鳥大農研報（Bull. Fac. Agric., Tottori Univ.）**56**　27～34（2003）

輸送モデルの非線形輸送費最適解とファジィモデル

笠原浩三*・万　里*

平成15年7月7日受付

*鳥取大学農学部農業経営情報科学

Optimal Solution of Nonlinear Transportation Costs and Applied of the Fuzzy Transportation Model

Kozo Kasahara * and Li Wan *

* *Department of Farm Management Information, Faculty of Agriculture, Tottori University, Tottori 680-8553, Japan*

Transportation costs are central issue for the resource allocation problems, which deal with principally cost minimization of transportation from supply to demand areas. Many researchers used linear programming methods to study minimization of transportation cost, because linear models also help to analyze and develop planning methods. Lately, fuzzy linear programming methods have been studied and introduced as a complementary procedure. However, with this method, each unit cost along the transportation cost surface is regularly fixed. Generally, each transport cost unit is a function of traffic condition and distance under study. Based on these facts, this paper examines the practical issues of one aspect of the transportation problem in relation to the nonlinear cost function associated with traffic condition and distance.

First, this paper shows that an optimal solution to a linear programming of transportation problem applies the Lagrange multiplier method. The results indicate that the fuzzy optimal solution (for a case that introduces the Lagrange optimal solution to the fuzzy linear programming) is a nonlinear transportation cost function. Second, a fuzzy optimal solution using an ordinary simplex method was applied. The results confirmed that the convergence iterating value for the MODI method finally astringed. This indicates that the fuzzy solution model can be applied for an optimal solution using the repetition of the MODI method.

(Received 7 July 2003)

Key words: transportation model, fuzzy linear programming, Lagrange method, repetition MODI method

課　　題

輸送問題は資源配分問題とも言われ，特定の生産財に関して，供給条件と消費地の需要条件を満たす最適輸送配分計画を考えるものである．このような問題に対して当初は線形計画法によって定式化され，ヒッチコック，クープマンスによって発展させられたものである．その後の研究により，輸送問題の最適解の導出は線型計画法をはじめ，飛び石法や，モーダイ法などによって次々と新しい方法が考え出されてきた[1,7]．最適解も定式化された

方法によって容易に得ることができるようになった.

さらに近年ファジィ線形計画法の研究が進められ，供給量及び需要量に一定の制限幅を導入した現実的で実効性の伴う解法が提示されている[5-6,8-9]. さらにそれらの解法に関してモーダイ法の反復による最適解導出も明らかにされ，技術的適用に実践性が伴いその有用性が示されている[2-4].

しかしながらこれらのモデルにおいては需給地間の輸送費用は輸送量に関係なく単位輸送量当たり一定値に固定化されていた. 一般に輸送費は輸送量の変化によって異なるものであり，大量輸送によって割安になるのが一般的である. さらに輸送距離に対しては距離に伴って単位当たり輸送費用も割安になるのが一般的である. このような現実的輸送条件を配慮し，適用に一層の有用性を与えることが必要である.

そこで本報告ではこれらの輸送問題に対してラグランジェ未定乗数法により，輸送費が輸送量の関数とした場合の最適解の導出方法と，さらに輸送距離による輸送費への影響を検討し，併せてファジィ輸送モデルの適用も試みることとする.

線形計画法によるファジィ輸送モデル

通常の単純輸送問題は，各需給地における供給制限量と必要需要量の下で，総輸送費が最小になる各需給地間の輸送量を求めるものである. すなわち，供給地の最大可能供給量を s_i，需要地の最小限必要需要量を d_j とし，さらに各需給地間の輸送費を c_{ij} とすると，最小化すべき総輸送費は $TC=\Sigma\Sigma cx$ となり，以下のように定式化されるものである.

$$\textit{minimize} \quad z = cx^t \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned} \textit{subject to} \quad & Ax \leqq b^t \\ & x \geqq 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(2)$$

$x=(x_{11},\ x_{12},\cdots,x_{1m},\cdots,x_{ij},\cdots,x_{im},\cdots,x_{nm})$

$b=(s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n,d_1,d_2,d_3,\cdots,d_m)$

$c=(c_{11},\ c_{12},\cdots,c_{1m},\cdots,c_{ij},\cdots,c_{im},\cdots,c_{nm})$

Aは通常の単体表に表現した場合の実働方式の係数行列である.

ここで，(1)，(2)式にファジィ目標とファジィ制約を導入しファジイ線形計画法に展開することができる.

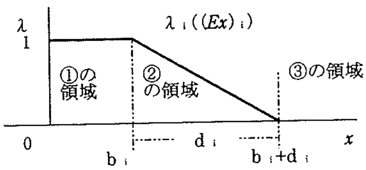
$$\left.\begin{aligned} & Ex \lesssim b' \\ & x \geqq 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(3)$$

$$E = \begin{pmatrix} c \\ A \end{pmatrix},\quad b' = \begin{pmatrix} z \\ b \end{pmatrix}$$

さらに，ファジィ不等式の i 番目の $(Ex)_i \lesssim b'_i$ に対して，次のように３つの領域に分けて，線形メンバシップ関数(*linear membership function*)を設定し，意志決定者の意向を取り入れることができる.

$$\left.\begin{aligned} &① \ \lambda_i = 1 & &;(Ex)_i \leqq b'_i \\ &② \ \lambda_i = 1-((Ex)_i - b'_i)/d_i & &;b'_i \leqq (Ex)_i \leqq b'_i + d_i \\ &③ \ \lambda_i = 0 & &;(Ex)_i \geqq b'_i + d_i \end{aligned}\right\} \cdots(4)$$

①〜③の3領域は次のように区分される.



第１図　線形メンバシップ関数

さらにファジィ線形問題は，(5)式を満たす x^* を求める問題となり，以下のように通常の最大化問題に展開できる.

$$\lambda(x^*) = \max_{x}\min_{i}\{\lambda_i(Ex)_i\} \qquad \cdots\cdots(5)$$

すなわち最小のメンバシップ関数値を最大にするような $x^* \geqq 0$ を求める問題となる.

ここで，$b_i^* = b'_i/d_i$，$(E'x)=(Ex)_i/d_i$ とおけば(5)式は次のようになる.

$$\lambda_d(x^*) = \max_{x}\min_{i}\{1+b^* - (E'x)_i\} \qquad \cdots\cdots(6)$$

この問題は結局次のような通常の線形計画問題に変換することができる.

$$\textit{maximize} \quad \lambda \qquad \cdots\cdots(7)$$

$$\left.\begin{aligned} \textit{subject to} \quad & \lambda \leqq 1+b_i^* - (Ex)_i \\ & x \geqq 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(8)$$

ファジィ線形計画法はこのように通常の線形計画の問題に置き換えて最適解を求めることとなる. したがって，線形計画法を基礎としたファジィ輸送問題もこのような線形計画法に置き換えて解くこととなる.

さらに輸送問題はMODI法で解くことができるが，ファジィ輸送問題もMODI法の繰り返しによって最適解に接近することができる. 本稿では基本解を線形計画問題のシンプレックス法で解き，さらに検証の意味を込めて

MODI 法の繰り返しによっても最適解を得ることとする.

輸送モデルの数値例と基本解

1) 単純基本モデルの数値例解

本稿では各種の最適解を求め相互にその特性を比較することになるが，その基本となる最適解を具体的に数値例で求めておきたい．輸送問題では供給地の最大供給可能量，及び需要地の最小限の必要需要量を与えることになるが，これらの制限量は第1表のような基本数値モデル例として設定することとする.

すなわち，供給地，需要地をそれぞれ3供給地，4需要地を想定し，各供給地の供給可能量が150, 120, 120単位，及び需要地の最小必要需要量を100, 120, 80, 90単位とする．さらに各需給地間の輸送費も与件として第1表の枠内のように与えられているものとする.

第1表　輸送モデル数値例解のための設定条件

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地 A	2	3	4	5	150
供給地 B	3	4	2	1	120
供給地 C	5	4	3	2	120
総需要量	100	120	80	90	390

注）総供給量，総需要量はそれぞれ供給地の最大可能供給量，最小必要需要量を表すものであり，枠内の数値は各需給地間の単位当たり輸送費を表す.

このような典型的な輸送問題の数値例に関して，(2)式を制約式として，(1)式を目的関数とする線形計画法に定式化し，総輸送費を最小ならしめる各需給地間の配分計画をシンプレックス法で求めることができる．第2表はこれを整理したもので本稿での数値例の基本最適解とする.

第2表　基本数値例のシンプレックス最適解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地 A	100	50	0	0	150
供給地 B	0	0	80	40	120
供給地 C	0	70	0	50	120
総需要量	100	120	80	90	390

注）総輸送費は930単位となるが，この数値例では総輸送費が最小となる別解も得られる.

2) ファジィモデルのメンバシップ関数の設定

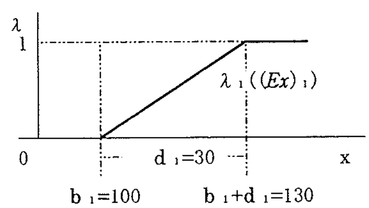
ファジィ解析では，第1図のように制限式にメンバシップ関数を導入し，制限量に一定の許容範囲を設定することになるが，ここでは需要地1及び需要地3の必要最小限の需要量に一定の許容範囲を設定することとし，さらに供給地Aにおいても最大供給可能量に許容範囲を設定することとする.

これらのファジィ輸送モデルの需要量，供給量，及び総輸送費に関する基本的な許容範囲は，次項以下の各種の数値例解において共通な条件とする.

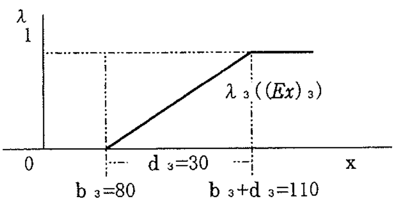
まず需要量については，需要地1及び需要地3の最小限必要量を，それぞれできれば100単位，80単位とするが，各々30単位の幅を許容範囲として認めることとする.

すなわち，第2図は需要地1の最小限の必要需要量を表したものであり，130単位以上供給を受ければメンバシップ関数は 1.0 となり，100%の満足度を感じるが，100単位以下であればメンバシップ関数はゼロとなり，満足感はなく許されない解の範囲となる．最適輸送量は100単位以上の領域を許容範囲とするものとなる.

同様に第3図は需要地3における需要量の許容範囲を表すものである．すなわち，第3図は需要地3における最小限の必要需要量を表したものであり，110単位以上の供給を受ければ100%の満足度を感じるが，80単位以下であれば満足度ゼロで許されない範囲となる．最適輸送量は80単位以上の領域を許容範囲とすることとなる.



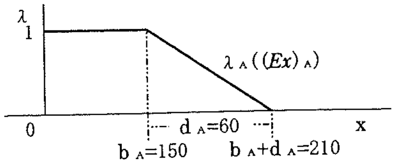
第2図　需要地1の需要量に関する線形メンバシップ関数



第3図　需要地3の需要量に関する線形メンバシップ関数

一方，第4図は供給地Aにおける最大供給可能量を示したものである．すなわち，供給量が150単位以下の範囲でならばメンバシップ関数は 1.0 で満足度は100%となり，供給量が210単位まで増加すると，その増加に伴って負担が増し，満足度はゼロとなり，それを超える供給量

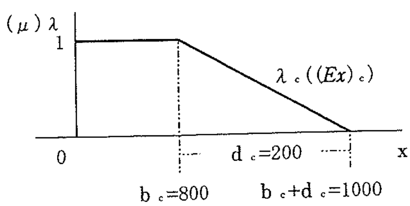
は供給不可能となり計画外の範囲となる．最適解は満足度が1と0の範囲内で決定されるものとする．



第４図　供給地Ａの供給量に関する線形メンバシップ関数

最後に，総輸送費に関するメンバシップ関数を設定する．目的関数のメンバシップ関数の設定には計画主体の意志が反映されることになることから，計画全体の策定目的や利用の仕方が反映されることとなる．ここでは数値による計算例を示すことにあるので，それなりに適正な許容範囲を設定することが必要である．その制約量の目安は，第２表の数値例の基本最適解に基づき，総輸送費が許容範囲に入るように設定することとする．

すなわち，第５図に示すように，できれば800単位以下とするが，200単位の許容幅を設けて最大1000単位までなら許されるものとする．総輸送費が増加すれば満足度は低下するが，需要地の限界需要量を若干増加させることによって需要地にゆとりが生じ，満足度が増加するのであれば輸送費のある程度の増加は許されることとなろう．総輸送費は800単位から1000単位の範囲に収まることを意図する形になる．



第５図　総輸送費に関する線形メンバシップ関数

3) 線形ファジィ輸送モデルの基本解

上記の第２図～第５図までのように需要地１，３の需要量，及び供給地Ａの供給量，さらに総輸送費に一定の許容範囲を示す線形メンバシップ関数を設定して，(７)式，(８)式で表される通常の線形計画法に変換されたファジィ線形計画法に基づいて最適解を求めると第３表のように整理される．このようにファジィ輸送モデルでは，供給制限量及び必要需要量に関して満足度に関する一定の許容範囲を導入して，輸送費の増加と需給条件の満足度との兼ね合いで最適解が確定することとなる．

すなわち，需要地１，３の需要量はそれぞれ，106.56，86.56単位で供給地Ａは163.13単位を供給することとなる．総輸送量は全体で403.13単位で，その輸送費は956.25単位である．またこのときのメンバシップ関数は0.2187で，満足度は最大満足のほぼ22%程度ということになる．

第３表　ファジィ輸送モデルのシンプレックス法による最適解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地Ａ	106.56	56.56	0.0	0.0	163.13
供給地Ｂ	0.0	0.0	30.00	90.00	120.0
供給地Ｃ	0.0	63.44	56.56	0.0	120.0
総需要量	106.56	120.0	86.56	90.0	403.13

注）総輸送費は956.25，λ=0.2187

ラグランジェ乗数法による非線形輸送費の取り扱い

1) 単位当たり輸送費が単調減少関数の場合

数値例による基本解の輸送費は第１表に示されているように需給地間の単位当たり輸送費は一定に与えられたものである．しかし現実には輸送量及び輸送距離に伴って単位当たり輸送費は異なってくるのが一般的である．

そこで，(９)式のように単位当たり輸送費は輸送量の関数として設定する．

$$C_{ij} = \alpha - \beta X_{ij} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

そうすると各需給地間の輸送費は次のようになる．

$$C_{ij}X_{ij} = (\alpha - \beta X_{ij})X_{ij} = \alpha X_{ij} - \beta X_{ij}^2$$

したがって総輸送費 TC は次のようになる．

$$\begin{aligned} TC &= \Sigma\Sigma C_{ij}X_{ij} \\ &= \Sigma\Sigma(\alpha X_{ij} - \beta X_{ij}^2) \\ &= \alpha\Sigma\Sigma X_{ij} - \beta\Sigma\Sigma X_{ij}^2 \\ &= 390\alpha - \beta\Sigma\Sigma X_{ij}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(10) \end{aligned}$$

ここでα，βが正であれば輸送費 TC の最小値は，$\Sigma\Sigma X_{ij}^2$ の最大な時となる．

そこで，供給地１，２の供給条件に次の式を入れて，極大又は極小値を得ることができる．すなわち，

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=150$$
$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}=120$$

なる条件下でラグランジェ未定乗数λ_1，λ_2を導入して，Ｑを次のようにおく．

$$\begin{aligned} Q=&X_{11}^2+X_{12}^2+X_{13}^2+X_{14}^2+X_{21}^2+X_{22}^2+X_{23}^2+X_{24}^2 \\ &+(100-X_{11}-X_{21})^2+(120-X_{12}-X_{22})^2+(80-X_{13}-X_{23})^2 \\ &+(90-X_{14}-X_{24})^2+\lambda_1(X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}-150) \\ &+\lambda_2(X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}-120) \end{aligned}$$

ここで，QをX_{ij}，λ_iについて偏微分して0とおいて，それらの連立方程式を解くことによって，Qを最大又は最小ならしめる未知数X_{ij}，λ_iを一義的に求めることができる．すなわち，

$$\partial Q/\partial X_{11}=2X_{11}-2(100-X_{11}-X_{21})+\lambda_1=0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\partial Q/\partial X_{14}=2X_{14}-2(90-X_{14}-X_{24})+\lambda_1=0$$
$$\partial Q/\partial \lambda_1=X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}-150=0$$

$$\partial Q/\partial X_{21}=2X_{21}-2(100-X_{11}-X_{21})+\lambda_2=0$$
$$\partial Q/\partial X_{21}=2X_{21}-2(100-X_{11}-X_{21})+\lambda_2=0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\partial Q/\partial X_{24}=2X_{24}-2(90-X_{14}-X_{24})+\lambda_2=0$$
$$\partial Q/\partial \lambda_2=X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}-120=0$$

のX_{ij}，λ_iに関する計10本の方程式から，10個の未知数X_{ij}，λ_iを求めることができる．

上記の方程式郡を整理すると次のようになる．

$4X_{11}+2X_{21}+\lambda_1=200,\quad 4X_{12}+2X_{22}+\lambda_1=240$

$4X_{13}+2X_{23}+\lambda_1=160,\quad 4X_{14}+2X_{24}+\lambda_1=180$

$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=150$

$4X_{21}+2X_{11}+\lambda_2=200,\quad 4X_{22}+2X_{12}+\lambda_2=240$

$4X_{23}+2X_{13}+\lambda_2=160,\quad 4X_{24}+2X_{14}+\lambda_2=180$

$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}=120$

実際にこれらの未知数を求めると，

$\lambda_1=-15,\quad \lambda_2=0,$　となり，

$X_{11}=38.33,\quad X_{21}=30.83,\quad X_{12}=45.00\quad X_{22}=37.50,$

$X_{13}=31.66,\quad X_{22}=24.17,\quad X_{14}=35.00,\quad X_{24}=27.50,$

となる．

かくして，ラグランジェ未定乗数法を用いた需給地間の非線形輸送費の最適輸送量が得られるが，第二次導関数は定数となり正であるから，これらの極値は最小値となる．よってこれらの極小値を最大値に変換する必要がある．その処理法の1つは，総輸送量の平均値から各最小値を差し引き，その後に各需給地間の制限量を考慮して調整する方法である．

まず，供給地A, Bについては総輸送量の平均値から各最小値を差し引き，さらに供給地Cについては必要需要量の制限を満たすことを条件として調整する．その結果が第4表である．

第4表　ラグランジェ解の極値の変換による解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地A	36.667	30.00	43.34	40.00	150.0
供給地B	29.167	22.50	35.834	32.50	120.0
供給地C	34.166	67.50	0.826	17.50	120.0
総需要量	100.0	120.0	80.0	90.0	390.0

最終的には，さらに需給制限条件を考慮しながら輸送費最小になるように調整したものが第5表のラグランジェ非線形費用関数の調整最適輸送解である．

第5表　ラグランジェ非線形費用関数の調整最適輸送解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地A	100.0	0.0	50.0	0.0	150.0
供給地B	0.0	120.0	0.0	0.0	120.0
供給地C	0.0	0.0	30.0	90.0	120.0
総需要量	100.0	120.0	80.0	90.0	390.0

注）総輸送費 TC=22,600

さて次に，(9)式に示された費用関数の特定化を次のようにシンプルな形で設定することとする．

$$C_{ij}=(150-X_{ij}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

かくして，これに第5表の最適解を代入し，最適輸送量に対応した単位当たり輸送費を得ることができる．このようにして求めた単位当たり輸送費が第6表である．

第6表 ラグランジェ最適輸送解における単位当たり輸送費

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4
供給地A	50.0	150.0	100.0	150.0
供給地B	150.0	30.0	150.0	150.0
供給地C	150.0	150.0	120.0	60.0

注）費用関数は，$C_{ij}=150-X_{ij}$による．

2) ラグランジェ非線形費用関数の最適輸送解の検証

最適解における単位当たり輸送費が得られたので，これに対応した最適解における総輸送費を算出することができる．

すなわち，第5表と第6表から総輸送費は数値例で示すと次のようになる．

$$TC=\Sigma\Sigma C_{ij}X_{ij}$$
$$=22,600$$

さて，最適解における総輸送費が算出されたので，この総輸送費を数値で確認することによって，最適輸送解の検証をすることも可能である．すなわち考え方は，任意のX_{ij}についてそのうちの1単位を他の需給地に変更させた場合に輸送費用がどれだけ増減するかをチェックすればよい．すべての需給地間において，総輸送費を下回るものがなければ最適解であることが確認できる．

いま，X_{11}からX_{12}に輸送量1単位を変更したとする．すなわち，最適解の$X_{11}=100.0$を$X_{11}'=99.0$とし，これに伴

って各需給地の需給量のバランスを図るため，関連する輸送量を次のように変更することとなる．

X_{12}=0.0 → X_{12}'=1.0

X_{22}=120.0 → X_{22}'=119.0

X_{21}=0.0 → X_{21}'=1.0

この調整変更に伴う各供給地及び需要地の制限需給量には全く変化が生じていない．

しかし，単位当たり輸送費は(11)式にそれぞれの X_{ij} を代入し，次のように変更されることとなる．

C_{11}=50.0 → C_{11}'=51.0

C_{12}=150.0 → C_{12}'=149.0

C_{22}=30.0 → C_{22}'=31.0

C_{21}=150.0 → C_{21}'=149.0

さらに，この変更によって総輸送費 TC は次のように変化することとなる．

TC=22,600 → TC'=23,036

この総輸送費は変更前より増加することとなる．すなわち，X_{11}から X_{12}に輸送量を1単位を変更したことによる総輸送費は増加することとなり，X_{11}から X_{12}に輸送量1単位を変更することは不合理となる．

同様に，X_{11}から X_{13}に輸送量1単位を変更した場合には，総輸送費は次のように変化することになる．

TC=22,600 → TC'=22,756

この場合も総輸送費は変更前より増加することとなり，X_{11}から X_{13}に輸送量を1単位変更することは不合理となる．

以下同様にして総輸送費の増減を確認し，第５表に示された解が総輸送費最小化を実現する最適解であることを確認することができる．

3) 輸送費が輸送量と距離の関数

一般には単位当たり輸送費は輸送量と共に輸送距離によっても変化し，通常では輸送距離が大きくなると単位当たり輸送費は割安となる．しかし，単位当たり輸送費が輸送量と輸送距離の関数であることは分かっていてもこれを具体的な関数形で特定化することは困難である．

現実問題では，実際に使用されている運賃表から算出することになるが，１つには輸送距離から算定される第１表の需給地間の輸送費と第６表に示された輸送量に伴う単位当たり輸送費用の何らかの一次結合として設定することも可能である．

さらに，輸送量と輸送距離の積として処理する場合には，需給地が決定すれば各需給地間の距離が確定するから，輸送費用も先験的に与えられることになる．この場合は，距離に関する費用関数をc*，とすると先の費用関数（9）式は次のようになる．

$$C_{ij}=(\alpha-\beta X_{ij})\ c^*$$

ここで，費用関数 c*の値が先験的に与えられていると総輸送費ＴＣは次のようになり，ラグランジェ未定乗数法に帰着させて最適解を得ることができる．

$$TC=\alpha\Sigma\Sigma c^*X_{ij}-\beta\Sigma\Sigma c^*X_{ij}{}^2$$

ラグランジェ乗数法のファジィ最適解への導入

1) ラグランジェ乗数導入によるファジイLP最適解

さて，これまでの考察は各需給地における供給量または需要量は一定値に固定されていたもので，その需給条件を満たすことが計画作成の必要絶対条件であった．すなわち需給量は与えられた制約量から少しの増減も許されるものではなかった．しかし，現実に需給制限量は１単位の増減も許されない絶対的な条件ではない．すなわち，供給条件を上回って輸送した場合には供給地における負担は増加するものの，全く許容されないわけではなく，反対に需要地にあっては，必要需要量を少しでも上回って供給されることは全く無意味なことでもない．多少のゆとりを残して財の供給を受けることはむしろ安心感を与え好ましいことと思われる．

つまり，現実的には需給制限量は絶対的なものではなく，ある一定の幅を持った制限量と考える方が現実的と考えられる．そこでここでは需給量に一定の許容範囲を設けたファジィ計画法によって最適輸送計画を考えてみたい．

ただし，通常のファジィ輸送計画では需給地間の単位当たり輸送費用の設定は，輸送量・輸送距離に関係なく一定に固定されたものとなっている．しかしここでは，単位当たり輸送費用は輸送量・輸送距離の関数として取り扱うことが目的である．そこでまず，先に述べたラグランジェ未定乗数法により得た需給地間の最小輸送費を条件にファジィ最適解を得ることとする．

このようにファジイ輸送計画では，最小とすべき目的関数にファジィ制限を与えることになるが，その設定の目安は次のようにすると良い．

それは，おおよその総輸送量に全体の平均輸送費を乗じたものとする．おおよその総輸送量は第２，３図の許容範囲の中央値を取り，メンバシップ関数の設定されていない需要地にあっては，最小必要需要量とする．実際にこれを求めてみると，

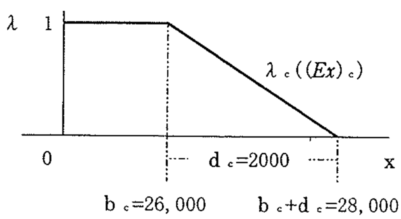
需要地１=115，　需要地３=95

需要地２=120，　需要地４=90，　総需要量=420

一方，第５表から得られるラグランジェ最適輸送解における単位当たり輸送費の平均値が求められ，これを基礎に総輸送費のメンバシップ関数の制約量の目安が得られる．それはおよそ28,000単位余りとなる．これは制限

量の上限値となるから，下限値は一定の許容範囲を設けて設定すればよい．

これらを基礎に，数値例では第６図に示すように，できれば26,000単位以下とするが，2,000単位の許容幅を設けて最大28,000単位までなら許されるものとする．総輸送費が増加すれば満足度は低下するが，需要地の限界需要量を若干増加させることによって需要地にゆとりが生じ，満足度が増加するのであれば輸送費のある程度の増加は許されることとなろう．輸送量は増加する輸送費と，需要地でゆとりが生じて得られる満足度の兼ね合いで決定されることとなる．



第６図　総輸送費に関するメンバシップ関数

かくして，需要地１，３のメンバシップ関数をそれぞれ第２，３図の如く，さらに供給地のメンバシップ関数を第４図のように，総輸送費に関するメンバシップ関数は第６図のように設定する．さらに各需給地間の輸送費はラグランジェ法に基づく結果を利用する．このように設定されたファジィ輸送モデルは，通常のファジィ線形計画法に基づいて最適解を得ることができるが，さらに反復MODI 法によって解くこともできる．

まず，通常のファジィ線形計画法によって得たものが第７表である．これによると，各供給地の供給条件は第２，３図に示されたメンバシップ関数は $\lambda=0.50257$ の値で満たされており，さらに需要地の需要条件も第４図に示

第７表　ラグランジェ乗数を導入した場合のファジイＬＰによる最適解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地Ａ	50.15	120.0	0.0	0.0	170.15
供給地Ｂ	24.92	0.0	95.08	0.0	120.0
供給地Ｃ	40.00	0.0	0.0	80.00	120.0
総需要量	115.08	120.0	95.08	80.00	410.15

注）総輸送費 TC=26994.81,　$\lambda=0.502569$

されたメンバシップ関数は $\lambda=0.50257$ の値で満たされている．さらに総輸送量は410.15であり，総輸送費は26994.81となっている．

第３表と直接比較は困難であるが，ラグランジェ法による輸送費最小化のコストを利用しており，より現実的な解の一つといえよう．

2）反復MODI法による接近

ファジィ最適解はＭＯＤＩ法の反復によっても得られることが示されている[2]．ここでは，第７表の解が最適解であることを確認する意味も含めて，ラグランジェ乗数を導入した場合の最適解を反復 MODI 法によって求めてみよう．

まず，ステップ１におけるメンバシップ関数 λ を0.5と設定する．これによって需要地１，３の最小必要需要量は第２，３図からそれぞれ D(1)=115，D(3)=95が得られ，需要地２，４の最小必要需要量初期値設定から D(2)=120，D(4)=90となっている．また供給地の最大可能供給制限量についても，第４図から $\lambda=0.5$ により，S(A)=180 が得られる．供給地Ｂ，Ｃの最大可能供給制限量は当初の設定より，S(B)=120，S(C)=120 であるから，これらを条件に通常の MODI 法を適用することができる．

第８表　ラグランジェ乗数を導入した場合の反復 MODI 法のステップ1の解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地Ａ	52.06	120.0	0.0	0.0	170.0
供給地Ｂ	26.77	0.0	95.0	0.0	120.0
供給地Ｃ	34.41	0.0	0.0	80.0	120.0
総需要量	115.0	120.0	95.0	80.0	410.0

注）総輸送費 TC=26984.85,　$\lambda=0.5$,　$\mu=0.50758$

かくして，グランジェ未定乗数法による輸送費を与え，通常の MODI 法を適用したステップ１の解は第８表のようである．

ここで第６図より，総輸送費26984.85に対応したメンバシップ関数 μ の値を求めると，

$$\mu=(28000-26984.85)/2000=0.507575$$

となるから，ステップ２のメンバシップ関数 $\lambda^{(2)}$ は μ，λ の平均値として次のようになる．

$$\lambda^{(2)}=(\lambda^{(1)}+\mu^{(1)})/2=0.50379$$

このように，順次メンバシップ関数の値 λ を収束させていくことによって最終最適収束値が得られる．

第９表はその収束過程である．反復回数10回で完全に収束条件を満たしている．さらに第10表はラグランジェ乗数を導入した場合の反復 MODI 法による最終収束解である．その解は，第７表のラグランジェ乗数を導入した場合のファジイＬＰ最適解と実質的に一致する．

第９表　ラグランジェ乗数導入による反復 MODI 法の収束過程

反復数	λ	最小限需要量		供給地Aの最大供給	総輸送費	総輸送量	目的関数のμ
		需要1	需要3				
1	0.5	115.00	95.0	170.0	26984	410.00	0.50758
2	0.50379	115.11	95.11	170.23	26999	410.23	0.50023
3	0.50201	115.06	95.06	170.12	26992	410.12	0.50368
4	0.50284	115.09	95.09	170.17	26995	410.17	0.50207
5	0.50245	115.07	95.07	170.15	26994	410.15	0.50287
6	0.50264	115.08	95.08	170.16	26995	410.16	0.50246
7	0.50255	115.08	95.08	170.15	26994	410.15	0.50263
8	0.50256	115.08	95.08	170.15	26995	410.15	0.50261
9	0.50259	115.08	95.08	170.16	26995	410.16	0.50255
10	0.50257	115.08	95.08	170.15	26995	410.15	0.50258

注）反復回数は10回で，収束条件 $\omega=10^{-5}$ を満たす．

第10表　ラグランジェ乗数を導入した場合の反復 MODI 法の最終収束解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地A	50.15	120.0	0.0	0.0	170.15
供給地B	24.92	0.0	95.08	0.0	120.0
供給地C	40.00	0.0	0.0	80.0	120.0
総需要量	115.08	120.0	95.08	80.0	410.15

注）総輸送費 TC=26995,　λ=0.50257,　μ=0.50258

ま と め

輸送問題は，生産物を供給地から需要地まで最小の費用で配分する問題で，資源配分問題としても定式化されている．これらの問題の定式化は古くから行われており，空間均衡モデルなど地域間計画の基本問題として多くの研究が行われてきた．それらの多くは線形計画法に定式化され輸送費最小化を目的関数とする規範分析法として研究されてきた．最近では線形計画法の制約条件に一定の許容範囲を設けファジィ線形計画法としての解法も研究され，規範分析法としてより実践的で有益な方法として注目されている．しかしながら，これらの手法においてはいずれも地域間の単位当たり輸送費用は，輸送量，輸送距離に関係なく一定に固定化されていた．一般に単位当たり輸送費用は，輸送される輸送量や輸送距離の関数になっており，輸送量及び輸送距離の値が大きくなると割安になるのが普通である．そこで本論文では輸送量，輸送距離に伴う非線形費用関数を考慮し，輸送問題，資源配分問題の一層の実践的有用性を検討した．

まず，輸送問題の基本線形計画法にラグランジェ未定乗数法を適用し，輸送費が非線形の場合の最適解の得られることを数値例で明らかにし，次いで，ラグランジェ最適解をファジィ線形計画法に導入し，輸送費が非線形の場合のファジィ最適解の得られることを示した．

さらに，ファジィ解は MODI 法の繰り返しによって最適解に接近できることから，反復 MODI 法の収束値が通常のシンプレックス法によるファジィ最適解に収斂することを確認した．

輸送問題，又は資源配分問題の単位当たり輸送費用の非線形の取り扱いと共に，最適解の導出が通常のシンプレックス法，ファジィ線形計画法，さらには MODI 法の反復法よって示されたことから，輸送計画・地域計画などの規範分析において一層の有用性が認められるものとなろう．

文　献

1）笠原浩三：農業と関連産業の立地，明文書房，東京（1982）　pp. 12-18

2）笠原浩三・古塚秀夫・万里：ファジィ輸送モデルの特性とメンバシップ関数の相互関係 -モーダイ法の反復によるファジィ輸送モデルの新解法-，農林業問題研究 36(4)：122-127（2001）

3）笠原浩三・古塚秀夫・万里：線形計画法の反復によるファジィ最適解への接近，2001年日本農業経済学会別冊：152-157（2001）

4）笠原浩三・万里：三角型・台形型メンバシップ関数のファジィ輸送モデルにおける反復 MODI 法による最適解への接近，鳥大農研報 54：51-62（2001）

5）笠原浩三・仙北谷康・小林一・古塚秀夫：ファジィ輸送モデルの仮想地設定による鶏卵輸送について，農林業問題研究別冊6：1-6（1997）

6）乾口雄弘：講座ファジ6 ーファジー OR ー，日刊工業新聞社，東京（1993）　pp. 42-90

7）工藤・西村・高山・久保共著：近代農業経済学，東京，明文堂，東京（1963）　pp. 332-348

8）坂和正敏：ファジィ理論の基礎と応用，森北出版，東京(1990)　pp. 110-114

9）田中一男：応用をめざす人のためのファジィ理論入門ーファジィ集合からファジィ制御までー，ラッセル社，東京(1991)　pp. 167-174