

ラインソースからの灌水に伴う土壌水分動態 の有限要素法による解析の精度

山田将之*・矢野友久**・渡辺正平***

平成8年6月24日受付

Accuracy of a Finite Element Method in Analysing Soil Moisture Behaviour Irrigated from a Line Source

Masayuki YAMADA*, Tomohisa YANO** and Shouhei WATANABE***

Soil moisture behavior from a line source in micro irrigation is considered to be two-dimensional. Finite Element Method (FEM) is often employed for simulation. In this study, the accuracy of analyzing with FEM in comparison with an analytical solution is evaluated. These two methods are compared under as similar conditions as possible because exactly the same ones cannot be achieved. With the appropriate data available, such as element division, time period and soil moisture characteristics, the following conclusion was obtained: the accuracy of analyzing soil moisture behavior from a line source with FEM was quite high except near the bottom of a calculation region.

ま え が き

マイクロ灌漑の一種のラインソースからの灌漑による土壌水分動態は、二次元不飽和浸透流と見なせる。このとき、畑地灌漑においては重力による水分移動ばかりではなく、植物根からの蒸散の他に土壌面からの蒸発に伴って土壌水分は移動する。そして、現実の灌漑においては間断灌漑が行われることもあり、灌水強度や蒸散速度、

蒸発速度なども時刻と共に変化する。これらの要素を考慮した有限要素法による計算が行われており、実験値との比較もなされている^{3,4)}。しかし、あらかじめ有限要素法による計算の精度を確認しておくことは重要な要件の一つである。そこで、有限要素法と解析解の結果を比較して有限要素法の解析精度を検討することを本研究の目的とした。

この目的のために選んだ解析解は、半無限体表面の1

*大学院修士課程：鳥取大学大学院農学研究科
The Graduate School of Agriculture, Tottori University

**鳥取大学乾燥地研究センター
Arid Land Research Center, Tottori University

***鳥取大学農学部農林総合科学科生産環境工学講座
Department of Agricultural Engineering, Faculty of Agriculture, Tottori University

本の線源から連続灌水が行われた場合を対象としたもの²⁾であるが、解析解は現実の灌漑とか離れた条件のもとに誘導されている。つまり、解析解は蒸発散を0とし、しかも土壌の絶乾状態を初期条件としている。一方、有限要素法では解析領域が有限である。また絶乾状態を初期条件とすることや、灌水源を幅を持たない線とすることは不可能である。しかし、これらをできるだけ解析解に近づけた条件を設定し、有限要素法と解析解の結果を比較対照することにした。

解 析 解

図1のように、地表面の一本のラインソースから連続灌水が行われたときの二次元不飽和浸透流の解析解²⁾の要点は次の通りである。

1. 非定常解析解

半無限体の表面に設置されたラインソースから連続灌水されたときの、任意点の非定常無次元マトリックスポテンシャル ϕ は次式のように表される。

$$\phi(X, Z, T) = 2 \left\{ \phi_B - \frac{\sqrt{\pi} e^{z^2}}{2} \int_0^T \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{\xi} + Z/2\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi} e^{X^2/4\xi}} d\xi \right\} \quad (1)$$

ここに、

$$\phi_B = \frac{e^{-z}}{2} \int_0^T \frac{d\xi}{\xi e^{(\xi + (X^2 + Z^2)/4\xi)}} \quad (2)$$

であり、 X 、 Z はそれぞれ、水平方向と鉛直方向の無次元距離、 T は無次元灌水継続時間、 ξ は積分変数である。さらに、 $\operatorname{erfc}(y)$ は余誤差関数であり次式で表される。

$$\operatorname{erfc}(y) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{d\xi}{e^{-\xi^2}} \quad (3)$$

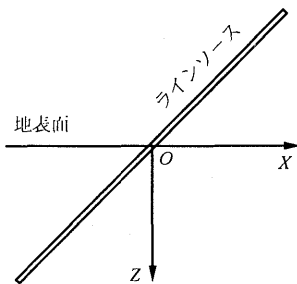


図1 地表面のラインソース

上式を数値計算すれば、任意点、任意時間における無次元マトリックスポテンシャル ϕ の分布が求められる。

2. 定常解析解

絶乾状態の土に灌水が続けられると各点の土壌水分は定常状態に達する。このときの無次元マトリックスポテンシャル ϕ は、 $T = \infty$ の場合であり、次式で表される。

$$\phi(X, Z, \infty) = 2 \left\{ e^z K_0(\sqrt{X^2 + Z^2}) - e^{z^2} \int_z^\infty \frac{K_0(\sqrt{X^2 + \xi^2})}{e^\xi} d\xi \right\} \quad (4)$$

ここに、 K_0 は第2種0次変形ベッセル関数である。

3. 解析解の計算法と距離および時間の換算式

高精度の数値解を得るためにFORTRANの倍精度で解析解の ϕ の値を計算した。そのとき、積分はFACOMのサブルーチンSSLIIを用いて計算した。

無次元距離 X 、 Z と無次元時間 T の実距離 x 、 z と実時間 t からの換算式は、土壌の特性値 α と k から次式で表される。

$$X = \alpha x / 2, \quad Z = \alpha z / 2, \quad T = \alpha k t / 4 \quad (5)$$

ここに、 k は不飽和透水係数 K と体積含水率 θ の関係として次式で表される。

$$k = dK/d\theta \quad (6)$$

解析解と有限要素法における条件の差異

解析解は絶乾状態の半無限体の土壌表面に設置された線源から灌水が始まる。絶乾状態ではマトリックスポテンシャルが無限大となるから、有限要素法ではそのような条件は与えることはできない。有限要素法の灌水源は原点から離れ、しかも三角形要素の側面となるから線ではなく有限の幅を持つ。そして、有限要素法では解析領域が有限であり、領域の側面での横方向の水の移動は認められないが、領域の底面からは水は抜ける。さらに、有限要素法では時間増分は有限である。このようなことから、解析解と有限要素法の条件を完全に一致させることはできない。しかし、次のようにして両者の条件を近づけることは可能である。第1に有限要素法における要素分割を細かくして灌水幅をできるだけ小さくする。そして灌水する要素を1個とする。それによって、灌水源を原点に近い線源に近付けることができる。また、時間増

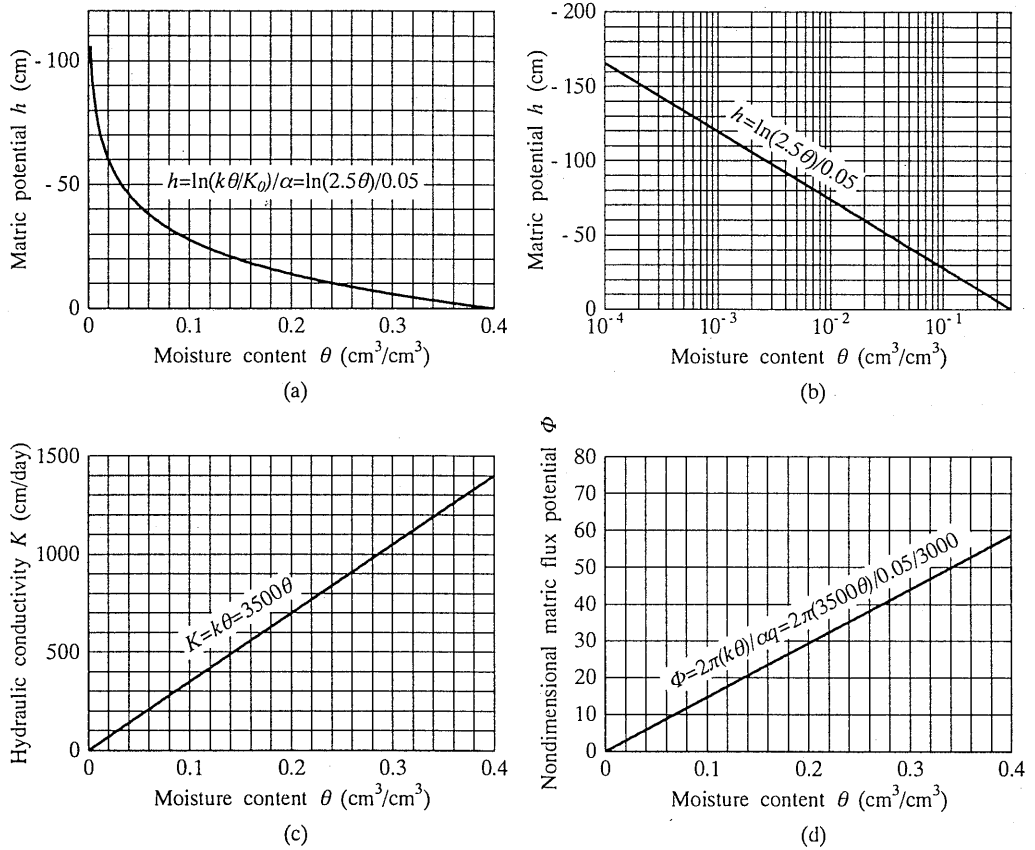


図2 土壌水分特性曲線の関係

分を小さくする。第2に解析解と有限要素法による解析結果の比較対照は有限要素法の側面と底面の境界面の近傍を除く。第3に土壌水分特性曲線は、解析解に近似させるために次式のものを選定する。

$$K = k\theta = 3500\theta \quad (7)$$

$$h = \ln(k\theta/K_o)/\alpha = \ln(2.5\theta)/0.05 \quad (8)$$

$$\Phi = 2\pi(k\theta)/\alpha/q = 2\pi(3500\theta)/0.05/3000 \quad (9)$$

ここに、 K_o は飽和透水係数(cm/day)、 q は灌水強度(cm^3/day)、 h はマトリックポテンシャル(cm)、 α と θ の単位はそれぞれ(cm^{-1})と(cm^3/cm^3)である。式(7)~(9)の関係を図2(a)~(d)に示す。

上記の理由とコンターを滑らかに描く目的から、90cm×90cmの領域を図3に示すように分割して有限要素法に

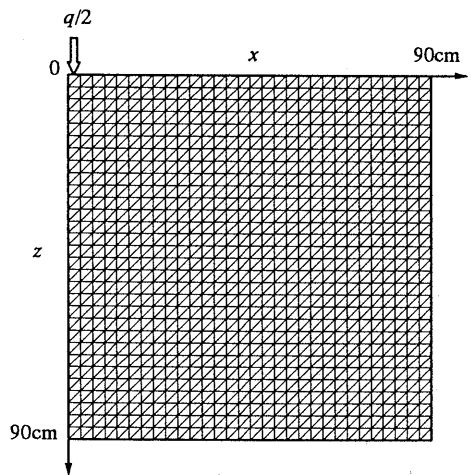


図3 有限要素法の要素分割図

よる計算を行った。節点数は961、要素数は1800である。有限要素法は田中によって作成されたプログラム^{3,4)}を利用して、時間増分を $\Delta t = 0.00004 \text{ day}$ とし、京都大のFACOMによって計算した。有限要素法では節点におけるマトリックスポテンシャル h の値が計算される。なお、解析解の計算点も有限要素法と同様に、 $31 \times 31 = 961$ 個の正方形格子点とした。

解析解と有限要素法の計算結果の比較

1. 解析解の性質

解析解の計算式では土壌水分特性曲線や灌水強度のデータが不要である。それらが使われるのは、解析解と有限要素法の結果を比較するときだけである。よって、解析解のコンターの形状は土壌の特性や灌水強度に応じて変ることはない。なお、解析解でのラインソースによる灌漑の灌水源が線であることから、原点は $\phi_B = \infty$ となる特異点である。そのため、ここでの ϕ の計算ができない。定常状態の解析解の式(4)も原点で $K_0 = \infty$ となるから、ここでの ϕ は計算できない。

2. 灌水量の関係

解析解と有限要素法の灌水量の関係は図4(a)、(b)の通りとなる。解析解の灌水強度 q は有限要素法では $q/2$ に相当する。そして、有限要素法では灌水源が原点から少し離れる。

3. 初期条件と境界条件の相違と解析解の補正

解析解と有限要素法のコンターを比較する場合、大きく分けて2つの問題がある。第1の問題は有限要素法の解析で与える初期含水率の値である。初期含水率を理論解のように絶乾状態にしようとするれば、このときのマトリックスポテンシャルが無限大となるから有限要素法ではそのようなデータを与えることができない。つまり、解析解と有限要素法の初期条件を完全に一致させることはできない。しかし、式(7)~(9)および図2(a)~(d)に示したような土壌水分特性を持つ土であれば、初期含水率 θ_0 を0.1%と実用的に含水率が0の初期条件での計算が可能である。初期含水率 $\theta_0 = 0.1\%$ のときは、式(8)に代入するとマトリックスポテンシャルは $h_0 = -120 \text{ cm}$ となる。これを有限要素法での初期条件とした。

第2の問題は、解析解は半無限領域に水分が拡散するが有限要素法では領域の側面で横方向へ水が移動しないことである。これは次の方法で解析解を修正することで解決できる。図5(a)のように2つの灌水線から同じ灌水強度 q の灌水が行われると、両者の中央では水の流入量と流出量が同じとなり、水平方向への水の移動はなくな

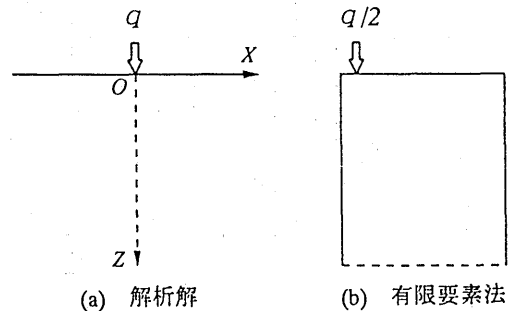


図4 解析解と有限要素法の灌水量

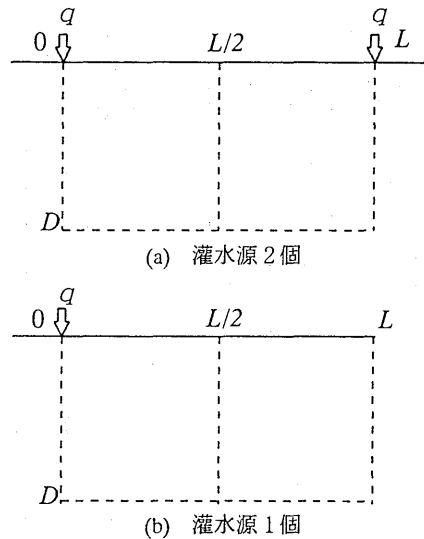


図5 解析解の重ね合わせ

る。図5(a)の左半分が有限要素法の解析領域に相当する。解析解を有限要素法の側面境界条件と一致させるために次のような重ね合わせを行う。まず、図5(b)のように一つのラインソースから灌水されたときの $X = 0 \sim L$ 、 $Y = 0 \sim D$ の領域での解析解に対する計算を行う。そして、得られた計算結果の右半部分を裏返して左半分に重ね合わせる。これを側面境界条件を考慮した解析解とする。重ね合わせを行ったときと行わなかったときの左半分のコンターの差異の例を図6(a)~(c)に示す。実線が重ね合わせを行ったとき、点線が重ね合わせを行わなかったときのコンターである。これらの図は灌水経過時間が異なる。灌水源近

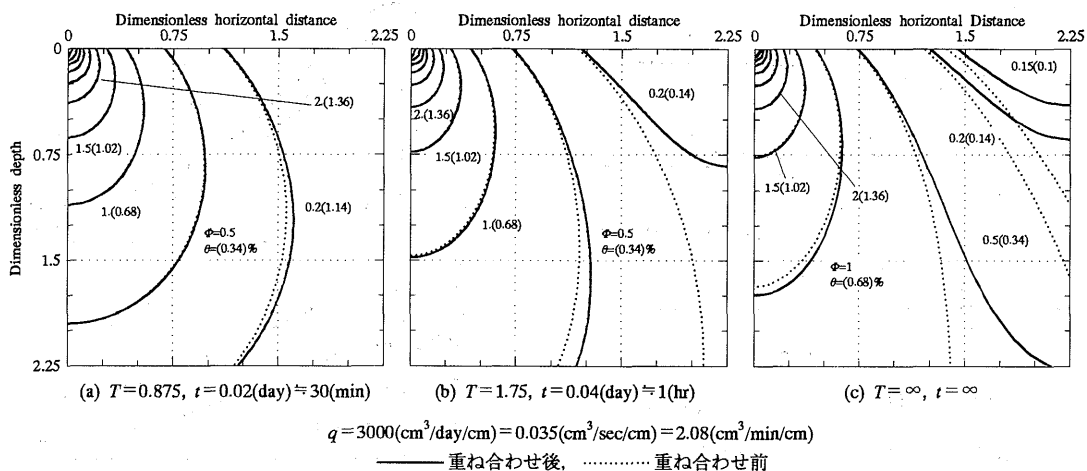


図6 解析解の重ね合わせの効果

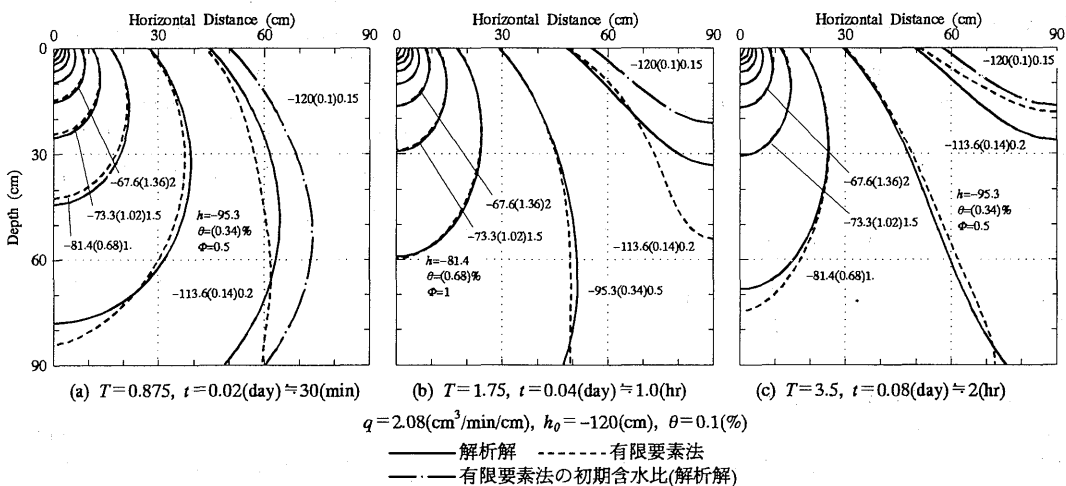


図7 解析解と有限要素法によるコンターの比較

くでは重ね合わせの効果はほとんどみられないが、灌水源から離れた含水率が小さくしかも側面に近いところで重ね合わせの効果が現れている。

4. コンターの比較

解析解と有限要素法によるコンターの例を図7(a)~(c)に示す。これらの図は灌水経過時間が異なるのみである。実線は横方向の重ね合わせを行った解析解、一点鎖線は有

限要素法での初期含水率 $\theta=0.1\%$ に相当する解析解、破線は有限要素法のコンターである。灌水源に近い含水率が大いところは解析解と有限要素法のコンターが非常に良く近似している。灌水時間が長くなって含水率が大くなると、その傾向が顕著となる。しかし、灌水源から離れた含水率が小さいところは両者のコンターに差がみられる。これらのコンターには、マトリックスフラッ

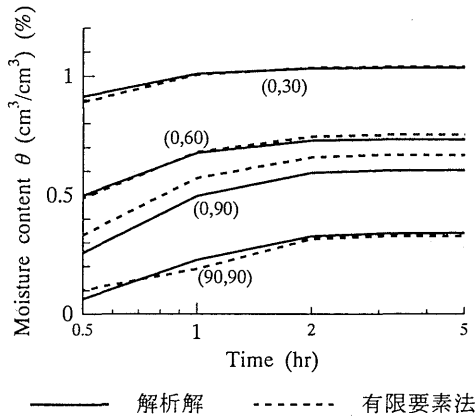


図8 特定の座標における含水率の推移

クスポテンシャル ϕ 、体積含水率 θ (%), およびマトリックポテンシャル h (cm)の値を示している。相互の換算式は式(8)~(9)に示された関係より次式の通りとなる。

① ϕ から θ , h への換算

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 150\phi / 7000\pi, \\ h &= \ln(2.5\theta) / 0.05 = 20 \ln(0.0536\phi / \pi) \end{aligned} \right\} (10)$$

② h から θ , ϕ への換算

$$\left. \begin{aligned} \theta &= e^{0.05h} / 2.5, \\ \phi &= 2\pi(3500\theta) / 0.05 / 3000 = 18.667\pi e^{0.05h} \end{aligned} \right\} (11)$$

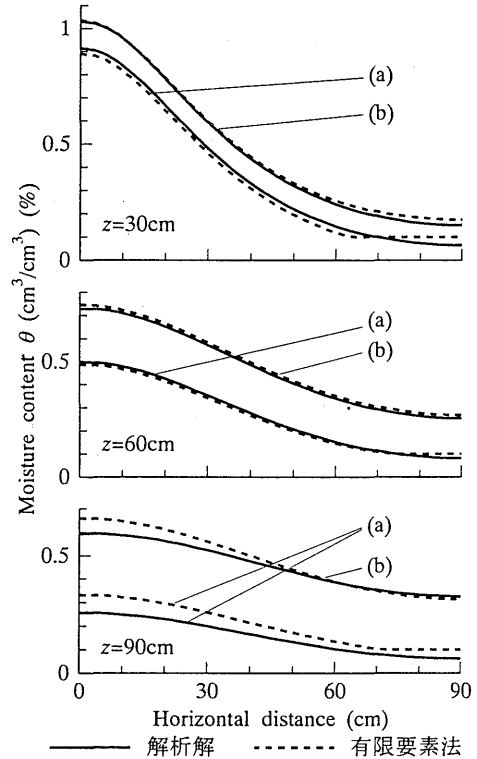
なお、 $T=5.25 \div 3$ (hr)における解析解のコンターは、図6(c)、つまり $T=\infty$ における解析解のコンターと全く重なる。

5. 特定点における含水率の推移

灌水源直下の3点および、 $X=L=90$ cm, $Z=D=90$ cmの点における含水率の推移を図8に示す。灌水3時間以降はいずれの点も含水率は一定となっている。他の点も同様である。したがって、3時間以降の体積含水率は定常状態になっていることが確認された。

6. 一定深さにおける含水率

一定の深さにおける含水率の水平方向分布を図9に示す。有限要素法では初期含水率 h_0 を0.1%として計算している。灌水源からの水分が到達していないところでは、解析解と有限要素法の差が他の場所よりも顕著に現れている。有限要素法での初期含水率 h_0 をより小さくすると、灌水強度を極端に小さくする必要があり、計算に困難を伴う。



(a) $T=0.875$, $t=0.02(\text{day}) \approx 30(\text{min})$

(b) $T=3.5$, $t=0.08(\text{day}) \approx 2(\text{hr})$

図9 一定の深さにおける含水率の分布

総 括

ラインソースからの連続灌水による土壌水分動態の有限要素法による解析の精度を、解析解と比較することによって検討した。解析解と有限要素法の条件を完全に一致させることは不可能であるが、両者をできるだけ近付けた条件で計算を行った。得られた結果の要点は以下の通りである。

1) 有限要素法での初期含水率を0.1%とし、解析解の条件に近付けて計算すると、得られたマトリックフラックスポテンシャル ϕ やマトリックポテンシャル h および体積含水率 θ などのコンターは、灌水源近くの含水率が大きいところでは有限要素法によるものと解析解によるものがよく近似した。

2) 灌水源から離れたところは有限要素法と解析解のコ

ンターが離れる傾向を示した。しかし、側面境界付近では、コンターは離れても両者の含水率の差は小さい。灌水源直下の底面境界付近では両者の含水率に差がみられる。

3) 有限要素法で灌水を続けると土壌含水率は定常状態に収束した。その結果は定常解析解に近似した。

4) 要素分割や時間刻み、それに土壌水分特性のデータなどが適正であれば、領域の境界付近を除き有限要素法による解析は信頼性が高いものと判断できる。少なくとも実験値と有限要素法の結果を比較することは、実用的に問題はないと考えられる。ただし、蒸発散を含んだ場合の有限要素法の解析精度は未知である。

追記：有限要素法に現れる対称連立方程式は書籍¹⁾に記載されたバンド法によるガウスの消去法で解かれている。その解析精度を16節点を有する要素分割、つまり、16元連立一次方程式について二つの方法で検定した。第1は同じ方法をSSLⅡのサブルーチンDLAXで解いて、その解をバンド法による解と比較する方法であり、第2は解を連立方程式の左辺に代入して右辺の値と比較するもの

である。いずれの方法においても、有効数字15桁のうち14桁まで一致した。これにより、連立方程式の数値解は十分に精度が高いことが確認された。

謝辞：本研究の遂行に当っては、文献^{3,4)}の著者、とりわけ田中明先生に一方ならぬお世話になった。ここに謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) コナー・プレビア：流体解析への有限要素法の応用。奥村敏江監訳，サイエンス社，東京(1977)，pp.61-62
- 2) Lomen, D.O. and Warrick, A.W.: Time-Dependent Linearized Infiltration: II. Line source. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 38 568-571 (1974)
- 3) 田中 明・山本太平・成岡道男：点滴灌漑下における土壌水分動態—有限要素法による解析—。土壌の物理性，66 39-45 (1992)
- 4) 山本太平・田中 明・成岡道男：点滴灌漑の作物条件下における二次元の土壌水分特性。土壌の物理性，66 29-37 (1992)