2項過程によるルックバックオプションの評価

河合　一・小柳　淳二

社会開発システム工学科

(1991年9月1日受理)

Valuation of look-back option by binomial process

by

Hajime Kawai and Junji Koyanagi

Department of Social Systems Engineering

(Received September 1, 1991)

A look-back option is a contract entitling the holder to buy or sell a designated security at the lowest price or the highest price within a certain period of time. We consider the valuation problem of look-back option by assuming the underlying stock price obeys a discrete time binomial process. We obtain the pricing formula under some conditions on security market. Furthermore, we show that when the time period tends to zero, the result converges to the option price in the case that the stock price obeys continuous time geometric Brownian motion.

1 はじめに

株式オプションとは，指定された期日（満期日）ないしは，期間内に定められた価格（権利行使価格）で株式を購入あるいは売却する権利である．買う権利をコール(call)，売る権利をプット(put)と云う．また，権利行使が満期日に限られているものをヨーロピアン，満期日迄いつでも行うことができるものをアメリカン，と呼ぶ．オプションの価格理論としては，権利行使価格が，契約時にあらかじめ定められている最も基本的なオプション（図1，図2参照）について，Black and Scholes [1] は，株価変動が幾何ブラウン運動に従うとし，市場に裁定の機会が存在しないという条件の下で，ヨーロピアンオプションの価格式を与えた．一方，ヨーロピアンルックバックオプション（図3，図4参照）とは，行使価格が株式のサンプルパスに依存しているものであり，それがオプションの発行日から満期日迄の最安値（コール），最高値（プット）となっているオプションである．ルックバックオプションの価格については，Goldman, Sosin and Gatto [3] は，[1] と同じ仮定の下で，その評価式を導いている．しかし [1, 3] で用いられている数学的な手法は高度なものであり，数学も経済学あるいは財務理論も共に好きであり得意である人以外には，理論の基礎となっている基本的な考え方を分かりにくくさせている傾向がある．それに対して，Cox, Ross and Rubinstein [2] により提案された離散時間2項型オプション価格モデルは数学的に単純であり，またある極限操作を施すことにより幾何ブラウン運動を仮定した連続型モデルと同じ結果を与えることなどから，基本的な考え方を理解するのに適していると思われる．そこで，本稿では2項過程を用いたルックバックオプションの価格評価を議論する．

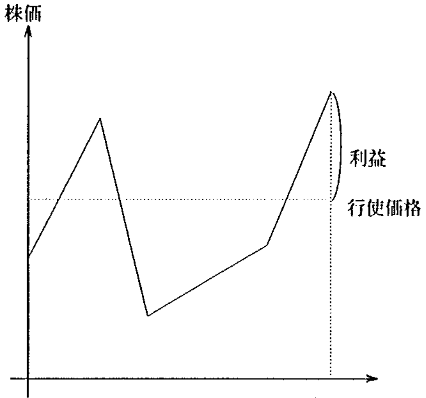


図1．基本なコールオプションによる利益

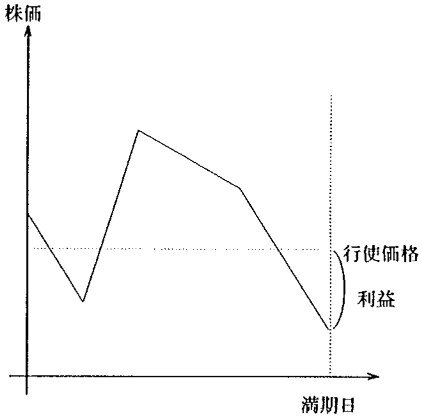


図2．基本なプットオプションによる利益

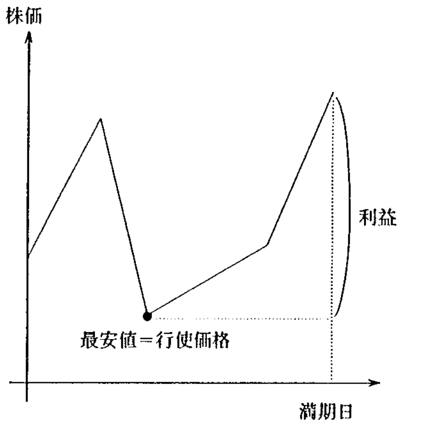


図3．ルックバックコールオプションによる利益

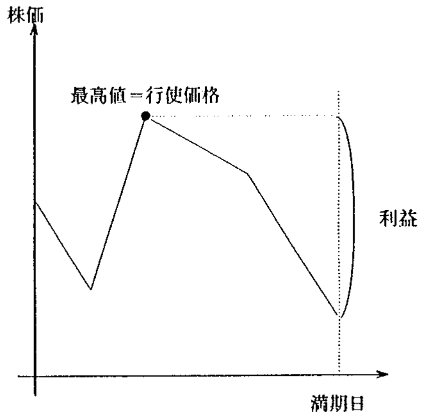
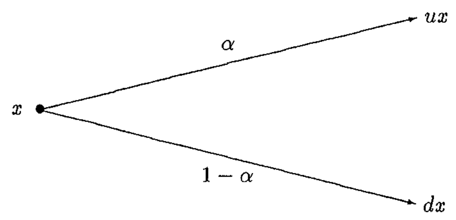


図4．ルックバックプットオプションによる利益

2　株式価格の2項モデル

時間は離散的とする．現在の株価を x とするとき．次期の株価は，確率 α, $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ で ux, dx となる．ここで u, d はそれぞれ株価の上昇率，下降率であり，$u>1$, $d<1$ であり，$ud=1$ と仮定する．また，α, u, d は時間に依らず一定である．



3　仮定

オプション価格形成にあたり，以下の環境を設定する．

1. コストをかけずに確率1で利益を上げることのできるという裁定機会は存在しない．
2. 売買手数料と税金はない．また，配当は考えない．
3. 株式，オプションの空売り，現金の借入れは無制限に可能である．
4. 現金の貸出し，借入の利子率は同じである．
5. 無危険資産が存在し，その利子率は，満期日まで一定である．
6. 株式，オプションの売買，現金の貸借の単位は任意に分割が可能である．

無危険資産の1+利子率を R とすると，仮定1. から，株式の変化率，u, d と R の間には，$d<R<u$ の関係が存在することになる．

4　ヘッジ・ポートフォリオの構成

ヘッジとは，株式とそれに対するオプションを組み合わせる形を意味する．本節では，ルックバック・コールあるいはプットオプションと，その原株からなるポートフォリオを適切に構成することにより，そのポートフォリオを無危険化し，裁定機会に関する仮定1の下で，オプション価格の満期迄の残り期間に関する漸化式を与える．

4.1　コールオプション

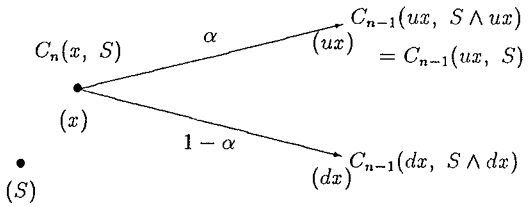
原株の価格変化率は，毎期独立で同一の分布をすること，および，ルックバックコールオプションの権利行使価格は，オプションの発行日から満期日迄の株価の最小値であることから，現時点のオプション価格は，現在の株価，現在迄の株価の最小値および満期迄の残り期間に依存することになる．

$C_n(x,\ S)$：残り期間 n, 現在の株価 x, 現在までの株価の最小値 S, のときのコールの価格．

とする．ここで，$x \geq S$ である．また，

$$C_0(x,\ S) = x - S, \tag{1}$$

は明らかである．



$a \wedge b \equiv \min\{a,\ b\}$

以降，n 期目というときは，残り期間を意味する．

さて，n 期目において，原株 Δ 単位購入するとともに，コールを1単位空売りするポートフォリオを作成するものとする．このとき，このポートフォリオの価値は，n 期目においては，

$$\Delta x - C_n(x,\ S) \tag{2}$$

であり，$n-1$期目においては，確率 α, $1-\alpha$ でそれぞれ，

$$\Delta ux - C_{n-1}(ux,\ S), \tag{3}$$

$$\Delta dx - C_{n-1}(dx,\ S \wedge dx) \tag{4}$$

となる．そこで，株式の購入単位 Δ を，次式

$$\Delta ux - C_{n-1}(ux,\ S) = \Delta dx - C_{n-1}(dx,\ S \wedge dx) \tag{5}$$

を満たすように定めると，このポートフォリオは，株式の上昇，下降にかかわらず，確実な収益率を与えることになる．すなわち，無危険資産とみなしうる．(5) 式を解くと，

$$\Delta^* = \frac{C_{n-1}(ux,\ S) - C_{n-1}(dx,\ S \wedge dx)}{(u-d)x} \tag{6}$$

を得る．さらに，市場に裁定機会が存在しないことから，この Δ^* で構成したポートフォリオに対しては，(2), (3) 式に注意して，

$$R\{\Delta^* x - C_n(x,\ s)\} = \Delta^* ux - C_{n-1}(ux,\ S) \qquad (7)$$

が成立する．

(6) 式を (7) 式に代入し，整理すると，

$$C_n(x,\ S) = \frac{1}{R}\{pC_{n-1}(ux,\ S) + qC_{n-1}(dx,\ S \wedge dx)\} \qquad (8)$$

$$(C_0(x,\ S) = x - S \qquad (1))$$

を得る．ここで，

$$p = \frac{R-d}{u-d}, \quad q = \frac{u-R}{u-d} \qquad (9)$$

であり，$d < R < u$, $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$ に注意しておく．

4.2　プットオプション

n 期目における株価が x，それ迄の株価の最大値が M のときのプットオプションの価格を $P_n(x,\ M)$ とすると．

$$P_0(x,\ M) = M - x \qquad (10)$$

であり，$n = 1, 2, \ldots$ に対しては，コールオプションの場合と同様の考え方により，次式が導かれる．

$$P_n(x,\ M) = \frac{1}{R}\{pP_{n-1}(ux,\ M \vee ux) + qP_{n-1}(dx,\ M)\} \qquad (11)$$

ここで，$a \vee b \equiv \max\{a,\ b\}$.

5　オプション価格

5.1　コールの価格

コールの価格について，鏡像の原理を用いて (8) 式を解き，

$$C_n(x,\ S) = \frac{1}{R^n}\left\{\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=0}^{m} A(n, m-k)(u^{n-m}d^m x - S \wedge d^k x) + \sum_{m=[\frac{n}{2}]+1}^{n}\ \sum_{k=2m-n}^{m} A(n, m-k)(u^{n-m}d^m x - S \wedge d^k x)\right\} \qquad (12)$$

を得る．ここで，$[\cdot]$ はガウス記号である．また，

$$A(i,\ j) = \binom{i}{j} - \binom{i}{j-1} \qquad (13)$$

であり，$j \leq -1$, $j \geq i+1$ に対しては，$A(i,\ j) = 0$ とする．

5.2　プットの価格

プットの価格について，コールのときと同様に (11) 式を解き，

$$P_n(x,\ M) = \frac{1}{R^n}\left\{\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=0}^{m} A(n, m-k)(M \vee u^k x - u^m d^{n-m} x) + \sum_{m=[\frac{n}{2}]+1}^{n}\ \sum_{k=2m-n}^{m} A(n, m-k)(M \vee u^k x - u^m d^{n-m} x)\right\} \qquad (14)$$

6　連続型モデルとの対応

[1, 3] 等で仮定されている株価変動の確率過程は，次の確率微分方程式に従う．$x(t)$ を時刻 t での株価とすると，

$$dx(t) = \mu x(t)dt + \sigma x(t)\,dw(t) \qquad (15)$$

ここで，$w(t)$ は標準ウィナー過程である．

$x(0) = x$ に対して，上式の解は，

$$x(t) = x\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t)\right\} \qquad (16)$$

である．収益率 $x(t)/x$ の期待値と分散に関しては，

$$E\left[\log\frac{x(t)}{x}\right] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t,$$
$$\mathrm{Var}\left[\log\frac{x(t)}{x}\right] = \sigma^2 t \qquad (17)$$

となる．

さて，時間 t を n 等分し，その分割点を時点とする 2 節における 2 項モデルを考える．初期の株価を x, n 期後 (t 時間後) の株式を $x(n)$ とすると，収益率の期待値と分散に関して，

$$E\left[\log\frac{x(t)}{x}\right] = \left(\alpha\log\frac{u}{d} + \log d\right)n,$$
$$\mathrm{Var}\left[\log\frac{x(t)}{x}\right] = \alpha(1-\alpha)\left(\log\frac{u}{d}\right)^2 n, \qquad (18)$$

を得る．

そこで，(17), (18) に注意し，$ud = 1$ の下で，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha\log\frac{u}{d} + \log d\right)n = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t,$$
$$\lim_{n\to\infty}\alpha(1-\alpha)\left(\log\frac{u}{d}\right)^2 n = \sigma^2 t \qquad (19)$$

が成り立つ様，u, d, α の値を選べば，2項過程モデルは連続型モデルの近似と考えることができる．(19) 式を満たす u, d, α を求めると

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}},$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}},$$
$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \sigma^2/2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}} \qquad (20)$$

となる．

7　連続型モデルへの極限移行

(20) 式の下では，n が十分大きいとき，

$$p \approx \frac{1}{2} + \frac{v}{2\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}},$$
$$q \approx \frac{1}{2} - \frac{v}{2\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}},$$
$$R = e^{\frac{rt}{n}} \qquad (21)$$

となる．ここで r は無危険資産の瞬間利子率であり，

$$v = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

である。

さて，(20), (21) 式を2項モデルにおけるオプション価格式 (12), (14) 式に代入し，$n \to \infty$ の極限をとると，コールおよびプットの価格 $C_t(x,\ S)$, $P_t(x,\ M)$（残り期間 n は残り期間 t に対応する）は，それぞれ次式のようになる。

$$\begin{aligned}
&C_t(x,\ S)\\
&= x\left\{1 - \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right)N\left(\frac{-b-(v+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right\}\\
&- Se^{-rt}\left\{N\left(\frac{b+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{\sigma^2}{2r}e^{-\frac{2bv}{\sigma^2}}N\left(\frac{-b+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right\} \qquad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_t(x,\ M)\\
&= Me^{-rt}\left\{N\left(\frac{a-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{\sigma^2}{2r}e^{-\frac{2av}{\sigma^2}}N\left(\frac{-a-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right\}\\
&- \left\{\left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right)N\left(\frac{a-(v+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{\sigma^2}{2r}\right\} \qquad (23)
\end{aligned}$$

ここで

$$a = \log\frac{M}{x}, \quad b = \log\frac{x}{S} \qquad (24)$$

$N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である．

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M., "The pricing of options and Corporate Liabilities ", *J. of Political Economy*, 81, 1973.

[2] Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M., "Opution pricing : A simplified approach ", *J. of Finantial Economics*, 7, 1979.

[3] Goldman, M. B., Sosin, H. B. and Gatto, M. A., "Path dependent options : Buy at the low , sell at the high ", *J. of Finance*, 34, 1979.