

# 離散時間制御系におけるフィードバック特性の評価法

山本 祥弘

知能情報工学科

(1990年9月1日受理)

## Feedback Characteristic Performances in Discrete Time Control Systems

by

Yoshihiro YAMAMOTO

Department of Information and knowledge Engineering

(Received September 1, 1990)

New performances are introduced in this paper to take feedback characteristics of discrete time control systems into consideration. The performances are applied to a design polynomial equation of the two-stages design method proposed by the author. Basic performances is a weighted square sum of the coefficients of the design polynomial. Others are its variations which keep properties of the control systems types. Each performances have an weighting parameter which is important to cope with model mismatching and noisy circumstance.

**Key words :** feedback characteristics performance, two stages design method, model matching, discrete system, control systems type

## 1. はじめに

先に筆者は、制御系設計の目的である目標値特性とフィードバック特性をそれぞれ独立に設計できる2段階設計法を提案している<sup>1)</sup>。提案する2段階設計法は、その第1段階として最小次数のモデルマッチングあるいは適応制御により目標値特性を満たすように第1ループを構成する。次に、外乱、あるいはミスマッチなどの実在する不確定性を補償するための第2ループを設計する。

本論は、この2段階設計法の第2段階であるフィードバック特性の評価法として離散時間系固有の新しい評価法を提案するものである。

2段階設計法において第1ループを構成した結果は、理想状態を基準にして、乗法的振動が加わった場合とみなすことができ、すでに発表されているロバスト性に対する設計法を用いることが可能であるが<sup>2), 3)</sup>、本論では全く別の試みとして、新しい評価法を提案する。すなわち、2段階設計法の第2段階での設計多項式の係数の2乗和を基準の評価とし、この評価に制御系の型を導入する方法を述べる。提案する評価法が外乱特性や感度特性あるいはロバスト性などのフィードバック特性を総合的に考慮したものであると考えているが、その理論的根拠あるいはこの評価法による種々の性質、従来の設計法との関連などについては今後の検討課題である。しかしながら、本論は、提案する方法が簡単であり、かつ、実際に有効であることを第1に主張するものである。

## 2. 問題の設定と2段階設計法

## 2.1 問題の設定

本論で考察するプラントは、次のスカラ系とする。

$$y = \frac{R^*}{P^*} (u + w) \quad (1)$$

ここに、 $y, u, w$ はそれぞれ、出力、入力、外乱とし、 $P^*, R^*$ は、その次数が

$$\partial [P^*] = n^*, \quad \partial [R^*] = m^* \quad (2)$$

の、 $z$  (または  $s$ ) の多項式とする。ところで、(1)式を完全に知るのとは不可能であり、我々が知り得たのは、

$$y = \frac{R}{P} (u + w) \quad (3)$$

$$\partial [P] = n, \quad \partial [R] = m,$$

$R$ : 安定多項式

であるとする。すなわち、(1)式はプラントであり、(3)

式はプラントモデルである。このとき、(1), (3)式において、

$$\frac{R^*}{P^*} = \frac{Rz^\eta + \Delta R}{Pz^\eta + \Delta P}, \quad \eta \geq 0 \quad (4)$$

となる  $\Delta P, \Delta R$  が、適当な  $\eta$  に対して存在する。いま、(3)式に対する閉ループ系の希望伝達特性を、

$$y_d = \frac{R_d}{P_d} u_d \quad (5)$$

$$\partial [P_d] = n_d, \quad \partial [R_d] = m_d,$$

$P_d, R_d$ : 安定多項式

とし、(3)式に対する設計をモデルマッチング、あるいは  $(P, R)$  のパラメータが未知、可変のときは) 適応制御の手法により構成する。この段階の設計は最小次数によるものとし、この結果にさらに追加したループにより、フィードバック特性に対する保証を実現させる。この具体的結果を次節で示す。なお、 $P^*, P, P_d$  はモニックとする。

## 2.2 2段階設計法

前節の問題に対する結果は、次の設計手順によって達成される。

【設計手順】

- [1] プラントモデル  $(P, R)$  を求める。(適応制御の場合は、次数  $n, m$  を定める。)
- [2] 規範モデル  $(P_d, R_d)$  を定める。ただしその次数は、 $n_d = 2n - m - 1, m_d = n - 1$  とする。
- [3]  $P_d = Q_1 P + S_1, A_1 = K_1 R_d - Q_1 R,$

$$B_1 = -S_1 \quad (6)$$

$$u = \frac{1}{K_1} \left\{ v + \frac{A_1}{R_d} u + \frac{B_1}{R_d} y \right\} \quad (7)$$

とする。ただし、 $K_1$  はスカラであり、 $\partial [A_1] = n - 2$  とする。

- [4] モニック安定多項式  $T, \partial [T] = \rho \geq n - m,$

$$T = Q + S, \quad \partial [Q] = \rho, \quad \partial [S] \leq \rho - n + m, \quad (8)$$

$$v = \frac{T}{Q} u_d - \frac{S P_d}{Q R_d} y \quad (9)$$

この設計手順の導出に関しては、文献1)を参照。ただし、文献1)では、(8)式の  $T, Q, S$  をそれぞれ  $T_2, Q_2, S_2$  としている。手順[3]が第1ループを構成し、手順[4]が追加する第2ループである。

(補足) : (7)式の制御入力を(3)式に代入すれば、

$$P_d y = R_d v + Q_1 R w \quad (10)$$

となり、 $w=0$ ,  $v=u_d$ とみなせばモデルマッチングが達成される。しかし実際のプラント(1)式に代入すると、

$$y = \left\{ 1 + \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta \bar{P}} \right\} \frac{R_d}{P_d} (v + \bar{w}) \quad (11)$$

$$\Delta \bar{P} = P_d R z^{-1} + Q_1 R \Delta P + S_1 \Delta R$$

$$\Delta \bar{R} = Q_1 (P \Delta R - R \Delta P)$$

$$\bar{w} = \frac{Q_1 R}{R_d} w$$

を得る。 $\Delta P = \Delta R = 0$ のときはモデルマッチングが達成されることがわかる。

$P, R$ のパラメータが未知又は可変のときは、(7)式における  $K_1$ , および  $A_1$ ,  $B_1$  のパラメータが未知となる。しかし

$$y = \frac{R}{P} u = \frac{Q_1 R}{Q_1 P} u = \frac{K_1 R_d - A_1}{P_d + B_1} u \quad (12)$$

より、

$$y = -\frac{B_1}{P_d} y + \frac{K_1 R_d - A_1}{P_d} u = \theta^T v \quad (13)$$

となり、(7)式の制御入力の適応化が可能となる。その結果、未知パラメータの推定過渡期を除いて、(11)式と等価な式が成立する。 $\Delta \bar{P}$ ,  $\Delta \bar{R}$ を可変であるとするれば、推定過渡期も(11)式が成立する。

(7)式の入力による閉ループ系の感度関数  $S_{e1}$ , 相補感度関数  $T_{e1}$ <sup>(4)</sup> はそれぞれ

$$S_{e1} = \frac{Q_1 P}{P_d}, \quad T_{e1} = \frac{S_1}{P_d} \quad (14)$$

となる。次に、(11)式の  $v$  に対し、(9)式を代入すると、

$$y = \left\{ 1 + \frac{Q \Delta \bar{R}}{T \Delta \bar{P} + S \Delta \bar{R}} \right\} \frac{R_d}{P_d} \left( u_d + \frac{Q}{T} \bar{w} \right) \quad (15)$$

が求まる。このときの感度関数  $S_o$ , 相補感度関数  $T_o$  はそれぞれ

$$S_o = \frac{Q}{T}, \quad T_o = \frac{S}{T} \quad (16)$$

となる。ただし、これは(11)式をシステムとみなしたときの(9)式による閉ループ系に対するものである。(9)式を(7)に代入したものを入力としたときの閉ループ系に対する感度関数  $S_{e2}$ , 相補感度関数  $T_{e2}$  は、

$$S_{e2} = \frac{P Q_1 Q}{T P_d}, \quad T_{e2} = \frac{T P_d - P Q_1 Q}{T P_d} \quad (17)$$

である。ここに、

$$S_{e2} = S_{e1} \cdot S_o, \quad T_{e2} = T_o + T_{e1} \cdot S_o \quad (18)$$

なる関係が成立している。従って、 $S_{e1}$  については目標値特性の維持のためやむを得ないものとし、 $S_o$  を小さくすることにより、結果として  $S_{e2}$  をも小さくすることができる。一方、相補感度関数に対しては、 $T_o$  を小さくするだけでは  $S_o = 1 - T_o$  が大きくなり、 $T_{e2}$  を小さくすることができず、 $T_o$  と  $S_o$  のトレードオフとなる。

このようにして、(8)式での  $T, Q, S$  の定め方が、ロバスト特性、外乱特性あるいは感度特性などのフィードバック特性を規定する重要な要因となる。ここに、プラント(3)式、規範モデル(5)式、入力(7)式とは独立に、フィードバック特性  $T, Q, S$  の設計が可能であることは重要である。

(15)-(16)式から明らかに、このフィードバック特性の改善は、すでに発表されている  $H$ 無限大制御などと同じ問題の範ちゅうに入るが<sup>(2), (3)</sup>、以下では、全く別の簡単な方法を提案する。

### 3. フィードバック特性の評価法

問題は、 $S_o, T_o$ , あるいは、 $T, Q, S$  を何らかの意味で小さくすることである。これらは(8)式の関係より、全く個別に小さくすることは不可能である。従って、 $T, Q, S$  の個々に対しては、その多項式の係数の2乗和を評価とすることなどが考えられるが、全体としては、その個々の評価の重みつき和を最小にすることになる。しかし、(15)式からわかるように、 $Q$  は  $T, S$  とその役割が若干異なり、いわゆる制御系の型と密接に関係している<sup>(5)</sup>。これより、制御系の型を考慮した評価として以下のものが考えられる。

$$Q = z^q + q_1 z^{q-1} + \dots + q_q = \sum_{k=0}^q q_k z^{q-k}, \quad (19)$$

$$q_0 = 1$$

とするとき、

$$2J_{q0} = \sum_{k=0}^q (q_k)^2 \quad (20-0)$$

$$2J_{q1} = \sum_{i=0}^q \left( \sum_{k=0}^i q_{i-k} \right)^2 \quad (20-1)$$

$$2J_{q2} = \sum_{i=0}^q \left( \sum_{k=0}^i (k+1) q_{i-k} \right)^2 \quad (20-2)$$

$$2J_{q(N+1)} = \sum_{i=0}^q \left( \sum_{k=0}^i C_N q_{i-k} \right)^2 \quad (20-N+1)$$

である。実際には  $0, 1, 2$  で十分であろう。この評価の意味は、例えば  $J_{q1}$  に対して

$2J_{q_1} = (q_0)^2 + (q_0 + q_1)^2 + (q_0 + q_1 + q_2)^2 + \dots$   
であり、この評価のみを最小とするものは、  
 $q_0 = 1, \quad q_1 = -1, \quad q_2 = 0, \dots$

となり

$$Q = (z-1)z^{\rho-1}$$

と1型の補償器となる。

TとSに対しては、その係数を  $\{t_k\}$ ,  $\{s_k\}$  として、

$$2J_T = \sum (t_k)^2, \quad 2J_S = \sum (s_k)^2 \quad (21)$$

とする。全体の評価としては、

$$J = \alpha \{J_T + J_{q_0}\} + (1-\alpha) \{J_T + J_S\} \\ = J_T + \alpha J_{q_0} + (1-\alpha) J_S, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (22)$$

とする。 $\alpha$ は評価の重みパラメータであり、 $\alpha=1$ のときは感度関数Sのみを評価し、 $\alpha=0$ は相補感度関数Tのみを評価したことに対応する。実際には、その中間の値が適切となり得る。

ところで(22)式において $\beta=1$ として1型の制御系を目指しても、 $\alpha=1$ でなければ、完全な1型は達成されない。制御の目的に応じて、例えばオフセットの消去が厳密に要求される場合がある。そのような場合には、(22)式の評価にのせる前に、Qに始めから制御系の型を導入しておくことである。すなわち、

$$Q = (z-1)^{\gamma} Q' \quad (23)$$

あるいは、(19)式において

$$Q(1) = Q^{(1)}(1) = \dots = Q^{(\gamma-1)}(1) = 0 \quad (24)$$

としてパラメータ  $\{q_k\}$  の一部を消去しておくことである。

以上のQに対する要求を実現させるために、始めにTの次数 $\rho$ を十分大きくとることが必要である。結局、(22)式の評価Jは

$$J = J(\alpha; \rho, \gamma, \beta) \quad (25)$$

と4つのパラメータをもち、 $\beta$ は(20)式で定める望ましい制御系の型を表し、 $\gamma$ は(23)又は(24)式で定める強制する制御系の型を表す。

以上の考え方を先の設計手順[4]で具体的に表すと次のようになる。

[4-1]  $\rho=1$ とすると、 $T=z+t_1$ ,  $Q=z+q_1$  とし、 $S=s_0=t_1-q_1$ , とおくことができる。

$$v = \frac{z+t_1}{z+q_1} u_d - \frac{s_0 P d}{(z+q_1) R d} y \quad (26)$$

$$2J(\alpha; 1, 0, 0) = (1^2 + t_1^2) + \alpha(1^2 + q_1^2) \\ + (1-\alpha)(t_1 - q_1)^2$$

$$2J(\alpha; 1, 0, 1) = (1^2 + t_1^2) + \alpha(1^2 + (1+q_1)^2) \\ + (1-\alpha)(t_1 - q_1)^2$$

$$2J(\alpha; 1, 1, 0) = (1^2 + t_1^2) + \alpha\{1^2 + (-1)^2\} \\ + (1-\alpha)(t_1 + 1)^2$$

$$2J(\alpha; 1, 1, 1) = (1^2 + t_1^2) + \alpha(1^2 + 0^2) \\ + (1-\alpha)(t_1 + 1)^2$$

$$2J(\alpha; 1, 0, 2) = (1^2 + t_1^2) + \alpha(1^2 + (2+q_1)^2) \\ + (1-\alpha)(t_1 - q_1)^2 \quad (27)$$

以下、形式的にはどこまでも記すことができるが、 $J(\alpha; 1, 0, 2)$ 以下は、 $\rho=1$ による任意のパラメータの数より、制御系が2型であることの要求の方が強すぎて無意味となる。また $\gamma=0$ ,  $\alpha=0$ のときはいずれも、 $t_1=q_1=s_0=0$ が解となり、(26)式で $v=u_d$ , すなわち、第2ループによる補償は、何もしないことに相当している。

[4-2]  $\rho=2$ とすると、 $T=z^2+t_1z+t_2$ ,  $Q=z^2+q_1z+q_2$ ,  $S=s_0z+s_1=(t_1-q_1)z+(t_2-q_2)$ , となり

$$v = \frac{z^2 + t_1 z + t_2}{z^2 + q_1 z + q_2} u_d \\ - \frac{(s_0 z + s_1) P d}{(z^2 + q_1 z + q_2) R d} y \quad (28)$$

$$2J(\alpha; 2, 0, 0) = (1^2 + t_1^2 + t_2^2) \\ + \alpha(1^2 + q_1^2 + q_2^2) \\ + (1-\alpha)\{(t_1 - q_1)^2 + (t_2 - q_2)^2\}$$

$$2J(\alpha; 2, 0, 1) = (1^2 + t_1^2 + t_2^2) \\ + \alpha\{1^2 + (1+q_1)^2 + (1+q_1+q_2)^2\} \\ + (1-\alpha)\{(t_1 - q_1)^2 + (t_2 - q_2)^2\}$$

$$2J(\alpha; 2, 1, 0) = (1^2 + t_1^2 + t_2^2) \\ + \alpha\{1^2 + q_1^2 + (-1 - q_1)^2\} \\ + (1-\alpha)\{(t_1 - q_1)^2 + (t_2 + 1 + q_1)^2\}$$

$$2J(\alpha; 2, 1, 1) = (1^2 + t_1^2 + t_2^2) \\ + \alpha\{1^2 + (1+q_1)^2 + 0^2\} \\ + (1-\alpha)\{(t_1 - q_1)^2 + (t_2 + 1 + q_1)^2\}$$

$$2J(\alpha; 2, 0, 2) = (1^2 + t_1^2 + t_2^2) \\ + \alpha\{1^2 + (2+q_1)^2 + (3+2q_1+q_2)^2\} \\ + (1-\alpha)\{(t_1 - q_1)^2 + (t_2 - q_2)^2\} \quad (29)$$

等々となる。

(27), (29)式などの評価は制御対象および規範モデルと独立であるので種々の $\rho, \gamma, \beta$ に対してその結果を求めておくことと便利である。これをTable 1.に記す。この結果、TおよびQは $\alpha; 0 \leq \alpha \leq 1$ , に対して安定多項式となっていることが確認される。例えば、 $\rho=1, 2$ に対してこれらの根は Fig.1, Fig.2 となる。

## 4. 数値例

対象とするプラントは2次系で

$$\frac{R^*}{P^*} = \frac{r_0 z + r_1}{z^2 + p_1 z + p_2} \quad (30)$$

とする。

[1] プラントモデルは1次系で

$$\frac{R}{P} = \frac{r}{z + p} \quad (31)$$

とする。このとき真のプラント(30)式は

$$\frac{R^*}{P^*} = \frac{r z + k \{(r_0 - r) z + r_1\}}{(z + p) z + k \{(p_1 - p) z + p_2\}} \quad (32)$$

と表される。ただし、プラントモデルとのずれを可変にするため、パラメータ  $k$  を導入しており、 $k=1$  のとき(30)式は(28)式と一致する。

[2] 規範モデルは、 $n_d=1$ ,  $m_d=0$  より、

$$\frac{R_d}{P_d} = \frac{r_d}{z + p_d} \quad (33)$$

となる。

[3]  $P_d = z + p_d = Q_1(z + p) + S_1$ , より

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1, \quad S_1 = p_d - p, \quad A_1 = 0, \\ K_1 &= r / r_d, \quad B_1 = b = p - p_d, \\ u &= \frac{1}{K_1} \left\{ v + \frac{b}{r_d} y \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

[4]  $T = Q + S$ ,  $\rho \geq n - m = 1$  であり、 $\rho = 1$  のとき、

$$v = \frac{z + t_1}{z + q_1} u_d - \frac{s_0(z + p_d)}{r_d(z + q_1)} y \quad (35)$$

となり、 $\rho = 2$  とすれば、

$$v = \frac{z^2 + t_1 z + t_2}{z^2 + q_1 z + q_2} u_d - \frac{(s_0 z + s_1)(z + p_d)}{r_d(z^2 + q_1 z + q_2)} y \quad (36)$$

となる。設計パラメータ  $\{t_k\}$ ,  $\{q_k\}$ ,  $\{s_k\}$  は、もちいる評価(27), (29)式などに従って、Table.1の結果を利用する。例題の数値は、

$$\begin{aligned} p_1 &= -1.096, & p_2 &= 0.3025 \\ r_0 &= 0.1823, & r_1 &= 0.0964 \\ p &= -0.81194, & r &= 0.25431 \\ p_d &= -0.73075, & r_d &= 0.3641 \end{aligned}$$

をもちいている。これらの値は実験室の液位プラントを想定したものであり、サンプリング時間を2分としている。ただし、40ステップ(80分)以降  $p_1 = -1.2056$  なる変化をさせている。Fig.3 は、 $\rho$  の増大に対する応答

の改善を表している。文献1)の同じ例題に対する結果も参照されたい。

## 5. まとめ

本論では離散時間制御系に固有のフィードバック特性の評価法として、 $T, Q, S$  の係数の2乗和を最小とする方法、および、この評価に制御系の型を導入する方法について述べた。この評価が制御理論としてどのような意味をもつかについてはさらに種々の特性などについて検討することが必要である。連続時間制御系に対応する評価が存在するかなども今後の興味ある課題の一つである。ところで、制御系設計に対する評価としては、(14)式以降で検討したように、唯一絶対なる評価は存在しないと思われる。ある特性に着目すればその限りにおいて、その評価に対する解が得られるのであり、これは、ロバスト性に対しても例外でないと思われる。最終的には、いま対象としているシステムに希望する特性をもたせることであるが、そのフィードバック特性は、外乱あるいはミスマッチの大きさ、タイプに応じて影響をうけ、それに応じて補償器のパラメータも変わるべきはずである。この意味において、ロバスト制御はそれをロバスト性で吸収しようとするものであるが、本論の評価法が、種々の評価の選択を可能にし、しかも、その各々に可調整パラメータ  $\alpha$  を含んでいることは、いわゆる最適な応答を得るためには、当然のことと思われる。とくに、本論は、提案する方法が簡単であり、かつ、実際に有効であることを主張するものである。

シミュレーションの結果、

- 1)  $k$  ( $\Delta P$ ,  $\Delta R$ ) が小さいときには、 $\alpha \rightarrow 1$  で良い(望ましい)応答が得られ、ステップ入力(外乱)に対し、 $\beta$  または  $\gamma = 1$  としてゼロオフセットとなる。
- 2)  $k$  が大きくなると、 $\alpha \rightarrow 1$  では振動的(不安定)になり易く、 $\alpha \rightarrow 0$  とするほうがロバスト安定性はよい。

さらに応答を改善するためには、

- 3)  $\rho$  を大きくする。ただし、改善の程度は漸減していく。
- 4) プラントモデルの次数を上げる。
- 5) 設計手順(3)を適応化する。

などがいえる。これらを総合的に判断して、設計評価として  $\alpha$  の値を選ぶことになる。

## 参考文献

- 1) 山本祥弘：モデルマッチング法による離散時間系のフィードバック制御, 鳥大工研報, 21-1, (1990)
- 2) Y.Zhao and H.Kimura: Dead-beat control with robustness, Int. J. Control, 43-5, 1427/1440 (1986)
- 3) 舟橋・加藤：2自由度補償法による最適ロバスト性

を有する最短デッドビート制御, SICE論文集, 24-5, 51/57 (1988)

- 4) 原・杉江：2自由度制御系-II, システムと制御, 30-8, 457/466 (1986)
- 5) 山本祥弘：外乱対策を伴うモデルマッチングと適応制御, SICE論文集, 24-11, 100/102 (1988)

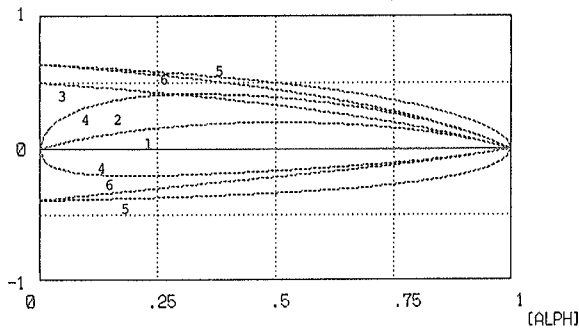


Fig.1 Roots of T

- 1: (1-0-0), (2-0-0)
- 2: (1-0-1)
- 3: (1-1-0), (1-1-1)
- 4: (2-0-1)
- 5: (2-1-0), (2-1-1)

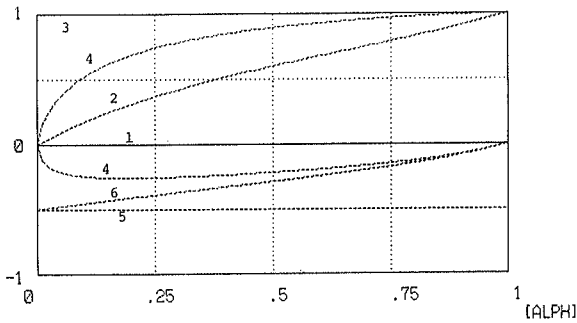


Fig.2 Roots of Q

- 1: (1-0-0), (2-0-0)
- 2: (1-0-1)
- 3: (1-1-0), (1-1-1), (2-1-1)
- 4: (2-0-1)
- 5: (2-1-0)
- 6: (2-1-1)

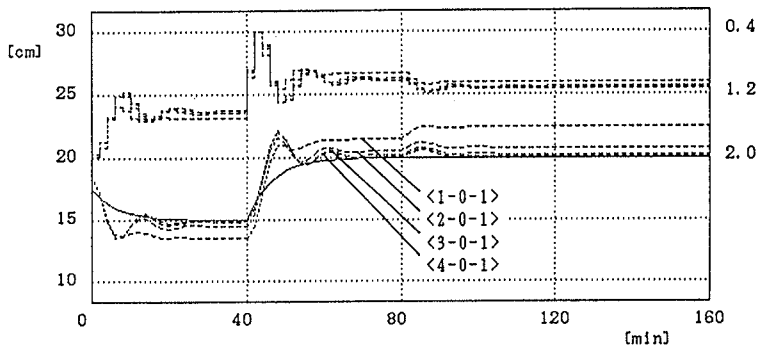


Fig.3 Output responses

k=1,  $\alpha=0.5$   
input step dist.=0.3

$\rho-\gamma-\beta$	T ( $=z^3+t_1z^2+t_2z+t_3$ )	Q ( $=z^3+q_1z^2+q_2z+q_3$ )	S ( $=s_0z^2+s_1z+s_2$ )
1-0-0	$t_1 = 0$	$q_1 = 0$	$s_0 = 0$
1-0-1	$t_1 = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha-\alpha^2}$	$q_1 = -\frac{\alpha(2-\alpha)}{1+\alpha-\alpha^2}$	$s_0 = \frac{\alpha}{1+\alpha-\alpha^2}$
1-1-0	$t_1 = -\frac{1-\alpha}{2-\alpha}$	$q_1 = -1$	$s_0 = \frac{1}{2-\alpha}$
1-1-1	$t_1 = -\frac{1-\alpha}{2-\alpha}$	$q_1 = -1$	$s_0 = \frac{1}{2-\alpha}$
2-0-0	$t_1 = 0$ $t_2 = 0$	$q_1 = 0$ $q_2 = 0$	$s_0 = 0$ $s_1 = 0$
2-0-1	$t_1 = -\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha^2)}{1+4\alpha-4\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4}$ $t_2 = -\frac{\alpha(1-\alpha)^2}{1+4\alpha-4\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4}$	$q_1 = -\frac{\alpha(2-\alpha)(2-\alpha^2)}{1+4\alpha-4\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4}$ $q_2 = -\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{1+4\alpha-4\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4}$	$s_0 = \frac{\alpha(2-\alpha^2)}{1+4\alpha-4\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4}$ $s_1 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+4\alpha-4\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4}$
2-1-0	$t_1 = -\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}$ $t_2 = -\frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)}$	$q_1 = -\frac{1}{2}$ $q_2 = -\frac{1}{2}$	$s_0 = \frac{1}{2(2-\alpha)}$ $s_1 = \frac{1}{2(2-\alpha)}$
2-1-1	$t_1 = -\frac{(1-\alpha)(1+\alpha-\alpha^2)}{(2-\alpha)(2-\alpha^2)}$ $t_2 = -\frac{(1-\alpha)^2}{(2-\alpha)(2-\alpha^2)}$	$q_1 = -\frac{1+\alpha-\alpha^2}{2-\alpha^2}$ $q_2 = -\frac{1-\alpha}{2-\alpha^2}$	$s_0 = \frac{1+\alpha-\alpha^2}{(2-\alpha)(2-\alpha^2)}$ $s_1 = \frac{1-\alpha}{(2-\alpha)(2-\alpha^2)}$
3-0-0	$t_1 = 0$ $t_2 = 0$ $t_3 = 0$	$q_1 = 0$ $q_2 = 0$ $q_3 = 0$	$s_0 = 0$ $s_1 = 0$ $s_2 = 0$
3-0-1	$t_1 = -\frac{\alpha(1-\alpha)(1+\alpha-\alpha^2)(3-\alpha-\alpha^2)}{1+9\alpha-7\alpha^2-9\alpha^3+7\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}$ $t_2 = -\frac{\alpha(1-\alpha)^2(2-\alpha^2)}{1+9\alpha-7\alpha^2-9\alpha^3+7\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}$ $t_3 = -\frac{\alpha(1-\alpha)^3}{1+9\alpha-7\alpha^2-9\alpha^3+7\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}$	$q_1 = -\frac{\alpha(2-\alpha)(1+\alpha-\alpha^2)(3-\alpha-\alpha^2)}{1+9\alpha-7\alpha^2-9\alpha^3+7\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}$ $q_2 = -\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)(2-\alpha^2)}{1+9\alpha-7\alpha^2-9\alpha^3+7\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}$ $q_3 = -\frac{\alpha(1-\alpha)^2(2-\alpha)}{1+9\alpha-7\alpha^2-9\alpha^3+7\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}$	$s_0 = \frac{\alpha(1+\alpha-\alpha^2)(3-\alpha-\alpha^2)}{1+9\alpha-7\alpha^2-9\alpha^3+7\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}$ $s_1 = \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha^2)}{1+9\alpha-7\alpha^2-9\alpha^3+7\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}$ $s_2 = \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{1+9\alpha-7\alpha^2-9\alpha^3+7\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}$
3-1-0	$t_1 = -\frac{1-\alpha}{3(2-\alpha)}$ $t_2 = -\frac{1-\alpha}{3(2-\alpha)}$ $t_3 = -\frac{1-\alpha}{3(2-\alpha)}$	$q_1 = -\frac{1}{3}$ $q_2 = -\frac{1}{3}$ $q_3 = -\frac{1}{3}$	$s_0 = \frac{1}{3(2-\alpha)}$ $s_1 = \frac{1}{3(2-\alpha)}$ $s_2 = \frac{1}{3(2-\alpha)}$
3-1-1	$t_1 = -\frac{(1-\alpha)(1+\alpha-\alpha^2)}{(2-\alpha)(3-\alpha-\alpha^2)}$ $t_2 = -\frac{(1-\alpha)^2}{(2-\alpha)(3-\alpha-\alpha^2)}$ $t_3 = -\frac{(1-\alpha)^2}{(2-\alpha)(3-\alpha-\alpha^2)}$	$q_1 = -\frac{1+\alpha-\alpha^2}{3-\alpha-\alpha^2}$ $q_2 = -\frac{1-\alpha}{3-\alpha-\alpha^2}$ $q_3 = -\frac{1-\alpha}{3-\alpha-\alpha^2}$	$s_0 = \frac{(3-2\alpha)(1+\alpha-\alpha^2)}{(2-\alpha)(3-\alpha-\alpha^2)}$ $s_1 = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(2-\alpha)(3-\alpha-\alpha^2)}$ $s_2 = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(2-\alpha)(3-\alpha-\alpha^2)}$

Table 1. Coefficients of Polynomials T, Q, S.

