

# 要素分離を表現する流動要素法解析手順

西村 強・木山 英郎・藤村 尚・高山 伸介

土木工学科

Extended flow element method for cracking problems

by

Tsuyoshi NISHIMURA, Hideo KIYAMA, Hisashi FUJIMURA  
and Shinsuke TAKAYAMA

## Abstract

The FLEM (FLow Element Method) is a numerical method which is useful in analyzing large deformation and plastic flow problems of a continuum. Main features of the FLEM are summarized as follows. The processes of dividing a body into elements and computing of nodal forces are the same to the FEM. But it is not necessary to obtain a global stiffness matrix, each node with virtual mass can displace along a direction of nodal force vector according to the equation of motion. And the explicit time marching solution scheme in solving the equation of motion is adopted, which is the same to main calculation cycle of the DEM, the accumulation of displacements of nodes within the very small time step results in a large deformation of the body.

In this paper, an attempt to model the generation and propagation of failure planes (or cracks) is presented. This can be performed without the 'joint element' which represents discontinuities explicitly. Some results are illustrated to elucidate the performance of this numerical technique.

Key words : FLEM, Failure plane, Separation of node, Crack

1. まえがき

有限要素法 (FEM) など、連続体に立脚する数値解析手法では、不連続性岩盤のように不連続面がその挙動の支配的要因となる場合には、自ずと適用限界が生ずるものと思われる。そこで、FEMに不連続性を加味すべく、Joint要素<sup>1)</sup>など、数値モデルの導入が図られている。

ここで述べる解析手順は不連続面を陽に表現して、構成関係を与えたとともに、その面上の諸量 (応力・ひずみなど) に降伏条件を適用するものとは異なる。すなわち、要素分割を施した解析領域内において、節点上の応力を算出し、それが、所定の降伏条件を満たした時点で、その節点位置に破壊面を生じさせる。このとき破壊面の方向は、理論的に求められるものと一致させることが望ましいが、これは要素再分割等の作業を新たに必要とするので困難である。そこで、便宜的に、これに最も近い方向の要素境界を分離面として選択し、表現するのが本手法である。破壊面の位置・方向を予め限定することなく、応力集中→破壊面の発生→進展、さらには、開口あるいは閉口 (接触) などの時々刻々変化する様子を追跡できるのが大きな特徴である。

2. 節点上応力の算出と分離面の選択

2.1 節点上応力の算出

本手順は、節点上の応力状態によって、節点の分離、そして、その節点に集まる要素境界での分離を表現するものである。ここでは、節点上応力の算出法、分離面の選択について述べる。節点上応力を唯一の値として直接求めることは容易ではない<sup>2)</sup>ので、次のように簡略化している。図-1において、まず、各要素内で、a点に極めて近い点での応力 ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) を求める。ここに、a点は、要素 $e_1 \sim e_4$ を構成する点である。そして、それらの平均値 ( $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ ) を求め、a点上の応力とする。実際の計算においては、図-2のように、要素を全体座標 ( $x, y$ ) から基準座標 ( $\xi, \eta, (-1 \leq \xi, \eta \leq 1)$ ) に変換するとき、 $|\xi| = |\eta| = 0.9999$ なる位置の応力を前述 ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) として用いている。

2.2 分離面の選択

次に、降伏条件として、tension cut-offを考慮したモール・クーロン規準を適用するとき、分離させる要素境

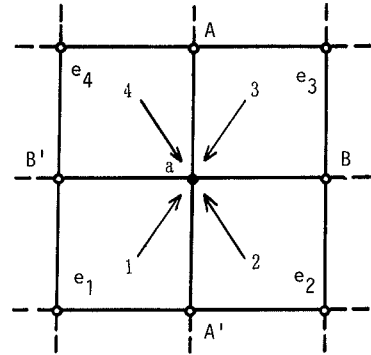


図-1 要素と節点番号

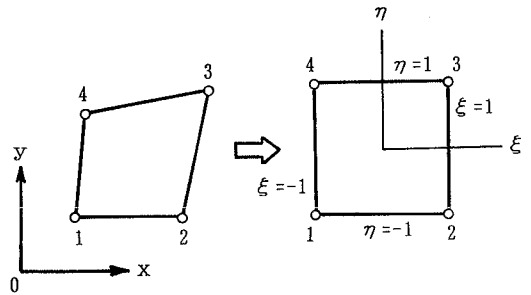


図-2 全体座標系と基準座標系

界の選択について述べる。なお、圧縮を正とする。

(1) 引張破壊

図-3 (b)のように、

$$\sigma_3 \leq \sigma_t \tag{1}$$

ここに、 $\sigma_t$ : 引張強度

が成立するとき、引張破壊が生ずる。このとき、図より明らかなように、Pは面の方向に関する極を表しており、破壊面は $\sigma_1$ の作用方向と平行となる ( $\sigma_3$ の作用方向は破壊面の法線方向)

本手順では、1.で概略を述べたように近似的な取り扱いではあるが、(b)図より求められる方向に近い境界で分離させることにする。この例では、(c)図より、BB'が選択されることになる。

(2) せん断破壊

$$f_s = \frac{2C \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi}{\sigma_1 - \sigma_3} \leq 1 \tag{2}$$

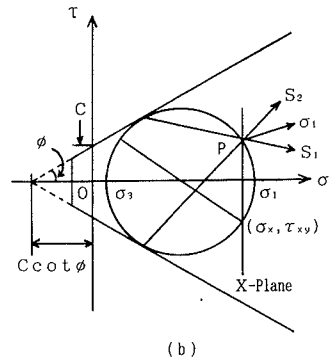
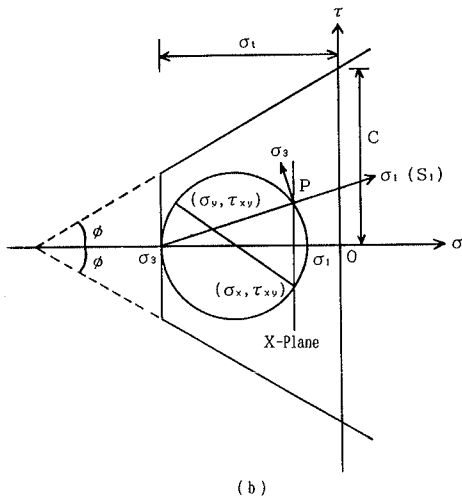
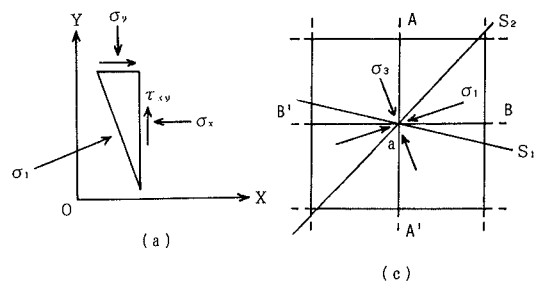
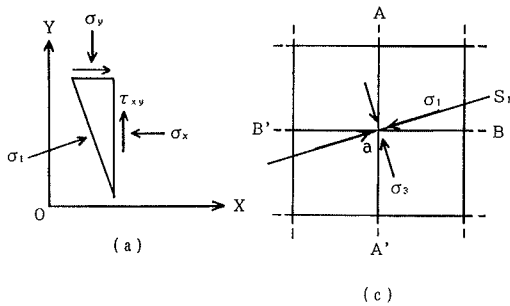


図-3 引張破壊と分離境界の選択

図-4 せん断破壊と分離境界の選択

ここに、 $c$ : 粘着力成分、 $\phi$ : 内部摩擦角が成立するとき、せん断破壊が生じる。

この場合、 $\sigma_1$ の作用方向と、 $\pm(\pi/4 - \phi/2)$ なる角度を有する面が、破壊面 $S_1, S_2$ となる(図-4(b))。これらの面に近い要素境界を分離面として選択することになるが、 $\phi$ の実在範囲を考慮すれば、 $S_1, S_2$ の方向を直接求めずとも、 $\sigma_1$ の作用方向に近い要素境界が分離面として選択できる。図-4(c)では、 $BB'$ が選択される。引張破壊が同時に生ずることも考えられるが、上記(1)からもわかるように、選択される境界は $\sigma_1$ の作用方向に近い面ということに変わりないので、 $AA'$ を同時に分離面として選択することはない。

図-3,4より求められる破壊面の方向に対して、要素境界 $BB'$ を選択することにより、当然のことながら結果には、誤差を含むことになるが、4.に示す解析結果からも示されるように、初期要素分割の工夫、細やかな要素分割等

の対策を講ずることで、軽減することが可能であると判断している。

### 3. 節点の分離と運動方程式

#### 3.1 節点の分離と運動方程式

本節では、節点に集約される質量、節点力などの分離が生ずる前・後における取り扱い方、運動方程式の用い方について述べる。

図-1に示すように、要素が分離した後のことを考慮して、 $a$ 点には要素ごとに4つの節点番号を付してあり、これらの節点番号に与えられる質量、生ずる節点力(変位抗力)は所属要素内で計算される。しかし、分離が生ずる前において、 $a$ 点は、周辺領域を代表する連続体中の1点であるので、上記の質量・節点力を加えたのち、運動方程式に用いられる。

$$\text{質量: } m_a = \sum m_i \quad (3)$$

$$\text{節点力: } F_{x,a} = \sum F_{x,i}, \quad F_{y,a} = \sum F_{y,i} \quad (4)$$

$$(i=1,2,3,4)$$

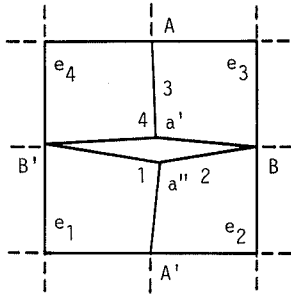


図-5 節点の分離

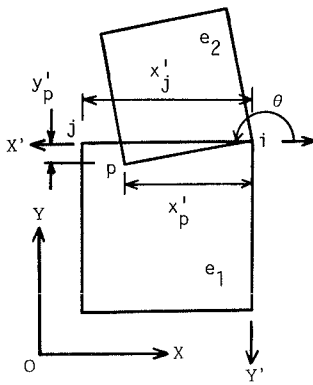


図-6 要素同志の接触と局所座標系

$$\begin{aligned}
 m_a \ddot{u}_a + \eta \dot{u}_a + F_{x_a} &= m_a g_x + f_{x_a} \\
 m_a \ddot{v}_a + \eta \dot{v}_a + F_{y_a} &= m_a g_y + f_{y_a}
 \end{aligned} \tag{5}$$

ここに、 $(f_{x_a}, f_{y_a})$ はa点にて直接作用する外力、 $(g_x, g_y)$ は重力加速度成分である。

図-5のように、a点において、BB'線に沿って分離が生じ、a'点、a''点になったとする。この時点より、a'点には(1,2)より、a''点には(3,4)より諸量(質量・節点力など)が前述のように集約されたのち、各々に運動方程式が適用される。さらに、a'点、a''点には、前節の判定式(1)(2)が引き続き適用され、それぞれの点で求められる破壊面とAa'、あるいはA'a''のなす角が $\pi/4$ を下回れば、Aa'あるいはA'a''に沿う分離が生じる。最終的には、1節点として取り扱われていたa点(4つの別々の点として運動する時点までも解析することも可能である。

### 3.2 接触外力の算出

分離が生じたのち、図-6に示すように、要素同志の接触が生じる可能性がある。DEMと同じく辺-点、点-点接触を基本として、処理することに変更はないが、接触外力を、DEMでは要素中心へ集約して計算を進めるのに対し、FLEM要素では、当該辺に対しては構成する2節点へ振り分け、そして運動方程式右辺に考慮する点が異なる。

図-6のように全体座標系(X, Y)から節点iを原点とする局所座標系(X', Y')に変換する。

$$\begin{pmatrix} x_p' \\ y_p' \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} x_p - x_i \\ y_p - y_i \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\text{ここに、} [T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

節点pの辺ijへの接触条件は、次のようになる。

$$0 \leq x_p' \leq x_j', \quad y_p' \geq 0 \tag{7}$$

つぎに、接触点 $(x_p', y_p')$ における接触相対変位増分を求めることが必要となる。(6)式と同様に節点p, i, jの変位増分を局所座標系へ変換する。点 $(x_p', y_p')$ における辺ijの変位増分 $(\Delta u_{c_{ij}}', \Delta v_{c_{ij}}')$ を図-6を参考に接触点の内分比によって次のように求める。

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{c_{ij}}' &= (x_p' / x_j') \Delta u_j' + \{(x_j' - x_p') / x_j'\} \Delta u_i' \\
 \Delta v_{c_{ij}}' &= (x_p' / x_j') \Delta v_j' + \{(x_j' - x_p') / x_j'\} \Delta v_i'
 \end{aligned} \tag{8}$$

以上より接触点での接触相対変位増分 $(\Delta u_c', \Delta v_c')$ は、

$$\begin{aligned}
 \Delta u_c' &= \Delta u_p' - \Delta u_{c_{ij}}' \\
 \Delta v_c' &= \Delta v_p' - \Delta v_{c_{ij}}'
 \end{aligned} \tag{9}$$

となる。接触剛性係数 $(k_n, k_s)$ および粘性定数 $(\eta_n, \eta_s)$ を用いて、弾性抗力増分 $(\Delta e_n, \Delta e_s)$ 、粘性抗力増分 $(\Delta d_n, \Delta d_s)$ を求め、新たな接触力を求める手順はDEMと同様である。式のみ示すと以下のようである。

$$\begin{aligned}
 \Delta e_n &= k_n \Delta v_c' & \Delta d_n &= \eta_n \Delta v_c' / \Delta t \\
 \Delta e_s &= k_s \Delta u_c' & \Delta d_s &= \eta_s \Delta u_c' / \Delta t
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 e_n &= e_n + \Delta e_n & d_n &= \Delta d_n \\
 e_s &= e_s + \Delta e_s & d_s &= \Delta d_s
 \end{aligned} \tag{11}$$

ただし、式(11)には次の2条件を付す。

$$e_n < 0 \text{ のとき、} \quad e_s = d_s = 0 \tag{12}$$

$|e_s| > \mu e_n$  のとき

$$e_s = \mu e_n \cdot \text{SIGN}(e_s), \quad d_s = 0 \tag{13}$$

$\mu$ : 接触摩擦係数、SIGN(z)は変数zの符号を表す。接触力は、式(14)で求められたのち、全体座標系へ逆変換される(式(15))。

$$f_n = e_n + d_n \quad f_s = e_s + d_s \tag{14}$$

表-1 解析定数

|                            |  |
|----------------------------|--|
| Young's modulus            | $E=100\text{kgf/cm}^2$                   |
| Poisson's ratio            | $\nu=0.3$                                |
| density                    | $\rho=2.65\text{g/cm}^3$                 |
| time step                  | $\Delta t=1.0 \times 10^{-4}\text{sec.}$ |
| Angle of internal friction | $\phi=30^\circ$                          |
| Cohesion                   | $c=0.1\text{kgf/cm}^2$                   |
| Tensile strength           | $\sigma_t=1.0\text{kgf/cm}^2$            |
| Normal stiffness           | $k_n/\rho g=6210\text{cm}^2$             |
| Tangential stiffness       | $k_s/\rho g=1552\text{cm}^2$             |
| Friction coefficient       | $\mu=0.577 (=30^\circ)$                  |

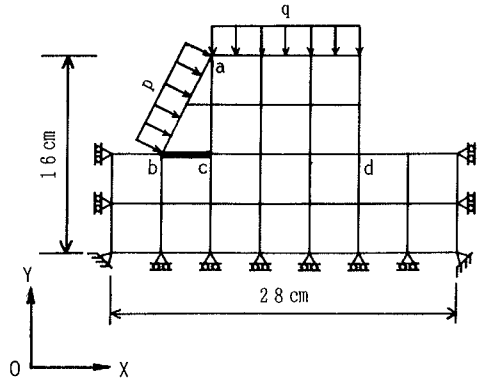


図-7 せん断モデル

$$[f_{x_i}, f_{y_i}]^T = [T^{-1}] [f_s, f_n]^T \quad (15)$$

また、辺*i,j*に対しては、さきほどの内分比を利用して、節点*i, j*に振り分けられる。

$$\begin{aligned} f_{x_i} &= \{(x_j' - x_0') / x_j'\} f_{x_0} \\ f_{y_i} &= \{(x_j' - x_0') / x_j'\} f_{y_0} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f_{x_j} &= (x_0' / x_j') f_{x_0} \\ f_{y_j} &= (x_0' / x_j') f_{y_0} \end{aligned} \quad (17)$$

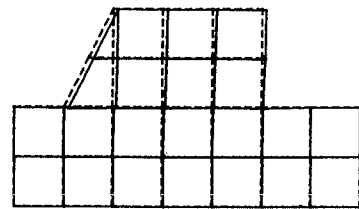
これらは、接触外力として、節点*i, j, p*の運動方程式の右辺に考慮される。

4. 二、三の解析例

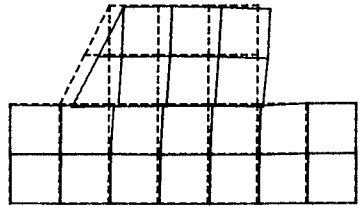
以上述べてきた解析手順によって数例の解析を実施した。解析に際しては、き裂先端付近における応力、ひずみおよび変位の分布など、検討すべき課題が生ずると思われるが、今回は、これらを先送りし、与えられた境界条件のもとで、分離が生ずる節点の位置とその方向の選択は妥当なものかどうかなど、全体としての変形状態の定性的な観察に留めた。2例とも、重力は作用していない。

(1)せん断モデル

図-7は、節点数30よりなる直接せん断モデルを示している。要素は、全て平面ひずみ要素であり、四角形四節点要素数21、および三角形三節点要素数1計22要素となっている。節点数が通常の解析に比べ、多くなるのは3、で述べたように、1点に対して各要素ごとに複数の番号を付しているからである。なお、三角形要素の導入については、面積座標を利用して、四角形要素と同様の取扱いが



(a)  $p/\rho = 894 (\text{cm}^2)$



(b)  $p/\rho = 2235 (\text{cm}^2)$

図-8 解析結果

可能なようにしている。

解析は、等分布荷重 $q/\rho=100\text{cm}^2$ を載荷し、つり合い状態に至らしめたのち、等分布荷重 $p$ を初期要素分割時の辺*ab*に対して垂直に作用させるものである。実際の計算に際しては、 $p$ を $(X, Y)$ 成分に分解して用いている。用いた解析定数を表-1に示す。 $g$ は、重力加速度であり、 $980\text{cm/s}^2$ を与えている。接触剛性係数は、ヤング率、ポアソン比をもとに従来通り決定している<sup>3)</sup>。なお、この例ではせん断破壊を強調するため、式(1)の判定は省略して実施している。また、*bc*辺付近は引張領域となりやすいので、

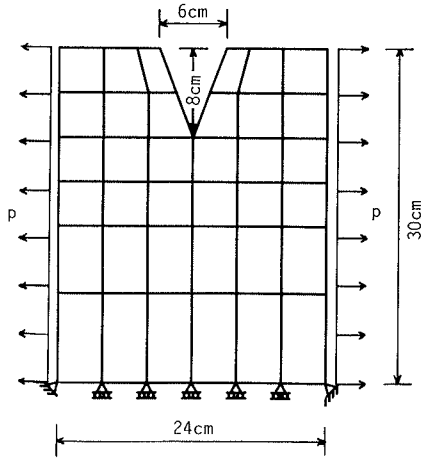


図-9 開口モデル

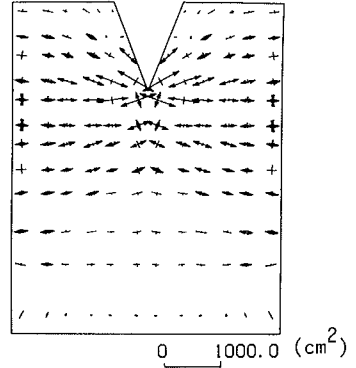


図-10 解析結果 ( $p/\rho=110\text{cm}^2$ )

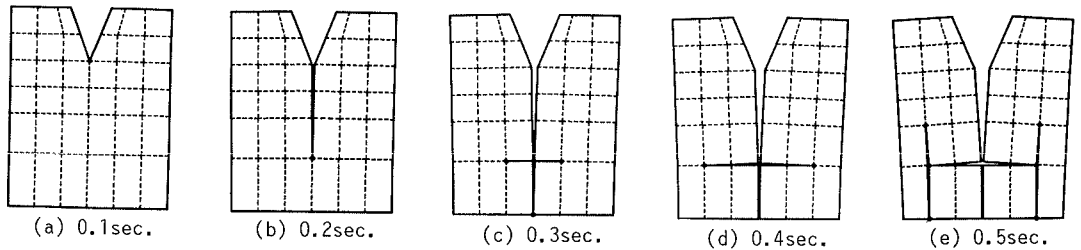


図-11 解析結果 ( $p/\rho=115\text{cm}^2$ )

辺bc (図中太線部) は最初から分離させて解析を実施した。

図-8は、解析結果を示している。実線が変形後、破線は初期状態を表している。図は、 $p$ を連続的に増加させた一瞬間を表すものではなく、図中の $p$ の値で、所定のstep  $p$ を繰り返したのちのつり合い状態を表している。(b)図をみると、辺cdに沿って、分離が生じていることがわかり、また、全体としての変形状態からも、分離辺の選択、その後の要素同志の接触計算がうまく機能していることが伺える。

(2) 開口モデル

図-9は、解析モデルを示しており、節点数144、要素数36よりなる。要素は、(1)と同じく平面ひずみ要素である。

解析では、図-9に示すように側方より等分布荷重を作用させ、単純引張状態を発生させた。上記(1)に対応して、ここでは式(2)の判定を省略した。

図-10は、 $p/\rho=110\text{cm}^2$ としたときの変形、主応力の状

態を表している。図中のスケールは応力に対するものであり、切欠き部分に応力集中が発生しているのがわかる。この段階ではき裂は発生せず、つり合い状態を求めることができた。

図-11は、 $p/\rho=115\text{cm}^2$ としたときの結果を時間の経過とともに描いたものである。切欠き先端よりき裂が発生し (b)図)、一気に進行する様子が表れている (c)図以降)。この図において、要素境界が破線となっているところは、分離していないことを示す。

5. おわりに

本文で述べた解析手順では、節点上応力を算出し、それが、降伏条件を満たした時点で、その節点位置に破壊面を生じさせた。このとき、破壊面の方向は、理論的に求められるものに対し、最も近い方向の要素境界を便宜的に選択した。4. で示したように、対象とする問題に

対し、初期要素分割に工夫を施すなどすれば、定性的には、満足ゆく変形状態が再現できたと考えている。しかしながら、き裂先端の応力・ひずみおよび変位の様子など詳細に検討を進めなければならない重要な問題が残されている。今後の研究課題としたい。

#### 参考文献

1) G. N. Pande, G. Beer & J. R. Williams, : Numerical Met-

hods in ROCK MECHANICS, JOHN WILEY & SONS LTD, pp. 97-114, 1990.

2) G. Gudehus (edited) : 地盤力学の有限要素解析 Vol. 2 (川本・桜井・足立共訳) 森北出版, pp. 188-204, 1982.

3) 木山英郎・藤村 尚 : カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析, 土木学会論文集, 第33号, pp. 137-146, 1983.

