

# フラクタル次元解析による粒状体のせん断特性の評価

藤村 尚・西村 強・木山 英郎

土木工学科

(1989年9月1日受理)

Fractal Dimension Analysis for Evaluation of Granular Shear Properties

by

Hisashi FUJIMURA, Tsuyoshi NISHIMURA, Hideo KIYAMA

Department of Civil Engineering

(Received September 1, 1989)

The authors have demonstrated that DEM (Distinct Element Method) is a numerical method which is very helpful in examining the problem for fundamental engineering.

Mandelbrot has created the term "fractal geometry" to quantitatively describe such self-similar complex structures.

In this paper, fractal analysis for a displacement map and a stress map of a simple shear test of granulars by DEM have been tried.

The fractal dimension  $D$  for the displacement map and the stress map has been determined. The displacement and stress of granulars can quantitatively be characterized by the fractal dimension. Similarly a procedure for determining fractal dimension are described in detail.

Key word : fractal, DEM, granular material, shear model test.

## 1. はじめに

地盤内の応力・変形挙動を把握するために、著者らは離散剛要素法(Distinct Element Method)によって、亀裂性や粒子性を考慮できる数値解析法を開発してきた<sup>1)・2)</sup>。これらの数値解析結果の応力・変形量の特性を把握し、かつ定量的な評価ができれば、地盤の変形挙動の予測に大いに役立つと考えられる。

一方、マンデルブロ<sup>3)・4)</sup>は、一見ただけでは、規則性がないと思われるもの、たとえば、山並みや雲、稲妻、海岸線や河川の流路などに、自己相似性を用いて、複雑さの中に隠されている規則性を見つけ出し、フラクタル次元と呼ばれる非整数次元によって、分類しようとする理論を提案した。

本報告では、数年来、当研究室で実施されてきた亀裂性岩盤や粒状性地盤のDEM解析のうちせん断モデル解析結果にフラクタルを用いて、粒状体の応力・変形量の特性を評価できないかどうかを検討する。また、フラクタル次元解析に、パソコンによる図形処理を利用し、解析手法について若干の考察を行なっている。

## 2. フラクタル<sup>4)~8)</sup>

### 2.1 フラクタル

従来の微積分に基礎をおく力学的自然観に支えられたニュートン以来の伝統的な自然科学とは、無縁のものとされ、伝統的な概念では説明不可能なものが自然界には現実に存在している。このようなランダムなパターンに関して新しい考えを打ち出して説明を試みようとするものの1つにフラクタルがある。

一見して規則性があるようには思えないランダムなパターン、たとえば、山並みや雲、稲妻、海岸線や河川の流路、地盤やガラスなど固体のヒビ、割れ目や破断面など、これまで、あまり科学の対象になりえなかったこれらのパターンに対して、コンピュータの飛躍的発達と、それに付随した画像処理法の進歩によって、一見ランダムにしか見えないこれらのパターンにもなにか統計的な規則性があるのではなからうかという疑問が出されるようになった。

このような疑問に答えて、複雑さの中に隠されたある種の規則性を抽出し分類する有力な手法を提供したのがマンデルブロのフラクタルである。

フラクタルの考え方の基本は、特徴的な長さのなさ、あるいは、自己相似性である。特徴的な長さとは、たとえば、球を考えるならばその半径、また人間の形を扱うならば身長というように、そのものに付随する長さのうちの代表的なものをさす。この特徴的な長さを持たないパターンの大切な性質が、自己相似性であり、種々の複雑なパターンの一部を取り出してもと同程度に拡大してみると、やはり同じようにみえて前と区別がつかない。以下に、一、二の例を示す。

図-1は、入り組んだ海岸線の形であり、両者の縮尺はおおよそ数倍違っている。上の図は下の図の一部を拡大したもので、部分を拡大した図形が全体の図形と同じようにみえる。これは、ある種の自己相似性である。

図-2に、フラクタルな図形として有名なコッホ曲線を示す。もとのゼロと1の間の区間の図形と全く同じ形のものが、ゼロと1/3の間の区間にあるし、ゼロと1/9の間にもある。実は、コッホ曲線上のどの一部分も、たとえば任意の点と思われる部分でも適当倍拡大してみると、もとのコッホ曲線と同形であることが知られている。このようにコッホ曲線には幾何学的な自己相似性を有している。

数学的に厳密さにこだわるのであれば、フラクタルは果てしなく自己相似性なパターンでなければならないが、

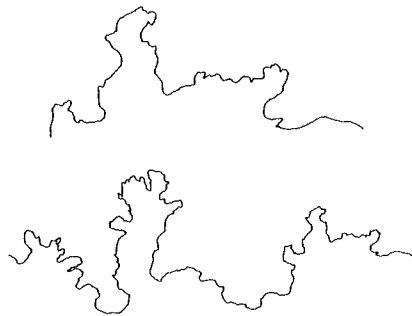


図-1 海岸線の形の例(島根半島  $D=1.23$ )

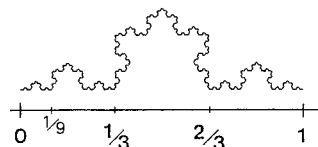


図-2 コッホ曲線

表面張力とか粘性とかの物理現象がパターンの特徴的な長さを決めるような場合、自己相似なスケール範囲の下限を与えてしまう。しかし、自己相似のスケール範囲に上下限があっても、その範囲が十分に広ければ、フラクタルとみなすことにする。

では、如何なる図形もフラクタルかといえばそうではない。一見フラクタルのように見えても、実はフラクタルでないものもたくさんあるので注意を要する。たとえば、中華料理などの表面に浮かんでいる油、大小様々な大きさの油が浮かんでいる様子はフラクタル的に感じられるが、フラクタルではない。

### 2. 2 フラクタル次元

点が1つだけ存在している場合は0次元である。たとえば、図-3のようなカントール集合は、無限個の点から構成されているので0次元の1点よりは複雑である。また図-2のコッホ曲線は1次元の単純な線分より複雑であるが面を埋め尽くすほどでない。勿論、面を埋め尽くしてしまう平面の次元は2である。

では、カントール集合やコッホ曲線のような状態で次元という概念を適用しようと考えると、次元は0と1、あるいは1と2の間と考えることはできないかという疑問が起こる。この疑問に対して、フラクタル理論は次元を非整数まで拡張したフラクタル次元という新しい次元を用いて解き明かしている。

以上のように、様々な図形や自然界にみられるランダム・パターンの自己相似性を定量的に特徴づける指標の一つがフラクタル次元なのである。

フラクタル次元を求める方法には、いくつかあるが、ここでは、カバー法と分布関数による2つの方法を採用する。これらの方法について簡単に述べておく。

カバー法によるフラクタル次元では、d次元空間内にあるパターンを1辺rのd次元超立方体(d=1, 2, 3ではそれぞれ、線分、正方形、立方体)で覆ってしまう(カバーする)と考える。そのときに必要な超立方体の最小数N(r)がr<sup>-D</sup>に比例する、つまり

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (1)$$

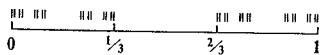


図-3 カントール集合

となるならば、この指数Dがフラクタル次元を与える。分布関数によるフラクタル次元では、様々な大きさ(長さ)の存在する図形、たとえば、月のクレーターや岩石の亀裂などにおいて、図形の縮尺に依存する大きさ(長さ)r、月のクレーターでは半径、岩石の亀裂では長さなど、よりも大きい(長い)ものの存在確率をN(r)とする。rの分布密度をp(r)とすれば

$$N(r) = \int_r^\infty p(s) ds \quad (2)$$

という関係を満している。図形の縮尺を変えることはr → λrという変換をすることに対応する。したがって、縮尺を変えても分布型が変わらないためには

$$N(r) \propto N(\lambda r) \quad (3)$$

という関係が成立しなければならない。式(3)を常に満たすようなrの関数型は、次のような型に限られる。

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (4)$$

ここで現れる指数Dが分布のフラクタル次元を与える。

### 2. 3 フラクタル次元の画像処理

コンピュータの画像処理を使ってフラクタル次元を求める方法を概述しておく。カバー方法では図-4の様に、フラクタル次元を求めようとする物体を一辺rの正方形でカバーし、対象物の一部を含んでいるそのときの正方形の個数N(r)を求める。図中、斜線を施してあるメッシュの数が、あるrに対するN(r)である。以下、つぎつぎにrを変えたときに式(1)なる関係があればこの対象物は、D次元のといえる。つまり両対数グラフの横軸にrを、縦軸にN(r)をプロットしたとき、もし対象物が自己相似ならデータはほぼ直線状にのるはずであり、その傾きの絶対値から与えられた対象物のフラクタルに次元が与え

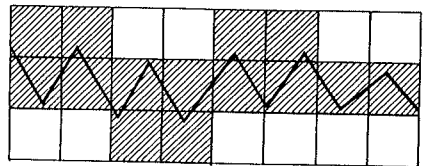


図-4 N(r)の数

られる。こうしたカバー法においては、与えられた対象物をカバーする単位図形は超立方体に限らず、半径あるいは直径  $r$  の  $d$  次元超球 ( $d=1,2,3$ ではそれぞれ線分、円盤、球体) であってもよい。この方法は図-5のような対象物のフラクタル次元を求めるのに効果的である。まず円盤をある大きさ  $r$  にして、図のように端点から対象物に沿ってあてがい、端点に到達するまでに要する回数  $N$  を数える。いいかえれば直径  $r$  の円盤で両端点間の対象物をカバーするのに必要な円盤の最小数を求めるのである。同じことを  $r$  を色々変えて行う。このようにし

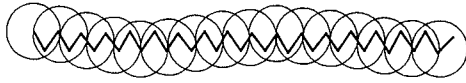


図-5  $r=3R$ の線分(円)によるカバー法の例

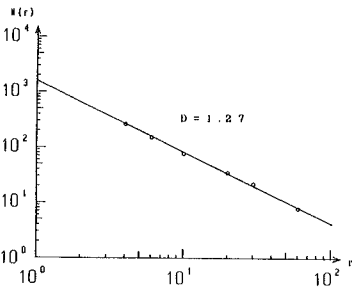


図-6 コッホ曲線のフラクタル次元

て求めた円盤の直径  $r$  とそれをあてがう回数  $N$  を両対数グラフにプロットしたとき、もし対象物が自己相似なら直線上にあり、傾きの絶対値がそのフラクタル次元にほかならない。この操作をパソコンの画像処理で行うを試みる。図-6にコッホ曲線に関して行った一例を示す。コッホ曲線は理論的にフラクタル次元が得られ、その次元は、 $D=1.2618\dots$ である。パソコンの画像処理によって求めた結果は  $D=1.27$  であり、良好な値を与えている。

分布関数による方法<sup>9,10)</sup>では、フラクタル次元を求めようとする物体から大きさ  $r$  以上の対象物の個数  $N(r)$  を求める。以下、次々に  $r$  を変えたときに式(1)なる関係があればこの対象物は  $D$  次元のといえる。つまり、両対数グラフの横軸に  $r$  を縦軸に  $N(r)$  をプロットしたときに、データが部分的にせよ直線関係にあれば、その対象物は自己相似であり、傾きの絶対値がそのフラクタル次元である。以上のように、フラクタル次元の最も基本的な定義は、観測の尺度  $r$  と、そのとき観測されるものの個数  $N(r)$  によって

$$D = -\log N(r) / \log r \quad (5)$$

となる。一般的には関数  $N(r)$  が非常に特殊な関数型(べき)以外の場合には、この式の右辺は定数にならないので、フラクタル次元は定義できない。そこで式(5)を拡張して、 $N(r)$  がべき以外の場合にもフラクタル次元が定義できるようにする。式(5)が両対数グラフに  $r$  と  $N(r)$  をプ

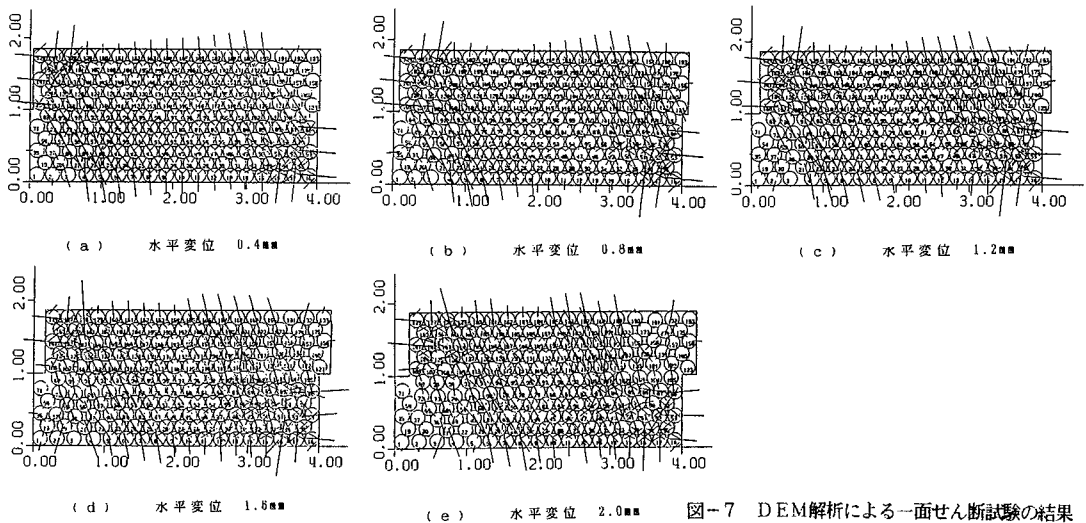


図-7 DEM解析による一面せん断試験の結果

ロットした時のグラフの傾きを表していることから、観測の尺度が  $r$  の時のフラクタル次元  $D(r)$  を次のように、点  $(r, N(r))$  におけるグラフの傾きとして定義する。

$$D(r) = -d \log N(r) / d \log r \quad (6)$$

このように拡張されたフラクタル次元は、 $N(r)$  が滑らかな関数でありさえすればいつでも確定するので、上限や下限にわずらわされることはない。

### 3. フラクタル次元の計算結果

#### 3.1 DEM解析粒状体モデルと仮想せん断面

著者らは、砂のような粒状体を対象に図-7に示すような一面せん断試験をモデル化したDEM解析を実施してきた。ここでは、これらの試験のうち、次の条件を満たすものを探り上げた。粒状体モデルの粒子配列を、17/18, 15/16, 13/14, 11/12の4配列として、鉛直応力、0.4Kgf/cm<sup>2</sup>, 0.2Kgf/cm<sup>2</sup>, 0.1Kgf/cm<sup>2</sup>の3種類の合計12パターンで1パターンについて水平変位、0.4mm, 0.8mm, 1.2mm, 1.6mm, 2.0mmの5つの条件とする。図-8は、一面せん断モデルの粒子配列17/18, 鉛直応力0.4Kgf/cm<sup>2</sup>, 水平変位0.4mmにおけるDEM解析結果であり、要素間の接触力ベクトルを示している。同図は、応力変化の最も著しいと思われる仮想せん断面に着目して、仮想せん断面上下一列の要素間の接触力ベクトルを取り出した



図-8 要素間の接触力ベクトル (粒子配列17/18)



図-9 要素の重心位置を結んだ線 (粒子配列17/18)

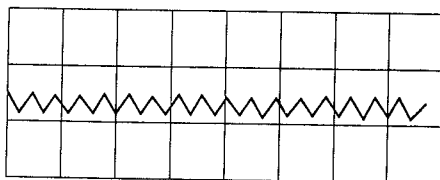


図-10  $r = 3R$  の正方形によるカバー法の例

図形である。接触力ベクトルは接点を挟んで、作用力・反作用力のベクトルを表し、両者は大きさ等しい方向が逆の一本の線分である。そこで、ここでは、大きさを半分にして仮想せん断面に近い線分を用いる。次に、図-9は前述と同様のせん断条件での変形量の最も著しいと思われる仮想せん断面に着目して、仮想せん断面上下一列の要素の重心位置を仮想せん断面を交互に交わるように結んだ線であり、粒子の配列の変化や集合体の変形量を調べることができる。

#### 3.2 DEM解析結果とフラクタル次元

カバー方法の一例として要素の重心位置を結んだ線を線分(円)と正方形でカバーしたものを図-5と図-10に、 $N(r)$ と $r$ を両対数にプロットしたものを、それぞれ図-11と図-12に示す。なお、線分 $r$ は、粒状体モデルの場合には粒子の半径 $R$ をもとに、 $r = nR/2$ ,  $n = 1 \sim 10$ を、採用している。

また、接触力ベクトルを取り出した図形を正方形でカバーしたものを図-13に、 $N(r)$ と $r$ を両対数にプロットしたものを図-14に示す。なお、 $r$ は、図中の接触力

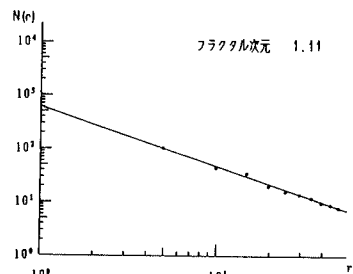


図-11 線分(円)によるカバー法における  $N(r) - r$  の関係

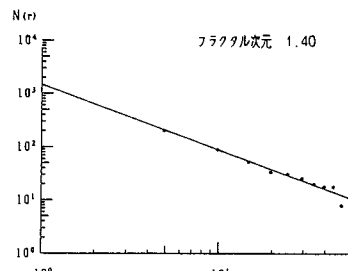


図-12 正方形によるカバー法における  $N(r) - r$  の関係

ベクトルの内最大のRをもとに、 $r = nR/30$ ,  $n = 1 \sim 30$ とする。以上の結果より、要素の重心位置を結んだ線ならびに接触力ベクトルは、いずれも自己相似性を有しフラクタル次元を与える。正方形と線分によるカバー法では、両者の値は必ずしも一致していない。

次に、分布関数による方法の結果を示す。図-15は要素間の接触ベクトルの $N(r)$ と $r$ とを両対数にプロットしたもので、一様に滑らかな曲線の中央部に直線部分が見られる。この直線部分は、 $N(r)$ の値が約20~70%の間にあり、自己相似性を有している。この間の直線の傾きの絶対値を求めてフラクタル次元Dを得る。他の曲線部については、式(6)のフラクタル次元 $D(r)$ で表し得る。

粒状体のせん断時における要素間の接触力ベクトルを分布関数によって求めたフラクタル次元の結果の一例を図-16に示す。図にみられるように、水平変位によるフラクタル次元の変化は小さく、ほぼ一定の値をとる。そこで、フラクタル次元の代表値として一定鉛直応力毎の平均値を求め、要素間接触角ならびにせん断抵抗角との関係をそれぞれ図-17と図-18に示す。要素間接触角とは、要素の重心を結ぶ線分と水平との角度である。

図-17にみられるように粒子配列を決定する要素間接触角によってフラクタル次元が異なり、17/18配列のような高積み状態から11/12配列のような偏平な状態になるにつれて、次元の値が大きくなるのがわかる。また、図-18にみられるように、せん断抵抗角が大きくなるとフラクタル次元は小さくなっている。このことは、せん断抵抗角が大きくなると要素間の接触力ベクトル値の大

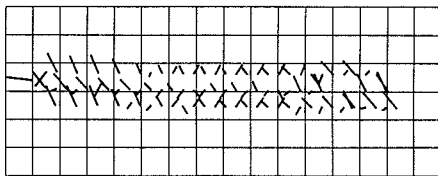


図-13  $r = 3R/2$ の正方形によるカバー法の例

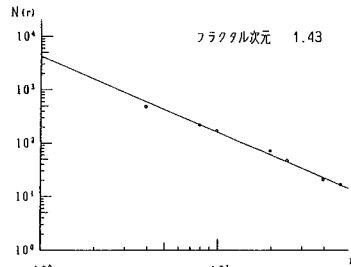


図-14 正方形によるカバー法における  $N(r) - r$ の関係

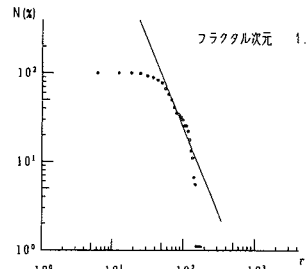


図-15 粒子配列17/18, 鉛直応力0.4kgf/cm<sup>2</sup>

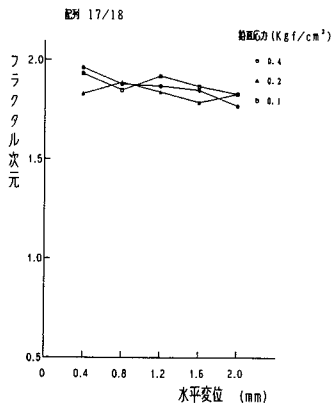


図-16 分布関数法

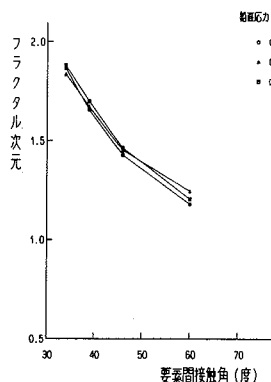


図-17 分布関数法

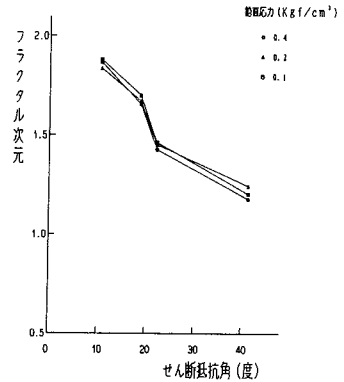


図-18 分布関数法

きいものが多類して、フラクタル次元が小さくなる傾向にある。

また、正方形によるカバー法によって求められたフラクタル次元と鉛直応力をパラメータとしたせん断抵抗角の関係を図-19に示す。図のように、総じてせん断抵抗角が大きくなるにつれてフラクタル次元は一定値になるが、せん断抵抗角の小さいところでは、鉛直応力によって、次元の値が異なっている。

粒状体のせん断時における粒子の移動を調べるために、要素の重心位置を結んだ線について、線分(円)によるカバー法によって求めたフラクタル次元の結果を図-20、-21、-22に示す。図にみられるように、水平変位によるフラクタル次元の変化は小さいこと、せん断

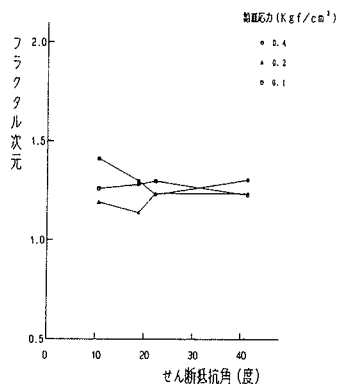


図-19 正方形によるカバー法

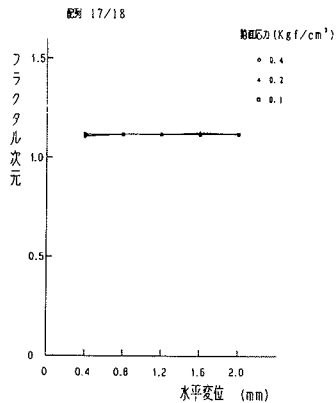


図-20 線分(円)によるカバー法

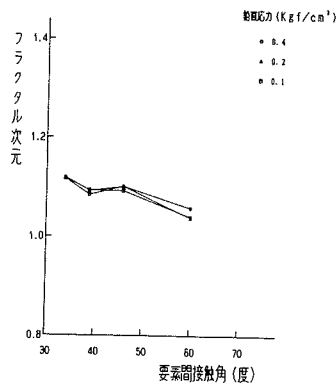


図-21 線分(円)によるカバー法

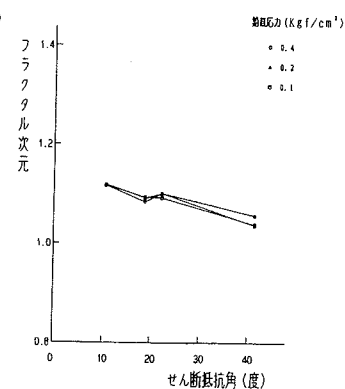


図-22 線分(円)によるカバー法

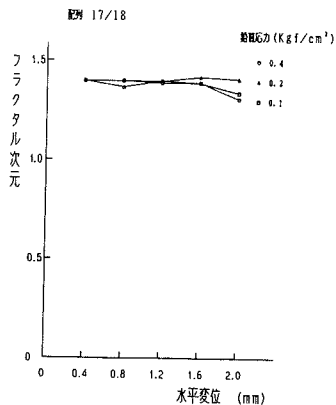


図-23 正方形によるカバー法

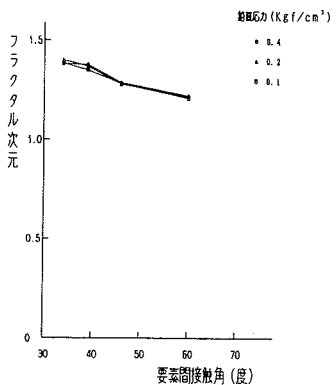


図-24 正方形によるカバー法

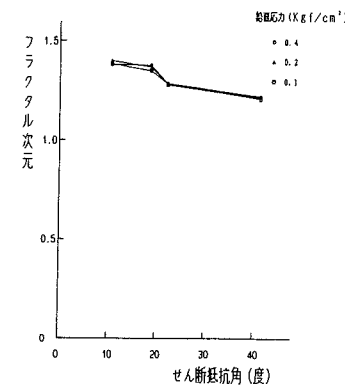


図-25 正方形によるカバー法

抵抗角が大きくなると次元が小さくなることなどが知れる。また粒子配列を決定する要素間接触角によってフラクタル次元が異なることがわかる。このことは要素の重心位置を結んだ線の形が要素間接触角によってほぼ決定し、要素間接触角が大きくなると要素の重心位置を結んだ線が直線に近づきフラクタル次元が、1に近づく。一方、正方形によるカバー法によって求めたフラクタル次元の結果を図-23, -24, -25に示す。線分(円)によるカバー法と正方形によるカバー法とでは、得られたフラクタル次元の値に多少の違いがみられるが、いずれの結果も線分(円)によるカバー法と同様の傾向が認められる。

### 3.3 フラクタル次元の計算法の検討

カバー法によるフラクタル次元の計算法において、線分(円)による方法と正方形による方法とでは得られるフラクタル次元の値に多少の違いがある。これは、線分(円)によるカバー法が、フラクタル次元の基準値を1次元直線においていることから1次元に近い曲線などのフラクタル次元を計算するのに適し、これに対し、フラクタル次元の基準値を2次元正方形としていることから正方形によるカバー法は、2次元に近い広がりを持つ図形のフラクタル次元を計算するのに適している。このことから、要素の重心位置を結んだ線のようなものについてフラクタル次元を求めるときには、線分(円)によるカバー法によって求められた値を採用する方が好ましいように思われる。

分布関数によるフラクタル次元の計算法においては、フラクタル次元を求めようとする分布関数のどの範囲についてフラクタル次元を求めめるかによって得られる値が異なっているので、フラクタル次元 $D(r)$ で表現するのが良い。本報告では、要素間の応力ベクトルの分布において存在確率約20~70%の範囲に直線域が存在するのでこの区間のフラクタル次元 $D$ を求めている。

## 4. 結語

本報告では、一面せん断モデルのDEM解析結果に基づいた粒状体の応力・変形量をフラクタルを用いて評価するとともに、フラクタル次元の計算法の検討を行った。得られた結果を要約して示すと次の通りである。

1) 一面せん断モデルのDEM解析に基づいて、仮想せん断面付近の応力と変形量をフラクタルを用いて評価

しうることが確かめられた。

2) 粒子間応力に対応する接触力ベクトルと粒子移動を表す要素の重心を結んだ線のフラクタル次元解析から、次元の値はそれぞれ1.14~1.96と1.02~1.14の範囲を示し、せん断抵抗角や要素間接触角が大きくなるとその値が小さくなることが知れる。

3) フラクタル次元の計算法は、対象となる図形によって計算法を選ぶ必要があり、本報告で扱ったような要素の重心位置を結んだ線のフラクタル次元を求めるには、線分(円)によるカバー法が最適である。また、2次元に近い広がりを持つ図形のフラクタル次元を求めるには、正方形によるカバー法が適している。一方、要素間の接触力ベクトルのフラクタル次元を求める計算法には、分布関数による方法が適しているようである。手法により次元が異なることについては、今後、 $r$ ならびに $D(r)$ の検討が必要である。

### 参考文献

- 1) 木山英郎・藤村 尚：カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析，土木学会論文集第333号，PP.137~146，1983
- 2) 木山英郎・藤村 尚・西村 強：せん断モデルを用いた離散剛要素法の材料定数の検討，土木学会論文集，第382号/III-7，1987
- 3) B.B.Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature, Freeman (1982)
- 4) フラクタル幾何学(広中平祐監訳)，日経サイエンス社，(1985)
- 5) 高安秀樹：フラクタル，朝倉書店，1986
- 6) 小川 泰：自然界の形とフラクタル，数理科学11 PP.94~139，1981
- 7) 松下 貢：自然界のパターン，形と科学 PP.89~110，朝倉書店
- 8) 松下 貢・沢田康次：フラクタルとそれに関連した自然現象，計測と制御 PP.54~62，1985
- 9) 西村 毅・草深守人・大野博之・小島圭二：岩盤割れ目系の現地調査をもとにした確率統計的な評価，第23回土質工学研究発表会講演概要集，PP.1119~1120，1988.6
- 10) 大野博之・小島圭二：割れ目の統計的相似性に基づくSite Characterizationの試み，第19回岩盤力学に関するシンポジウム講演概要集 PP.416~419，1987.2