高等学校における論理指導について

数学教育教室　笹　田　昭　三

【1】 はじめに

数学教育現代化の根源は

(1) 現代数学そのものの著しい発展

(2) 科学技術のめざましい躍進

にあるといわれている。

すなわち，現代数学の著しい発展によって，数学に依存する分野が，自然科学のみならず，人間の行動に関係するあらゆる行動科学まで拡張され，とくに技術革新を象徴する電子計算機の出現は，その高速計算の威力を発揮することによって，今まで適用困難であったあらゆる分野に，数学の適用を可能にしている。また，現代数学の発展は，古典数学に基礎をおく教育数学と現代数学との間に，どうにもならないほどの大きなギャップを生じせしめた。

このような背景のもとに，新しい数学教育の方向として

(1) 抽象化された現代数学の方法とその構造を理解させ，古典数学を見通しよくし，現代数学に入り易くする。

(2) 旧来の数学教育で伝統的重みをもっていた教材を再検討し，現代社会の要請，科学技術，社会科学の要請に対応するような教材を導入する。

ことが叫ばれている。そして，このような現代化のプランとしては，いろいろの国で，いろいろの人々によって，そのねらいが提唱されているが，その共通の傾向をさぐるならば

① 集合の考え……最も能率的，効果的に現代数学のアィデアを理解させるのに役立つ。

② 記号論理学の入門……数学的推論の基礎となる。

③ 現代数学のトピックス……群・環・体・行列など。

④ 確率と統計学の入門 ……現代数学の応用分野である。

等が上げられている*。

さきにも述べたように，このような数学教育現代化の動きは，単なる流行でなく，社会と数学の両面からの要請によって起った，避けることのできない歴史的な必然であり，我々は今そうした時代を迎えているのである。したがって，我々数学教育にたずさわるものとしては，このような必然性，社会の要請，世界的大勢を正しく認識して，数学教育現代化の動きに対処しなければならない。

しかし，日本における数学教育現代化の動きを見ると，やたらに現代化の必然性を説き，文献による外国の現代化を紹介し，したがって日本でも……という傾向が強いように思われる。教育が，限りない進展を続ける，未来の社会に適応できる生徒を育てなければならないという使命をもつ以上，確かに社会や技術の要請を考慮したり，外国の動きを意識することは当然であろう。しかし，それゆえ，対象の生徒の実態を無視したり，外国における教育の特殊性を考慮しないで無批判にその国の現代化案を受け入れたり，また，大多数の犠牲のもとに，小数者の充実を図るようなことは許されない。

---

* I.C.M.I. における　ケメニー報告 (1962)

すなわち，数学教育現代化にとって欠くことのできないことは，現場における問題意識をもった実践研究であり，このような実践を通して得られる現場の発言が最も大切であると考える。

以下の研究も，このような考えのもとに，数学教育現代化の実践研究の一つとして試みたものである。なお，研究の対象に論理指導を取り上げた理由は，論理が数学的推論の基礎であり，数学の構造把握の支柱となるということと同時に，次に示す【２】,【３】の論理性の調査で，従来の数学教育があまり生徒の論理性を高めていないと考えたからである。

【2】 中学生・高校生の論理性の調査

数学教育の現代化の動きの中で，論理指導の重要性が叫ばれているが，数学で論理を重んずるのは当然のことで，何も現代化の専売ではない。現行の学習指導要領においても，中学校では図形における論証指導，また高等学校では，特に「数学と論証」という項目を設けて，それぞれ論証指導に力点をおき，それを通して論理的思考力・判断力を養うことを目標の一つにしている。

しからば，このような数学を学習することによって，生徒の論理的思考力・判断力がどのように伸びていくものか。またこのような論理的能力は学年や年令差にどのように関係するものなのか，さらにどのような教材の学習が論理的能力を高めるのに役立つか，などの問題を明らかにするために，次のような論理についての実態調査を試みた。調査は中学校一年から高等学校二年生までの生徒を対象とし，同問題，同条件のもとに行なった。

(1) 調査時期と調査対象の生徒

① 調査時期

昭和39年10月　各学年同一日　時間30分

② 調査対象の生徒について

大阪学芸大学附属天王寺中学校（中１～中３）　　　　263名

大阪学芸大学附属高等学校天王寺校舎（高１，高２）　194名

なお，同校は六ヶ年一貫教育を本則としており，外部から若干の高校新入生を加えるが，中学校と高等学校の生徒の素質は殆ど変らない。また，過去の指導において，各学年に次のような差異があった。

中１　89名　（男子62名，女子27名）

　。論証，集合の指導をしていない。

中２　87名　（男子65名，女子22名）

　。中１のとき集合についての指導をしている。

中３　87名　（男子64名，女子23名）

　。中２のとき集合についての指導をしている。

高１　100名　（男子70名，女子30名）

　。論理，集合についての指導をしていない。

高２　94名　（男子64名，女子30名）

　。高１のとき，集合，ブール代数の初歩を指導している。

(2) 調査のねらい

① 与えられたことだけを根拠にして，正しい推論ができるかどうか。

② 推論の根拠に前提の逆や裏を平気で使うことがあるかどうか。

③ 対偶とか，背理法的考え方ができるかどうか。

④ 具体・現実から離れて，純粋に論理的判断ができるかどうか。

(3) 調　査　1

① 問　題

1 次にのべられている事がらで，下線の部分が正しいものとして，それから導き出される結論が正しいといえるかどうかを調べよ（すなわち，正しい推論がなされているかどうかを調べるとよい）。そして，正しいものには○印，正しくないものには×印を（　　）の中に記入せよ。

(1) 教会に通う人はすべて善人である。私は教会に通う。ゆえに，私は善人である。（　　）

(2) 民主主義国であれば，その国民は投票権をもっている。日本国民は投票権をもっている。ゆえに，日本は民主主義国である。（　　）

(3) 白いものはすべて黒い。雪は白い。ゆえに，雪は黒い。（　　）

(4) 三角形が二等辺三角形であれば，その底角は等しい。△ＡＢＣにおいて，∠Ｂ＝∠Ｃ である。ゆえに，△ＡＢＣは二等辺三角形である。（　　）

(5) 高校を卒業していないならば，その人は大学に進学できない。私は高校を卒業している。ゆえに，私は大学に進学できる。（　　）

(6) 民主主義国では，必ずその政府の長は直接国民によって選ばれる。イギリスでは，首相が政府の長である。イギリスの首相は直接国民によって選挙されない。ゆえに，イギリスは民主主義国でない。（　　）

(7) 犬は４本足の動物である。４本足の動物は松の木ではない。松の木は植物である。ゆえに，犬は植物でない。

(8) 彼は「昨日欠席したのは病気であったからだ」といった。彼はスポーツが好きだが，しばしばうそをつく人である。昨日は，テレビで彼の好きなオリンピック競技の放送があった。したがって，彼が昨日病気で休んだのはうそである。（　　）

(9) 人はネコを飼うと，ネコをかわいがる。人がネコをかわいがると，ネコはネズミをとらない。ネコがネズミをとらないと，ネズミが増える。ネズミが増えると人はネコを飼う。ゆえに，ネズミが増えると，ネコはネズミをとらない。（　　）

(10) スポーツが好きな人は必らず数学がきらいである。英語がきらいな人は必らず国語がきらいである。A君は，数学または国語のいずれかが好きである。A君は英語がきらいである。ゆえに，A君はスポーツが好きでない。（　　）

② 望ましい答

(1) ○（三段論法）　(2) ×（根拠に前提の逆を使っている）　(3) ○（三段論法）　(4) ×（根拠に前提の逆を使っている）　(5) ×（根拠に前提の裏を使っている）　(6) ○（対偶を使っている）

(7) ×（裏を使っている）　(8) ×（根拠があいまい）

(9) ○（三段論法）

(10) ○（三段論法・対偶または背理法）

③ 調査の結果

この調査結果を示したのが第１表でであ。

（表の数字は誤答・無答の百分率を表わす）

第１表　調査１の結果（誤答率 %）

問題番号 ＼ 学年・性別	中1 男(62)	中1 女(27)	中1 計(89)	中2 男(65)	中2 女(22)	中2 計(87)	中3 男(64)	中3 女(23)	中3 計(87)	高1 男(70)	高1 女(30)	高1 計(100)	高2 男(64)	高2 女(30)	高2 計(94)
(1)	0	4	1	0	5	1	3	0	2	7	0	5	0	0	0
(2)	52	70	57	23	45	28	22	26	23	34	30	32	6	20	11
(3)	8	7	8	5	5	5	8	4	7	11	3	9	3	0	2
(4)	71	93	78	45	54	47	44	61	48	53	57	54	28	30	29
(5)	44	52	46	18	45	25	34	39	36	34	40	36	30	33	31
(6)	16	11	15	9	9	9	16	9	14	20	30	22	9	3	7
(7)	71	85	75	58	65	61	53	74	59	64	63	64	36	33	35
(8)	0	11	3	0	0	0	0	0	0	3	0	2	3	0	2
(9)	42	33	39	37	36	37	27	43	31	39	31	37	25	20	23
(10)	64	52	61	48	45	47	47	52	48	55	67	59	31	23	29
平　均	37	42	38	24	31	26	25	31	27	32	32	32	17	16	17

(4) 調　査　2

① 問　題

[2] あるクラスの座席で，A，B，C，D，E，F，G の7人が下図のように1列に座っている。

（前）	A	B	C	D	E	F	G	（後）

この7人の9月中の出席状態を調べたところ，次のことがわかった。

「どんな日でも，自分の前の席の人が出席した日に，その人は必らず出席した。」

この結果をもとにして，この列7人の出席状態について次の問いに答えよ。

(1) 9月1日に，A君は出席した。この日の出席状態は，次のうちどれか。

㋑ 全員出席　　㋺ これだけでは判断できない　　㋩ 出席者は大多数だった

(2) 9月10日は，A君が欠席したが，C君は出席した。この日の出席状態は，次のどれか。

㋑ 出席者は6人だった　　㋺ 出席者は5人だった　　㋩ これだけでは判断できない

㋥ C君だけが出席した

(3) 9月20日にG君は出席した。この日の出席状態は次のうちどれか。

㋑ 全員出席　　㋺ G君だけ出席した　　㋩ これだけでは判断できない

(4) 9月30日にG君は欠席した。この日の出席状態は次のうちどれか。

㋑ 全員欠席　　㋺ これだけでは判断できない　　㋩ 出席者は6人だった。

② 正しい答

(1) ㋑　　(2) ㋩　　(3) ㋩　　(4) ㋑

③ 調査結果

この調査結果を示したのが第2表である。

（表の数字は誤答，無答の百分率を示す）

第2表　調　査　2　の　結　果（誤答率　%）

問題番号＼学年・性別	中1 男(62)	中1 女(27)	中1 計(89)	中2 男(65)	中2 女(22)	中2 計(87)	中3 男(64)	中3 女(23)	中3 計(87)	高1 男(70)	高1 女(30)	高1 計(100)	高2 男(64)	高2 女(30)	高2 計(94)
(1)	3	0	2	3	5	3	5	0	3	4	3	4	0	0	0
(2)	42	37	40	20	18	19	20	17	19	22	37	26	9	13	10
(3)	37	52	49	23	27	24	33	22	29	36	30	34	3	20	8
(4)	56	66	59	54	50	53	55	40	52	53	47	51	34	20	28
平　均	35	39	38	25	25	25	28	20	26	29	29	29	12	13	12

【3】 調査の分析と考察

この調査は二者択一という弱みを含み，論理性を調べるのには，やや雑な調査であり，これを根拠に考察を進めるのは論理的でないかも知れない。まず，「論理性とは何か」がはっきりしなければ，それが養われたかどうかを正しく評価できない。また，その評価の方法にも問題があろう。

そこで，ここでは調査したような問題に正しく答えられることも論理的思考力の一部であるとして，調査結果を分析し考察を進めてみたい。

(1) 全体を通しての傾向

① 単純な三段論法および推論の根拠のあいまいな問題については，全学年を通してよくできる。（[1]の(1)，(3)，(8)；[2]の(1)）

② 前提の逆・裏を推論の根拠とする誤りが多い。

（1の(2)，(4)，(5)，(7)；2の(2)，(3)）

特に，1の(4)の誤りの多いのに注目したい。これは実際には逆も成り立つ例だけに，論理に弱さがある者は殆ど誤ったようである。

③ 対偶を推論の根拠とする問題1の(6)は，集計の結果は比較的できているが，これは②で指摘したような論理の弱さが対偶が真であることに支えられて，偶然当たった者も含まれるだけに，この結果をこのまま信ずるわけにはいかない。むしろ，同様の推論が必要な2の(4)の結果が良くないことから考えて，ここでも②の場合と同様に論理の弱さを認めざるを得ない。

④ 1の(9)は，三段論法の組み合わせであるが，比較的誤答が多かったのは，結論が現実ばなれているので，常識的判断が論理的推論を邪魔したからだと思われる。

⑤ 1の(10)は，三段論法，推論形式（$p \vee q$，$\sim q \Rightarrow p$），対偶または背理法などを用いる総合的問題だけに，1の(4)，(7)，2の(4)と同様に誤答が多かった。

⑥ このテストの解答方式が二者択一であるので，正答の中にも相当数の誤答がかくれていると思われる，したがって，実質上の誤答は，前記の表を更に上回ると考えなければならない。

以上のように，生徒の論理的判断力は，単純な三段論法とか順思考においては，大分確かであるが，前提に逆・裏・対偶が含まれる問題では，その判断力は非常にあやふやなものであることがわかる。

(2) 学年別の傾向と比較

調査の結果を学年別に比較すると，次のようなことがわかる。

① 単純な三段論法や根拠のあいまいな推論については，中1から高2まで全く同様の好成績である。つまり，この程度の論理は，数学とか論証を通して得られたというより，むしろ彼等の生活体験を通して自然に得られた常識的判断力と考えられる。

② 推論の根拠に前提の逆を用いている問題（1の(2)，(4)，2の(3)）について，中1の誤答率が他の学年のそれよりはるかに高いのは，中1がまだ論証指導を受けていないというハンディ・キャップによるものと考えられる。つまり，このような論理的判断力は或る程度論証指導によって養われる。

③ 正答率で各学年の成績を比較すると，高2が最もよく，次に中2・中3，少しはなれて高1，そして中1と続く。

これは予想外の結果だけに注目したい。論証指導を行なっていない中1が最も悪いのは納得できるが，それに次いで高1が悪いのは意外である。前述のように，同校の各学年の生徒の素質は殆ど同じとみてよいので，この原因はその外に考えなければならない。それで，いろいろ原因を追求したが，結局過去の指導において次のような差異があったことが大きな原因であると考えられる。

㋑ 中1は論証，集合の指導がなされていない。

㋺ 高1は殆ど集合，論理についての指導がなされていない。

㋩ 中2，中3は以前に集合の指導を受けている。

㋥ 高2は高1のとき集合，論理についての指導を受けている。

④ 中2，中3，高1の誤答率を比較してみると。「学年が進むにつれて生徒の論理的思考力が伸びる」とは必ずしも言えない。このことは，「幼児の思考の特長である自己中心的思考から論理的思考への発達過程は，7，8才頃から急速に発達して12才頃で本格的な論理的思考をするよう

になる」と心理学者ピアジェ（J. Piaget）等が指摘しているように，12才頃になると成人同様の形式思考ができるようになるが，以後特別な訓練なくしてこのような思考力があまり発達しないことを物語っているように思われる。

以上のことから，従来の図形の論証指導によって或る程度生徒の論理性が養われるが，その伸びはあまり大きくない。それより，集合など論理に関係する教材を指導すると，命題「A→B」の真偽をA，Bの外延の包含関係で図形的にとらえるようになり，論理的判断や推論がはっきりしてくるように思われる。

(3) 調査の結果と数学の成績との関係

この調査の結果と数学のテスト（調査年度の第1学期期末テスト）との関係を，中学校3年生について調べてみると次の第3表のようになった。なお，中2，高1についても似たような表が得られた。（ただし，調査の点数は，1では各問1点，2では各問2点，計18点満点とした。）

第3表　調査の結果と数学の成績との関係

調査(点)＼数学のテスト	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	計
95点以上							1	1		1	1		4
90～94						2	1	1	2		1	1	8
85～89					2	1	2	2	1	1		1	10
80～84			1	1		3	2	2	2		1		12
75～79		1	1	2		2	3	4		1	1		15
70～74				1	2		1			1	1	1	7
65～69			1	2		3	2	1	2	1	1		13
60～64					1		2	2					5
55～59					1								1
50～54			1	1	2					1			5
45～49			1			1							2
40～44			1	1									2
40点未満	1	1	1										3
計	1	2	7	8	8	12	14	13	7	6	6	3	87

（相関係数：r＝0.53）

この相関表によると

① 数学のテストの成績低位者は，この調査による論理性もきわめて悪いといえるが，

② 一般には，相関関係が強いとはいえない。（相関係数：r＝0.53）

このことは，数学の学力と論理的判断力とがそれほど強い関係がないということではなく，生徒の持っている論理的思考力とか推論形式というものが，数学と強く結びついて，或いは数学を通して養われたというより，むしろ今までの生活体験を通して自然に培かれてきたためではないだろうか。

(4) 論理指導の必要性について

以上三つの観点から調査の分析を試みたが，これを中心に中等教育における論理指導の必要性について考えてみたい。

まず第一に，前提の逆・裏を推論の根拠とする誤答が全学年を通して非常に多かったが，これは論証指導における大きな障害となると思う。よく高校生の中でも，「A→B」を証明するのに，「B→A」を証明して平気でおる者を多く見かけるが，これは定理の逆・裏を推論の根拠とするような論理

の甘さを如実に示すもので，これではとても論証指導をしたなどとは言えない。やはり，この点の論理のけじめをはっきりさせることによって，初めて論証指導の成功があり得ると思う。したがって，高等学校は勿論のこと，論証指導を一つの目標としている中学校の数学でも，論理についての意識的・集中的な指導が必要であると考える。

第二に，「学年が進むにつれて，生徒の論理性が伸びるとは言えない。また，中学生でも集合など論理に関係する教材を指導すると，それを指導しなかった高校生よりはるかに論理性が確かになる。」という調査の結果を信頼すれば，意識的に論理の指導をすることによって，このような論理性を高めることができると考えられる。また，中学校においても，集合指導後にベン図による論理指導をすることは決して不可能なことはなく，指導の工夫によってはその効果も十分期待できると思う。

第三に，現在，生徒が身につけている論理的推論形式が，数学を通して養われたというよりむしろ，生活体験を通して自然に培われたものだとすれば，論理性を養うことを一つの目標としている数学科にとっては，これは実に大きな問題であると言わざるを得ない。この点から考えても，やはり数学と結びついた，数学を通しての論理指導が必要であると考える。

【4】 論理指導の実践の目的と計画

以上のような調査結果の考察のもとに，中等教育における論理指導の必要性を痛感し，前任校（大阪学芸大学附属高等学校）の横田稔良教官とともに，中学校・高等学校の論理指導の実践を計画した。そして昭和41年度に，横田氏はベン図による論理指導を中学校３年生に，筆者は真理表による論理指導を高等学校１年生に行なった。以下に示すのは，筆者が高１対象に行なった論理指導実践の概要である。

(1) 実践の目的

さきに述べたように，数学教育の現代化の目標の中で，中等教育に記号論理学の初歩を導入することが上げられている。現在の高等学校でそれを取り上げる場合，どんな内容を，どの程度，どのように指導したらよいのか。また，その指導の可能性の程度はどうか。さらに，さきの調査分析で指摘されたような論理の弱さが，このような指導で充実されるかどうか，などを明かにするためにこの実践を試みた。

(2) 指導の時期と対象生徒

① 指導の時期　昭和42年１月31日～２月22日
　◦ 指導時間　８時間　　◦ 調査テスト　１時間

② 対象生徒　大阪学芸大学附属高等学校１年生（４組171名）
　◦ 集合（数Ⅰ）の指導は既に終っていた。

(3) 指導の目標

記号論理学入門が現代化の一つの柱として上げられている理由は，論理が数学学習に必要であるばかりでなく，数学の構造把握の支えとなると同時に，電子計算機の原理まで発展できるところに重要性が認められているからだと思われる。しかし，今回の実践ではそのような発展まで考えていない。ただ，真理表を用いての記号論理の初歩を指導することによって，次のようなことを確かにすることが主な目標である。

① 「または」，「かつ」，「すべての」，「少くとも１つの」等の論理語の意味をはっきりさせ，それらの言葉を用いて論理的に正しい表現や推論ができるようにする。

② 命題の否定を明確にし，特に①の論理語と否定の関係を明かにする。

③　生徒は少しの疑いもはさまず，本能的に三段論法や背理法などの推論形式を用いている。そこで推論の有効性や命題の同値性を真理表を用いて検証し，それによって今まで十分自覚せずに用いていた論理の重要さを確認させ，意識的にこれを検証したり，用いたりする態度を養う。

(4)　**指導項目と配当時間**

§1　命題の意味と結合……（0.4時間）
§2　簡単な真理表…………（0.6時間）
§3　合成命題………………（1　時間）
§4　条件命題と真理集合…（0.5時間）
§5　条件文と双条件文……（1　時間）
§6　逆・裏・対偶…………（0.5時間）
§7　恒真命題と恒偽命題…（0.5時間）
§8　記号の法則……………（1　時間）
§9　推論の方法……………（1.5時間）
§10　全称命題・存在命題…（1　時間）
テスト………………（1　時間）

【5】　指導の内容と展開

実験用テストを作成して教材として用いたが，以下に示すのがテキストの概要である。

§1　命題の意味

(1)　命題の意味

例をもって命題の意味を説明，また条件命題の意味も明かにする。

(2)　命題の結合

命題は，「……，かつ……」「……，または……」「……ない」「……ならば，……」という言葉で結合されて，新しい命題を作ることを知らせる。

問1　次の命題はどんな言葉で結合されているか。

(1)　彼女は頭がよくて，美人だ。
(2)　彼は病気か，サボだ。
(3)　$a=b$ したがって $a^2=b^2$
(4)　彼は数学の勉強をするが，英語の勉強をしない。

§2　簡単な真理表

(1)　離接 $p\vee q$（pまたはq）

pとqはいずれも命題であるから，それは真であるか偽であるかのいずれかである。したがってp，qが真であるか偽であるかに従って考えうる可能な場合をあげると次の4通りである。

①　pが真でqが真　　②　pが真でqが偽　　③　pが偽でqが真　　④　pが偽でqが偽

さて，「pまたはq」が真であるという主張は

①　pが真であるか　　②　qが真であるか　　③　pもqも真であるか　　のいずれかであることを意味している。

よって，この事実を示すために，真であることをT（true），偽であることをF（false）で表わして，第4表のように書き表わすと便利である。このような表を，命題「pまたはq」（$p\vee q$）の真理表という。

同様にして，合接 $p\wedge q$，否定 $\sim p$ の真理表を指導する。

(2) 合接 $p\wedge q$（pかつq）（第5表）

(3) 否定 $\sim p$（pでない）（第6表）

問2　命題pとqが次のように与えられているとき，$p\vee q$，$p\wedge q$ の真偽をいえ。

(1) p：東京は日本にある。　q：パリーはフランスにある。

(2) p：三角形の内角の和は360°である。　q：四辺形の内角の和は180°である。

(3) p：3は8の約数である。　q：3は素数である。

(4) p：$6+3=10$　q：$6\times 3=18$

問3　命題p，qが次のように与えられている　p：太郎が頭がよい。q：花子が頭がよい。

このとき，次の命題を記号∨，∧，～を用いてかき表わせ。

(1) 太郎も花子も頭がよい。

(2) 太郎は頭がよい，または花子が頭がよいかのいずれかである。

(3) 少くとも，太郎は頭がよくない。

(4) 太郎が頭がよい，しかし花子は頭が悪い。

問4　次の数学上の事柄を，記号∨，∧を用いて表わせ。

(1) $a\leqq b$　(2) $x=\pm 3$　(3) 連立方程式　$x+3y=1$，$2x-3y=5$

(4) α が $ax^2+bx+c=0$ と $mx+n=0$ の共通根である。

第4表　$p\vee q$ の真理表

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

第5表　$p\wedge q$ の真理表

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

第6表　$\sim p$ の真理表

p	$\sim p$
T	F
F	T

〔指導上の留意点〕

① われわれが日常語に用いる「または」の意味は，p,qの一方だけが真のときに限って，「pまたはq」が真であるとする場合が多い。そこで，この混乱を避けるために，「$xy=0$」すなわち「$x=0$ または $y=0$」において、$x=0$ かつ $y=0$ のとき「$xy=0$」が真であることを説き，数学や論理では「または」をテキストのような意味にとることを強調した。また，日常語に用いられている意味の「または」はこれと区別して，記号 $p\underline{\vee}q$ を用いて表わすこともつけ加える。

② 文章や数学上の事柄を，記号∨,∧,～を用いて正しく表現できるかどうかに注意を払った。

§3　合成命題

(1) 合成命題と真理表

○ 合成命題の意味

§2　問題3の命題や $(p\wedge q)\vee q$，$\sim(p\vee q)$ 等のように記号∨，∧，～を用いて，2つ以上の命題を組合わせて作った命題を合成命題という。

○ 合成命題の真理表の作り方

合成命題 $\sim(p\vee q)$ の真理表は，第7表に示すような番号の順序で，基本の真理表のルールに従って完成することを指導する。

第7表　$\sim(p\vee q)$ の真理表の作り方

p	q	～(p	∨	q)
T	T	T		T
T	F	T		F
F	T	F		T
F	F	F		F
		(1)		(1)

p	q	～(p	∨	q)
T	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	F
		(1)	(2)	(1)

p	q	～	(p	∨	q)
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
		(3)	(1)	(2)	(1)

問５　$(\sim p)\wedge(\sim q)$ の真理表を作れ。

(2) 論理的に同値な命題

$\sim(p\vee q)$ と $(\sim p)\wedge(\sim q)$ の真理表（(3)の列）は全く一致している。このように，p，q の真偽に対して，全く同じ真偽を与える２つの命題は，全く同じことを意味するから，これを論理的に同値であるといい，

$$\sim(p\vee q) = (\sim p)\wedge(\sim q)$$

とかく。

問６　次の２つの命題が論理的に同値であることを示せ。

(1) $\sim(p\wedge q)$　　(2) $(\sim p)\vee(\sim q)$

(3) ド・モルガンの法則

$$\sim(p\vee q) = (\sim p)\wedge(\sim q)$$
$$\sim(p\wedge q) = (\sim p)\vee(\sim q)$$

問７　命題 p，q が次のように与えられている

p：彼女は数学が得意だ。　q：彼女は美人だ。

このとき，次の命題を文章でのべよ。

(1) (イ) $\sim(p\vee q)$　　(ロ) $(\sim p)\wedge(\sim q)$

(2) (イ) $\sim(p\wedge q)$　　(ロ) $(\sim p)\vee(\sim q)$

問８　次の事柄の否定をいえ。

(1) 太郎は学校に間に合って，しかも忘れ物をしない。

(2) 太郎か花子は数学が好きである。

(3) $x=0$　または　$y=0$

(4) x は６と９の公約数である。

問９　次の合成命題の真理表を作れ

(1) $(\sim p)\vee q$　　(2) $\sim[p\wedge(\sim q)]$　　(3) $\sim[p\vee(\sim q)]$

問10　次の式を証明せよ。

(1) $\sim(\sim p)=p$　　(2) $p\vee(p\wedge q)=p$　　(3) $\sim[p\wedge(\sim q)]=(\sim p)\vee q$

〔指導上の留意点〕

① 合成命題の真理表の完成順序を正しく理解し，最後に記入した列がその命題の真理値であることを徹底する。

② 論理的に同じ２つの命題が，真理表によって確かめられることや，「$p\vee q$」「$p\wedge q$」の否定が，ド・モルガンの法則によって導かれることを知らせる。

§４　条件命題と真理命題

(1) 真理集合の意味

x を実数とするとき，条件命題：$x^2-4x<0$ を真とする x の範囲は $0<x<4$ である。このように，条件命題を真とするような変数 x の値の集合を，この条件命題の真理集合という。

同様に，(x,y) を平面上の点とするとき，条件命題：$x^2+y^2<1$ の真理集合は，原点を中心とし，半径１の円の内部の点集合である。

(2) $p\vee q$，$p\wedge q$，$\sim p$ の真理集合

条件命題　p，q の真理集合をそれぞれ P，Q とするとき，

- $p\vee q$ の真理集合＝和集合 $P\cup Q$
- $p\wedge q$ の真理集合＝共通集合 $P\cap Q$

◦　$\sim q$ の真理集合＝補集合 P'

であることを示す。

問11　条件命題 p，q が次のように与えられている。

$p:\ (x-2)(x+1)<0$　　　$q:\ x^2+4x>0$

(1)　p，q の真理集合を求めよ。

(2)　$p\wedge q$，$p\vee q$，$(\sim p)\wedge q$ の真理集合を求めよ。

問12　条件命題 p，q が次のように与えられている。

$p:\ xy>2$　　　$q:\ x^2+y^2<5$

このとき，次の命題の真理集合を図示せよ。

(1)　p　(2)　q　(3)　$p\vee q$　(4)　$p\wedge q$　(5)　$\sim q$　(6)　$(\sim p)\wedge q$

問13　条件命題 p が常に真のとき，その真理集合は何か。また，条件命題 q が常に偽のとき，その真理集合は何か。

§5　**条件文と双条件文**

(1)　条件文「$p\to q$」の真理表を次の3通りの方法で説明した。

①　「$p\to q$」が真であるという主張は「p であって，q でない」ということはない，ということを意味している。これは，真理表の2段目の否定であるから，第8表のような真理表ができる。

第8表　$p\to q$の真理表

p	q	$p\longrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

②　「$p\to q$」が真であるという主張は，〔「p であって，q でない」ということはない〕，すなわち〜〔$p\wedge(\sim q)$〕を意味している。これをド・モルガンの法則で変形すると

$p\to q=\sim[p\wedge(\sim q)]=(\sim p)\vee q$

$(\sim p)\vee q$ の真理表を作ると，①と同じ真理表を得る。

③　約束による説明

p：「明日雨が降る」，q：「僕は君にプレゼントする」とすると，条件文「$p\to q$」は「明日雨が降ったならば，僕は君にプレゼント」という約束となる。この約束が破られた場合は「$p\to q$」は偽で，約束を破らなかった場合は「$p\to q$」は真である。この説明から，①と同なじ真理表を導く。

(2)　双条件文「$p\leftrightarrow q$」

双条件文「$p\leftrightarrow q$」を次のように定義して，その真理表を導く（第9表）。

$p\leftrightarrow q=(p\to q)\wedge(q\to p)$

第9表 $p\leftrightarrow q$の真理表

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

問14　n が5以下の自然数のとき，次の条件文の真偽を調べよ。

n が6の約数ならば，n は15の約数である。

問15　次の命題を記号 $\vee$，$\wedge$，〜を用いて表わせ。

(1)　$(\sim p)\to q$　　(2)　$p\leftrightarrow q$

(3)　条件文と真理集合

◦　$p\to q=(\sim p)\vee q$ から，「$p\to q$」の真理集合は $P'\cup Q$ であることを示す。

◦　$p\to q$ が常に真であるためには，すなわち $P'\cup Q$ が全体集合であるためには，$P\subset Q$ でなければならないことを示す。

◦　また，$P\subset Q$ ならば，明かに命題「$p\to q$」が真であることから，命題と真理集合の次の関係を導く。

命　題　　　　　　　真理集合

「$p \to q$」が常に真　$\Leftrightarrow$　$P \subset Q$

問16　真理集合を用いて，次のことがらを証明せよ。

(1)　$x^2+y^2<1$　ならば　$x+y<\sqrt{2}$

(2)　$x^2+y^2<y$　ならば　$x^2+y^2<1$

〔指導上の留意点〕

① 日常言語の「pならばq」は，常識的には，pが偽のときは，この文の真偽を考えない。したがって，生徒にとっては条件文「$p \to q$」の真理表がわかりにくいことを考え，上記に示した3つの方法で説明して，その納得の程度を調べることにした。なお，

$\forall x\,[x>1 \to x^2>1]$　(x：実数)

が真となるためには，前件pが偽のとき，条件文「$p \to q$」を真としたければならないこと；またこの様に定めると，「$x>1 \to x^2>1$」は$x>1$と限定しないで実数全体でこの命題が真といえる便利さを強調した。

② $p \to q=(\sim p) \vee q$ をとくに強調する。

③ p が常に偽のとき，条件文 $p \to q$ は常に真となる。したがって，真理集合では $P \subset Q$，ところが $P=\varnothing$だから$\varnothing \subset Q$。このように，空集合を任意の集合の部分集合とするのは，条件文の真偽の約束と密接な関連があることを知らせる。

§6　逆・裏・対偶

(1)　逆・裏・対偶の真理表

条件文 $p \to q$ に対して，それぞれ

逆：$q \to p$　　裏：$\sim p \to \sim q$　　対偶：$\sim q \to \sim p$

という。これらの真理表を作ると，第10表のようになる。

第10表　　逆・裏・対偶の真理表

p	q	~p	~q	p→q	q→p	~p→~q	~q→~p
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

(2)　条件文とその対偶は同値である（第10表から）。

$$p \to q \;=\; \sim q \to \sim p$$

問17　次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽をいえ。

(1)　4で割り切れる整数は2で割り切れる。

(2)　$a=0$ならば $ab=0$である。

(3)　正三角形の三つの内角は相等しい。

(4)　合同な二つの三角形の面積は相等しい。

(5)　$(a>0)\wedge(b>0) \to ab>0$　　(a, b は実数)

問18　次の命題の逆・裏・対偶を作れ。

(1)　$(p \vee q) \to r$　　(2)　$(p \wedge q) \to r$　　(3)　$p \to (\sim q \wedge r)$

問19　次の命題を，その対偶が真であることを示すことによって証明せよ。

(1)　xy が奇数ならば，x も y も奇数である。(x, y は整数)

(2)　$a^2+b^2=0$ならば，$a=0$かつ $b=0$である。(a, b は実数)

§7　恒真命題と恒偽命題

第11表　$p\to(p\vee q)$ の真理表

p	q	p	→	(p∨q)
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	F

(1)　恒真命題（トートロジー）

条件文 $p\to(p\vee q)$ の真理表を作ると，第11表のようになり，常に論理的に真である。このように，真理表にTばかり並ぶ命題を恒真命題（トートロジー）といい，記号Ⅰで表わす。

(2)　恒偽命題

同様に，$p\wedge(\sim p)$ のように真理表に F ばかり並ぶ命題を恒偽命題といい，記号Oで表わす。

問20　次の命題のうち，恒真なものはどれか，また，恒偽なものはどれか。

(1)　$p\to p$　　(2)　$\sim[p\vee\sim p]$　　(3)　$[(\sim p)\wedge q]\to(p\wedge q)$

§8　記号の法則

命題に関する次のような基本法則を真理表を用いて確かめる。

(1)　交換法則　$p\wedge q=q\wedge p$　　$p\vee q=q\vee p$

(2)　結合法則　$p\wedge(q\wedge r)=(p\wedge q)\wedge r$　　$p\vee(q\vee r)=(p\vee q)\vee r$

(3)　分配法則　$p\wedge(q\vee r)=(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$　　$p\vee(q\wedge r)=(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

(4)　巾等法則　$p\wedge p=p$　　$p\vee p=p$

(5)　吸収法則　$p\wedge(p\vee q)=p$　　$p\vee(p\wedge q)=p$

(6)　二重否定　$\sim(\sim p)=p$

(7)　ド・モルガンの法則

$\sim(p\wedge q)=(\sim p)\vee(\sim q)$　　$\sim(p\vee q)=(\sim p)\wedge(\sim q)$

(8)　ⅠとOについての法則

$p\wedge(\sim p)=O$　　$p\vee(\sim p)=I$

$O\wedge p=O$　　$I\vee p=I$

$I\wedge p=p$　　$O\vee p=p$

$\sim O=I$　　$\sim I=O$

＜例1＞　連立方程式　$x^2+y^2=1$，$x^2-3xy+2y^2=0$ が分配法則によって，次の2つの連立方程式に分けて考えられることを示す。

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=2x \end{cases}\qquad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x \end{cases}$$

＜例2＞　基本法則を用いて，次の等式を説明せよ。

(1)　$[\sim(p\vee q)]\wedge p=O$　　(2)　$\sim[p\wedge(\sim q\vee r)]=\sim p\vee(q\wedge\sim r)$

問21　次の等式を証明せよ。

(1)　$(p\wedge q)\vee(p\wedge\sim q)=p$　　(2)　$\sim[p\vee(\sim p\vee\sim r)]=\sim p\wedge q\wedge r$

問22　次の命題を簡単にせよ。

(1)　$(x\geqq 0)\wedge(x=5\vee x=-2)$

(2)　$(x=-1)\wedge(x>2\vee x<-3)$

〔指導上の留意点〕

①　3つの命題 p, q, r に関する真理表が，この§で初めてでてきたので，その説明に比較的時間をさいた。

②　上記のような法則が成り立つことと，双対性について簡単にふれる程度にした。これらの法則を用いて，いろいろの命題計算することは避けた。

§9　推論の方法

(1)　推論の有効性

$p \to q$ が真で，p も真であるとしてみよう。この場合，$p \to q$ の真理表をかき，この表の右にさらに p と q の欄をつけ加えれば，第12表のようになる。

第12表

p	q	p→q	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

ここで，$p \to q$ が真であるから，$p \to q$ の欄のうち第１，３，４行に着目して p の欄をみる。$p \to q$ と同時に p も真であるから，第１，３，４行のうちＴのある第１行のみに着目して q の欄をみると，q も真であることがわかる。

すなわち，$p \to q$ が真かつ q が真であれば，q も真である。これを記号で右のように書き表わす。

$$① \quad \begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore \quad q \end{array}$$

このように，前提の命題がすべて真なら結論の命題も真であるとき，この推論は有効であるという。また，①の推論形式は，次の例のように，数学でしばしば用いられる推論形式である。

＜例＞　定理「二等辺三角形の底角は等しい」

$$\begin{array}{l} \underline{\triangle ABC \text{において} \quad AB = AC} \\ \therefore \qquad \angle B = \angle C \end{array}$$

以下同様にして，次の代表的な有効な推論形式を取り上げ，その有効性を確かめ，このような推論形式が数学でどのような場合に用いられているかを例で示す。

$$② \quad \begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \therefore \sim p \end{array} \qquad ③ \quad \begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array} \qquad ④ \quad \begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p \qquad} \\ \therefore \quad q \end{array}$$

$$⑤ \quad \begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \to r \qquad} \\ \therefore p \to q \wedge r \end{array} \qquad ⑥ \quad \begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore \quad p \end{array} \qquad ⑦ \quad \begin{array}{l} p \\ \underline{q \qquad} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

問23　上記の④～⑦の推論の有効性を確かめ，それが用いられる例を上げよ。

問24　次の推論が有効かどうかを調べよ。

$$(1) \quad \begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \qquad\quad} \\ \therefore \quad p \end{array} \qquad (2) \quad \begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim p \qquad} \\ \therefore \sim q \end{array} \qquad (3) \quad \begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim r \to \sim q} \\ \therefore \sim r \to \sim p \end{array}$$

問25　次の推論の有効性を調べよ。

(1)　国が民主主義国ならば，その国民は投票権をもっている。日本の国民は投票権をもっている。ゆえに，日本は民主主義国である。

(2)　被害者を刺し殺した犯人は，そのとき殺人現場にいた。彼はそのとき殺人現場にいなかった。ゆえに，彼は被害者を刺し殺した犯人ではない。

(2)　間接証明法

$p \to q$ を証明する代りに，$p \to q$ と論理的に同値な命題を証明する方法を間接証明法という。

間接証明法を与える等式には，次のようなものがある。

①　$p \to q = \sim q \to \sim p$　　　②　$p \to q = p \wedge \sim q \to \sim p$

③　$p \to q = p \wedge \sim q \to q$　　　④　$p \to q = p \wedge \sim q \to r \wedge \sim r$

問26　①～④ の等式を証明せよ。

次に，これらを用いる間接証明の例を１つずつ上げ，とくに④を用いる場合を背理法といっている

ことを強調した。

問27　次の命題を間接証明法を用いて証明せよ。また，①〜④のうちどの方法を用いているか。

(1)　x が整数で，x^2 が奇数ならば，x は奇数である。

(2)　$x+y>0$ ならば $x>0$ または $y>0$　　(x，y は実数)

(3)　a，b，c が実数ならば，a^2-bc，b^2-ca，c^2-ab のうち少くとも１つは負でない。

〔指導上の留意点〕

生徒はいままで少しの疑いをはさまず，三段論法や背理法の推論形式を用いていた。そこで，推論の有効性や間接証明法の妥当性を真理表を用いて検証することによって，いままで十分自覚せずに用いていた論理の重要さを確認させ，今後これを意識的に検証したり，用いたりする態度を養うように努めた。

§10　全称命題と存在命題

(1)　全称命題と存在命題

○　「すべて」の命題

「すべての実数 x について，$x^2+x+1>0$ である」，「このクラスのすべての生徒は眼鏡をかけている」のように，「すべての x について，Aである」の形の命題を全称命題といい，次のように表わす。

$$\forall x A(x) \quad 〔A(x) : x \text{ はAである}〕$$

$\forall x$ は全称記号とよばれ，「すべてのxについて」または「任意のxについて」を意味する。

○　「ある」の命題

「少くとも１つの実数 x で，$f(x)=0$ となる」のように，「あるxについて，Aである」の形の命題を存在命題といい，$\exists x A(x)$ で表わす。$\exists x$ は存在記号とよばれ，「ある x について」，「少くとも１つの x について」を意味する。

問28　次の命題を記号で表わせ。

(1)　すべての実数 x について，$x^2+x+1>0$ が成りたつ。

(2)　$x^2-x+6<0$ をみたす実数 x が存在する。

(3)　x が実数のとき，$f(x)$ の最小値はMである。($\forall x$，$\exists x$ をそれぞれ用いて，２通り書き表わせ)

(2)　「すべて」と「ある」の否定

x の集合Ωが有限集合で，$\Omega=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ とするとき

$$\forall x A(x)=A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\cdots\wedge A(x_n)$$
$$\exists x A(x)=A(x_1)\vee A(x_2)\vee\cdots\cdots\vee A(x_n)$$

となる。したがって，ド・モルガンの法則を用いると

$$\begin{aligned}\sim〔\forall x A(x)〕&=\sim〔A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\cdots\wedge A(x_n)〕\\&=\sim A(x_1)\vee\sim A(x_2)\vee\cdots\cdots\vee\sim A(x_n)\\&=\exists x〔\sim A(x)〕\end{aligned}$$

同様に　$\sim〔\exists x A(x)〕=\forall x〔\sim A(x)〕$

このことから，一般に

「すべての x はAである」の否定 ≡「あるxはAでない」

「ある x はAである」の否定 ≡「すべてのxはAでない」

であることに注意させる。

問29　問28(1)，(2)の否定文をいえ。

問30　次の命題の否定を文にかきなさい。

(1)　このクラスの中には近眼の者がいる。

(2)　10より小さい素数の平方は，すべて50より小さい。

(3)　すべての政治家は献金をうけるか，買収を行なう。

(4)　A組の生徒の中には，このテストの問題5題とも解けない者がいる。

【6】 指導後のテストの結果と考察

指導内容§1から§10までを指導した直後，その理解の程度を知るために，次のようなテストを実施してみた。

(1)　実施対象の生徒について

実施対象の生徒は，論理指導した1年4学級のうちの2学級84名（男子61名，女子23名）である。これらの学級は，平等の組分けによる普通学級である。また，調査結果の集計に関しては，対象生徒84名（うち男子1名，女子2名欠席）を学年末の数学の評価によってさらに次の3群に分け，考察する上での便宜を計った。

上位群　（数学の評価が5，4に相当するもの）

中位群　（数学の評価が　3　に相当するもの）

下位群　（数学の評価が2，1に相当するもの）

なお，対象生徒の知能指数（東大AS-式）は，第13表のような分布をなす。

第13表　対象生徒の知能指数の分布（%）

		男	女	上	中	下	計
人　数（人）		60	21	35	28	18	81
男	(%)	74		80	75	61	74
女	(%)		26	20	25	39	26
知能テスト(%)	～ 88	2			4		1
	90～ 99	2			4		1
	100～114	28	20	29	11	44	26
	115～130	47	57	46	64	33	49
	131～	22	24	26	18	22	22
数学の評価(%)	1						
	2	18	33			100	22
	3	35	33		100		35
	4	27	24	60			26
	5	20	10	40			17

(2)　テストの問題（50分）

1　命題 p,q が次のように与えられている。

p：太郎は強い　　　q：次郎は弱い

このとき，次の命題を∨，∧，～を用いてかき表わせ。

(1)　太郎は強く，次郎は弱い。　　(2)　太郎は弱い，しかし次郎は強い。

(3)　太郎が弱いか，または次郎が弱い。　　(4)　太郎も次郎も弱い。

(5)「太郎が強いか，または次郎が強い」ということはない。

2 次の$\square$の中に記号$\vee$，$\wedge$を入れよ。

(1) 数学の記号 $x \geqq y$は　$(x>y) \square (x=y)$

(2) $x=y=z$は　$(x=y) \square (y=z)$

(3) 連立方程式　$2x-3y=1$，$x+3y=4$は$(2x-3y=1) \square (x+3y=4)$

(4)「x，y，zのうち少くとも2つは等しい」は　$(x=y) \square (x=z) \square (y=z)$

(5) $y=|x|+2$は　$[(x \geqq 0) \square (y=x+2)] \square [(x<0) \square (y=-x+2)]$

3 次の命題の真理表を完成せよ。

(1) $p \vee q$　(2) $p \wedge q$　(3) $p \to q$　(4) $\sim[p \wedge (\sim q)]$

4 ド・モルガンの法則を用いて，次の命題と同値な命題を作れ。

(1) $\sim(p \wedge q)$　(2) $\sim[(\sim q) \vee q]$　(3) $p \vee (\sim q)$

5 次の条件文を，$\sim$，$\vee$，$\wedge$を用いて表わせ。

(1) $a \to b$　(2) $(\sim b) \longrightarrow (\sim a)$

6 次の命題は，命題$[p \to (q \wedge r)]$の逆・裏・対偶のうちどれか。（　）内に記入せよ。そのいずれでもないときは×印を記入せよ。

(1) $p \to \sim(q \wedge r)$　（　）　(2) $q \wedge r \to p$　（　）

(3) $\sim p \to (\sim q \vee \sim r)$　（　）　(4) $\sim(q \wedge r) \to \sim p$　（　）

(5) $\sim p \to \sim(q \wedge r)$　（　）

7 次の2つの命題が論理的に同値であることを示せ。

$$p \to q = (p \wedge \sim q) \to q$$

8 (1) 次の推論形式が有効かどうかを真理表を用いて判定せよ。

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore \sim p \end{array}$$

(2) 推論「彼女はブロンドであるか，ブルネットであるかのいずれかである。彼女がブロンドであれば，彼女は親切である。彼女は親切でない。ゆえに，彼女はブルネットである」

を記号で表わすと，

p：（　　　），　q：（　　　），　r：（　　　）

とおけば，この推論形式は

$\boxed{}$ で，またこの推論は $\boxed{}$

9 (1) 条件命題　p，q を

$p: x^2+y^2<2x$　　$q: x^2+y^2<4$

とするとき，次の真理集合を図示せよ。

① pの真理集合　② qの真理集合　③ $\sim p \wedge q$の真理集合

(2) 真理集合を用いて「$x^2+y^2<2x$　ならば　$x^2+y^2<4$」を証明せよ。

10 次の命題の否定をかきなさい。

(1) 任意の実数xに対して，$ax^2+bx+c>0$である。

(2) ある実数xに対して，$ax^2+bx+c=0$である。

(3) A組の生徒の中には，このテスト問題の1題も解けない者がいる。

(3) テストの結果

(2)のテストの結果を表示すると，第14表のようになる。表内に示されている数字は正答率（%）を表わす。（ただし，8(1)において，①は真理表が正確に書けた者の百分率，②は完全正解者の百分率；8(2)において，①は推論形式を記号化できた者の百分率，②は完全正解者の百分率を示す。）

第14表　テストの結果（正答率 %）

人数(人) / 問番題号	男	女	上	中	下	計
	60	21	35	28	18	81
[1] (1)	95	100	97	100	89	96
(2)	92	91	91	96	83	91
(3)	95	95	94	100	89	95
(4)	92	95	94	93	89	93
(5)	93	100	91	100	94	95
[2] (1)	95	100	100	89	100	96
(2)	98	100	100	96	100	99
(3)	95	95	91	100	94	95
(4)	90	95	94	93	83	91
(5)	82	76	90	82	62	81
[3] (1)	98	95	100	100	89	98
(2)	97	95	97	100	89	96
(3)	97	95	94	100	94	96
(4)	97	95	94	100	94	96
[4] (1)	100	100	100	100	100	100
(2)	100	100	100	100	100	100
(3)	93	76	94	86	83	89
[5] (1)	78	76	86	71	72	78
(2)	73	71	86	64	61	73

人数(人) / 問題番号	男	女	上	中	下	計
	60	21	35	28	18	81
[6] (1)	98	100	100	96	100	99
(2)	100	100	100	100	100	100
(3)	93	86	100	82	89	91
(4)	100	100	100	100	100	100
(5)	98	91	100	93	94	96
[7]	91	93	96	89	86	93
[8]—(1) ①	95	95	97	96	89	95
②	87	91	91	86	83	88
[8]—(2) ①	87	76	94	89	55	82
②	67	62	83	64	33	65
[9]—(1) ①	87	91	97	75	89	88
②	98	95	100	96	94	98
③	83	91	97	68	89	85
[9] (2)	77	81	94	75	50	78
[10] (1)	87	94	97	91	70	89
(2)	83	95	97	93	72	91
(3)	80	81	87	82	61	80

(4)　考　　察

① 90%以上の正答率を得た項目

[1]（文章を論理記号で表わす）　[2](1)～(4)（記号∨，∧の意味と数学の事柄との関連）

[3]（真理表完成）　[4]（ド・モルガンの法則）　[6]（命題の逆・裏・対偶）　[7]（命題の同値性を示す）

については，すべて90%以上の正答率を上げている。そして，これらの問題では，男女の差や 上位，中位，下位の３群の間の格差が殆ど見られない。したがって，論理記号の意味，真理表の完成，命題の同値性の検証等の基本的事柄については，十分理解できたと考えてよい。

② 80%以上の正答率を得た項目

[2](5)（絶対値記号を∨，∧で分解する）（81%）　[8](1)（推論の有効性）（88%）

[9](1)（命題の真理集合）（85%～98%）　[10]（全称命題と存在命題の否定）（80%～91%）

この中で正答率の低いのは，[2](5)（81%），[10](3)（80%）であるが，[2](5)は絶対値記号についての理解の浅さから，[10](3)の場合は存在と全称の２つを組み合せた命題であるため，他の類似問題より正答率が下がったものと考えられる。とくに，これらの問題では，上位群と下位群の間にかなりの格差が見られる。

また，推論の有効性，真理集合および簡単な全称・存在命題の否定については，ともに90%に近い正答率を得ているので，かなり理解できたものと考える。

③ [5]は，条件文「p→q」を記号～，∨，∧で表わすことを求めているが，その正答率はやゝ悪く73

%〜78%である。また，上位，中位，下位3群の間にかなりの差がみられる。実際の指導の場合も「p→q」の真理表が理解しにくく，説明には3通りの方法を用いた。そのため，基本事項 p→q＝(〜p)∨q が十分徹底できなかったと思う。

④ [8](2)は，文章で与えられた推論の妥当性を調べる問題である。この問題の正答率は，推論形式の記号化が82%とかなりよく，その推論の有効性の検証が65%と非常に悪い。また，上位，中位，下位の3群の正答率にかなりの格差がみられ，数学の成績との間に強い相関が感じられる。

この有効性の検証は，既証の推論形式を用いて検証する場合は簡単であるが，直接真理表を作成して検証する場合は相当煩瑣である。実際の指導では，前者の方法は指導しなかったので，生徒はこの解答に困難を感じたと思う。

⑤ [9](2)は，真理集合を用いて命題の証明を行う問題であるが，その正答率は78%とやや低い。条件文と真理集合の関係には，p→q＝(〜p)∨q の理解が基礎となるだけに，この問題の正答率も[5]とほぼ同じ正答率を示したものと思われる。ここでも，[5]と同様，上位，中位，下位3群の間にかなりの差が認められる。

⑥ さきに示したようなテストの内容だけでは，記号論理の初歩が理解できたかを調べるのに十分ではないが，示した内容と程度においては，ほぼ80%〜90%以上の正答率を得ている。また正答率80%未満の項目においては，実際の指導でも生徒が少々抵抗を感じたところであるが，しかしこれらの項目を高校段階で指導することが不可能であるということではなく，指導の工夫や時間に余裕をもった指導計画を立てるなどの配慮によって十分理解させ得るものと考えている。

【7】 論理の学習についての感想調査

実際の授業の中で，生徒がどんな点に興味や関心をもち，またどのような点に困難を感じたかを知るために，次のような3つの調査を行い，最後に短い自由感想文を求めた。

調査の質問と回答の集計は次の通りである。(数字は%を表わす)

(1) 調査 1

この間から学習した「論理の授業」について，次のA〜Eまでのあてはまる番号を○印で囲みなさい。

(A) ＜難易調査＞

① やさしかった	② むずかしかった	③ とてもむずかしかった
(75)	(21)	(0)

(B) ＜理解調査＞

① よくわかった	② だいたいわかった	③ あまりわからない	④ わからなかった
(37)	(63)	(0)	(0)

(C) ＜興味調査＞

① 面白かった	② だいたい面白いと思った	③ あまり面白くなかった
(36)	(41)	(19)
④ つまらなかった		
(4)		

(D) ＜意欲調査＞

① もっと論理の勉強したい	② 少し論理の勉強したい	③ 論理の勉強はもうしたくない
(31)	(57)	(11)

（E）＜他の数学教材との比較＞

いままで学習している他の学習内容と比較して

(イ) ①　やさしかった　(76)　②　わからない　(20)　③　むずかしかった　(4)

(ロ) ①　興味をもった　(52)　②　わからない　(37)　③　興味をもたない　(10)

(2) 調　査　2

（指導内容の主な項目についての難易，理解，興味調査である）

次の左側にあげた事柄についてあなたはどう思いますか。A，B，Cについて，あてはまる所に○印を記入しなさい。（この調査集計を示すと第15表のようになる）

第15表　調　査　2　の　結　果　（%）

番号	テキスト	ことがら	A			B				C
			やさしかった	すこしむずかしかった	とてもむずかしかった	よくわかった	だいたいわかった	あまりよくわからなかった	よくわからなかった	とくに興味があったところ
1	§1	命題の意味と結合	88	11		69	29	2		1
2	§2	「かつ」，「または」の意味とその記号の使い方	88	12		75	23	2		5
3	§2	「$p \vee q$」「$p \wedge q$」「$\sim p$」の真理表	91	7		89	7	1		5
4	§3	合成命題の真理表	78	19		77	20	1		9
5	§3	「論理的に同値である」ことについて	61	37		54	40	5		14
6	§3	ド・モルガンの法則	77	19	2	72	25	4		12
7	§4	真理集合	54	38	4	45	44	5	3	1
8	§5	「$p \to q$」の真理表	32	58	9	42	44	15		27
9	§5	条件文と真理集合	46	52	1	42	49	9		12
10	§6	逆・裏・対偶について	77	21	3	67	30	3		6
11	§7	恒真・恒偽命題	61	35	3	55	37	5	2	7
12	§8	記号の法則	77	21	2	62	30	4	2	5
13	§9	推論の有効性	43	43	14	41	38	16	5	41
14	§9	間接証明法	31	53	16	32	38	25	5	25
15	§10	全称・存在命題の否定	59	38	3	68	28	5		12

(3) 調　査　3

（条件文「$p \to q$」の真理表は，生徒に理解しにくいと思い，実際の授業では，指導内容に示した3通りの説明をした。そこで，生徒にとってそのうちどれが納得しやすかったかを知るために，次の質問をした。）

「$p \to q$」の真理表の説明でわかりやすかった番号を○印しなさい。

①の説明　(20)　　②の説明　(27)　　③の説明　(52)

(4)　論理の学習についての生徒の感想の要約

最後に，論理の学習について，簡単な感想文を求めたが，その主なものは次の通りである。

① 中学のとき，論理とか集合とかはもっともっと高度なもので，僕達にはかけ離れたものと思っていたが，意外と入りやすくまた面白いので，このような本をもっと読みたい。

② 論理の勉強をして，今まで背理法を無意識に使っていたが，裏づけされたように思える。

③ 今まで，何となく使っていた推論形式が正しかったかどうかがよくわかったし，今まであいまいだったことが論理的にはっきりしたので，論理を勉強してよかったと思う。

④ 論理を習って，証明問題が解きやすくなったような気がする。また，物事をくわしく考えることが大切だと思った。

⑤ 今まで言葉だけで，この論理が正しいかどうかを判定するのに困っていたが，真理表が使えるようになり判定がわかりやすくなった。論理と数学上のことがらとの関連は非常に興味をおぼえた。

⑥ いやな数学の計算がなく楽しくやれた。

⑦ 狐につままれたような所もあったが，他の数学とちがって面白い。「p であって q でない」ということはない，などとまわりくどい表現には疑問を感じた。

⑧ とても面白かった。普通の数学の授業より面白く，やる気ができた。とくに推論の有効性については興味があった。

⑨ 論理の問題や例が身近な感じがして面白い。

⑩ 真理表の書き方などは割合機械的にできるようになったが，推論形式を記号化するような応用問題になるとまだはっきりしない。

⑪ 機械的にやるような所が多くあるので，少し変な感じであった。真理表を与えてその命題を作ったり，文章でかかれた推論の真偽を判定したりする実際的な問題をもう少し多くやってほしかった。

⑫ 推論の有効性において，p，q が与えられている問題は十分解ける自信がついたが，実際の応用問題では，どれを p，q におくのがよいか迷うことがある。

⑬ 推論の有効性のところで，文章の問題になるとわからなくなる。しかし，この推論の有効性は一番興味を感じた。

⑭ 推論の有効性において，最初本能的に有効であると思っていたのに，真理表を作ってみると有効でなかったりして，自分の考えていたこととくいちがいができ，真理表の結果が素直に受け入れられない場合が多くある。

⑮ 初めは，T，F などの定義に基いて真理表を書いていたから，その意味も理解できたが，だんだんなれるにしたがって，T，F を機械的に書くようになり，もとの意味を忘れてしまうような感じになった。

⑯ さっとやれば簡単だが，命題が真か偽かということについて考えると，T，F が何を意味しているか，はっきりわからなくなってしまう。推論の有効性と同値については特に興味を感じた。これを日常の生活や問題に応用すれば，ものごとがはっきりして，面白いと思う。

⑰ 一般常識を否定して考えなければならないところがあったりして，少々頭が混乱した。

⑱ 内容が少々物足らなかった。p，q，r といった抽象的な記号で論理を考えるだけでなく，具体的な数学の問題たとえば，問4，問16，問22，問28 などのようなものをもっと多く取り上げてほしい。

⑲ わりあいよく理解できて面白かった。普通の文章を記号化して，その推論の仕方が有効であるかどうかの判定をもっとやりたかった。

⑳ 最初は，こんな単純なことで何ができるかなと考えながらテキストを開いたが，推論の有効性や「すべて」「ある」の否定で，なるほどと感銘を覚えた。

【8】 結論と今後の課題

今回の論理指導における生徒の理解の度合，生徒の興味・関心の傾向，および学習の難易感については，すでに【6】,【7】において述べた。ここでは，これらをもとにして，論理指導の可能性，その効果，および実験指導の反省，今後の課題について考えることにする。

(1) 論理指導の可能性について

今回の論理指導は，「または」，「かつ」，「ならば」，「すべての」，「少くとも1つの」などの論理語の意味やこれらの否定命題を理解させ，また今まで無自覚のまま用いていた推論形式の有効性を自ら検証することによって，論理の重要さを確認させ，意識的にこれらを検証したり，用いたりする態度を養うことに目標をおき，さきに示したような内容を教材として編成した。この程度の内容ならば，高等学校一年生を対象に10時間余りで指導可能であり（今回の実践では8時間），授業中の雰囲気，生徒の感想文などから推して，生徒にとってもかなりの関心と興味をもって学習できるものと判断する。

さらに，この実践を通して考えたことを，各項目にわたって記述するならば

① 条件文 $p \to q$ の指導に注意するならば，合成命題の真理表は，数学を不得意とする生徒も喜んで学習し，よく理解する。

② 条件文 $p \to q$ の指導における生徒の抵抗感は，さきに【7】(3)で示した通りであるが，後の学習に $p \to q = \sim p \vee q$ が重要な役割を演ずるだけに，②の方法*によって $p \to q$ の真理表を導くのが一番よいと思う。

また，「p が偽のとき，$p \to q$ が真である」ということに対する生徒の抵抗は，③による説明**や，例えば

$$\forall x \,[x > 1 \to x^2 > 1] \quad (x：実数)$$

が常に真であるためには，p が偽のとき，$p \to q$ を真としなければならないこと，また，このように定めると，$[x > 1 \longrightarrow x^2 > 1]$ が実数全体で真といえる便利さを強調し，数学や記号論理学ではこのように広い意味で命題の真偽を考えることを例を通して説明して，その抵抗の緩和を図るのがよいと考える。

③ 命題の同値，推論の有効性等の検証も決して指導困難なことはなく，むしろ生徒が最も興味をもって学習する内容である。

④ 恒真・恒偽命題および記号の法則についても，この程度の内容ならば指導可能である。むしろこれらの項目については，内容の乏しさを訴える生徒が多い。もう少し内容の充実を考えてよいと思う。

⑤ 記号化された推論形式の検証は簡単にできるが，文章で書かれた命題や推論形式の記号化には，生徒はかなりの抵抗を感じたようだ。これは論理的構造がはっきりしにくい日本語の難しさにも原因すると思われるが，多くの例を取り上げるなど，時間に余裕をもった丁寧な指導が望まれる。

⑥ ド・モルガンの法則を用いての「または」，「かつ」の否定および限定命題の否定も十分理解できる。

⑦ 論理の指導においては，日常の事柄だけでなく，できるだけ多くの数学上の例を取上げて説明

*，** P 129 § 5 (1)参照

し，数学と結びついた論理を指導するのが望ましい。その方が生徒の理解を助けるし，既習の数学の知識が論理的に整理・確認され，後の数学学習においても，論理的考察が容易になると思う。その意味で，高等学校で記号論理を取り上げる場合，或る程度高等学校の数学を学習し，充分に数学的モデルを取り上げられる時期に指導するのが望ましい。したがって，高1の学年末か高2で指導するのがよいと考える。

(2) 指導後の効果について

このような論理指導によって，果して生徒の論理性が高められたどうかを数量的に評価することがむずかしい。第一，論理性の因子分析が必要であるし，また，そのような各因子を評価する方法にも問題があろう。そこで，今回の実践では，そのような評価は試みなかったが，ただささきに示したテストの結果，生徒の感想，および論理指導後の生徒の数学学習態度を通して，次のようなことは十分言えると考える。

① 「かつ」，「または」，「ならば」などの論理語に対する理解が，日常語的意味から独立して，これらの論理語を正しく使えるようになった。

② 今まで疑いをはさまずに本能的に用いていた推論形式が真理表によって検証されることを知って，真理表の意義と論理の重要さを確認できた。そして，以後の数学の学習においても，文章表現に注意したり，推論方法を意識的に検討したりする傾向がみられた。

③ 論理指導前の生徒は，命題を否定する際，論理語「または」，「かつ」，「すべての」，「少くとも1つの」などを全く意識せず，ただ機械的に文尾に「～ない」をつけていたが，ド・モルガンの法則を基礎とする「命題の否定」の指導によって，否定の意味がはっきりし，正しい否定文が作れるようになった。

(3) 実践の反省と今後の課題

① 学校行事等の関係で時間数に余裕がなく，一応時間数を8時間にしぼって，さきに示した指導内容を編成したが，指導後の感想としては，もう少し時間に余裕をもたし，例題や問に多くの数学的モデルを多く取り上げ，数学と結びついた論理の色彩をもっと強く出すべきだったと反省している。とくに，「証明とその方法」の項目を設けて，有効な推論を用いての数学の証明や解答例を多く取り上げ，証明の方法と意味の理解を図るべきだったと考えている。

② 記号の法則は，やや機械的に真理表を埋める作業に終ったきらいがあるが，恒真命題と記号の法則の内容をもう少し充実させて，命題計算による推論の有効性テスト等に発展させるべきであったと考える。

③ 今回の論理指導は，第1次の実験段階で十分な結論を出せなかったが，この実践を基礎として，第2次案を作成し，機会をみて再実験を試みたい。とくに，今回の実験対象の生徒は，第13表に示したように，知能の上では，現在の高校生の平均水準以上と考えられる。そこで，次の実践では，平均的学級を選んで実験したい。

④ 中学校でも論理指導を取り上げる場合，中高一貫した論理指導を行うべきであるが，この際，各段階でどの程度のことをどのように指導していくかが今後の課題である。なお，さきに示した論理性の調査結果等から，中学校においても，集合指導後のベン図による簡単な論理指導は可能だと考えている。この実践も考えたい。

なお，この論理指導は，大阪学校数学研究会の研究活動の一環として行なったものである。テキスト作成，テスト結果の集計などにおいて，いろいろの御指導，御助言をいただいた上林弥四郎先生並

びに同会員の諸先生に厚くお礼を申し上げたい。

参　考　文　献

(1) 笹田昭三　「中学校における論理指導の必要性について」（昭和39年11月大阪学芸大学，附属中・高等学校教育研究会資料集）
(2) 松木清次郎　「論理指導について」日本数学教育会誌第48巻第7号（1966）
(3) 横田稔良　「論理性に関する調査・実験・問題点」第8回全附連高等学校教育研究大会（1966）
(4) 阿部浩一　「数学教育の現代化と発見学習」大阪学芸大学紀要教育科学　第7号（1965）
(5) 日本数学教育会　「数学教育の現代化」，培風館（1966）
(6) Allendoerfer, C.B. and Oakley, C.O.　「新しい数学の原理」，日本評論社（1966）
(7) Kemeny. J. G. 他　「新しい数学」，共立出版，（1959）
(8) Kemeny, J. G. and others　" Finite mathematical structures", (1959)
(9) Rosser, J. B.　" Logic for Mathematicians" (1953)
(10) 石谷茂　「記号論理学入門」，明治図書（1967）
(10) 石谷茂　「記号論理学とその応用」，大阪教育図書（1967）
(12) 横地清　「記号論理」，岩崎書店（1967）
(13) 赤摂也　「記号論理」，文部省・中学校高等学校数学講座「数学教育現代化へのアプローチ」講義7（1966）
(14) ペー・エス・ノヴィコフ　「記号論理学」，東京図書（1965）
(15) 平岡忠他　「集合・確率・論理」，槙書店（1966）
(16) 波多野完治他　「ピアジェの発達心理学」，国土社（1965）
(17) 矢野健太郎訳　「ケメニー報告」，数学セミナー　1巻9号，2巻1号（1962，1963）

An Experiment on the Teaching of Logic in Upper Secondary Schools

Shozo SASADA

This attempt is an experiment in the modernization of school mathematics. The writer's previous investigation of the logicality of the secondary school students showed that in the traditional school mathematics the students' ability of logic was not so high. The writer keenly felt the necessity of the deliberate teaching of logic in secondary schools. This led him to make an experiment on the teaching of logic in upper secondary schools.

The students:

The first year students of Upper Secondary School Attached to Osaka Gakugei University.

The contents of the teaching materials:

1. The meaning and the combination of proposition.
2. Truth table of simple propositions.
3. Compound proposition.
4. Proportional function and true set.
5. Conditional sentences and biconditional sentences.
6. Converse, reverse, and contraposition.
7. Tautology and contradiction.
8. Laws of logical symbols.
9. Methods of argument.
10. Quantificational proposition.

The results:

(1) It was found to be quite possible that the students could be made to master the above materials within ten school hours. The students paid increasing attention to them and showed a strong interest in learning them.

(2) The students gained a clear understanding of the very meaning of such logical terms as "or", "and", "if ···, then", etc., and came to use these terms in their exact and logical sense as distinct from the ordinary meaning in everyday speech. Further, the teaching of "negation of proposition" based on the Law of de Morgan made the students realize clearly the meaning of negation and made it possible for them to build up proper negative sentences.

(3) The students knew that the forms of argument which they had been using unconsciously could be verified by truth table, and realized the significance of truth table and the importance of logic. After this experiment there was a growing tendency that the students were more careful about the verbal expressions and made a more conscious examination of methods of argument.