にしがう方式一般を包括している。

演繹的論理による推論は絶対厳密で、争う余地がなく、最終的なものである。一方、発見の論理における推論は、蓋然的で、争う余地があり、暫定的なものである。¹⁰⁾ しかし、発見的論理は、その蓋然性の代りに、演繹的論理では得られない新しい判断や推測を導入する、極めて生産的な面をもっている。この発見的論理の典型として、帰納・類比的論理があるが、これらは数学教育においても重要視すべき論理である。

一般的に、演繹は一般から特殊を導く推論であり、帰納は特殊から一般を推測する論理であり、類比は類似性に注目して特殊から特殊を類推する論理であるといわれているが、これらをもう少し質的に検討し、比較してみよう。

- (a) 演繹 すべての哺乳動物は心臓をもつ。
すべての馬は哺乳動物である。
 ∴ すべての馬は心臓をもつ。
- (b) 帰納 いままで観察されたすべての馬は心臓をもっていた。
 ∴ すべての馬は心臓をもつ。
- (c) 類比 すべての馬は心臓をもつ。
ろばと馬は類似している。
 ∴ すべてのろばは心臓をもつ。

上記の例は、演繹、帰納、類比における、それぞれ正しい、素朴な推論の例である。この例からもわかるように、演繹、帰納、類比を弁別する基本的な特徴がある。

- (a) 演繹
 (I) すべての前提が真であれば、結論は必らず真でなければならない。
 (II) 結論の中にある情報あるいは事実の内容は、すべて前提の中に潜在的に含まれている。
 (b) 帰納

*) W. C. Salmon, 「論理学」, 培風館 (1967) を参考にした。

- (I) すべての前提が真であれば、結論はおそらく真であろう。(しかし、必然的に真であるとは
いえない。)
- (II) 結論は、前提には暗々裡にも存在しない新しい情報、事実的内容をも含む。
- (c) 類比
- (I) すべての前提が真であれば、結論はおそらく真であろう。(しかし、必然的に真であるとは
いえない。)
- (II) 結論は、前提には暗々裡にも存在しない新しい情報、事実的内容を含む。

特徴 (I) は自明であるから、ここでは特徴 (II) について述べる。(a)の演繹の結論は、すべての馬が心臓をもつことを主張しているが、これは、実質的には、前提の中で既に述べられていることを主張しているにすぎない。第一前提では、すべての哺乳動物が心臓をもっていることを述べ、第二の前提において、その哺乳動物の中にすべての馬が含まれていることを述べている。すなわち、前提の中に既に与えられている情報をすこし明確に述べ、与えられた情報を再定式化したにすぎない。(b)の帰納的推論においては、その前提の情報は、いままで観察された馬だけを対象とし、結論の情報は未だ観察されていない馬をも対象としている。すなわち、その結論は、前提で与えられていない新しい情報も含んでいる。また、(c)の類比的推論においては、前提には全く含まれていない新しい情報「すべてのろばは心臓をもつ」を導いている。

演繹的推論は、その推論方法が論理的に正しければ、前提は結論を完全に裏づけるが、前提の内容を明確にするだけで、実質的に新しい情報を与えない。一方、帰納、類比などの発見的推論は、真実性に度合が存在し、その度合は前提が結論に与える裏づけの大きさ、すなわち帰納の妥当性・関係の類似性などに依存する。しかし、発見的推論による結論は、前提に含まれない新しい情報、事実内容を与える。すなわち、演繹的論理は、前提の内容の拡大を犠牲として必然性を確保し、一方、発見的論理は、必然性を犠牲にして前提の内容の拡大を図っている、といえる。

このように、演繹的論理と発見的論理は別途の働きをもつ。演繹的論理は前提の内容を明確にするために使用され、帰納や類比などの発見的論理は、知識を拡大するために使用される。

たとえば、数学における論証は演繹的である。定理は公理を基礎として演繹的に証明される。定理の内容は、既に公理や定義の中で暗々裡に与えられているが、この内容は公理の中では完全に明瞭なものになっていない。演繹的論理は、定理の証明という形で、このような公理の中に埋蔵されている内容を明るみに出すものである。

一方、帰納や類比的論理は、与えられた情報や前提にない新しい内容をもつ結論を引き出すもので、それは実に創造的、生産的である。自然科学者の法則発見、数学者の定理や証明法の発見などは、この論理による場合が多い。しかし、帰納や類比的論理で得られる結論の真実性は蓋然的であり、その真実性の保証は演繹的論理にまたなければならぬ。

III 帰納的論理

(1) 帰納的推論の特質

帰納は観察から始まる。実験、実測、単純数え上げ、などを通して適切な観察資料を集め、それ

らを比較、考察して、そこにある断片的な規則性に注意し、そして散り散りになった部分から一見まとまった全体を構築する。これが帰納的推論の過程である。

この帰納的推論において最も重要なことは、かたよらない観察と規則性の抽出である。かたよった観察や過小規模の観察は、全体のもつ規則性を十分反映しない。また、規則性の抽出においては、何を捨て、何を抽出するかが問題となる。洞察されるものは、個々の事実でなく、それらに共通する形式であって、徒らに個々の事実に着目してはいけぬ。

一般に、帰納的推論においては、有限の観察から、無限の対象についての一般的性質を推測する。すなわち、観察された標本の集合は、考察対象の集合に部分集合として内含される。概念における外延と内包の関係と同様に、観察標本の集合は考察対象の全体の集合より多くの性質（共通性質）を含んでいる。

A：観察標本の集合 B：考察対象の集合

A \subset B

Aの性質 \supset Bの性質

このように、観察された標本の集合は、考察の対象のすべてがもつ一般的性質を埋蔵しているが、その他に、標本自身もつ特殊な雑多の性質も満足する。したがって、規則性の抽出は、標本がもつ非本質的な特殊な性質を捨て、共通の性質の中で本質的なものを抽出しなければならない。そのために、観察データを表示するとか、あるいはグラフによって図表示し、観察標本の集合に潜在している一般的性質の顕在化を図るのである。

帰納的推論によって得られたものは何か。それは証明ではない、証明の痕跡でさえない、全くの一つの推測である。¹¹⁾ すなわち、観察の範囲内での事実の記述と、この記述がその範囲外にも適合しているだろうという一つの推測にすぎない。この推測された一般命題は、新たな特別の場合によって確かめられるごとに信頼性を増すが、追加の検証は単にその推測を強化するだけで、証明にはならない。したがって、帰納によって得られた諸性質は、かなり有力な根拠をもつものと考えられるが、そのまま真として受け入れることは許されない。

しかし、II で述べたように、帰納的推論は、結論の真実性を犠牲にして、前提の内容の拡大を図っている、生産的、創造的推論である。数学の歴史においても、アルキメデスの実験による図形の性質の発見、¹²⁾ P.Fermat の整数論における業績、など多くの定理や証明方法が帰納的推論によって発見されている。とくに、数論における多くの数の性質が観察によって発見され、その真実性が厳格な証明によって確認されている。また、観察によって得られた数の性質の中には、未だ未証明のものさえ多くある。¹³⁾ このように、帰納的推論によって新しい数学の性質が導入され、それから証明への努力がなされるのである。

(2) 帰納的推論の例

中等教育で取り上げられ得るような帰納的推論の例を挙げる。

<例1> n 角形の対角線の数はどんな式で表わされるか。¹⁴⁾

三角形、四辺形、五角形、……の対角線の個数を調べ、それを表にすると、次頁のような〔表1〕が得られる。

(表1)

多角形の辺数 (n)	3	4	5	6	7	8
対角線の数 (m)	0	2	5	9	14	20

この表では、一般的な規則を抽出することは困難であるから、これをグラフに表示してみる。このグラフは、右図のような曲線上の点列を描き、 m は n の 2 次関数らしいと予想できる。そこで、

$$m = an^2 + bn + c$$

とおき、 a, b, c を定める。 $n=3, 4, 5$ のとき、それぞれ $m=0, 2, 5$ となるから

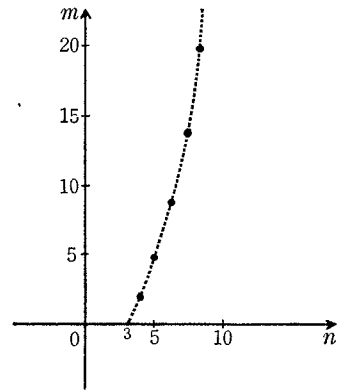
$$9a + 3b + c = 0$$

$$16a + 4b + c = 2$$

$$25a + 5b + c = 5$$

この連立方程式を解いて

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = 0$$



$$\therefore m = \frac{1}{2} n^2 - \frac{3}{2} n = \frac{n(n-3)}{2} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$n=6, 7, 8$ に対しても、この予想①が適合するかどうかを検討する。

$$n = 6 \text{ のとき} \quad m = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

$$n = 7 \text{ のとき} \quad m = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$$

$$n = 8 \text{ のとき} \quad m = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$$

となって、上記の表を満足する。さらに、 $n = 9, 10, \dots\dots$ の場合などの追加の検証によって、この予想は増々信頼性を増す。しかし、これを真のものと受け入れるためには、演繹法によって証明されなければならない。

<例2> 凸多面体のすべての面の内角の総和 $\Sigma\alpha$ を表わす一般式を求めよ。¹⁵⁾

手近な多面体について、その内角の総和 $\Sigma\alpha$ を計算して表示すると

(表2)

多面体	立方体	四面体	八面体	五角柱	六角柱
$\Sigma\alpha$	12π	4π	8π	16π	20π

この表だけでは、われわれの注意を引くものは何もなく、一般的性質を抽出することは困難であ

る。さて、凸多面体であるから、同一頂点に集まる内角の和は 2π より小さい。したがって、多面体の頂点の個数を V とすれば、

$$\sum \alpha < 2\pi V$$

であることに気づく。この関係を、上記の資料で確認するために、次のような表を作る。

(表3)

多 面 体	$\sum \alpha$	V	$2V\pi$	$2V\pi - \sum \alpha$
立 方 体	12π	8	16π	4π
四 面 体	4π	4	8π	4π
八 面 体	8π	6	12π	4π
五 角 柱	16π	10	20π	4π
六 角 柱	20π	12	24π	4π

確かに、 $2V\pi$ は $\sum \alpha$ より大きく、かつその差が一定 4π である。そこで、われわれは

$$2V\pi - \sum \alpha = 4\pi \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

なる推測に到達する。さらに、次のような追加の検証によって、 $\textcircled{2}$ の推測は信頼性を増す。しかし、これは $\textcircled{2}$ の証明にならない。

なお、 $\textcircled{2}$ はオイラーの公式 $V - E + F = 2$ を基にして演繹的に証明できる。

(表4)

多 面 体	$\sum \alpha$	V	$2V\pi$	$2V\pi - \sum \alpha$
十 二 面 体	36π	20	40π	4π
二 十 面 体	20π	12	24π	4π
n 角 柱	$(4n-4)\pi$	$2n$	$4n\pi$	4π
n 角 錐	$(2n-2)\pi$	$n+1$	$(2n+2)\pi$	4π

<例1> の場合は、観察資料をグラフ表示することによって、潜在している一般的性質を図形的にとらえている。また、<例2>の場合は、観察資料を数表に整理することによって、潜在している一般性質を数量的に抽出している。

(3) 構造的な考えと帰納

最近、算数・数学教育において、構造的考え方・見方ということが重要視されている。構造的考え方を重視する背景をなすものは、学習内容の増大の傾向の中でいかにして学習の効率化を図るかということであり、それは算数・数学だけでなく、教科指導全体に通ずることである。

現代数学における構造は次のように定義されている。① 集合Aが与えられて、② 集合Aの元の間にある関係が定義され、③ この関係が満足すべき条件が規定されているとき、集合Aに構造入っているという。この与えられている関係の種類によって、数学の構造は代数的構造、順序構

造，位相構造に大別される。

この構造の定義は，日常よく用いられるラジオの構造や家の構造，社会構造などの構造の意味にも適合し，実に包括的な定義である。たとえば，ラジオの構造について言えば，①の集合Aに相当するのはラジオの部分品の集まりであり，②の関係は電線で連結されているかどうかということであり，③の条件の規定は配線図と考えられる。このように，数学の構造は，ラジオの構造，家の構造，社会構造などに共通にある構造の本質的性質を抽象し，これを数学的に定式化したものと考えることができる。

数学において，構造に着目する重要な意義の一つは，種々の集合上の理論を考察する場合，構造の上から同じとみられるものは統合して統一的に考察できるということである。また，構造の入っている二つの集合A，Bにおいて，AとBの間に一对一の対応 f があり，この対応 f によって，Aにおける関係がBにおける関係に対応するとき，集合A，Bは同型であるといつて，数学ではこれを同じ構造をもつものとして同一視する。したがって，数学においては，複雑な集合Aを考察しようとする場合，考察の観点から見て構造が同じとみられる単純な集合Bを導入し，集合Aを考察する代りに単純な集合Bを考察し，その結果を集合Aに適用する。これも構造に着目する重要なねらいである。

数学教育においても，このような構造的な考え方がきわめて重要である。たとえば，整数の記数法，小数の記数法は十進数として同じ構造をもつ，したがって，その記数法のしくみや計算方法は統一的に理解できる。さらに，時間の表わし方は60進法であるが，一定の数(60)毎に繰り上がるという観点で10進法と同じ構造をもつ。したがって，時間の表し方やその計算を10進法や一般の n 進法と統一的に学習・理解することができる。また，整数の集合における加法，有理数の集合(0をのぞく)における乗法，剰余類における加法，対称図形の回転などを考察し，そこに共通にある構造として群の構造を抽出する。このような指導は，個々の知識を分析的にばらばらに与えるのではなく，統一的に相互に関連をもった知識として生徒に与える，また，個別的・末梢的な知識より一般的・原理的な知識を重視している。したがって，その理解も容易であり，学習の効率化，学習効果の転移も十分期待できる。J. S. Brunerも「教育の過程」において，各教科における構造の重要性を説き，各教科における一般概念や原理的なものの指導の必要性を強調しているが，¹⁶⁾ これも数学における構造的考え方に相通するものがある。また，この構造的考えは，問題解決においても，与問題を単純なモデルに帰着さす思考を促す。

さて，構造的な考えと帰納的論理は密接な関係がある。帰納において洞察されるべきものは，個々の事実でなく，観察事例に共通する形式である。さきの群の例においても，整数の集合[加法]，有理数(0でない)の集合[乗法]，剰余類の集合[加法]の構造などから，共通の形式として，群の構造を抽出してそれを一般化しているが，これはまさに帰納の働きである。また，整数の記数法，小数の記数法，時間の表わし方などから， n 進法概念まで高かめるのも，帰納的論理の一つの働きである。さらに，一般的概念や原理を確立するためには，抽象能力，帰納的推理力が重要な役割を果たす。このように，最近重要視されている構造的見方・考え方の指導に当たっても，帰納的論理の果す役割は大きい。

(4) 拡張の考えと帰納*

数学では、理論の発展を図るために、その理論の本質的な形式を保存して、その適用する範囲を拡大するという方法がよく採用される。その際、形式自体もより包括的なものになる場合がある。これを一般化または拡張という。

たとえば、座標平面での距離はピタゴラスの定理を背景として

$P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$ のとき、

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

と定式化され、空間での距離も同様の形式

$P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$ のとき、

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

で表わされる。さらに、これらの形式を保存して、 n 次元ユークリッド空間の距離を

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ のとき、

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

と定め、距離の概念を n 次元空間まで一般化する。このとき、③の形式は、①、②をそれぞれ $n=2$, $n=3$ の特別な場合として包括している。しかし、鉄道や道路などで標示している 2 地点間の距離は、線路や道路に沿って計測された道程であって、③の形式では表現できない。また、球面上における距離も③の形式では表現できない。これらの距離も包括する新しい距離の形式を規定するには、③の形式よりもより本質的な距離の特質を抽出する必要がある。このようにして抽出されたのが、一般の距離空間における距離で、空間内の任意の点 P, Q, R に対して、

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad d(P, Q) \geq 0; d(P, Q) = 0 \iff P=Q \\ \text{(ii)} \quad d(P, Q) = d(Q, P) \\ \text{(iii)} \quad d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R) \end{array} \right\} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

を満足する d を距離 (関数) と考えるのである。①, ②, ③は④を満足し、④の特別な場合として④に包括される。

これが距離の拡張である。このように、拡張の考えで重要なことは、集合 A 上の理論において非本質的な形式を捨て、本質的・中核的な形式を保存あるいは抽出して、その適用範囲を A を内包する集合 B に拡大することである。この考え方は、(1) で述べた帰納の本質と全く類似するものであり、帰納と拡張の考えは密接な関連をもつ。また、帰納的推理は、いくつかの特殊な事例から、それらに共通する一般法則を抽出する働きであるから、一般化の考えとみることがができる。

一般化、拡張の考えは、理論の適用範囲を広げ、新しい範囲まで理論を及ぼすなど、実に生産的・創造的思考である。数学教育においても、演算の意味の拡張、10進法の一般化としての n 進法、数の拡張、三角関数における角の拡張、指数の拡張、あるいは概念の一般化、など一般化・拡張の考えの指導場面が多い。それゆえ、その指導を支える抽象化の考え、帰納的推理の役割も極めて大きい。

* この項は、川口・中島「数学的な考え方と新しい算数」(東洋館)を参考にした。

IV 類比的論理

(1) 類比的推論の特質

類比による推論は、考察対象A、Bの類似性に注目し、Aの上の性質・理論をBの上に転移させることを図る推論である。この類比的推論で最も重要なことは、類似性の抽出と転移を図る性質・理論がこの類似性と密接な関連があるかということである。

類比における類似性の抽出は、二つの考察対象が単に似ているという視覚的・感性的段階にとどまってはいけない。推測結果の信頼性を高めるためには、これをさらに一段と進め、同一の形式・概念として同一視できる状態で、推論しなければならない。G. Polya は、著「帰納と類比」の中で、類比と一般の相似の本質的相異は、類似性を概念的に同一視できる関係でとらえているか否かにある、としている。¹⁷⁾

たとえば、平面上の三角形は空間内の四面体と類比である。平面上では、2直線は有限な図形を囲むことができる。空間内では、3平面は図形を囲むことができないが、4平面は四面体を囲むことができる。三角形と四面体とがどちらも囲む要素の最小数によって囲まれているという点に関する限り、三角形の平面に対する関係は四面体の空間に対する関係と全く同じとみることができる。したがって、これらは類比である。¹⁸⁾

また、転移を図る性質・理論がこの類似性と本質的な関連をもつか否かが、次に重要な問題である。考察対象A、Bの類似性を、AもBも共通の形式(概念・関係・性質) α をもつととらえたとする。このとき、Aの性質Pが共通形式 α と密接な関連をもつ場合は、「Bも性質Pをもつ」という推測は信頼度が高い。しかし、Aの性質Pが共通形式 α とあまり関連をもたない場合は、その推測の信頼度は低い。

たとえば、「すべての牛は胎生である。牛と馬は類比的動物である(哺乳類として)。」という情報から、「すべての馬は胎生である。」という推測をしたとする。この場合、「胎生である」という性質は哺乳類の本質的な性質であるから、この推測の信頼度は高い。しかし、「すべての牛は角をもつ。牛は馬と類比的である(哺乳類として)。」という情報から、「すべての馬は角をもつ。」と推測した場合は、「角をもつ」という性質は哺乳類の本質的な性質でないから、この推測の信頼度は低い。

このように、類比的推論で重要なことは、第一に、考察対象の類似性を意識し、この類似性の本質を抽出して二つの対象を同一の形式を満足するものとして把握する。第二に、転移を図ろうとする性質が、この共通形式と密接な関連があるか否かを見分けることである。

類比的推論で得られた結果は、帰納的推論の場合と同様に、証明の痕跡すらない全くの推測である。類似な対象A、Bの考察において、Aにおける性質Pと類似な性質Qが対象Bで成立するであろうという一つの推測にすぎない。しかし、IIでも述べたように、類比的推論は、その推論の必然性を犠牲にして、新しい知識や内容の拡大を図る、生産的・創造的な推論である。数学史の上でも、アルキメデスの球の表面積に関する定理の発見¹⁹⁾、L. Eulerの無限級数(平方の逆数の和)の和の発見²⁰⁾など類比的推論による成果が多い。

(2) 類比的推論の例

数学の学習においても、類比的思考の機会が極めて多い。最も簡単な事例は、明白に類似した問

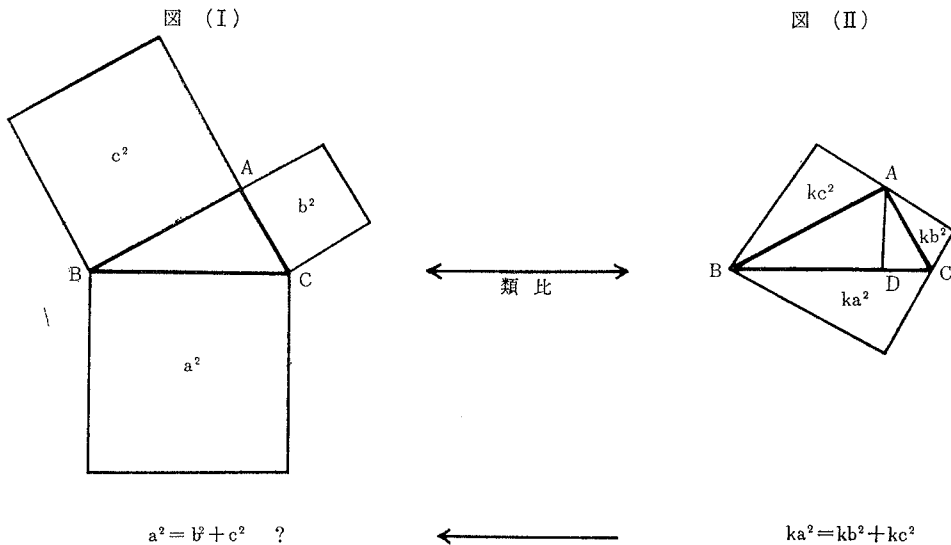
題を殆どまねる場合である。 x^2+ax+b の型の因数分解を知って、 $x^2+axy+by^2$ の型の因数分解を行なうときの思考、あるいは範例を学習した後の練習題を解く思考などはこの事例である。このような場合は、僅かな特殊性を捨象することによって、共通の形式に到達できる。また、もっと複雑な事例では、考察対象とそれと相似な対象から、いかにして共通の形式を抽出するかが問題であり、あまり明確でない類比は実質的解決を与えない。次に、類比の二、三の例についてのべる。

<例1> ピタゴラスの定理の証明*

斜辺の長さが a で、他の 2 辺の長さが b, c である直角三角形 ABC を考える。このとき $a^2=b^2+c^2$ を示したい。この式は、直角三角形 ABC の 3 辺の上に正方形を作ること暗示する(図 I)。図 I は、直角三角形 ABC の 3 辺の上に相似な図形(正方形)を作ったものとみることができる。そこで、図 II として、図 I と類比的な図形でより簡単な図形、すなわち、 $\triangle ABC$ の 3 辺の上に相似な直角三角形を作ってみる。図 I、図 II は、 $\triangle ABC$ の 3 辺の上に相似な図形が作図されているという点で全く同一の性質をもち、図 I、II は類比である。図 II の三つの相似な直角三角形の相似比は $a:b:c$ であるから、その面積はそれぞれ ka^2, kb^2, kc^2 で表わされる。したがって、 $a^2=b^2+c^2$ と類比的な関係は

$$ka^2 = kb^2 + kc^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と表わされる。さて、図 II において、 $\textcircled{1}$ の関係が成立すれば、図 I において $a^2=b^2+c^2$ が成立するだろうという推測が立てられる(実際は、 $\textcircled{1}$ の両辺を k で割れば、 $a^2=b^2+c^2$ が導かれる!!)。そこで、 $\textcircled{1}$ が真であることを確立するために、相似な直角三角形として、それぞれ $\triangle ABC, \triangle DAC, \triangle DBA$ と合同な直角三角形を与える。



*) G. Polya 「帰納と類比」(丸善), 16—18を参考にする。

このとき、図Ⅱにおける性質 $\triangle ABC = \triangle DAC + \triangle DBA$ から、①の真なることが示され、したがって、 $a^2 = b^2 + c^2$ が証明される。

<例2> アルキメデスの類比による定理の発見

アルキメデスは次のように述べている。

「球はその球の大円を底とし、その半径に等しい高さを有する円錐の4倍であるという定理から、私は、任意の球の表面はその球の大円の4倍であるということを考えついた。なぜなら、任意の円はその円周に等しい辺とその半径に等しい高さを有する三角形に等しいという事実から判断して、私は、同様に、任意の球はその球の大円に等しい底とその半径に等しい高さを有する円錐に等しいと解したからである。」²²⁾

すなわち、アルキメデスは類比的推論によって、定理「球の表面積は大円の4倍に等しい」を発見している。この類比をいまま少し考察してみる。

円の面積	=	1×三角形(底辺の長さ:円周, 高さ:半径)の面積	……………	①
球の体積	=	4×円錐(底:大円, 高さ:半径)の体積	……………	②
円周	=	1×円周	……………	③
球の表面積	=	4×?	……………	④

アルキメデスは、平面図形である円と立体図形である球の類比に注目し、既知の定理②の類比として、円の面積を①のように円周を底辺とし、半径を高さとする三角形の面積としてとらえる。円に対する球と同様に、三角形に対する錐体は類比である。また、この類比の関係において、円周に対する類比的な図形は球の表面であるから、①、②の関係を考慮して、③、④式を得る。ここで、③の円周に対する④の?は、①、②の関係から大円の面積であろうと推測される。かくして、アルキメデスは、球の表面積に関する命題を発見し、これを演繹的に証明している。

<例2> は、平面図形と立体図形との類比であるが、幾何学においては、この次元の異なる図形相互の間に多くの類比の関係が存在する。平面図形と立体図形の類比として、正方形と立方体、長方形と直方体、平行四辺形と平行六面体、三角形と四面体、三角形と錐体、円と球、平行線と平行平面などの多くの類比が考えられる。そして、これらの図形の性質においても類比の関係のものが多く、複雑な立体図形の考察も、それと類比的な平面図形の考察によって容易となる。また、一般の高次元空間における考察も、2次元、3次元空間の類比として考える場合が多い。

(3) 類比と構造的な考え、一般化の考え

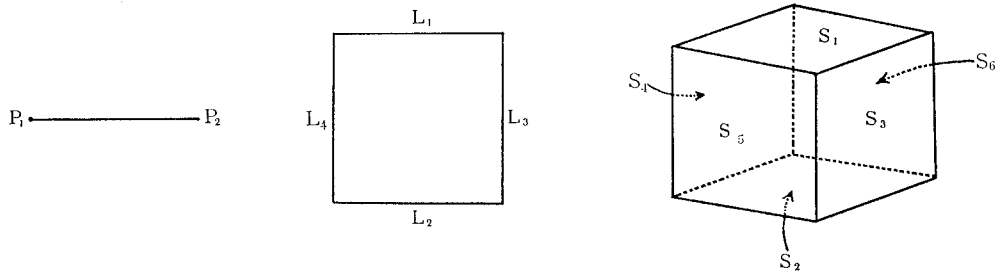
数学教育において、構造的な考えを重視することの意義は、Ⅲで述べた。この構造的な考えと類比的論理は密接な関連がある。類比的推論は、二つの対象A、Bの類似性に着目して、A上の理論・性質をB上に反映さす推論である。この場合、A、Bの類似性を共通の形式 α (概念・法則・性質)としてとらえることが、類比の特色である。したがって、類比はA、Bが共通の形式 α を満足するという観点で、AとBは同じ構造をもつとみなしている、といえる。

たとえば、整数の集合における加法、有理数の集合(0をのぞく)における乗法を考えると、両者は同一の法則〔閉じている、交換的、結合的、逆演算を許す〕によって支配されている。すなわち、両者は類比である。また、この二つの集合は、上記の法則で規定される同じ構造をもつ。

このような考察対象の構造に関しての類比は、10進法とn進法の類比、数の演算と集合算の類比、複素数とベクトルの類比など、数学教育の場でも多い。また、数学における同型、準同型の考

えは完全な形の類比である。さらに、構造的な考えによる統一的考察や知識の統合化は、考察対象 A, B, C, \dots の類似性に着目し、これらが同一の構造・形式をもつものとして、 A, B, C, \dots を統一的に見る。これは、二つ以上の対象についての類比である。

また、一般化の考えと類比的論理は密接な関連をもつ。たとえば、線分、正方形、立方体について、その次元と境界について考察する。線分は 1 次元の図形で、2 つの 0 次元の図形（点）を境



界としてもち；正方形は 2 次元の図形で 4 つの 1 次元の図形（線分）を境界としている。また、立方体は 3 次元の図形で、6 つの 2 次元の図形（正方形）を境界としている。これらの幾何図形は、自分自身より 1 次元低い図形を境界としている点で、類比である。ここで、われわれは、類比による共通形式を保存して、一般化を図る。すなわち、 n 次元の幾何図形は $(n-1)$ 次元の幾何図形を境界としてもつ。

このように、一般化の思考は、類比ないくつかの対象を考察し、類比的思考によってそれらの共通形式を抽出し、さらに、帰納的思考によって、その形式の適用拡大を図るのである。

上記のように、数学教育で重要視されている、構造的考え、一般化の考えにおいても、類比的論理が重要な役割を演ずる。

V 数学における演繹的方法

無定義用語と公理 どのような学問の領域においても、まず第一に、その中で使用される用語の意味を明確にしなければならない。しかし、一つの体系内で用いる用語をすべて定義しようとすることは不可能である。一つ用語を定義するには他のいくつかの用語が必要である。さらに、これらの用語を定義するには新しい他の用語が必要である。この追求は際限がなく、また辞書などにみられる循環的定義に陥いる。そこで、演繹的体系においては、この循環論法ないしは無限の遂行となる因果を断ち切るために、体系内の用語を二つのグループ、つまりその体系の中の他の用語によって定義されるものと、定義されないもの（無定義用語という）とに分ける。演繹的体系における出発点は、この無定義用語の選択であるが、この場合、選択された無定義用語群は体系の中のすべての用語を定義できるものでなければならない。また、無定義用語には何ら意味が与えられず、その語がもつ慣用的な意味を一切捨て去る。このことについては、「公理的方法」でのべる。

無定義用語が選択されると、体系の中用語は、この基本的な語彙（無定義用語）と専門的な意味をもたない共通語（国語）によって次々に定義される。このようにして、無定義用語、定義用語からなる十分な用語の系が構成されると、これらの用語を用いて、体系の中のいろいろの文すなわち命題が構成される。

命題は文法的に正しく、体系内で意味をもつものであり、しかも「真」か「偽」の何れか一つの特性をもつ文をさす。しかし、一つの文が提出されたとき、それが真か偽であるかを予め知らない。また、真、偽は存在とか哲学上の問題に関する内容をもつものである。そこで、数学においては、このような真偽についての哲学上の内容を捨て、単に命題の特性に付する、それぞれ「真」、
「偽」と明記した札のようなものとして真、偽を考える。²³⁾

数学における主な仕事は、その体系における多くの命題に、この真・偽の札を対応さすことであるが、ここでも用語の定義における手続きと同様に、真、偽の札を付する最初の基準なくして、体系内の命題に真、偽の札を対応さす仕事を押し進めることができない。それゆえ、若干の適当な命題の集合を選び、これらの命題に真の札を与え、これを最初の基準として体系内の命題に真、偽の札を対応していく。このように、真と仮定され、演繹の出発点として選ばれた命題が公理である。すなわち、公理は自明の真理でなく、真であると仮定された、演繹的体系の最初の命題であり、演繹の出発点である。公理が確立されると、これを出発点として、体系の中の命題に次々に真と偽の札を付する作業が行なわれるが、この作業を支えるルールが演繹的論理である。

公理的方法 このように、演繹的体系においては、定義に関する系と、命題の真偽に関する系の二つの系が考えられる。数学では、この二つの系を統一するために公理的方法をとる。すなわち、できるだけ少ない無定義用語のリストを選ぶ、次にこの無定義用語で構成される、できるだけ単純な命題のリストを選び、これを公理系とする。公理は無定義用語と共通語を用いて構成される文である。したがって、公理系を構成する文が真であるという観点でのみ、無定義用語に意味・内容が与えられ、それ以外の意味は何ら与えられない。勿論、無定義用語のもつ慣用的な意味は一切捨て去る。つまり、無定義用語の意味・内容は公理だけによって規制される。かくして、数学では、用語に関する系も、命題の真偽に関する系も、公理系によって統一される。

たとえば、最も基本的な代数系である群を例にとろう。群は次のように定義されている。

集合 G があって、その元の間結合 \circ が与えられ、次の条件を満足するとき、 G は群であるという。*)

- (1) G の任意の 2 元 a, b に対して、 G の元 c が一意に定まり、 $c = a \circ b$ となる。
- (2) 結合法則 $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ が成り立つ。
- (3) G のすべての元 a に対して、 $e \circ a = a \circ e = a$ となる G の元 e が存在する。
- (4) G のいかなる元 a に対しても $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ となる G の元 a^{-1} が存在する。

この公理系における、集合、元、結合は無定義用語であって、(1)~(4)の条件を満足する以外は、何ら具体的な意味・内容を与えられていない。よく知られているように、集合を整数の集合、結合 \circ を加法 (+) と考えると、上記の公理(1)~(4)が満足される。また、0 をのぞいた有理数の集合における乗法、一つの集合上の一対一対応の集合における合成、ベクトルの集合における和、などこの公理系を満足する例は極めて多い。²⁴⁾ 数学者が群の公理を設定したとき、整数と加法、ベクトルとその和、など物理量とそれらの量を結合する過程をイメージとしてえがいているとしても、公理自身はそうした物理的意味に拘束されない。公理にのべた条件をみたすものならば、それがどんな対象であろうとも、群論で演繹された諸性質(定理)を適用することができる。そして、その適用によって、それぞれの対象の意味で、群論の諸性質(定理)が解釈されるのである。

このように、公理に用いる用語(無定義用語)に特別の意味・内容を与えないという方法は、演繹的体系を統一的に構築するという意味においても、数学の適用範囲を拡大するという意味におい

*) 正田・浅野「代数学 I」(岩波書店)による。結合記号 \circ は筆者。

ても、意義ある有効な方法である。現代数学は、このような公理的方法を採用することによって、その適用範囲を著しく拡大している。

命題の真偽と推論の妥当性 演繹の体系において公理が設定されると、この公理を出発点として、妥当な演繹的推論を駆使することによって、体系内の命題の真偽を決定する努力がなされる。妥当な推論とは、前提が真ならばその結論も必然的に真でなければならない、という推論である。推論の妥当性は前提と結論の関係だけに依存し²⁸⁾、結論の命題が真であることは推論が妥当であることを保証しない。命題の真偽と推論の妥当性の関係で重要なものを列挙すれば（例は省略）,

- (1) 前提の命題がすべて真で、推論が妥当であれば、その結論の命題は真である。
- (2) 推論が妥当であり、その結論の命題が偽であれば、前提の少なくとも一つの命題は偽である。
- (3) 前提の命題がすべて真であり、結論の命題が偽であれば、その推論は妥当でない。
- (4) 推論が妥当であり、前提の命題の一部または全部が偽の場合は、その結論の真偽は決定できない。
- (5) 推論が妥当であり、結論が真である場合、これだけでは前提の命題の真偽は決定できない。

このように、結論が真であることは必ずしも推論の妥当性を保証しないし、推論の妥当性もまた必ずしもその結論の真なることを保証しない。妥当性は推論のもつ性質であり、結論の真偽は個々の命題の性質であって²⁹⁾、これらは独立な概念である。すなわち、演繹的推論の妥当性は、その推論を構成しているおのおのの命題の内容や真・偽によって決定されるものでなく、推論の論理的な形式・構造だけによって決定される。ここに、推論の妥当性とその形式との関係の分析が重要であり、これを取り扱うのが記号論理である。

演繹的方法（公理的方法）の意義 演繹的方法は、ある主題において、ほんの少しの真偽しか知らないわれわれ人間が、少しでもその主題に関する知識の範囲を拡張しようとして考案された方法である²⁷⁾。ある命題が真であるとか偽であるという問題提起は、一般に帰納、類比などの発見的論理によってなされるが、その命題に明確に真、偽の札をつけて、われわれの知識体系に組み入れるのは演繹的論理の役割である。これが演繹的方法の第一の意義である。

また、公理的方法によって、循環論法や論理的な不明確に陥ることが回避され、証明の厳密性が強化された。これによって新しい命題の証明も容易になり、体系内の命題の間に興味ある論理的な連りを与え、明快で典雅な演繹体系を作る。これが第二の意義である。

第三に、公理的方法は労力節約策である²⁸⁾。一つの公理系 Σ に対して、数学あるいは他の分野のある機構が公理系 Σ のモデルになっていることが判明すれば、公理系 Σ を予め研究しておいて得られた知識がこれらの機構に適用され、新しい学問上の門戸が開ける可能性を生む²⁹⁾。このように、既存の公理に新たな解釈を与える分野があれば、その分野は数学の応用として著しい進展を遂げ、学問上の再生産が行なわれる。

第四に、既存の公理系を改造することによって新しい数学の題目で誕生する³⁰⁾。よく知られているように、N. I. Lobachevski, J. Bolyai, G. F. Riemann は、Euclid の第五公準の代りにそれと矛盾する命題を公準に組み入れることによって、新しい非ユークリッド幾何学を創造した。これは、既存の公理系を改造することによって、新しい数学を創造した典型的な例といえる。現代数学においても、既存の公理系を改造したり、新しい公理を添加することによって、新しい数学の分野が創造されている。このように、公理的方法は研究上の有力な利器となっている。

公理的方法は、以上のような長所があり、数学に習熟した学生を指導する場合には、学習の効率化・理論の明快さの点で、教育上の方策として役に立つ。しかし、中等教育程度の生徒にとっては、公理的方法の真の意義を理解することは不可能であるし、かえってこのために、数学の定理や法則に対する不信感を与えるのではないか。すなわち、中等教育では公理的方法は適当でなく、徒らに時間の空費となるであろうと考える。

VI 演 繹 的 論 理

(1) 命 題 論 理

演繹論理と形式 例え、次のような二つの推論を取り上げよう。

(1) 5 が偶数であるならば、5 は 2 で割り切れる。5 は 2 で割り切れない。ゆえに、5 は偶数でない。

(2) 彼が犯人であるならば、彼はその時刻に現場にいたはずである。彼はその時刻に現場にいなかった。ゆえに、彼は犯人でない。

(1), (2)の推論は異なる場面の、異なる内容についての推論であるが、ともによく用いられる妥当な推論である。(1)において、 $p = 「5 は偶数である」$ 、 $q = 「5 は 2 で割り切れる」$ 、(2)においては、 $p = 「彼は犯人である」$ 、 $q = 「彼はその時刻に現場にいた」$ とにおいて記号化すれば、(1), (2)はともに右のような同一の形式で表される。逆に、 p 、 q として任意の命題を選び、右の形式を満たすような推論を作れば、場面も内容も(1), (2)

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

と異なる新しい妥当な推論が得られる。(この場合、前提 $p \rightarrow q$ 、 $\sim q$ が真となるような命題 p 、 q を選べば、結論の命題 $\sim p$ も真となる。) すなわち、命題 p 、 q の内容が何であっても、また命題の真偽が何れであろうとも、上記の形式の推論を作れば、妥当な演繹的推論が得られる。

このように、演繹的推論においては、命題の内容や事実上の真偽は問題ではなく、重要なことは推論に用いられている命題間の関係や命題の形式である。それゆえ、演繹論理においては、各命題の中味を捨て去って記号化し、それによって論理の構造や法則を明確にすることができる。一方、帰納や類比などの発見的論理は命題の内容を重視する。この点にも、発見的論理と演繹的論理の大きな性格の相異がみられる。

命題論理 命題論理では、論理を分析し、論理の最小の単位として単純命題(これ以上分解できない単一の命題)を考える。論理学の出発点は命題の結合関係の考察であるが、この命題を結合する論理結合子は次の 5 つである。(p 、 q は命題を表わす)

- (1) $\sim p$ (p でない) (2) $p \wedge q$ (q かつ p) (3) $p \vee q$ (p または q)
 (4) $p \rightarrow q$ (p ならば q) (5) $p \leftrightarrow q$ (p と q は同値である)

これらの結合子を用いて単純命題を結合することによって、いろいろの複合命題が構成される。また、いかに複雑な命題でも、若干の単純命題をこれらの結合子で結合することによって表現できる。このように、論理学においては分析と総合の方法が徹底して行なわれる。

命題には内容と真理値(真・偽)との二つの側面があるが、命題論理では、命題の中身を捨てた

ときあとに残る真理値だけを考える。ここに、命題論理の記号化が可能になり、結合子の意味や役割も次のように真理値で規定できる（第5表）。このような表を真理表といい、L. Wittgenstein, E. L. Post によって 1921年に提示された³¹⁾。

表 5 (結合子と真理値)

p	$\sim p$	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F
		F	T	F	T	T	F
		F	F	F	F	T	T

任意の複合命題の真理表も、単純命題に分析し、結合子を用いて再構成して考えれば、〔表5〕の規定に基づいて完成することができる。たとえば、複合命題 $p \vee q \rightarrow \sim q$ の真理表は、〔表5〕の約束にしたがい、(1), (2), (3)の順序で完成され、(3)列がこの命題の真理値を与える（表6）。成分の命題が3つ以上の場合にも、手続きは若干煩瑣になるが、原理的には同様に真理表を完成できる。このように、任意の複合命題の真理値はその成分の命題の真理値によって一意に決定される。ここに、命題論理における分析・総合の意義がある。

表 6

p	p	$p \vee q \rightarrow \sim q$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	T

(1) (3) (2)

表 7

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge (\sim q) \rightarrow \sim p$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(1) (2) (1) (4) (3)

構成成分の命題の真偽のいかんにかかわらず、常に真である命題を恒真命題という。たとえば、67頁の推論 $(p \rightarrow q, \sim q \text{ ゆえに } \sim p)$ を考える。これは、前提 $p \rightarrow q, \sim q$ から結論 $\sim p$ を導く推論であるから、 $(p \rightarrow q) \wedge (\sim q) \rightarrow \sim p$ と表わすことができる。この真理表を完成すれば、〔表7〕のようになり、 p, q の真偽にかかわらず、その真理値は常に真である。すなわち、命題 $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q) \rightarrow \sim p]$ は恒真命題である。したがって、67頁の推論形式が妥当であることがわかる。

このように、論理学における公理やそれから演繹される諸法則（推論法則など）は、すべて恒真命題であることが真理表によって示される。すなわち、論理法則は、その法則がもつ形式ゆえに、成分である命題の真偽にかかわらず常に真である。したがって、論理法則を妥当な演繹の推論として利用できる。また、われわれは、日常生活においても、数学の学習においても、やや無意識にあるいはあいまいな形で演繹的論理を用いる場合が多いが、これらの推論の妥当性も真理表によって

検証できる。ここに、数学教育において、真理表を取上げ、論理の意識化を図る意義が考えられる。

条件文の真理値とその指導 真理表を基礎として、命題論理の指導を展開する場合、最大の障害は条件文 $p \rightarrow q$ の真理表の指導である。命題論理では、条件文 $p \rightarrow q$ の真理値は〔表8〕のように定義されているが、実際上の使用をみると、 p が真の場合だけで p が偽の場合を考えない。したがって、初学者にとっては、条件文 $p \rightarrow q$ の真偽を、 p が偽の場合も考えるところに第一の抵抗がある。さらに、 p が偽の場合には、 q の真偽にかかわらず条件文 $p \rightarrow q$ の真理値を真とする、ということになお一層の困難を感じさせる。したがって、条件文の真理値の定義を納得させるためには、まず第一に、条件文の真偽を p が偽の場合まで拡張する必要性；第二に、 p が偽のとき、 q の真偽にかかわらず、条件文の真理値を真とすることの合理性、の二段の理解が必要となる。

表8 $p \rightarrow q$ の真理表

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

第一の必要性については、もし $p \rightarrow q$ の真理値を p が偽の場合まで拡張しないと、 $p \vee q$, $p \wedge q$ の真理表では p , q の真偽のすべての組合せについて考えており、そこにアンバランスが生じ、条件文 $p \rightarrow q$ と論理結合子 \wedge , \vee , \sim などとの関係を調べる道が閉ざされる³²⁾。また、条件文 $p \rightarrow q$ において、 p が偽で q が真のときを考えないと、逆 $q \rightarrow p$ では仮定が真で結論が偽のときを考えるとできない。さらに、 p が偽で q が偽のときを省くと、対偶 $\sim q \rightarrow \sim p$ では、仮定が真で結論が真のときを考えるとできない³³⁾。このような支障から、条件文 $p \rightarrow q$ の真理値も、 p が偽の場合まで拡張して考える必要があることを納得させる必要がある。

第二の合理性については、実例によって、 p が偽のとき、 q の真偽にかかわらず条件文 $p \rightarrow q$ の真理値を真とすることが適当であることを確認させ、その後、このような条件文の真理値の定義が合理的であったことを、集合の包含関係 $[\phi \subset A]$ や対偶命題の関係などから理解させるのがよいと考える。

たとえば、 p が偽、 q が真の場合を考えるために、 p : 「 $1=2$ 」、 q : 「 $3=3$ 」とする。 p から、「 $1=2$ かつ $2=1$ 」、これに等式の性質を用いて

$$1 + 2 = 2 + 1 \qquad \therefore 3 = 3$$

すなわち、正しい推論（等式の性質）によって、 p から q を導くことができる。したがって、 p が偽、 q が真であるが、 $p \rightarrow q$ の真理値を真とせざるを得ない。また、 p が偽、 q が偽の場合は、たとえば、 p : 「 $1=2$ 」、 q : 「 $2=3$ 」を考えると、さきと同様に等式の性質を用いて、 p から q を導くことができる。したがって、この場合も $p \rightarrow q$ の真理値を真とするのが適当である。このような例を通して、条件文 $p \rightarrow q$ の真理値を導入する。

また、 $p \rightarrow q = \sim p \vee q$ を納得さし、 $\sim p \vee q$ の真理値で条件文 $p \rightarrow q$ の真理値を定義する方法もあろう。 $\sim p \vee p$ は常に真である。 $p \rightarrow q$ を真とすれば、 p が真のとき q は真となる。したがって、 $\sim p \vee q$ は真となる。逆に、 $\sim p \vee q$ が真とする。 p を真とすれば、 $\sim p$ は偽であるから、 q が真でなければならない。したがって、 $p \rightarrow q$ は真である。このように、【前件 p が偽の場合を表面に出さずに、 $p \rightarrow q$ と $\sim p \vee q$ は論理的に等しいことを納得させることができる。これから、 $p \rightarrow q$ の真理値を $\sim p \vee q$ の真理値で定義する。

その他、条件文 $p \rightarrow q$ を約束の関係としてとらえ、その約束が破られなかったとき、 $p \rightarrow q$ が真で

あるとして真理値を導入する方法³⁴⁾、条件文 $p \rightarrow q$ は「 p が真であるにもかかわらず q が偽であることは真であり得ない、つまり偽である」ということだけを主張するものであると考える方法³⁵⁾、など考えられる。しかし、いずれの場合にせよ、条件文 $p \rightarrow q$ において、前件 p が偽のときも考えることに対する抵抗や違和感は十分に払拭できない。

したがって、上記のような方法で、まず条件文 $p \rightarrow q$ の真理値を定義し、その後次のような例を次々にあげ、さきの $p \rightarrow q$ の定義が他との関連で実に調和がとれ、合理的な定義であることを理解させる必要があるだろう。

- ① a が実数のとき、命題「 $a \geq 0 \rightarrow a^2 \geq 0$ 」は真であるが、その対偶命題「 $a^2 < 0 \rightarrow a < 0$ 」が真となるためには、前件 p が偽のとき後件 q の真偽にかかわらず、 $p \rightarrow q$ を真としなければならない。
- ② 集合論では、空集合を任意の集合の部分集合とする。したがって、 $\phi \subset A$ 、すなわち「 $x \in \phi \rightarrow x \in A$ 」が真となる。これは条件文 $p \rightarrow q$ において、前件 p が偽のとき、 $p \rightarrow q$ が真であることを意味する。このように、 $p \rightarrow q$ の定義と集合の関係 $\phi \subset A$ の間には密接な関連がある。
- ③ 「 $x > 1 \rightarrow x^2 > 1$ 」は、 $x > 1$ なる実数 x に対して常に真である。条件文 $p \rightarrow q$ の真理値を上記のように定義すれば、任意の実数 x に対して命題「 $x > 1 \rightarrow x^2 > 1$ 」は真であると拡張できる。すなわち、

$$\forall x [x > 1 \rightarrow x^2 > 1] \quad (x : \text{実数})$$

と表現できる。

- ④ $p \rightarrow q$ の真理値を p が偽のときまで拡張して考えると、アリストテレスの古典論理では考えられなかった

$$p \rightarrow q = \sim p \vee q = \sim (p \wedge \sim q)$$

のような、結合子「 \rightarrow 」と他の結合子との簡単な関連が付き、「 \rightarrow 」を含む複雑な複合命題を簡潔に表現できる。

(2) 述語論理

述語論理 命題論理は、命題と命題との間の論理的関係を分析し、複合命題の真偽が、その中に現われる単純命題の真偽にどのように従属するかを研究することにあつた。しかしながら、命題論理だけでは、論理学の目的として不十分であり、アリストテレスの三段論法も、教育数学における最も簡単な推論も命題論理の枠内に入らない³⁶⁾。

たとえば、「すべての人間は死ぬ。ソクラテスは人間である。ゆえに、ソクラテスが死ぬ。」の論理的関係を命題論理で表わそうと思っても、「 \rightarrow 」内の3つの命題はこれ以上簡単な命題に分解できない。それゆえ、上記の推論も、命題論理の範囲では、形式的には「 $p, q \therefore r$ 」としか表わすことができず、その妥当性についての何らの根拠も与えない。

上記の推論では、命題の関係だけでなく、命題の内部構造すなわち主語と述語との関係が本質的な役割を演ずる。したがって、論理学の目的を達成するためには、命題をさらに分析し、主語と述語とに分解して考察する必要がある。このように、単純命題をさらに主語と述語に分析し、命題の内部構造まで立入って考察するのが述語論理である。

述語論理で重要なことは、命題関数の概念である。たとえば、 $p(x) =$ 「 x が素数である」と

する。 x が確定しなければ、この文の真偽が判定できないから、 $p(x)$ は命題ではない。しかし、 x が確定すれば、たとえば、 $p(3) = 「3$ は素数である」は真、 $p(4) = 「4$ は素数である」は偽、のようにこの文の真偽が判定でき、すなわち命題となる。このように、変数を含む文で、変数が確定すれば命題となる文を命題関数という。多変数の命題関数もあり、たとえば、 $p(x, y) = 「x^2 + y^2 = 1」$ は 2 変数の命題関数である。また、命題論理におけると同様に、二つ以上の命題関数を論理結合子で結合して、新しい命題関数が定義される。

命題関数は一般に命題でなく、その真偽が判定できないが、それを命題化する記号が限定記号である。限定記号には、全称記号 \forall と存在記号 \exists の二つがあり、次のように定義される。

$\forall x F(x)$: すべての対象 x に対して $F(x)$ を満足する。

$\exists x F(x)$: $F(x)$ を満足する対象 x が存在する。

たとえば、上記の $p(x) = 「x$ は素数である」に対して、対象領域を自然数とすれば、 $p(4)$, $p(6)$ などは偽であってすべての自然数 x に対して $p(x)$ が真とならないから、 $\forall x p(x)$ は偽の命題となる。また、 $p(3)$ は真となって、ある自然数 x に対しては $p(x)$ が真となるから、 $\exists x p(x)$ は真の命題となる。

述語論理と命題論理の関連 命題論理 $F(x)$ の対象領域が有限集合 $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の場合は、限定命題は

$$\forall x F(x) = F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \dots \wedge F(a_n) \quad \text{..... ①}$$

$$\exists x F(x) = F(a_1) \vee F(a_2) \vee \dots \vee F(a_n) \quad \text{..... ②}$$

となる。ここで、 $F(a_1)$, $F(a_2)$, \dots , $F(a_n)$ は命題である。すなわち、全称記号 \forall は命題論理における連言記号 \wedge の一般化であり、存在記号 \exists は命題論理における選言記号 \vee の一般化と考えることができる。また、限定記号と否定記号との間に、次の重要な関係が成り立つが、これも命題論理におけるドモルガンの法則の一般化である。

$$\sim [\forall x F(x)] = \exists x [\sim F(x)] , \quad \sim [\exists x F(x)] = \forall x [\sim F(x)]$$

述語論理は、命題関数の概念や限定記号を導入することによって、単純命題を主語、述語に分析し、命題の内部構造に関する論理を解明する。たとえば、さきの推論

「すべての人間は死ぬ。ソクラテスは人間である。ゆえに、ソクラテスは死ぬ。」

は、

$M(x)$: x は人間である	
$D(x)$: x は死ぬ	$\forall x [M(x) \rightarrow D(x)]$
$s =$ ソクラテス	$M(s)$

とすれば、述語論理では右のような形式で表わされる。このように、述語論理は限定記号を含む命題を考察する。しかし、述語論理と命題論理は対立するものでなく、①、②の関係に示されているように、特殊と一般の関係にある。すなわち、個々の場合を命題論理で正しさを確かめ、その寄せ集め、つまり「特殊 \leftrightarrow 一般」の考え方で、命題論理と述語論理との連りを考えることができる。

この命題論理と述語論理との関連を示す基本性質として (D は対象領域、 $F(x)$ は命題関数、 A は命題とする)、

(i) $\forall (x) F(x) \rightarrow F(a)$ ($a \in D$) (特殊化)

(ii) $A \rightarrow F(a)$ ($a \in D$) ならば $A \rightarrow \forall x F(x)$ (一般化)

(iii) $F(a) \rightarrow \exists x F(x)$ ($a \in D$) (存在化)

(iv) $F(a) \rightarrow A$ ($a \in D$) ならば $\exists x F(x) \rightarrow A$ (存在化)

があり，これらを用いて命題論理の基礎の上に述語論理が構成される³⁷⁾。

たとえば，さきの推論（三段論法）の妥当性は，上記の性質を用いて

$\forall x [M(x) \rightarrow D(x)]$ ①

$M(s)$ ②

前提①に性質 (i) を適用して特殊化し， $M(s) \rightarrow D(s)$ ③

前提②と③に，命題論理における論理法則を適用して

$M(s), M(s) \rightarrow D(s)$

$\therefore D(s)$

と，推論の妥当性が検証できる。

このように，命題論理と述語論理は特殊と一般の関係にある。したがって，高等学校において論理指導をする場合，命題論理を真理表によって構成し，その基礎の上に，特殊・一般の関係で述語論理を導入するような指導がよいと考える。

集合と述語論理 集合と論理は密接な関連をもつ。集合は性質・述語(命題関数)で規定されるから，対象としているものの全体を Ω とすれば，一つの命題関数 $p(x)$ に対して， Ω の部分集合

$P = \{x | p(x)\}$

が対応する。この集合 P を $p(x)$ の真理集合という。この命題関数と真理集合の対応によって，述語論理のことばが集合のことばに翻訳され，ベン図式によって視覚化される。

論理

(翻訳)

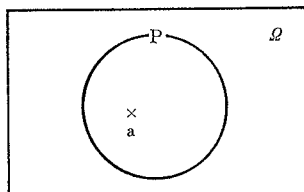
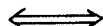
$p(a)$ が真



集合

$a \in P$

(視覚化)



また，この対応によって，命題関数の結合も集合の結合関係で表現できる。命題関数 $p(x)$ ， $q(x)$ の真理集合をそれぞれ P ， Q とすれば

$p(x) \vee q(x)$ の真理集合 $P \cup Q = \{x | p(x) \vee q(x)\}$

$p(x) \wedge q(x)$ の真理集合 $P \cap Q = \{x | p(x) \wedge q(x)\}$

$\sim p(x)$ の真理集合 $P^c = \{x | \sim p(x)\}$

となり，これもベン図式によって視覚化できる。

さらに，限定記号の定義から，限定命題と真理集合の関係も

$\forall x p(x)$ が真 $\iff P = \Omega$

$\exists x p(x)$ が真 $\iff P \neq \phi$

となる。これによって、限定記号と否定記号の関係

$$\sim [\forall x p(x)] = \exists x [\sim p(x)], \sim [\exists x p(x)] = \forall x [\sim p(x)]$$

も集合によって説明できる。

たとえば、前者について考える。「 $\forall x p(x)$ が真」は真理集合では、 $P = \Omega$ 。したがって、「 $\forall x p(x)$ が真」を否定すると、 $P \neq \Omega$ すなわち $P^c \neq \emptyset$ 。これから、「 $\exists x [\sim p(x)]$ が真」が得られる。逆も成立するから、結局、 $\sim [\forall x p(x)]$ と $\exists x [\sim p(x)]$ は論理的に等しいことがわかる。

数学における定理・法則は、一般に $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$ の形をしている。この全称命題 $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$ が真であることには、真理集合においては次の関係が対応する。

$$\forall x [p(x) \rightarrow q(x)] \text{ が真} \iff P \subset Q \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

なぜならば、命題論理における条件文の性質から、 $p(x) \rightarrow q(x) = \sim p(x) \vee q(x)$ 。したがって、「 $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$ が真」は、真理集合では、 $P^c \cup Q = \Omega$ 。これから、 $P \subset Q$ の関係が得られる。また、この推論を逆にたどれば、 $P \subset Q$ から、「 $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$ が真」なることが得られる。

①は極めて重要な関係であり、これを基礎として、推論法則や逆・対偶についての考察ができる。たとえば、

定理 二等辺三角形であるならば、その底角は等しい。

$$\triangle ABC \text{ において, } AB = AC$$

$$\text{ゆえに, } \triangle ABC \text{ において, } \angle B = \angle C$$

は中学校の数学で行なわれる推論であるが、これを述語論理で記号化すれば、

$$p(x) = \text{「}x \text{ は二等辺三角形である」}$$

$$q(x) = \text{「}x \text{ の底角は等しい」}$$

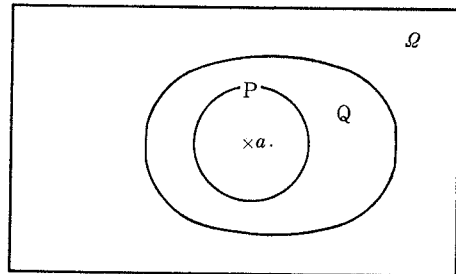
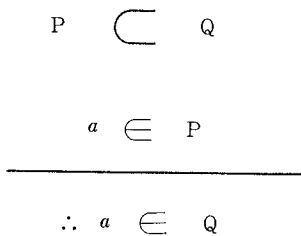
$$a : \triangle ABC$$

$$\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$$

$$p(a)$$

$$\therefore q(a)$$

とおくことによって、右のような形式で表わすことができる。さらに、これを集合のことに翻訳し、ベン図式で視



覚化すれば、上図のようになり、論理の構造を外延的に、視覚的にとらえることができる。その他の推論や論理法則も集合のことに説明され、ベン図式で視覚化できるが、ここでは省略する。

このように、述語論理は集合と密接な関係があり、ベン図式で視覚化できる。このことは、中学校での論理指導を考える際の一つの方法を示唆する。すなわち、集合を基礎とし、ベン図式をシエーマとする論理指導、つまり、この項での考察の逆の考察をたどる論理指導であるが、これは中学

校の論理指導として、指導の可能性およびその効果の観点からみて、最も適当な方法と考える。

VII 論理と数学教育

(1) 発見的論理と数学教育

Ⅲ、Ⅳで述べたように、帰納・類比などの発見的推論は証明ではない、にもかかわらず、この蓋然的な推論は数学や数学教育において重要な役割を演ずる。

数学におけるその役割は、(1)より包括的な数学的構造を与える公理の抽出・設定、(2)価値ある数学的命題の発見、(3)証明の発見、(4)新しい数学の研究における類比的思考、など数学における新しいアイデアの創造であろう。

数学教育においては、(1)問題解決能力を育てる、(2)抽象的概念・形式的法則の意味や理解の教授を助ける、(3)興味や問題意識をもたせるなど、学習の動機づけとなる、(4)数学的な事柄を統合して統一的に理解する学習を助ける、(5)一般化や拡張の考えの指導を助ける、(6)数学における創造の過程を体験し、創造性の開発を助ける、などが発見的論理の果す役割と考える。

ところが、この帰納・類比などの発見的論理は、創造的・生産的な側面を持ちながら、その推論が蓋然的であるという理由で、過去の数学教育においては、否定されあるいは省りみられなかった³⁸⁾。今世紀初頭に起った数学教育改良運動の滲透に伴ない、発見的論理の教育的意義が認められ、我国においても、昭和10年頃から数学教育の直観化・具体化の声とともに漸次取入れられるようになって来ている³⁹⁾。しかし、そこにおける取扱いは、発達段階からみて演繹的方法の困難と思える小学校・中学校低学年を対象に行なわれ、以後の学年においては殆ど省みられていない。また、取上げられた場合でも、児童・生徒の生活・経験と密着しすぎ、科学的推論として与えられていない。

G. Polya も、「数学が論証的推論を学ぶのに優れた機会を提供することは誰でも知っているが、同時に私は、現在の学校の普通課程において、蓋然的推論を学ぶのにそれほど機会を与えているような科目が一つもないことを主張したい。……」⁴⁰⁾と述べ、学校教育において発見的論理の指導がおろそかにされていることを指摘している。

数学というものは、証明されなければならない命題の根拠を次々に考えていくものである、というように証明という面だけから考える人が多い。この考えは中等教育の数学教師の中にもかなり多く見られる。このような考えは、直観による判断のもつ役割や、考察対象が非常に漠然としている場合に、その中の関係を抽出したり、自分の推測を形式化していくような訓練を生徒にさせることを否定することになりかねない。

数学的思考は、公理、定義および厳格な証明だけに関係をもつ純粋に演繹的・形式的なものだけではない。観察された事例から一般化する思考、具体的な対象から数学的概念を抽出する思考、帰納・類比的推論などの非形式的な思考も重要な数学的な思考である。数学者の創造活動においては、このような非形式的思考、蓋然的推論が主役を演ずるのである⁴¹⁾。

教育数学は、数学の成果を教育的に精選し、体系化したもので、そこでは、ある程度の演繹的体系をなしている。したがって、これらの内容を既成の知識として与えようとするれば、演繹的論理を主として、これを生徒に与えることができるであろう。しかし、これらの内容は、数学の上では既

証のものであるが、学習する生徒にとっては新奇のことである。この意味で、学習活動は広義の創造活動であると考えらるべきであろう。それゆえ、数学の学習活動に数学者の創造過程を反映させ、演繹論理とともに、帰納・類比などの発見的論理を重視するような指導が必要であろう。

最近、学校教育においても、職場教育においても、創造性の開発が問題にされ、創造性教育と銘うって意欲的に実践されている。将来、人間が機械に対して優位に立ち得る立脚点は、思想と創造性であろう。発見的論理は、この創造性と密接な関係があり、それを支える一つの柱といえる。ここにも、教育において発見的論理を重視すべき意義がある。

また、G. Polya は次のように述べ、数学が発見的論理の学習に最適であり、発見的論理はその意識的指導によって高められる、と示唆している。

「数学はいろいろの点において、帰納的推論・類比的推論の研究に対して最も適した実験材料である、と私には思えます。……」⁴²⁾

「蓋然的推論を有効に使うことは実際的技能であり、他の任意の実際的技能と同様に、模倣と練習とによって学ばれるものです。」⁴³⁾

このように、数学教育において、発見的論理を重視し、それを意識的に指導することの意義は極めて大きい。また、G. Polya によれば、その指導の効果も期待できる。数学教育現代化の動きの中で、論理指導が重要視され、その実践も試みられているが、大方の傾向として形式論理の重視が目につく。数学における形式論理の重要性を否定するものでないが、上記のような発見的論理の意義を考えれば、G. Polya がいうように、数学科としては「証明することを必ず教えよう、だがまた推測することも教えよう」⁴⁴⁾の標語のもとに、発見的論理の指導も意識的に行なう必要があると考える。

すなわち、演繹的論理の外に、(1)帰納的推論、類比的推論の方法・特徴、数学における役割を教え、(2)できるだけ多くのことを生徒に発見させる、(3)結果を推測させて自分の課題に興味をもたせる、(4)漠然とした対象の中から本質的な形式・関係を抽出する、(5)類比による知識の統合化を図る、などの指導も重視すべきであろう。

(2) 演繹的論理と数学教育

論理* 指導の必要性と意義 生徒が数学を学習するとき、提出された命題の真実性を検証しようと思えば、いつでも演繹的論理を用いてこれを示すことが要求される。また、日常生活においても、われわれは演繹的な推論をすることを常に求めている。それは、意識的にするにせよ、あるいは曖昧な形で推論するにせよ、証拠といわれる事柄から、結論といわれる事柄を導いている。このように、論理は、数学はもとより、人間の生活すべてにわたって重要な役割を果たしている。

にもかかわらず、論理指導は今までの教育では盲点であったといえる。なるほど、論理的思考力の育成は過去の数学教育においても常に重視されていたが、そこでの指導は、論理を意識的に取上げて指導するというのではなく、図形教材を主とする論証指導を通して自然に培うというものであった。その結果として、I(3)で述べたように、中学生・高校生の演繹的推論能力は実に不安定であり、特に、生徒が、数学の学習の中で、論理的法則にしたがって思考することを自覚していない。彼等の論理的思考力は、幼児から言葉の学習とともに徐々に発達して形成されているが、教育

*) この節でのべる論理は演繹的論理をさす。

の過程で、その推論形式の妥当性についての客観的反省の機会が一度も与えられていない。それゆえ、彼等の演繹的推論は、数学的に、形式的に純化されたものでなく、その推論対象の命題の見かけの上の真偽に左右される、実に不安定なものになっている。

このような問題を打開するためには、従来の数学教育におけるように、何々の指導を通して論理的思考力を養うという消極的方法でなく、論理を正面から取り上げ、各々発達段階に応じた論理指導を組織的に行ない、学習した結果を数学の学習において意識的に用いるような指導が必要であると考える。

論理指導の第一の意義は、論理の意識化である。日常言語生活を通して自然に培われた推論形式を、数学的に純化して論理法則として抽出する。そして、その妥当性を真理表やベン図式で検証することによって、今まで意識せずに用いていた論理形式に客観性を与える。このような指導は、生徒に真理表やベン図式の意義、論理の重要性を確認させ、以後の学習においても、文章表現に注意したり、推論方法を意識的に検討する傾向を生む⁴⁴⁾。

第二は、日常用いられている論理と数学における論理の純化の程度の差についてである。数学における論理は日常論理に基いているが、しかし、それは数学用に純化された形態と意味をもっている⁴⁵⁾。通常の教育や日常言語生活で自然に体得された人間の論理は数学における論理のように純化され、高められていない。それゆえ、数学における論理を理解させるためには、組織的な論理指導が必要であり、数学における論理指導は、言語における文法指導以上の意味をもつ。

第三に、論理の形式化の意義である。われわれ人間は何かを考えると、記号論理は意識してはいないけれども、一応論理的に考える。これらを反省し記号化してみると、記号によってその法則性が明確になる。それによって、「人間の正しい考え方はそれなりに一つの体系を作っていて、その正しさの根拠も確立できる」⁴⁶⁾ことがわかる。このことも論理指導の重要な意義である。また、命題の記号化は、複雑な文章の読解などにおいて、記号表現によってその文章の構造を明確にし、その読解を助ける。ここにも、論理の形式化、命題の記号化の意義が考えられる。

その他、論理代数を指導し、その発展として電子計算機に対する理解を深めめることも論理指導における一つの意義と考えられよう。

論理指導の問題点と系統 さきに述べたように、日常用いる論理も、数学の学習に必要な論理も、その殆どが述語論理に包括される。したがって、数学教育で論理指導を取上げる場合、述語論理までの指導を考えなければ、その目的を十分果すことができない。

一般の論理学の本は、命題論理から述語論理に進み、命題論理を基礎として述語論理を構成する。論理指導においても、この順序を踏襲しようとするれば、中学校における論理指導は困難であると考えられる。命題論理を基礎としての述語論理への道は、その行程が長く、また条件文の真理値という険しい峠がある。VI(1)の命題論理で考察したように、条件文 $p \rightarrow q$ の真理値の理解の困難さは、その実際上の使用が p が偽の場合を考えない、というところに第一の抵抗があり、さらに、 p が偽のときに q の真偽にかかわらず $p \rightarrow q$ の真理値を真とする、ということに第二の難点がある。著者の論理指導の実践によれば、高校一年生でも半数以上が、真理値の拡張の必要性を認めながら、条件文の真理値に抵抗を感じている⁴⁷⁾。したがって、中学生には、この条件文の真理値の理解は困難であろう。また、命題論理から述語論理への行程は長がく、このようなオーソドックスな構成を中学生に課すのは無謀であると考えられる。

したがって、中学校の論理指導は、石谷氏も述べているように⁴⁸⁾、集合と結びついた述語論理、

つまり集合論理（クラス論理）をベン図式をシエーマとして指導するべきだと考える。また、高等学校においては、真理表に基いて命題論理を指導し、その基礎の上に、特殊・一般の考えを重視して述語論理を構成する。

中学校	集合論理（クラス論理）
高等学校	命題論理 → 述語論理

中学校では、集合の概念や記号を予備知識として、条件命題^{*}、真理集合の概念を導入し、集合の間の関係や集合と元の関係から、述語論理の論理法則を導き出し、これを定式化する。この場合、条件文 $p(x) \rightarrow q(x)$ の真理集合は考えないが、 $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$ が真のときの関係

$$p(x) \rightarrow q(x) \text{ が常に真} \iff P \subset Q$$

を定式化する。これをもとにして、恒真命題の逆や対偶が恒真であるか否かを検討したり、推論の有効性を検証する。ド・モルガンの法則は、ベン図式で容易に確かめられ、論理的にも重要な性質であるから、これも指導内容に含める。

高等学校においては、命題論理で真理表を与え、論理法則を指導し、簡単な命題が変形できるようにする。述語論理では、限定記号 \forall 、 \exists を用い、限定命題の否定、命題論理と述語論理の関連を示す基本性質、推論方法を指導する。また、証明法では間接証明の意味を明確にする。

高等学校の論理指導は公理的方法でやるべきだと述べている人もいる。しかし、高等学校の数学自体が公理的になっていないのに、論理の構造だけを公理的に取扱うのも問題があろう。中等教育における論理指導は、その主目標を、論理の自覚、論理の意識化におくべきで、公理的方法による指導は高校生向きではない。

VIII 中等教育における論理指導

(1) 基本的考え方

以上、論理指導の意義や問題点について考察してきたが、ここでは、中等教育において論理指導する際の、基本的な考え方について要約する。

① **論理の意識化** さきにも述べたように、論理指導は従来の数学教育における一つの盲点であった。論理的思考力の育成を目標に掲げながら、その意識的・組織的指導がなされていなかったのに、生徒は自分達の推論に何ら疑いももたず、反省もしなかった。勿論、自分達の推論が論理法則にしたがっていることも、彼等は自覚していない。したがって、論理指導で第一に考えるべきことは、生徒に論理を意識させ、人間の正しい推論はある形式をもった論理法則にしたがっていることを自覚させることである。また、人間の推論を支えている論理法則は、それなりに一つの体系をもっており、その正しさがベン図式や真理表で確かめられることを知ることも重要なことであろう。

② **発見的論理も重視する** 数学的思考は演繹的論理だけでなく、一般化する思考、抽象する思考、帰納や類比の思考などの非形式的思考も重要な数学的思考であり、特に創造活動においてはこの非形式的思考が主役を演ずる。数学教育の最も大きな目的は、自然現象や社会現象の数学的な面を考察し、その本質を見極め、その諸性質を立証し、その結果を役立てる、という総合的な能力を養うことにあると考えたい。この思考過程を示せば、

^{*} 命題関数を意味する。中学生にとっては、条件命題の方が用語として簡明であろう。

考察 → 構想（本質の抽出・定式化） → 立証 → 応用（結果の利用）

となる。考察、構想には発見的論理が重要な役割を果し、立証、応用には演繹論理が用いられる。そこで、従来ややもすると、立証、応用の演繹的論理に偏した数学教育を改め、考察・構想の発見的論理も重視する数学教育を考えるべきである。したがって、論理指導においても、演繹的論理とともに、発見的論理も重視し、両者の特徴や関係を理解さず指導が必要である。特に、帰納、類比、演繹の推論を同じ場面で取上げ、発見的推論の後に必ず演繹の必要性を感じさせる指導が極めて大切である。このような指導によって、帰納、類比、演繹の役割や関係が明確になるであろう。

③ 指導系統 数学の定理は殆ど $\forall x [p(x) \rightarrow q(x)]$ の形である。また、数学における論理も日常の論理も殆ど述語論理に包括される。それゆえ、中学校、高等学校で論理指導する場合、それぞれ述語論理に関する指導を究極の目標と考えるべきであろう。さきに述べたように、中学校において、命題論理から述語論理への構成は困難であり、また、教育的効率という観点からも疑問をもつ。したがって、中学校においては、集合と結びついた述語論理、つまり集合論理をベン図式をシエーマとして指導する。高等学校においては、真理表に基いて命題論理を構成し、その基礎の上に、命題関数の導入と特殊・一般の考えを重視することによって、述語論理を構成する。したがって、演繹論理の指導系統は次のようにしたい。

集合論理（クラス論理） → 命題論理 → 述語論理

④ 数学上の例を多く取上げる 数学における論理は、日常的論理から抽象され、純化されている。これは、たとえば、論理語「または」、「～ならば、～」の意味に端的に現われている。このように純化された論理は、日常言語生活を通して自然に身につくものでなく、意識的に指導することによって、はじめて確立するものである。この日常的論理を純化することは、単に日常的な例や問題を持出しての論理指導では果されない。やはり、数学上の例や問題を多く取上げた、数学と密着した論理指導によって、その純化が可能となろう。また、数学に結びついた論理指導であってこそ、それが後の数学の学習に役立つと考える。それゆえ、論理指導は、数学上の例や問題を多く取上げた、数学と密着した論理指導でなければならない。

⑤ 内容を精選し用語は簡明に 論理指導というと、公理系と推論規則から出発する記号論理学の指導をしなければならない、と考えている人もいるが、中等教育においては、そのような指導は不可能であり、教育的に有益でない。中等教育における論理指導は、論理を自覚させる、生徒自身がもっている論理を数学的に純化する、後の数学の学習に役立つ、などの観点で考えるべきである。したがって、記号論理学の入門書にある項目をそのまま下して、論理指導のプログラムを作成するなどは厳に慎みたい。あくまでも、上記の観点に立って内容を精選し、用語・記号も必要最小限に、簡明なものを選ぶべきであろう。たとえば、合接、離接、連言、選言、命題論理関数など、生徒の記憶に負担がかかる用語はできるだけ避けたい。中学校では、命題関数の代りに条件命題という用語を用いるのが簡明であろう。記号は論理法則を形式化するのに必要であるが、中学校では、 \sim 、 \forall 、 \wedge 、 \rightarrow ぐらいにとどめ、限定記号 $\forall x$ 、 $\exists x$ を用いるのは避けたい。

⑥ 論理的思考力と創造性の育成 論理指導の究極の目標は、論理的思考力と創造性の育成にあると考える。これは、単に論理に関する内容や記号を指導するというだけでは解決できない。論理に関する内容や推論方法についての指導は、論理的思考力や創造性の育成に必要なが、それらの推論方法を利用する能力を養うことを怠っては、上記の目標は達成されない。したがって、論理指導は、表面的な論理の知識の習得に終らず、数学の学習のいたるところで、習得した論理の

知識を駆使する機会を与えなければならない。すなわち、推論方法や論理法則についての指導を集中的に行ない、常時の学習でそれらを意識的に利用する指導が必要であろう。さきにも述べたように、帰納、類比、演繹の推論を同じ場面で取り上げ、発見的論理と演繹的論理の相互作用を重視する指導は、この意味で極めて重要であると考えられる。

次に、中等教育における論理指導の実践案を示す。中学校案は、本年11月、附属中学校で実践される予定である。高等学校案についても、機会をみて実践したい。

(2) 中学校における論理指導

<中 1 >

§ 1 発見の推論

- (1) 帰納の方法 (2) 類推の方法

§ 2 命題と集合

- (1) 命題の意味 (2) 論理用語
(3) 条件命題と集合
(4) 論理用語と集合の関係

§ 3 正しい推論

- (1) 推論形式 (次のような型の推論)

$$\frac{p \rightarrow q}{p} \quad \frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \quad \frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow r}$$

$$\therefore q \quad \therefore p \rightarrow r \quad \therefore p \rightarrow q \wedge r$$

- (2) 定義と性質

<中 2 >

§ 1 発見的な推論

- (1) 帰納と類推
(2) 帰納・類推による結果はつねに真といえるか。

§ 2 演繹的な推論

- (1) 条件命題と集合
(2) 推論形式
○ 一年の復習

$$\frac{p \rightarrow q}{\sim q} \quad \frac{p \vee q}{\sim q}$$

$$\therefore \sim p \quad \therefore p$$

- 誤りやすい推論形式

- (3) 論証の意義
○ 命題の真偽と証明
○ 仮定と結論 ○ 論証の意義

§ 3 逆・裏・対偶

§ 4 ドニモルガンの法則

<中 3 >

§ 1 発見の論理

- (1) 帰納 (2) 類推
(3) 帰納・類推の役割

§ 2 証明の論理

- (1) 条件命題と真理集合
(2) 推論形式
○ 正しい推論 ○ 誤りやすい推論
○ 証明に用いられている推論形式の検討
(3) 間接証明法

§ 3 論証の意義

- (1) 定義, 公理, 定理
(2) 数学の体系

(3) 高等学校における論理指導 (高 1 ~ 高 2)

§ 1 発見的論理

- (1) 帰納的推論
(2) 類比的推論
(3) 帰納・類比的の推論による一般的な誤り
(4) 数学における帰納・類比的の役割

§ 2 命題論理

- (1) 命題の意味と結合
(2) 命題の構成と真理表
(3) 同値, 恒真 (恒偽), 含意
(4) 論理法則 (5) 推論

§ 3 述語論理

- (1) 命題関数と真理集合
- (2) 命題関数の合成と真理集合
- (3) 限定命題とその法則 (I)
(特殊化・存在化, 否定)
- (4) 限定命題とその法則 (II)
(2項述語について)
- (5) 限定命題と集合
- (6) 推論

§ 4 定理と証明

- (1) 公理系と定理
- (2) 必要条件, 十分条件, 同値
- (3) 証明の方法
 - 反例による方法
 - 直接証明
 - 間接証明 (背理法)
 - 数学的帰納法

IX 要 約

数学は、自然科学のみならず、社会科学や企画・経営・管理などの分野に広く適用されつつある。そこで重要なことは、現象を分析したり、その構造を数学的に定式化する数学的思考であって、単なる数学上の知識や技能ではない。数学的思考を身につけることは、もはや現代人にとって必須な条件になってきている。また、電子計算機の出現は、計算能力の訓練に大半を費した従来の数学教育に、その変革を迫っている。

そこで、本論文では、帰納、類比、演繹、公理的方法など、数学的思考の基本的なものについて、数学教育の立場から考察した。また、従来の数学教育のあり方を反省し、帰納、類比などの発見的論理も含めた論理指導を、中等教育で組織的に行なうことの必要性を論述した。

最後に、中等教育で論理指導する際の基本的な考え方とその実践案について述べた。中学校案は、本年11月、附属中学校で実践される予定である。高等学校案についても、機会をみて実践したい。

文 献

- 1) 黒田・赤・東編 論理と数学, 小学館 (1968), 125—126
- 2) 同上, 10—11
- 3) 同上, 296—297
- 4) J. S. Bruner 教育の過程, 岩波書店 (1965)
- 5) スミルノフ 現代の計算機, 東京図書 (1966), 145
- 6) 笹田昭三 高等学校における論理指導について, 鳥取大学教育学部研究報告 (教育科学), 第九巻, (1967), 123
- 7) 仲田紀夫 中学校における論理, 数学教育 (明治図書) No. 97 (1968), 23—26
- 8) 中島健三 論理的思考力の育成と児童の推論の実態について, 数学教育学論究 (日本数学教育会) XV—XVI (1968), 98
- 9) 数学教室 (国土社) No. 166 (1967), 10—11
- 10) G. Polya 帰納と類比, 丸善 (1959), 3
- 11) 同上, 75
- 12) T. L. Heath ギリシヤ数学史II, 共立全書 (1960), 228—231

- 13) G. Polya 帰納と類比, 丸善 (1959), 1
- 14) 石谷茂 集合と論理 (上), 明治図書 (1969), 99
- 15) G. Polya 数学の問題の発見的解き方Ⅱ, みすず書房 (1967), 175
- 16) J. S. Bruner 教育の過程, 岩波書店 (1965), 21—41
- 17) G. Polya 帰納と類比, 丸善 (1959), 13
- 18) 同上, 14
- 19) T. L. Heath ギリシヤ数学史Ⅱ, 共立全書 (1960), 239
- 20) G. Polya 帰納と類比, 丸善 (1959), 18—22
- 21) 同上, 16—18 を参考にする。
- 22) T. L. Heath ギリシヤ数学史Ⅱ, 共立全書 (1960), 239
- 23) N. C. T. M. "Insight into modern Mathematics," Washington, D. C. (1957), 69
- 24) 日本数学会編 数学辞典 (第2版), 岩波書店 (1968), 182
- 25), 26) W. C. Salmon 論理学, 培風館 (1967), 27
- 27) 前原昭二 記号論理入門, 日本評論社 (1967), 83
- 28), 29), 30) R. L. Wilder 数学基礎論序説, 培風館 (1969), 63
- 31) 近藤洋逸 形式論理学の発展, 数学教育 (明治図書) No.54 (1965), 97
- 32), 33) 石谷茂 記号論理学の指導方法と内容, 数学教育 (明治図書) No.97 (1968), 90
- 34), 35) 笹田昭三 高等学校における論理指導について, 鳥取大学教育学部研究報告 (教育科学) 第九巻 (1967), 129
- 36) D. Hilbert & W. Ackermann 記号論理学の基礎, 大阪教育図書 (1954), 45
- 37) 同上, 79—89
- 38) 小倉金之助 数学教育史, 岩波書店 (1966), 349—352; 小倉・鍋島 現代数学教育史, 大日本図書 (1956), 3—36
- 39) 小中正他 数学教育において特に配慮したい点 (2), 鳥取大学学芸学部研究報告 (教育科学) 第2巻第2号 (1960)
- 40) G. Polya 帰納と類比, 丸善 (1959), 4
- 41) G. Polya 発見的推論, 丸善 (1966), 184
- 42), 43) G. Polya 帰納と類比, 丸善 (1959), 7, 5
- 44) 笹田昭三 高等学校における論理指導について, 鳥大教育学部研究報告 (教育科学) Vol. 9 (1967), 141
- 45) 倉田令二朗 論理と集合, 数学セミナー (日本評論社) Vol. 7, No. 6 (1968), 4
- 46) 植田三郎 論理おぼえがき, 数学教室 (国土社) No. 166 (1967), 2
- 47) 44) の 138頁
- 48) 石谷茂 論理指導の現代化, 数学教育 (明治図書) No.100 (1968), 80—81
- 49) N. C. T. M. "The Growth of Mathematical Ideas", Washington, D. C. (1959)
- 50) C. H. Butlen & F. L. Wren "The Teaching of Secondary Mathematics", Mc GrawHill, Inc. (1965)
- 51) H. Freudenthal "Educational Studies in Mathematics". Dordrecht-Holland (1968)
- 52) B. E. Meserve & M. A. Sobel "Mathematics for Secondary School Teachers", Prentice-Hall, Inc. (1962)
- 53) 教育改革研究大阪会議 教育改革への提言, 明治図書 (1967)
- 54) 文部省編 数学教育現代化へのアプローチ, 学校教育研究所 (1967)

- 55) 川口延, 中島建三 数学的考え方と新しい算数, 東洋館出版 (1968)
- 56) G. Polya 数学の問題の発見的解き方, 第一巻, みすず書房 (1966)
- 57) ノヴィコフ 記号論理学, 東京図書 (1966)
- 58) 前原昭二 数理論理学序説, 共立全書 (1969)
- 59) カルジェニン 記号論理学入門, 東京図書 (1966)
- 60) ドラブキナ 記号論理学の演習, 東京図書 (1968)
- 61) 石谷茂 記号論理学とその応用, 大阪教育図書 (1967)
- 62) 石谷茂 集合・論理 (上), (下), 明治図書 (1969)
- 63) 中谷太郎 論理, 共立出版 (1967)
- 64) S. F. Barker 数学の哲学, 培風館 (1968)

SUMMARY

Mathematics is now being applied not only to natural science, but also widely to such fields as social science, planning, and management. What is important in this application is not the mere knowledge and technique of mathematics, but mathematical thinking by which we can analyse the phenomena and by which we can formulate their structure mathematically. The development of the faculty of mathematical thinking has now become an indispensable condition in the present-day world. And the advent of computer urges us to improve the traditional school mathematics in which we have been largely engaged in cultivating the faculty of calculation.

In this treatise, therefore, the writer examined what was essential to mathematical thinking (i. e., induction, analogy, deduction, axiomatic method, etc.) from the stand-point of the teaching of mathematics. And a careful examination of the traditional school mathematics made the writer feel keenly the necessity of the deliberate and systematic teaching of logic in secondary schools including probable inference, such as induction, analogy, etc.

In the last resort, the writer proposed some plans of improving the method of the teaching of logic in secondary schools. His plan for the teaching of logic in lower secondary schools is to be carried out in November of this year at Lower Secondary School attached to Tottori University. And the one for upper secondary schools will be carried out some day in the near future.

(1969年10月31日受理)