

修正最小二乗法による適応アルゴリズムとその応用

山本 祥弘・奥山 佳史・西村 雄成

知能情報工学科

(1989年9月1日受理)

Adaptive Algorithm of the Truncated Least Square Estimation and its Applications

by

Yoshihiro YAMAMOTO, Yoshifumi OKUYAMA and Katsushige NISHIMURA

Department of Information and Knowledge Engineering

(Received September 1, 1989)

The well known Least Square Method for the estimation of parameters in Linear Regression Models depends on the historic data which is a collection of all previous observations.

The Truncated Least Square Method presented here depends on a truncated data which is a collection of the last M observations. Here, M is any number greater than N which is a number of unknown parameters in a regression model. The method also includes an exponential forgetting factor.

The efficiency of the derived algorithm is examined by simulation studies of a first order system.

Key words : truncated least square, adaptive algorithm, exponential forgetting, parameter estimation, linear regression model

1. はじめに

最小二乗法は、パラメータに関して線形なシステムの推定法として最も基本的なものであることは良く知られているが、適応推定法としては収束性が悪くその改善のために多くの工夫がなされている。^{1)~3)}

本論では、最小二乗法の評価を修正した Truncated Least Square Method による適応アルゴリズムを提案し、実際にこのアルゴリズムを用いる場合の注意すべき点を記す。

提案するアルゴリズムは、過去Mステップに限定した観測データに関する最小二乗推定として導かれる。さらに忘却パラメータ λ を併せて導入することが可能である。このMと λ の値によりアルゴリズムの収束性が大きく影響される。アルゴリズムの収束性は、システムの線形モデル化の方法によっても左右されることがわかった。これらのことを、アルゴリズムの初期設定の仕方と併せて1次系を例としてシミュレーションにより検討した。

2. 問題の記述と最小二乗法

対象とするシステムは未知パラメータに関して線形で、

$$y_k = \theta^T V_k + v_{0k}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

と表されるとする。ここに y_k はステップkにおける出力、 θ はN次元未知パラメータベクトル、 V_k はN次元既知信号ベクトル、 v_{0k} は既知のスカラー関数とする。問題は、(1)式に対する θ の推定値として、まず、

$$\hat{y}_k = \theta_{k-1}^T V_k + v_{0k} \quad (2)$$

を与え、kステップまでの情報から

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \Delta\theta_k \quad (3)$$

を求めるアルゴリズムを導出することである。

最小二乗法は、評価

$$J_k = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k (y_i - V_i^T \theta)^2 \quad (4)$$

を最小とする θ を θ_k とすることであり、そのオンライン化もよく知られている。

3. TLSM

(4)式の評価を修正して

$$J_k = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^i (y_{k-i} - V_{k-i}^T \theta)^2, \quad M \geq N, \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (5)$$

を最小にすることを考える。これは、現時点kから過去

Mステップまでの情報のみに関する最小二乗法であり、可動窓関数フィルタ付きの最小二乗法といえる。 λ は忘却係数(forgetting factor)である。 $M=k$, $\lambda=1$ とすると(5)式は(4)式と一致する。(5)式を最小とする θ_k の逐次形式は以下のようである。

[適応アルゴリズム]

$$W_{1k} = Q_{k-1} V_k \quad (6)$$

$$S_{1k} = V_k^T W_{0k} \quad (7)$$

$$S_{2k} = V_k^T W_{1k} \quad (8)$$

$$d_k = (1 - \lambda^{n-1} S_{0k}) (\lambda + S_{2k}) + \lambda^{n-1} (S_{1k})^2 \quad (9)$$

$$g_{1k} = Q_k V_k \\ = \{ (1 - \lambda^{n-1} S_{0k}) W_{1k} + \lambda^{n-1} S_{1k} W_{0k} \} / d_k \quad (10)$$

$$g_{2k} = Q_k V_{k-n} \\ = \{ (\lambda + S_{2k}) W_{0k} - S_{1k} W_{1k} \} / d_k \quad (11)$$

$$e_k = y_k - V_k^T \theta_{k-1} \quad (12)$$

$$e_{nk} = y_{k-n} - V_{k-n}^T \theta_{k-1} \quad (13)$$

$$\Delta\theta_k = g_{1k} e_k - \lambda^n g_{2k} e_{nk} \quad (14)$$

$$Q_k = (Q_{k-1} - g_{1k} W_{1k}^T + \lambda^{n-1} g_{2k} W_{0k}^T) / \lambda \quad (15)$$

$$W_{0k+1} = Q_k V_{k-n+1} \quad (16)$$

$$S_{0k+1} = V_{k-n+1}^T W_{0k+1} \quad (17)$$

then, $k=k+1$

3.1 アルゴリズムの導出

(5)式を θ に関して微分すると、次の正規方程式

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-i} V_{k-i}^T \right) \theta = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-i} y_{k-i} \quad (18)$$

が得られる。ここで

$$Q_k^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-i} V_{k-i}^T \quad (19)$$

と定義すると

$$Q_k^{-1} = \lambda Q_{k-1}^{-1} + V_k V_k^T - \lambda^n V_{k-n} V_{k-n}^T \quad (20)$$

が求まる。次によく知られた逆行列の補題

$$(A+bc^T)^{-1} = A^{-1} - (1+c^T A^{-1} b)^{-1} A^{-1} b c^T A^{-1} \quad (21)$$

を拡張して

$$(A+bc^T+ba_0c_0^T)^{-1} = (A_0+ba_0c_0^T)^{-1} \\ = A_0^{-1} - (1+c_0^T A_0^{-1} b_0)^{-1} A_0^{-1} b_0 c_0^T A_0^{-1} \\ = A^{-1} - \frac{N_1}{D_1} \quad (22)$$

$$N_1 = \{ (1+c_0^T A^{-1} b_0) A^{-1} b - (c_0^T A^{-1} b) A^{-1} b_0 \} c^T A^{-1} \\ + \{ (1+c^T A^{-1} b) A^{-1} b_0 - (c^T A^{-1} b_0) A^{-1} b \} c_0^T A^{-1} \quad (22-1)$$

$$D_1 = (1+c^T A^{-1} b) (1+c_0^T A^{-1} b_0) - (c_0^T A^{-1} b) (c^T A^{-1} b_0) \quad (22-2)$$

が成立する。この結果を(20)式に用いると、

$$Q_k = (Q_{k-1} - N/D) / \lambda \quad (23)$$

$$N = \{(1-\lambda^{n-1})V_{k-n}^T Q_{k-1} V_{k-n}\} Q_{k-1} V_k \\ + \lambda^{n-1} \{(V_{k-n}^T Q_{k-1} V_k) Q_{k-1} V_{k-n}\} V_k^T Q_{k-1} \\ - \lambda^{n-1} \{(\lambda + V_k^T Q_{k-1} V_k) Q_{k-1} V_{k-n}\} \\ + (V_k^T Q_{k-1} V_{k-n}) Q_{k-1} V_k \} V_{k-n}^T Q_{k-1} \quad (23-1)$$

$$D = (\lambda + V_k^T Q_{k-1} V_k) (1 - \lambda^{n-1} V_{k-n}^T Q_{k-1} V_{k-n}) \\ + \lambda^{n-1} (V_{k-n}^T Q_{k-1} V_k)^2 \quad (23-2)$$

となる。ここで

$$W_{0k} = Q_{k-1} V_{k-n}, \quad S_{0k} = V_{k-n}^T W_{0k}, \quad W_{1k} = Q_{k-1} V_k \\ S_{1k} = V_k^T W_{0k}, \quad S_{2k} = V_k^T W_{1k}$$

とおくと、

$$Q_k = (Q_{k-1} - g_{1k} W_{1k}^T + \lambda^{n-1} g_{2k} W_{0k}^T) / \lambda \quad (24)$$

$$g_{1k} = ((1 - \lambda^{n-1}) S_{0k}) W_{1k} + \lambda^{n-1} S_{1k} W_{0k} / d_k \quad (24-1)$$

$$g_{2k} = ((\lambda + S_{2k}) W_{0k} - S_{1k} W_{1k}) / d_k \quad (24-2)$$

$$d_k = (1 - \lambda^{n-1}) S_{0k} (\lambda + S_{2k}) + \lambda^{n-1} (S_{1k})^2 \quad (24-3)$$

さらに、若干の計算によって

$$Q_k V_k = g_{1k} \quad (25)$$

$$Q_k V_{k-n} = g_{2k} \quad (26)$$

も成立する。一方、 Q_k が正則であるとして、(18)式より

$$\theta_k = Q_k \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-i} y_{k-i} \quad (27)$$

$$= Q_k (\lambda Q_{k-1}^{-1} \theta_{k-1} + V_k y_k - \lambda^n V_{k-n} y_{k-n}) \quad (28)$$

$$= Q_k \{ (Q_{k-1}^{-1} - V_k V_k^T + \lambda^n V_{k-n} V_{k-n}^T) \theta_{k-1} \\ + V_k y_k - \lambda^n V_{k-n} y_{k-n} \} \quad (29)$$

$$e_k = y_k - V_k^T \theta_{k-1} \quad (30)$$

$$e_{nk} = y_{k-n} - V_{k-n}^T \theta_{k-1} \quad (31)$$

が求まる。以上を整理するとアルゴリズム(6)-(17)式が得られる。

3.2 初期設定

アルゴリズム(6)-(17)式を実行するための初期設定としては $Q_0, \theta_0, V_j (1-M \leq j \leq 0)$ と y の初期条件が必要となる。 θ_0 は未知パラメータ θ の初期推定値であり何らかの情報から与えられているとする。このとき Q_0, V_j の与え方として次の2通りが考えられる。

3.2.1 本論の適応アルゴリズムは未知パラメータ θ の突変に対しても有効である。これより、ステップ $k \leq 0$ までは θ_0 であり、 $0 < k$ に対して θ に突変したと考える。従って、与えられた y_0 から逆算して $\theta = \theta_0$ に対して(1)式を満たすように $V_k, v_{0k}, k \leq 0$, を任意に構成する。これから $k=0$ の(19)式より Q_0 を求めることができる。

3.2.2 通常の最小二乗法のように

$$Q_0 = \alpha I, \quad I: \text{単位行列} \quad (32)$$

として、 α を十分大きくとる。これは3.2.1に比べてはるかに簡単であり、最短ステップでの真値への収束は保証されないが、実用的には十分であろう。

ただし、

$$V_j = 0 \quad 1-M \leq j \leq 0 \quad (33)$$

とする。

3.3 アルゴリズムの性質

[性質1] アルゴリズム(6)-(17)式は、3.2.1に記した初期設定のもとで正規方程式(18)式を満たし $\theta_n = \theta$ となる。

(証明) (28)式の関係を繰り返し用いることにより

$$\theta_k = Q_k \left\{ \lambda^n Q_{k-n}^{-1} \theta_{k-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-i} y_{k-i} \right. \\ \left. - \lambda^n \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-n-i} y_{k-n-i} \right\} \\ = Q_k \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-i} y_{k-i} \right. \\ \left. + \lambda^n (Q_{k-n}^{-1} \theta_{k-n} - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-n-i} y_{k-n-i}) \right\} \quad (34)$$

となり、これが(27)式と一致するための必要十分条件は、

$$Q_{k-n}^{-1} \theta_{k-n} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-n-i} y_{k-n-i} \quad (35)$$

となる。ここで

$$\theta_{k-n} = \theta_0, \quad 0 \leq k \leq M \quad (36)$$

$$y_{k-n-i} = V_{k-n-i}^T \theta_0, \quad 0 \leq i \leq M-1 \quad (37)$$

と仮定すると

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-n-i} y_{k-n-i} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-n-i} V_{k-n-i}^T \right) \theta_0 \quad (38)$$

であり、一方(19)式より

$$Q_{k-n}^{-1} \theta_{k-n} = Q_{k-n}^{-1} \theta_0 \\ = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i V_{k-n-i} V_{k-n-i}^T \right) \theta_0 \quad (39)$$

となり、(35)式が成立する。すなわち(36)、(37)の設定のもとで正規方程式(18)式が満たされ、 $k \geq M$ に対して $\theta_k = \theta$ となる。最短ステップは $k=M$ である。ただし、 Q_n が正則であるとする。

[性質2] Q_k が正則である必要十分条件は(24-3)式の $d_k \neq 0$ である。

(証明) (20)式より

$$Q_k^{-1} Q_{k-1} = \lambda I + V_k V_k^T Q_{k-1} - \lambda^n V_{k-n} V_{k-n}^T Q_{k-1} \quad (40)$$

となる。ここで、 Q_{k-1} は正則であるが Q_k (従って Q_k^{-1}) は正則でないとする。すると (40) 式の両辺の行列式をとることにより行列 $\lambda^n V_{k-n} V_{k-n}^T Q_{k-1}^{-1} V_k V_k^T Q_{k-1}$ は λ をその固有値としてもつことがわかる。これより

$$(\lambda^n V_{k-n} V_{k-n}^T Q_{k-1}^{-1} V_k V_k^T Q_{k-1}) x = \lambda x$$

従って

$$\lambda^n (V_{k-n}^T Q_{k-1}^{-1} x) V_{k-n} - (V_k^T Q_{k-1}^{-1} x) V_k = \lambda x \quad (41)$$

が、あるベクトル x ($\neq 0$) に対して成立する。(41) 式より

$$x = \alpha V_k + \beta V_{k-n} \quad (42)$$

$$\alpha = - (V_k^T Q_{k-1}^{-1} x) / \lambda \quad (43)$$

$$\beta = \lambda^{n-1} (V_{k-n}^T Q_{k-1}^{-1} x) \quad (44)$$

とおくことができる。(42) 式を (43), (44) 式に代入して

$$(\lambda + V_k^T Q_{k-1}^{-1} V_k) \alpha + (V_k^T Q_{k-1}^{-1} V_{k-n}) \beta = 0 \quad (45)$$

$$(\lambda^n V_{k-n}^T Q_{k-1}^{-1} V_k) \alpha + (\lambda^n V_{k-n}^T Q_{k-1}^{-1} V_{k-n}) \beta = 0 \quad (46)$$

(45), (46) が非自明な解 (α, β) をもつためにはこれらの係数行列の行列式が 0 でなければならない。

すなわち、

$$(\lambda + V_k^T Q_{k-1}^{-1} V_k) (\lambda^n V_{k-n}^T Q_{k-1}^{-1} V_{k-n} - \lambda) - (V_k^T Q_{k-1}^{-1} V_{k-n}) (\lambda^n V_{k-n}^T Q_{k-1}^{-1} V_k) = 0 \quad (47)$$

となる。これは $d_k = 0$ であることを示している。

3.4 システムモデル

(1) 式で表されるシステムには、種々のものがあるが、いま、次の線形系を考える。

$$P y = R u \quad (48)$$

ここに P, R は次数 n, m の z の多項式で、 P はモニックとする。すると、

$$z^n y = (z^n - P) y + R u \quad (49)$$

と変形して (1) 式の形に帰着できる。しかしより一般に、

$$T y = (T - Q P) y + Q R u \quad (50)$$

なる表現も (48) 式と等価である。ここに、 T, Q はモニック多項式で、 T と $Q P$ の次数を等しくとる。この T, Q の定め方が、推定特性に影響する。

ところで、(50) 式の場合には、 $N = n + m$ であるが、実際のシステムを扱う場合には、種々の不確定性の影響が避けられない。そこで、(1) 式の θ, V_k の次数を $N+1$ とし、 $(V_k)_{N+1} = 1$ とした拡大系を考えることができる。これは、ステップ状外乱に対して有効である。

4. シミュレーションによる検討

次式の簡単な 1 次系を例題とする。

$$(z + p) y = r u \quad (51)$$

ここで $T = z^2 + t_1 z + t_2, Q = z + q$ とすると (50) 式は、

$$y = -p \frac{z+q}{T} y + r \frac{z+q}{T} u + \frac{(t_1 - q) z + t_2}{T} y \quad (52)$$

となる。(N=2) であるので、(1) 式に対応して

$$\theta^T = (p, r) \quad (53)$$

$$V_k^T = \left(-\frac{z+q}{T} y, -\frac{z+q}{T} u \right) \quad (54)$$

$$v_{0k} = -\frac{(t_1 - q) z + t_2}{T} y \quad (55)$$

となる。(N+1=3) の場合には、

$$\theta^T = (p, r, \omega) \quad (56)$$

$$V_k^T = \left(-\frac{z+q}{T} y, -\frac{z+q}{T} u, 1 \right) \quad (57)$$

$$v_{0k} = -\frac{(t_1 - q) z + t_2}{T} y \quad (58)$$

となる。以下のシミュレーションで用いた (p, r) の値は、次の 3 通りである。

(P1)	$p = -0.81194,$	$r = 0.25431$	$0 \leq k$
(P2)	$p = -0.81194,$	$r = 0.25431$	$0 \leq k \leq 40$
	$p = -0.4,$	$r = 0.65431$	$40 < k$
(P3)	$p = -0.81194,$		$0 \leq k \leq 40$
	$p = 0.005k - 1.01194$		$40 < k \leq 120$
	$p = 0.41194$		$120 < k$
	$r = 0.25431$		$0 \leq k \leq 80$
	$r = 0.65431$		$80 < k$

t_1, t_2, q の値は、特に明記しない限り 0 とする。

次に、初期設定であるが、3.2.1 節の方法に従って、 $N=2$ の場合に、初期値 y_0 、初期推定値 $\theta_0^T = (p_0, r_0)$ に対して解くと 1 例として

$$Q_0 = \frac{1}{y_0^{-4}} \begin{pmatrix} y_0^{-2} + X^2 & y_0^{-1} r_0 X \\ y_0^{-1} r_0 X & y_0^{-2} r_0^2 \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$X = y_0 + p_0 y_0^{-1} - t_1 y_0^{-1}$$

が求まる。ここに、

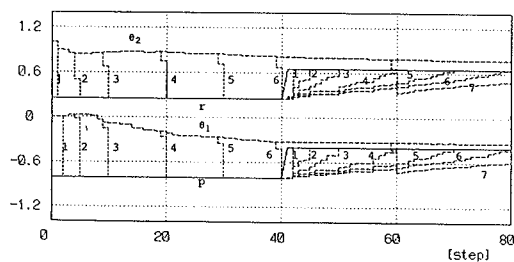
$$u_{-1} = (y_0 + p_0 y_0^{-1}) / r_0 \quad (60)$$

$$u_{-2} = y_0^{-1} / r_0 \quad (61)$$

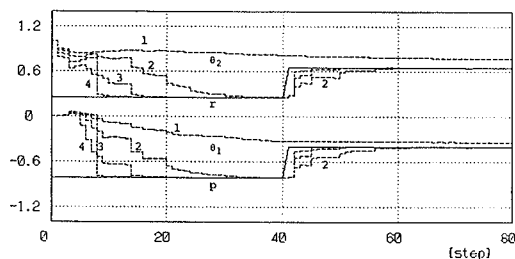
である。この時の (N=2), (P2) に対するパラメータ応答を [図1] [図2] に示す。それぞれ M, λ の値を変えている。このように確定的状況下では、理論通り、 $M=2$ のとき、 $k=2$ の最短ステップで真値に到達している。これらのパラメータ応答は、システムの入力信号に大きく依存することは、よく知られているが、本論では、

$$u = u_s + u_n \quad (62)$$

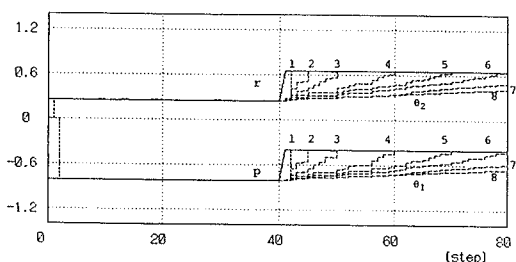
とし $u_s = 0.3$ のステップ入力、 u_n は、ある M 系列信号⁴⁾ で大きさは 0.1 ($u_n = 0.1$ と記す。) である。



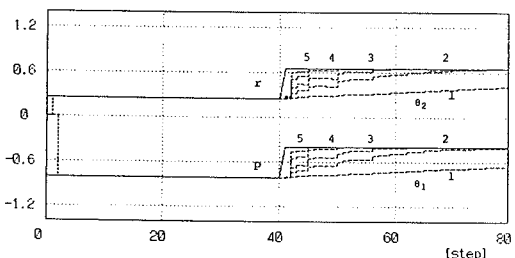
[図1] ($N=2$), ($P2$), $u_s=0.3$, $u_n=0.1$, $\lambda=1$, $M=(1) 2$,
(2) 5, (3) 10, (4) 20, (5) 30, (6) 40, (7) 60



[図2] ($N=2$), ($P2$), $u_s=0.3$, $u_n=0.1$, $M=\infty$,
 $\lambda=(1) 1.0$, (2) 0.8, (3) 0.6, (4) 0.4



[図3] ($N=2$), ($P2$), $u_s=0.3$, $u_n=0.1$, $\lambda=1$, $M=(1) 2$,
(2) 5, (3) 10, (4) 20, (5) 30, (6) 40, (7) 60
(8) ∞



[図4] ($N=2$), ($P2$), $u_s=0.3$, $u_n=0.1$, $M=\infty$,
 $\lambda=(1) 1.0$, (2) 0.9, (3) 0.8, (4) 0.6 (5) 0.4

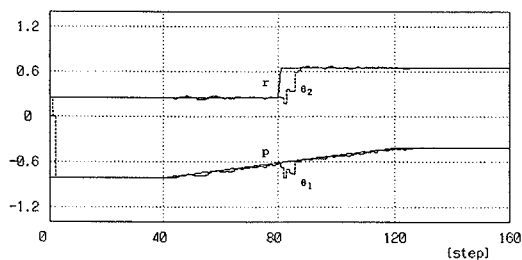
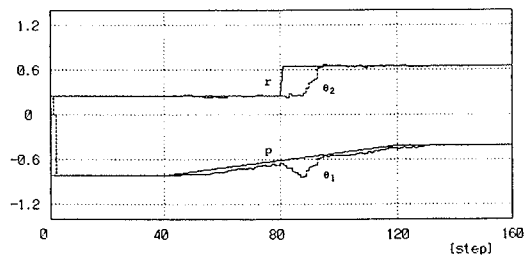
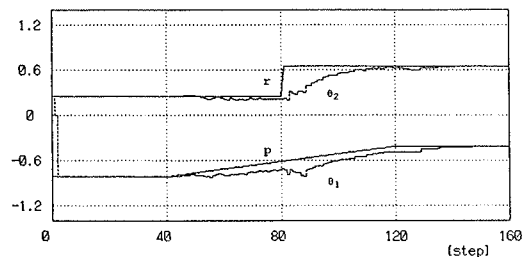
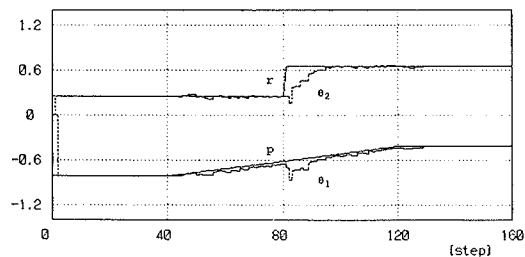
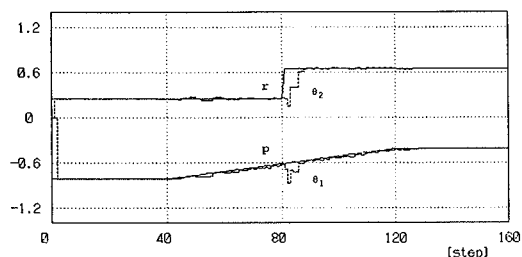
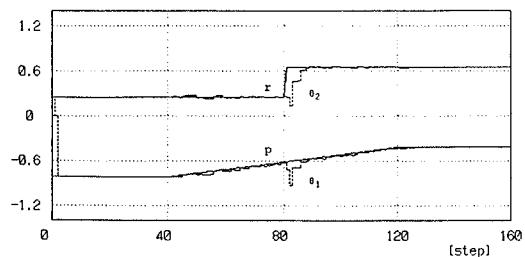
次に、3.2.2節の方法に従って初期設定をすると $\alpha=10^6$ のときの($N=2$), ($P2$)に対する応答を [図3], [図4] に示す。 α が十分大きいと $M=2$ の最短ステップの場合と精度的に等価な応答が得られる。応答において遜色がなく、また設定の容易さからも以下の数値例ではこの設定法を用いることにする。

以上の図はパラメータの突変($P2$)に対するものであるが、徐々に変化するパラメータ p と、突変するパラメータ r とを組み合わせた($P3$)に対する応答を [図5] ~ [図10] に示す。これらの結果から、 M を小さくすること、 λ を小さくすることは同じ傾向を示していることがわかる。このことは、その評価式からも当然のことであるが、いま、 λ が0.1以上の時1, 0.1以下の時0, と近似すると、 $\lambda=0.95$ で $M=45$, $\lambda=0.9$ で $M=22$, $\lambda=0.8$ で $M=11$, としたことに相当している。 M に関しては整定時間を明確にすることができ、また応答も全体としてより好ましいものとなっている。一方 λ を、1以下にすると、パラメータの突変に対する立ち上がりが改善される。従ってこれらを組み合わせた [図9], [図10] がよりす

ぐれた応答として認められる。ただし、 M , λ ともにあまり小さくし過ぎると、推定パラメータに大きな乱れが生じるので、適当なところで妥協しなければならない。

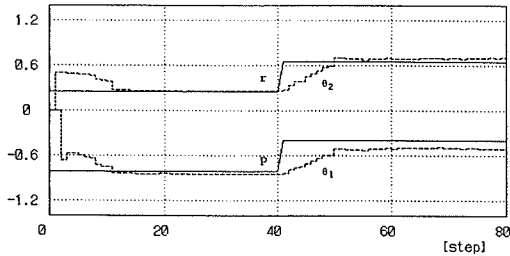
[外乱による影響] ところで、実際のシステムには、種々の不確実性が存在する。そこで入力外乱として D_{us} , D_{un} , 出力外乱として D_{yn} がそれぞれ加わっているとする。ここに D_{us} はステップ状外乱、 D_{un} , D_{yn} はそれぞれある M 系列外乱とする。まずステップ状外乱が支配的な場合を考える。 $D_{us}=0.1$ に対する応答を [図11], [図12] に示す。明らかに推定パラメータは、真値に一致しない。そこで3.4節で記したようにシステムモデルの次数を1増やした($N+1=3$)とすると推定パラメータは真値に一致する [図13], [図14]。ただしこの場合の最短ステップは $M=3$ である。このように確定外乱に対してはシステムモデルの次数を上げることは有効である。

次に最も一般的な入出力にそれぞれ雑音 D_{un} , D_{yn} が加わった場合を調べてみる。 D_{us} , D_{un} , D_{yn} すべて大きさが0.01の場合の($N=2$) ($P2$)に対する結果を [図1

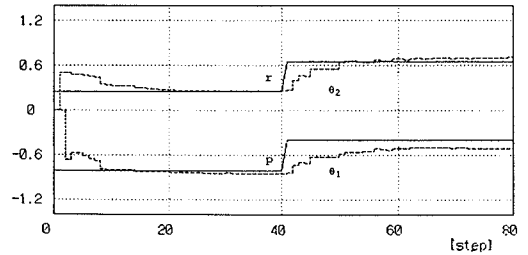
[図5] $(N=2), (P3), u_s=0.3, u_n=0.1, \lambda=1, M=8$ [図6] $(N=2), (P3), u_s=0.3, u_n=0.1, \lambda=1, M=15$ [図7] $(N=2), (P3), u_s=0.3, u_n=0.1, \lambda=0.9, M=\infty$ [図8] $(N=2), (P3), u_s=0.3, u_n=0.1, \lambda=0.8, M=\infty$ [図9] $(N=2), (P3), u_s=0.3, u_n=0.1, \lambda=0.9, M=8$ [図10] $(N=2), (P3), u_s=0.3, u_n=0.1, \lambda=0.8, M=8$

5] ~ [図18] に示す。問題となるのは真値の近傍への適応性 (過渡特性) と定常状態での真値のまわりのバラツキ (定常特性) である。この2つの特性は一方をよくすれば、他方は悪化し、結局、そのトレードオフをとることになる。これらの数値例からわかるように、 M の値を定常状態でのバラツキが許容範囲に入るように大きくとり、さらに λ を1より若干小さくすることにより適応性を改善す

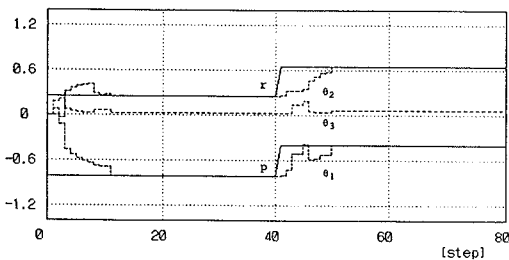
るのがよい方法であると思われる [図19]。 [図20] は同じ条件での $(N+1=3)$ に対する結果であり、白色雑音あるいはそれに近い一般的な雑音に対しては、 $(N=2)$ よりも性能が悪い。しかし、偏りの大きい雑音、例えば、 $D_{u_s}=0.05, D_{u_n}=D_{y_n}=0.005$ に対しては、 $(N+1=3)$ の方が良好である [図21] [図22]。この例では、雑音 $D_{u_s}, D_{u_n}, D_{y_n}$ のうち最も支配的なものは D_{y_n} であ



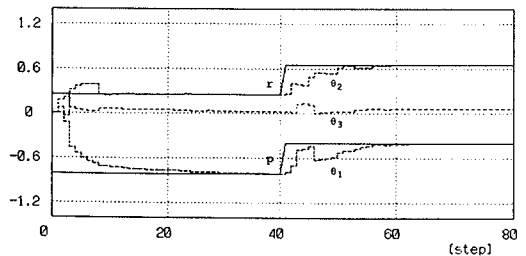
[図11] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1, D_{us}=0.1,$
 $D_{un}=0, D_{yn}=0, \lambda=1, M=10$



[図12] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1, D_{us}=0.1,$
 $D_{un}=0, D_{yn}=0, \lambda=0.8, M=\infty$



[図13] $(N+1=3), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1, D_{us}=0.1,$
 $D_{un}=0, D_{yn}=0, \lambda=1, M=10$



[図14] $(N+1=3), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1, D_{us}=0.1,$
 $D_{un}=0, D_{yn}=0, \lambda=0.8, M=\infty$

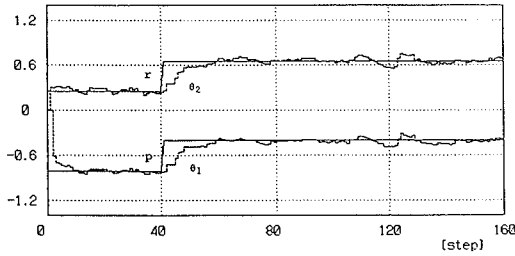
る。そこで、この D_{yn} の大きさを、変化させたものが、[図23]～[図25]である。最後の[図25]に対して、入力 u_n を大きくしたのが[図26]であり、ほぼ、[図23]と等価なものとなっている。このように、外乱による影響は、入力信号との相対的な関係にあり、 M 、 λ の決定も、入力信号によって左右されることがわかる。

〔入力信号 u の影響〕 以上のシミュレーションでは、入力信号 u としてステップ入力 u_s と M 系列信号 u_n の和を用いてきたが、 $u_n=0$ のステップ入力 u_s のみとすると M の有限値、又は $\lambda < 1$ に対して、一旦真値に到達するもその後、真値からの剥離が生ずる。ただし $M=\infty$ の場合には真値の持続が確認される。ところでステップ入力 u_s の大きさは、いわゆる $S-N$ 比の問題となり、あまり小さすぎると、推定不可能となる[図27][図28]。しかし稼働中のシステムのパラメータ推定に対して、大きな試験信号を加えることは望ましくないが普通である。そこで $u_s=0.001$ に対して(52)式の T を $T=z^2-1.8z+1$ としたのが[図29]である。 $u=u_s$ が小さいと y の変動も微小であり、しかもすぐ一定値となり、 V_k の変化がみ

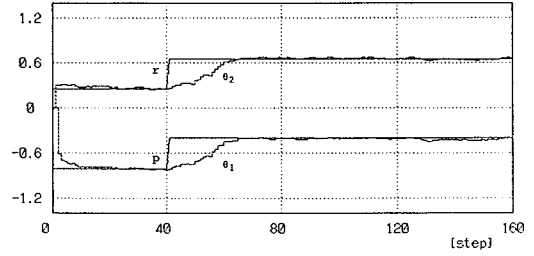
られないことになるが、 $T=z^2-1.8z+1$ とすると u, y は一定値となっても、 V_k の各要素はある定常振動することとなり、その振幅も u, y に比べて大きな値となることが理由である。ただし残念なことにこれはパラメータが固定の場合に対してのみ有効である。

5 まとめ

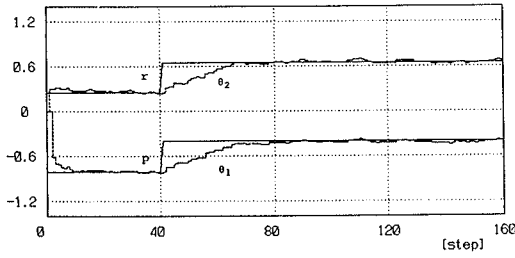
可変未知パラメータを推定するための適応アルゴリズムとして、Truncatedしたデータに基づく最小二乗法を提案した。このアルゴリズムの評価は、考慮すべき過去のデータ数 M と、忘却係数ともいわれている指数重み λ を含んでいる。 $M=\infty$ のとき、このアルゴリズムは、指数重み付き最小二乗法と一致し、さらに $\lambda=1$ のとき、よく知られた最小二乗法と同一となる。すなわち、提案するアルゴリズムは、従来の方法をその特別な場合として含む一般的なアルゴリズムであり、 M と λ がその設計パラメータとなる。近似的には M と λ は、類似的な役割をなし、いずれも、推定パラメータの真値への収束を改善



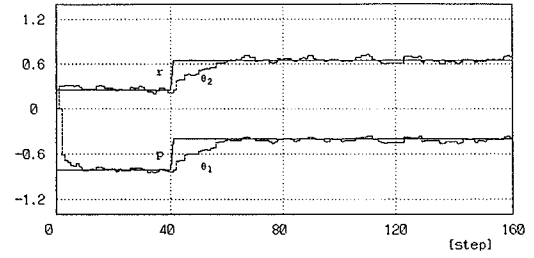
[図15] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1,$
 $D_{u_s}=D_{u_n}=D_{y_n}=0.01, \lambda=1, M=8$



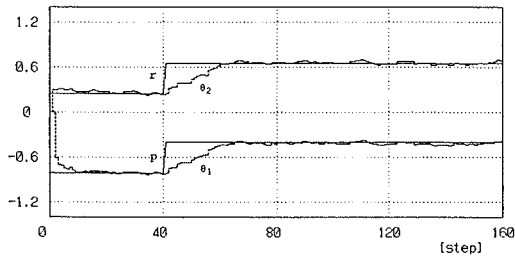
[図16] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1,$
 $D_{u_s}=D_{u_n}=D_{y_n}=0.01, \lambda=1, M=20$



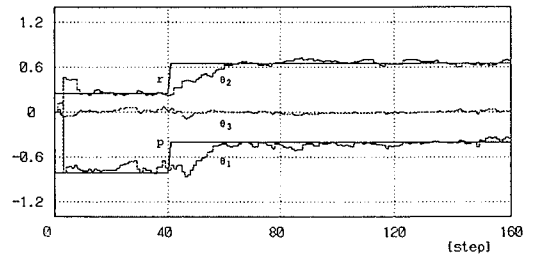
[図17] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1,$
 $D_{u_s}=D_{u_n}=D_{y_n}=0.01, \lambda=0.9, M=\infty$



[図18] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1,$
 $D_{u_s}=D_{u_n}=D_{y_n}=0.01, \lambda=0.8, M=\infty$



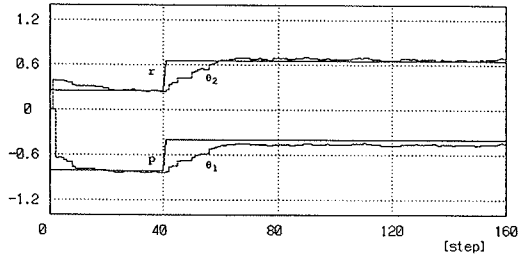
[図19] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1,$
 $D_{u_s}=D_{u_n}=D_{y_n}=0.01, \lambda=0.9, M=20$



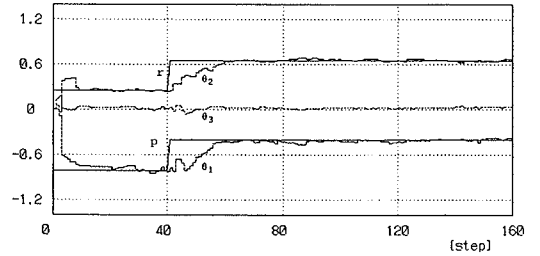
[図20] $(N+1=3), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1,$
 $D_{u_s}=D_{u_n}=D_{y_n}=0.01, \lambda=0.9, M=20$

する働きをする。とくに、 M は真値への収束ステップ数を表すので、 λ に優先して、 M の値を小さく選ぶのが、得策である。一方 λ を1より小さくすると、未知パラメータの変化に対する推定パラメータの立ち上がり、 M に比べてすぐれている。これらの特性を考慮して、 M と λ を決定することになるが、これらの具体的な数値は、実際のシステムに介在する雑音などの不確実性によって、

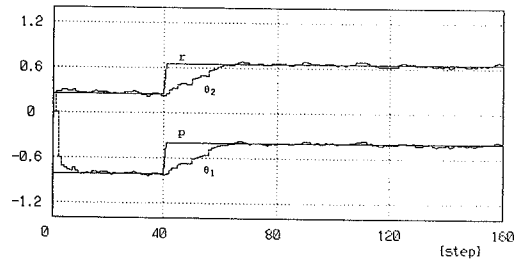
大きく影響される。4章では、いろいろな場合を想定したシミュレーションを行った。不確実性が存在しない理想的な場合には、最短ステップでの真値への収束が示されている。実システムに不可避な外乱として、例えば、ステップ状外乱のような確定外乱に対しては、システムモデルに外乱同定項を追加することにより、うまく処理できることがわかった。より一般的なランダムな外乱に



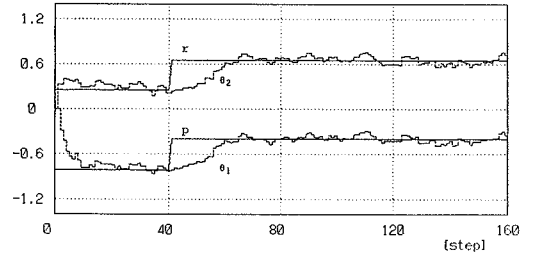
[図21] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1, D u_s=0.05,$
 $D u_n=D y_n=0.005, \lambda=0.9, M=20$



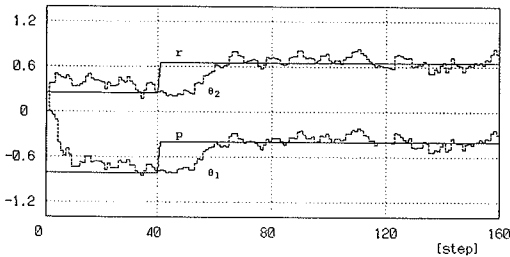
[図22] $(N+1=3), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1, D u_s=0.05,$
 $D u_n=D y_n=0.005, \lambda=0.9, M=20$



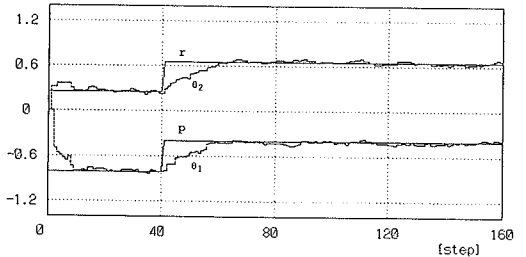
[図23] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1,$
 $D u_s=D u_n=0, D y_n=0.01, \lambda=0.9, M=20$



[図24] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1,$
 $D u_s=D u_n=0, D y_n=0.03, \lambda=0.9, M=20$



[図25] $(N=2), (P2), u_s=0.3, u_n=0.1,$
 $D u_s=D u_n=0, D y_n=0.05, \lambda=0.9, M=20$

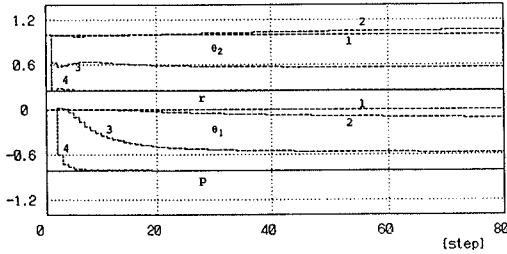


[図26] $(N=2), (P2), u_s=0, u_n=0.5,$
 $D u_s=D u_n=0, D y_n=0.05, \lambda=0.9, M=20$

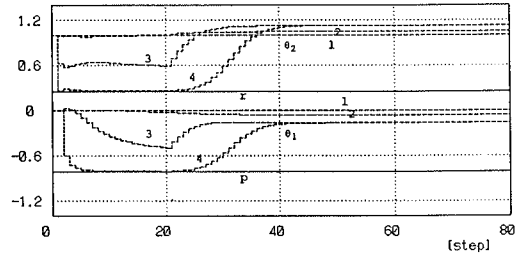
対しては、 M の値を大きくすることにより、定常状態での変動幅を減少させることができる。しかしこれは未知パラメータの変動に対する追従特性（過渡特性）を悪化させることとなり、そのトレード・オフの問題となる。結局、定常特性をみたま範囲で M を小さくとり、そして、 λ を若干小さめ（0.9あたり）に選ぶのが、最良な方法と思われる。 M の値は、外乱の程度に依存するのみでなく、

同定のための入力信号にも影響されることを示した。

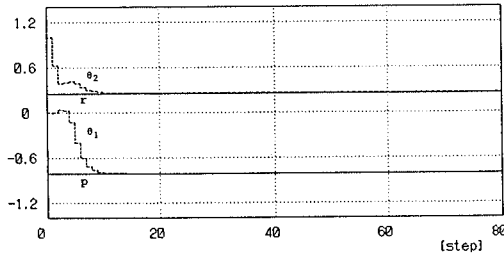
ところで、提案するアルゴリズムの初期設定として2つの方法が考えられた。3.2.1節に示した方法は、このアルゴリズムの方法に従った初期設定であり、途中で未知パラメータの突変と同様に、未知パラメータが初期推定値 θ_0 から真値 θ へ突変したと考えることにより設定されている。しかし、この方法は、次数が大きくなると、



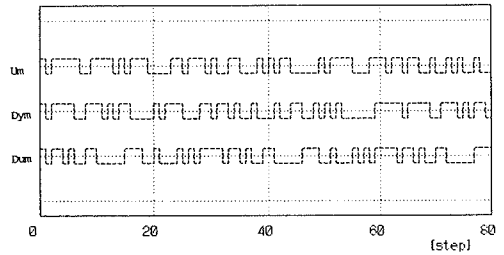
[図27] $(N=2), (P1), u_n = D u_s = D u_n = D y_n = 0,$
 $\lambda = 1, M = \infty, u_s = (1) 0, (2) 0.0001, (3) 0.001$
 $(4) 0.01$



[図28] $(N=2), (P1), u_n = D u_s = D u_n = D y_n = 0,$
 $\lambda = 1, M = 20, u_s = (1) 0, (2) 0.0001, (3) 0.001$
 $(4) 0.01$



[図29] $(N=2), (P1), u_n = D u_s = D u_n = D y_n = 0,$
 $\lambda = 1, M = 20, u_s = 0.001$
 $T = z^2 - 1.8z + 1, Q = z$



[図30] M系列信号

前もつての計算が厄介である。一方、3.2.2節に示した方法はすでによく知られた方法である。 α の値を十分に大きくとれば、実用的に十分であり、また、Mの大きい値に対しては、かえてこの方法が良好である。

参考文献

- 1) L.Ljung and T.Söderström, Theory and Practice of Recursive Identification, MIT Press, 1987.
- 2) G.C.Goodwin and K.S.Sin, Adaptive Filtering Prediction and Control, Prentice Hall, 1984.
- 3) 中溝高好, 信号解析とシステム同定, コロナ社, 1988.
- 4) 嘉納秀明, 現代制御工学, 日刊工業新聞社, 1984.

付録 M系列信号について

本論で用いた3種類のM系列信号は、次のようにして生成した。

```

A(0,0)=1
FOR I=1 TO a , A(I,0)=0
FOR I=1 TO a-1 , A(I+1,k)=A(I,k-1)
A(0,k)=A(b,k-1) XOR A(c,k-1)
D=D-A(1,N)*2D
    
```

Dがその大きさを示し、a, b, cの値によって種々のM系列信号が生成される。本論では、

```

u_n : a=6, b=5, c=6
D y_n : a=5, b=4, c=5
D u_n : a=4, b=2, c=4
    
```

を用いた(図30)。周期は

```

u_n : 126, D y_n : 62, D u_n : 30
    
```

である。