Mathematikunterricht

als Prozess ästhetischer Erziehung an Schulen

Ein Unterrichtsmodell zur Gestaltung von Lernprozessen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER PHILOSOPHIE (Dr. Phil.)
von der KIT-Fakultät für Geistes- und Sozialwissenschaften des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
angenommene
DISSERTATION
von

Rolf Reimer

KIT-Dekan Prof. Dr. Michael Schefczyk

1. Gutachter: Professor Dr. Dr. Johann Beichel

2. Gutachter: Professor Dr. Andreas Kirsch

Tag der mündlichen Prüfung: 14. März 2019

Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG 2

Anlässe, Motive und Zielsetzung dieser Arbeit 2

Überblick über die Kapitel und Empfehlungen zum Lesen 4

Dank und Würdigung 5

Ausgangspunkt Philosophie, Pädagogik und Mathematik 5

1 DAS KARLSRUHER FORSCHUNGSKONZEPT ÄSTHETISCHE BILDUNG 9

1.1 Bildung und Pädagogik – Erziehung und Unterricht 10

1.2 Ästhetik und Philosophie 11

1.3 Ästhetik und Pädagogik 17

1.4 Ästhetik und Neurobiologie 24

1.5 Zur ästhetischen Erfahrbarkeit der Welt 28

1.6 Das Drei-Welten-Modell nach Karl R. Popper 31

1.7 Ästhetisch verfasste Erziehungs- und Gestaltungsprinzipien 34

2 ÄSTHETISCHE ERZIEHUNG UND MATHEMATIKUNTERRICHT 38

2.1 Gesellschaftliches Bild von Mathematik 38

2.2 Mathematikunterricht und Allgemeinbildung 41

2.3 Allgemeinbildung über Grunderfahrungen 45

2.4 Fachdidaktik und Ästhetische Erziehung 48

2.5 Gestaltungsprinzipien für den Mathematikunterricht 54

2.5.1 Genetisches Lernen 54

2.5.2 Entdeckendes versus rezeptives Lernen 56

2.5.3 Fundamentale Ideen 61

2.5.4 Charakterisierung eines ästhetisch verfassten Lernprozesses 64

2.6 Ästhetisch verfasster Mathematikunterricht 65

2.7 Elemente des Spielerischen 67

3 EIN MODELL FÜR LERNPROZESSE IM MATHEMATIKUNTERRICHT 69

3.1 Ästhetische Fundierung von Lernprozessen 70

3.1.1 Bildung ist grundsätzlich ästhetisch verfasst 71

3.1.2 Der „hermeneutische Zirkel“ in Bezug auf fachliche Lernprozesse 73

3.1.3 Fachliche Entwicklung über „symmetrisierende Kommunikation“ 77

3.2 Elemente des Modells 79

3.2.1 Mathematischer Modellierungskreislauf als Element fachlicher Motivation 80
3.2.2 Fachsprachliche Entwicklung 82
3.2.3 Basale Wahrnehmungsprinzipien und fachliche Methoden 87
3.2.4 Kognitive Entlastung 89
3.2.5 Einsatz elementarer Werkzeuge 90
3.2.6 Computerunterstützung für mathematische Darstellungsformen 93
3.2.7 Fachliche Entwicklung über „Erfinden" und „Entdecken" 96
3.2.8 Ästhetische Gestaltung von Lernprozessen 98
3.2.9 Zusammenfassung 108

3.3 Vom Raum zur Form – Körper und Figuren 109

3.3.1 Mentale Verortung von Begriffen 109
3.3.2 Geometrische Formen und Elemente 110
3.3.3 Vermitteln zwischen räumlichen und ebenen Darstellungen 114

3.4 Entwicklung des Zahlbegriffs 116

3.4.1 Genetisch-historische Entwicklung der *Zählzahlen* 116
3.4.2 Zahlen in der Grundschule 124
3.4.3 Zahlen in den Klassen 5 und 6 126

3.5 Fachdidaktik und ästhetische Verfasstheit von Lernprozessen 141

3.5.1 Mathematisches Modellieren – Motivation für Fachliches 143
3.5.2 Fachinhaltliche Gliederung für die Klassen 5 bis 10 145
3.5.3 Logisches Denken und mathematisches Argumentieren 147
3.5.4 Lokales Ordnen als Basis für mathematisches Begründen 148
3.5.5 Strategien des logischen Begründens 149
3.5.6 Vernetzung von Begriffen des Alltags und Begriffen der Mathematik 151
3.5.7 Begriffsbildung Variable(n) 160

3.6 Beziehungen und Zuordnungen – Gleichungen und Funktionen 167

3.6.1 Aspekte: statisch, dynamisch, diskret, kontinuierlich 167
3.6.2 Lokale und globale Aspekte bei qualitativen Funktionsdarstellungen 170
3.6.3 Der Funktionsbaukasten und die Algebra der Terme 171
3.6.4 Modellierung dynamischer Vorgänge – neue Aspekte von Funktionen 174
3.6.5 Aufbau, Wirksamkeit und Nachhaltigkeit der Fachlichkeit 185

4 UNTERRICHTSPRAXIS 189

4.1 Einstimmendes Beispiel, Bemerkungen und Überblick 190

4.2 Das Projekt „Einsatz eines CAS/GTR in der Sekundarstufe I" am Gymnasium 193

4.2.1 Rahmenbedingungen und Zielsetzungen 194
4.2.2 Fachinhaltliches Curriculum 195
4.2.3 Organisation von Lernprozessen – Erziehung zur Eigenverantwortung 195
4.2.4 Die Rolle des CAS / GTR – Der persönliche Experte 196
4.2.5 Dokumentation des Wissens – Werkzeugkarten 197

4.2.6 Strukturierung und Dokumentation von Unterrichtseinheiten 197
4.2.7 Stoffüberblick zum Schuljahr 198
4.2.8 Ausarbeitung eines Themas – Unterrichtsskript „Anteile und Prozente“ 199
4.2.9 Rückschau und Erfahrungen 206

4.3 Entwicklung des Zahlbegriffs in den Klassenstufen 1 bis 6 207

4.3.1 Von der „Zählsprache“ zur „Zahlsprache“, Grundschule Klasse1 207
4.3.2 Zahldarstellungen und elementares Rechnen in Klasse 2 212
4.3.3 Einführung der Bruchzahlen über Grundvorstellungen 219
4.3.4 Die Bevölkerung der Zahlengeraden 221

4.4 Vollwinkelmesser versus Multiwerkzeug Geodreieck 224

4.5 Was hat der Kreisumfang mit dem Radius zu tun? 227

4.6 Würfelnetze, Würfelkörper und Quaderhunde (Klassenstufe 5-6) 228

4.6.1 Würfelnetze können wir – aber wie viele gibt es? (Klasse 5-6) 228
4.6.2 Würfelkörper 231
4.6.3 Wir bauen einen „Quaderhund“ 232

4.7 Platonische Körper (Hector-Kurs, Klassenstufen 4 bis 6) 234

4.8 Statt zu messen denk' ich nach – Argumentieren lernen mit Geometrie 241

4.9 Wann ist ein Dreieck eindeutig bestimmt? 246

4.10 Der Zufall als Streitschlichter – Begriffsbildung Wahrscheinlichkeit 247

4.11 Funktionales Denken – Lineare Funktionen 250

4.12 Heron von Alexandria löst ein Geheimnis der Quadrate 254

4.13 Ein Extrablatt zum Satz des Pythagoras 258

4.14 Ableitung und Integral – lokal und global 260

4.14.1 Lokale und globale dynamische Visualisierung der Ableitung einer Funktion 260
4.14.2 Integrieren als Umkehrung des Ableitens 262

4.15 Übersicht zu Unterrichtsbeispielen in den Kapiteln 2 und 3 264

5 NACHBETRACHTUNGEN UND IMPLIKATIONEN 265

5.1 Rück- und Ausblicke 265

5.2 Auswirkungen auf den Mathematikunterricht 268

5.3 Ausbildung für Lehrende des Schulfachs Mathematik 272

5.4 Worte zum Schluss 273

5.5 Persönliche Erinnerungen und Dank 275

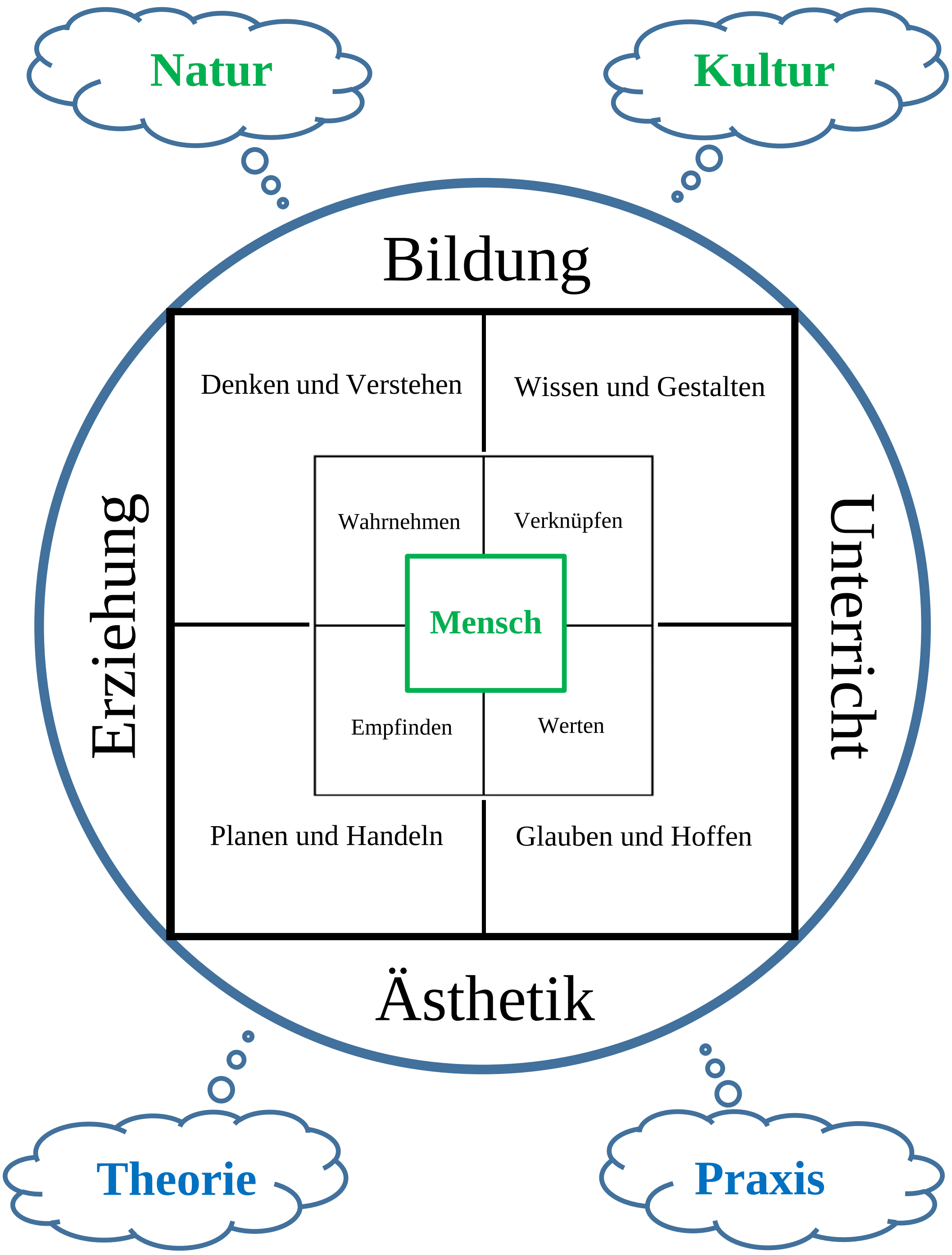
6 ABBILDUNGSVERZEICHNIS 279

7 LITERATURVERZEICHNIS 285

Pädagogischer Prolog

„Quadraturen“ und „Symmetrien“

des „Bildungskreises“



Einleitung

Anlässe, Motive und Zielsetzung dieser Arbeit

Ein zunächst marginaler, aber doch entscheidender Anlass für diese Studie war ein 2010 begonnenes Unterrichtsprojekt mit dem Titel „Einsatz von Mathematiksoftware in der Sekundarstufe I an Gymnasien", über welches der Autor mit der Karlsruher Forschungsgruppe „Ästhetische Bildung" am Institut für Berufspädagogik und Allgemeine Pädagogik, Forschungsstelle Lehrerberufseignung am KIT unter Leitung von Professor Dr. Johann Beichel in Kontakt kam. Das für vier Jahre angelegte Projekt konnte nach der Pensionierung des Verfassers 2012 durch Mittel aus diesem Forschungsschwerpunkt weitergeführt werden.

Die Karlsruher Forschungsgruppe arbeitet an theoriebasiert entwickelten Projekten, die hinsichtlich schulpraktischer Anwendungen im Bereich kunstnaher Fächer erprobt werden. Über die Teilnahme an Seminaren und regelmäßigen Treffen der Mitarbeiter und Doktoranden und die Beschäftigung mit der theoretischen Grundlegung entstand die Idee, Erkenntnisse dieser Forschung interdisziplinär zu verknüpfen mit fachlichen und fachdidaktischen Kenntnissen zum Schulfach Mathematik und dem Erziehungsauftrag des Faches mit Blick auf Lehrende und Lernende. Darüber sollte vermittelt und belegt werden, dass ein Forschungsgebiet, dessen erzieherische und schulische Wirksamkeit bisher vorwiegend im Bereich kunstnaher Fächer praktiziert und reflektiert wurde, auf das Fach Mathematik übertragbar ist. [1]

Hinsichtlich der Unterrichtspraxis sollte ein auf das Fach abgestimmtes Modell zur Entwicklung ästhetisch fundierter Lernprozesse das „Bild" schulischer Mathematik erweitern und den curricularen Entwicklungsrahmen der Lehrenden praxistauglich unterstützen. [2]

Ein weiteres Motiv für diese Arbeit ergab sich über die langjährigen Erfahrungen und Tätigkeiten des Verfassers als Student der Mathematik, Physik und Informatik, als Lehrer für diese Fächer an einem Gymnasium, als Aus- und Fortbildner von Lehrenden und solchen, die es werden wollten und wurden, sowie über eigene Vorlesungen und Übungen für Studierende des Lehramts Mathematik am KIT. Die Selbsteinschätzung, in dieser Zeit Bildung erworben zu haben, ist begleitet von der Einsicht, dass diese einzelnen Etappen des persönlichen

[1] Und damit auch auf naturwissenschaftliche und technisch orientierte Fachgebiete anwendbar sein kann.

[2] Um hierbei Missverständnissen hinsichtlich eines Vergleichs oder als Alternative zu „real-praktiziertem" Mathematikunterricht vorzubeugen, ist es dem Autor ein Anliegen, darauf hinzuweisen, dass diese Studie nicht in kritischer Auseinandersetzung zu diesem Unterricht entstanden ist, sondern unabhängig davon entwickelt wurde. Dies schließt nicht aus, dass an geeigneten Stellen kritische Anmerkungen über konkrete Unterrichtserfahrungen eingefügt sind.

Werdegangs einer beruflichen Tätigkeit in ihrer zeitlich-linearen Abfolge nicht das Eigentliche sind, wodurch man sich gebildet fühlt. Entscheidend für Bildung ist der Erwerb einer übergeordneten Fähigkeit, den jeweiligen partiellen Wissenserwerb rückblickend als Stufe einer Gesamtentwicklung zu erkennen, in der das Ganze mehr ist als die Summe der Teile. Dies zeigte sich insbesondere auch in Situationen, in denen der Verfasser als Lehrender mit unterschiedlichsten Aufgaben tätig war. Der Ertrag für die Adressaten war am wirksamsten, wenn – je nach Aufgabe – die Ergebnisse eines Prozesses in Einzel- oder in Gruppengesprächen gemeinschaftlich reflektiert und integrativ geordnet und verortet wurden.

Eine wesentliche Erkenntnis bei all diesen Tätigkeiten war und ist, dass Fachunterricht nicht ohne wissenschaftliche Fundierung des Fachlichen und des Erzieherischen zufriedenstellend plan- und durchführbar ist. Dies hat der Autor 1979 in einem weiteren Fach „hautnah" persönlich erlebt. Er wurde am Eichendorff-Gymnasium in Ettlingen von seinem Schulleiter spontan zum Lehrer für das neue Fach Informatik „befördert", weil dieser im Diplom-Zeugnis eine Prüfung im Anwendungsfach „Automatentheorie und formale Sprachen" gesehen hatte. Schon bei den ersten Vorbereitungen und noch mehr nach den ersten gehaltenen Stunden fühlte sich der Verfasser unsicher hinsichtlich der Differenz zwischen den unterrichtlichen Situationen, in denen die Lernenden mit einfachen Fragen Inhalte berührten, die im Zusammenhang von Informatik als Modellierungs-Wissenschaft und der Praxis fortschreitender Programmiertechniken und Programmiersprachen für beide Seiten nicht zufriedenstellend beantwortet werden konnten. [3]

Analoge Situationen ergaben sich bei der Organisation von Fortbildungsveranstaltungen zur Mathematik und Informatik bei Beginn der Tätigkeit als Dozent am Staatlichen Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) in Karlsruhe in den Fächern Mathematik und Informatik. Im ersten Fall wurden die Lücken durch ein Studium der Informatik an der Universität Karlsruhe geschlossen. Die anderen Situationen haben zu einer fortwährenden Beschäftigung mit Fachdidaktik geführt.

Wenn man sich als im Ruhestand befindender Diplommathematiker, Mathematiklehrer, Fachdidaktiker, Ausbilder von Mathematikstudierenden des Lehramts und von Referendaren der Aufgabe stellt, ein Modell für praxistaugliche Unterrichtseinheiten in einem überfachlichen und bildungsphilosophisch angesiedelten Forschungsbereich zu verorten und von diesem aus zu entwickeln, und wenn abschließend darüber eine wissenschaftliche Abhandlung verfasst wird,

---

[3] Lernende haben in solchen Situationen ein feines Gespür für fachliche Unsicherheiten von Lehrpersonen. Diese führen bei Wiederholungen in der Regel zu emotional bedingten Reaktionen. Häufig wird dabei die Kausalität des Problems von Lehrpersonen nicht wahrgenommen und die Ursache auf die Lerngruppe projiziert.

die es Fachkollegen ermöglichen soll, in unterrichtlichen Lehrsituationen davon zu profitieren, ist es angebracht, zunächst jenen Teil etwas ausführlicher zu beleuchten, der sich für den Autor selbst im Prozess des Entstehens als „Das Neue“ darstellte.

Dazu ist eine Selbsterfahrung bei der Erstellung dieser Arbeit geeignet, um auf eine Ambivalenz zwischen dem Produkt, der hier vorliegenden Studie, und dem Entstehungsprozess hinzuweisen. Das bisher nicht gewohnte Forschungsgebiet „Ästhetische Bildung“ wurde zunächst als etwas sehr Gegensätzliches zum gewohnten Umfeld einer fachlich-didaktisch unterstützten Arbeitsweise bei der Planung, Durchführung und Analyse von Mathematikunterricht wahrgenommen, wurde aber durch begriffliche Annäherung verstehbar. Dieses Verstehen von Neuem in Verbindung mit dem vorab erworbenen Habenden zeigte sich in einer assoziativ wirksamen Verknüpfung von Erfahrungen und Erkenntnissen der Wissensgebiete.

Daran anschließend ergab sich eine neue Aufgabe für die schriftliche Dokumentation, das Verstandene linearisierend-gliedernd in eine Textform zu bringen, bei der das mental vernetzte Wissen so aufzubereiten war, dass das schriftlich Verfasste ganzheitlich auf den Leser wirken kann. Der Übergang von einer kognitiv vernetzten Bewusstseins-Bildung in eine linearisiert-gegliederte textliche Darstellung verwendet das elementar grundlegende „Prinzip des Zerlegens“. Das Zerlegungsprinzip wird vielfältig verwendet. Es zeigt sich zum Beispiel beim handlungsorientierten Aufteilen von Objekten, bei Fallunterscheidungen zur Gewinnung von Überblick, bei einer vollständig geführten Begründung eines Sachverhalts usf.

Ein Leser dieser Arbeit begegnet dieser Methode zuerst im Inhaltsverzeichnis, welches die Zerlegung des Themas in Teilgebiete vermittelt. Das Zerlegungsprinzip ist naturgemäß destruktiv: Es teilt auf, was eigentlich zusammengehört, und verdeckt dabei den Blick auf das Ganze, welches dabei und darüber hinaus immer mehr ist als die Summe dieser Teile. Deshalb vermittelt der nachfolgende Abschnitt einen inhaltlichen Überblick über die Kapitel und gibt Hinweise zur Funktion der Teile und ihrer Verknüpfung.

Überblick über die Kapitel und Empfehlungen zum Lesen

Die Kapitel 1 bis 4 beschreiben vier Ebenen der Realisierung der Zielsetzung dieser Arbeit. Kapitel 1 bietet eine bildungstheoretische Grundlegung, Kapitel 2 beschäftigt sich mit einer integrativen Vernetzung ästhetisch verfasster Erziehung mit dem Schulfach Mathematik und seiner Didaktik. Kapitel 3 beschreibt ein Modell für ästhetisch fundierte Lernprozesse mit einer passenden fachlichen Begriffsbildung. Kapitel 4 schildert exemplarisch unterrichtspraktische Anwendungen des Modells. Entsprechend der Linearität textlicher Gliederung sind diese Kapitel getrennt aufgeführt und auch dazu geeignet, getrennt gelesen zu werden. Sie vermitteln

jedoch nur zusammen ein Verständnis für das ästhetische Prinzip, welche das Ganze umschließt.
Verknüpfungen zwischen diesen Ebenen werden mit Anmerkungen bzw. Verweisen im Text und in Fußnoten hergestellt. Gegebenenfalls sind auch in den Theorieteilen schon erläuternde praxisnahe Beispiele eingefügt. Der Fokus der Arbeit bezieht sich auf die Prozessgestaltung von Lernsituationen im Mathematikunterricht. Kapitel 5 rundet die Studie ab mit einem Blick auf weitere Aspekte des Mathematikunterrichts, wie z. B. der Gestaltung von Anwendungs-, Übungs- und Vertiefungsmöglichkeiten und nimmt Bezug auf weitere gesellschaftliche Bereiche, wie z. B. der Lehrerausbildung und dem Umgang mit modernen Werkzeugen im Studium, im Unterricht und im häuslichen Umfeld.

Dank und Würdigung

Diese Arbeit wäre nicht realisierbar gewesen ohne die vielfältigen Begegnungen mit Kolleginnen und Kollegen, Schülerinnen und Schülern, Eltern und Ausbildern in vielen Institutionen und zu unterschiedlichen Anlässen, in denen über Mathematik, Mathematikdidaktik und Mathematikunterricht gesprochen und gelegentlich auch gestritten wurde - letztlich aber immer mit dem einigenden Ziel, guten Unterricht zu wollen, der theoriebasiert verortet und damit auch gegenüber den Adressaten transparent verantwortet werden kann. Im letzten Kapitel werden diese Verbindungen und Beziehungen in einem eigenen Abschnitt genannt und gewürdigt. An einigen Stellen ist es angebracht, an Projekten mitbeteiligte Personen zu nennen. Dies erfolgt dann im Text oder über eine zugeordnete Fußzeile.

Ausgangspunkt Philosophie, Pädagogik und Mathematik

Im Zusammenhang mit Grundfragen zu erzieherischen Tätigkeiten und grundlegenden Begriffen der Pädagogik als philosophische Disziplin findet man als logisch geprägter aber auch entsprechend verbildeter Mathematiker nicht jene begriffliche Prägnanz und argumentative Schlüssigkeit, die mathematischer Begriffsbildung und Argumentation gleicht. [4] Die sogenannte reine Mathematik kann als ein Teilgebiet der Philosophie mit einem eigenen Wahrheits-Begriff und eigener ästhetischer Bewertung gesehen werden.

Wer diese „axiomatische Sprache“ als Grundlage der Wahrheitsfindung akzeptiert, darf sich sicher sein, dass ein grammatisch richtig gebildeter Satz wahr ist. Und wer über „Sätze der

---

[4] Gemeint ist hier: Das über die fachliche Betätigung gewohnte Denken in „zweiwertiger Logik“ ist in außerfachlichen Situationen nicht immer angemessen.

reinen Mathematik“ streitet, hat entweder zu wenig Kenntnisse oder der Streit geht um eine Aussage über Mathematik, die noch nicht bewiesen ist, eine sogenannte Vermutung. Dann geht es jedoch in der Mathematik mehr um Glaubens-Sachen als um mathematisch gesicherte „Wahrheit“. Diese Wahrheits-Findung unterwirft sich der Argumentationsform eines stringent einzuhaltenden Weges. Mit einer Basis, d.h. einer endlichen Anzahl von „Axiomen“, die per se als wahr angenommen sind, werden „Sätze“ nach fest vereinbarten „Regeln des Schließens“ gebildet. Bei formal richtiger Anwendung führen sie zu bewiesenen „wahren Sätzen“. Die Mathematik erschließt diese ihr eigene Form der Wahrheit allerdings nur unter einer harten Einschränkung auf eine zweiwertige Logik, bei der zum Beispiel Kontingenzaussagen [5] nicht zugelassen sind, und einer Unterwerfung hinsichtlich der axiomatischen Fundierung, bei der Sätze als rein syntaktische Formen aufgefasst werden und keiner weiteren semantischen Interpretation bedürfen. Eine derart verfasste „Reine Mathematik“ fragt nicht nach Begrifflichkeiten und lehnt jegliche Bedeutungszuweisung an die Objekte ab. Bertrand Russel beschreibt diesen Unterschied von reiner Mathematik im Verhältnis zu philosophischer Suche nach Wahrheit treffend:

> *„So kann also die Mathematik definiert werden als diejenige Wissenschaft, in der wir niemals das kennen, worüber wir sprechen, und niemals wissen, ob das, was wir sagen, <wahr>* [6] *ist.“* [7]

Bertrand Russel hat darüber hinaus die Hoffnung der mathematisch gebildeten analytischen Philosophen des ausgehenden 19. Jh. auf eine axiomatische Fundierung des Welt-Verstehens nachhaltig erschüttert. Mit der nach ihm benannten *Russel'schen Antinomie* wurde erkannt, dass es prinzipiell nicht möglich ist, die Welt widerspruchsfrei zu beschreiben, wenn man Begriffe nicht kategorisch von den sie definierenden Elementen trennt. [8]

Wie also findet ein philosophischer Ansatz Wahrheit? Eine relativierende Beschreibung dieser Kernfrage gibt Hans-Joachim Störig in „Kleine Weltgeschichte der Philosophie 1“:

> *„Wir wollen* [hinsichtlich der Grenzen philosophischer Erkenntnisse] *unterscheiden zwischen den Einschränkungen, denen jeglicher Versuch einer Darstellung der Geschichte der Philosophie […] ausgesetzt ist […], und denen, die außerdem zu*

[5] Hier so verstanden, dass die Gleichzeitigkeit der „Möglichkeit einer Aussage A wahr zu sein“ und die „Möglichkeit der negierten Aussage (nicht A) wahr zu sein“ hinsichtlich zweiwertiger Logik tautologisch ist.
[6] Die Klammern <…> sind vom Autor hinzugefügt. Sie sollen hervorheben, dass Russel mit <wahr> nicht den mathematischen Wahrheitsbegriff gemeint haben kann, sondern einen philosophischen.
[7] Zitiert nach: http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/zitate.html.
[8] Die Russell'sche Antinomie ist ein von Bertrand Russell und Ernst Zermelo beschriebenes Paradoxon der axiomatischen Mengenlehre (vgl. Russel, 1903, §100, § 103). Sprachlich kann dies verdeutlicht werden, indem man von „Mengen von Mengen“ spricht, „die sich entweder selbst als Element enthalten können oder nicht“.

beachten sind. Philosophie als der Versuch des Menschen, die Rätsel seines Daseins […] mit dem Mittel des Denkens zu lösen, ist älter als alle geschriebenen Zeugnisse, die wir darüber besitzen […] So wenig wir über diese Dinge im Einzelnen wissen, so wenig wissen wir im Grunde auch über den Vorgang, der den Menschen erst eigentlich zum Menschen machte, den Beginn von Sprache und Denken […] Die Sprache, als das unentrinnbare Medium unseres Denkens, und vielleicht als seine Grenze, ist eines der wichtigsten Themen der Philosophie.“ [9]

Philosophie und ihr Gegenstand lassen sich nicht genau abgrenzen und festlegen, und schon gar nicht auf eine rein theoretische, begriffliche Weise, durch Definition. Einfach deswegen, weil Philosophie nicht ein abstrakter, ein für alle Mal festzulegender, sondern ein geschichtlich gewordener und ständig sich weiter entwickelnder Begriff ist. Philosophie zu treiben ist nicht möglich, ohne die Geschichte der Philosophie zu studieren. Nach Störig muss sich die Philosophie (als Ganzes) mit der Erweiterung dessen begnügen, was sich als Ganzes stets auch als unvollständig erweist.

Wissenschaftlich geprägte Mathematik (aus heutiger Sicht) kann in der ihr eigenen hohen Stufe der Abstraktion nur eingeschränkt im Bereich der Philosophie und in geisteswissenschaftlich orientierten Fachgebieten wie etwa der Pädagogik verwendet werden und trägt natürlich nicht als Fundament für die schulische Bildung von Kindern und Jugendlichen. Der analytische Philosoph und Mathematiker A. Whitehead reflektiert schon 1913 kritisch das Verhältnis von Mathematik als Wissenschaftsgebiet und als Gegenstand von Bildung:

„Mathematik … wie sie in den Köpfen von Mathematikern besteht, ist esoterisch […] Anfälligkeit für Esoterik ist das charakteristische Übel, welches den Nutzen der Mathematik in der allgemeinen Bildung zunichte machen kann. Macht sich der Mathematikunterricht nicht von solcher Esoterik frei, so müssen wir uns eben damit abfinden, daß kultivierte Menschen im allgemeinen es nur zu einem miserabel geringen Maß an mathematischer Einsicht bringen werden.“ [10]

Whitehead unterscheidet dementsprechend zwischen der Mathematik als Gegenstand tiefdringenden Studiums und ihrer Verwendung als einem Instrument der Bildung. Er fordert deshalb:

„Mathematikunterricht sollte sich auf unmittelbare und einfache Weise mit allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung befassen“, denn *"die Schüler stehen ratlos vor einer Unmenge von Einzelheiten, die weder zu großen Ideen noch zu*

---

[9] Störig, 1981, S. 14.
[10] Whithead, 1962 [1913], S.259 (zitiert nach der deutschen Übersetzung durch A. Wittenberg 1962).

alltäglichem Denken eine Beziehung erkennen lassen."

Gleichzeitig erinnert Whitehead jedoch auch daran, dass ja gerade die Schulung der Lernenden im Umgang mit abstrakten Ideen ein Grund sei, für den das Fach Mathematik in einen Kanon allgemeiner Bildung [11] aufgenommen ist. Damit verweist Whitehead schon sehr früh auf die Problematik im Zusammenhang von Fachlichkeit und der Vermittlung von Mathematik als allgemeinbildende pädagogische Aufgabe und warnt vor der Gefahr stark verbreiteter individueller Abneigung gegen das Fachliche, ein stets aktuelles Thema.

[11] Der englische Originaltext verwendet den Begriff „liberal education“. Der Verweis auf eine Erziehung ohne Einschränkung der persönlichen Freiheiten eines Menschen ist nicht nur ein verfassungsgemäßes Grundrecht, sondern auch ein grundlegender Ansatz ästhetischer Erziehung.

1 Das Karlsruher Forschungskonzept Ästhetische Bildung

Das Karlsruher Forschungskonzept Ästhetische Bildung versteht sich als ein bildungstheoretisch-neurowissenschaftlich basiertes Modell, das sich der integrativen Aufgabe stellt, Ästhetik als grundlegenden Begriff für die Wirksamkeit von Bildungsprozessen auszuweisen und zu nutzen. Johann Beichel hat dieses Forschungsgebiet am Institut für Berufspädagogik und Allgemeine Pädagogik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) gegründet und leitet es seit 2009. [12]

Das Konzept integriert zwei wissenschaftliche Richtungen. Johann Beichel hat das Modell bildungsphilosophisch begründet und Norbert Jüdt hat es aus der Sicht neurowissenschaftlicher Erkenntnisse der Kognitionsforschung ergänzt und erweitert. Nicht außer Acht gelassen darf dabei jedoch der Aspekt der langjährigen Praxis-Erfahrung beider Autoren als Lehrer und Ausbilder von Lehrenden in kunstnahen Fächern, welche die Theoriebildung stets praxisnah begleitet und sich auf der Ebene curricularer Praxis als exemplarisch für das Konzept ausweist. Für die folgende Zusammenfassung werden Veröffentlichungen von Johann Beichel, Norbert Jüdt und Frederik Durczok verwendet, aber auch Kenntnisse und Erkenntnisse, die der Verfasser dieser Studie im Rahmen von Vorlesungen, Seminaren und Diskussionen in den Jahren 2013 bis 2017 am KIT, bei Kongressen und Symposien, aber auch vor allem über Gespräche und Diskussionen mit den genannten Personen und Mitarbeitern am Projekt gewonnen hat. In diesem kognitiven Konglomerat von Aufnahme, Verarbeitung und Gestaltung in kollegialer Zusammenarbeit einer Forschungsgruppe ist es nicht einfach, die eigenen „Sedimentierungen“ bei der textlichen Gestaltung so deutlich den Urheber-Stellen zuzuweisen, wie das bei Verwendung von „projektferner“ Literatur üblich ist. Dennoch werden Zitate in diesem Zusammenhang wo immer möglich mit der Strenge wissenschaftlicher Tradierung verwendet, und es wird darauf geachtet, die Aufrechterhaltung des Verweisens auf die jeweilige Autorenschaft zu erhalten.

Die folgenden Abschnitte geben einen Überblick über bildungsphilosophische Begrifflichkeiten zum Verständnis des Karlsruher Forschungskonzepts Ästhetische Bildung, insbesondere für Lehrende im Fach Mathematik. Dabei wird jedoch nicht das Ziel der Arbeit vernachlässigt, eine auf diesem Forschungsgebiet basierte curriculare Fundierung eines ästhetisch verfassten Mathematikunterrichts zu entwickeln. Deshalb werden an geeigneten Stellen auch Bezüge zur Mathematik und zu erzieherischen Aufgaben im Mathematikunterricht eingeflochten.

[12] Weitere Arbeitsschwerpunkte sind „Philosophie der Bildung“ und „Erziehung und Pädagogische Personologie“.

1.1 Bildung und Pädagogik – Erziehung und Unterricht

In alltäglicher Verwendung werden die Begriffe BILDUNG und ERZIEHUNG selten hinterfragt. Über Bildung und Erziehung liest und hört man täglich. Es wird über Bildungseinrichtungen, Bildungspläne, Bildungsdefizite und Bildungs- und Erziehungs-Ziele gesprochen und geschrieben. Geisteswissenschaftlich und philosophisch gesehen ist Bildung ein komplexer und polymorpher Begriff. Eine vorläufig erste übergeordnete Beschreibung oder gar einheitliche Definition zu formulieren, erweist sich als äußerst schwierig. Eine Übereinstimmung könnte darüber hergestellt werden, dass sich Bildung sowohl auf individuelle als auch auf gesellschaftliche Aspekte bezieht: Im ersten Fall auf den nicht endenden Entwicklungsprozess eines sich-bildenden und sich-bilden-wollenden Individuums; im zweiten Fall auf ein gesellschaftlich verfasstes Ideal des Gebildet-Seins – und eines sich daraus ergebenden Gebildet-Werdens im Sinne normativ verfasster Zielsetzungen, welche im Rahmen erzieherischer Maßnahmen mit entsprechender pädagogischer Orientierung erreicht werden sollen, zum Beispiel im Unterricht in einer allgemeinbildenden Schule.

Eine Besonderheit kontinentalphilosophischer Pädagogik ist eine Begriffstrennung in BILDUNG und ERZIEHUNG, die zum Beispiel im angelsächsischen Raum im Wort *education* verknüpft sind. Ein Argument für diese Trennung betrifft die unterschiedliche Verantwortung hinsichtlich der Aufgaben von Lehrenden und Lernenden. Nachfolgend werden die speziell charakterisierenden Merkmale dieser Begriffe erläutert und auf die pragmatischen Begrifflichkeiten UNTERRICHT und SCHULE bezogen.

BILDUNG bezieht sich auf eine besondere Sicht des Erwerbs der Denk- und Handlungsfähigkeit eines Menschen, die nur über das individuelle Bemühen, sich selbst bilden zu wollen, gelingen kann. Sich BILDEN-WOLLEN ist eine eigene Aufgabe des Lernenden. Es liegt in der Logik dieser Begrifflichkeit unter Einbeziehung der freien Entscheidung des Individuums, dass BILDUNG nicht gelehrt und prinzipiell nicht von außen vermittelt werden kann, aber durch äußere Einwirkungen förderbar ist. Derart intransitiv erworbene Bildung zeigt sich wiederum über Handlungen und Haltungen eines Individuums, über welche sich dieses nach gesellschaftlich anerkannten Vorstellungen als GEBILDET auszeichnet. Und damit erweist sich BILDUNG wiederum als etwas, das nicht gänzlich unabhängig von gesellschaftlichen Normen und Wertungen gesehen werden kann.

ERZIEHUNG spricht den transitiven Aspekt des Erwerbs von BILDUNG an. Der Begriff bezieht sich auf Zielsetzungen und Gestaltungsmöglichkeiten von Lehrenden, bei denen sich über reflektierte und durchgängig wirksame Prozesse BILDUNG ereignen kann. Die beiden Begriffe sind dementsprechend eng miteinander verknüpft und voneinander abhängig, denn ein zielorientiertes Planen mit Blick auf das SOLLEN der Lernenden kann wiederum nur über deren WOLLEN gelingen.

Erziehung über UNTERRICHT verweist somit auf konkrete schulische Situationen, in denen in idealer Weise pädagogisch theoriebasierte und thematisch geeignet aufbereitete Lernprozesse methodisch bildungswirksam gestaltet sind.

Pädagogische Implikationen

Hinsichtlich dieses begrifflichen Rahmens kommt jedem Fachbereich die Aufgabe zu, eigene szenisch inszenierte Aufführungen von und für Lernende über eine Dramaturgie und Regie der Lehrenden zu gestalten. Ein speziell für diese Aufgaben ausgebildetes Personal an einem Ort [13], der für diese Prozesse einen – die Lehrenden und Lernenden schützenden [14] – Raum bereitstellt und bildungswirksam ausstattet, wird im Folgenden SCHULE genannt.

Zusammenfassend kann gesagt werden: Hinsichtlich der Bemühungen in erzieherischen und unterrichtlichen Tätigkeiten kann neben pädagogischer Geschicklichkeit und fachlicher Exzellenz jegliches Bemühen des Lehrenden hinsichtlich der Erziehungs- und Unterrichtsziele jedoch nur erfolgreich sein, wenn Lernende als Wollende handeln und sich verhalten.

Die in diesem Abschnitt erläuterten Begriffstrennungen werden in der Arbeit verwendet, da sie die unterschiedlichen Aufgaben einer „Prozessgestaltung in Lernsituationen" im Sinne des Themas unterstützen.

1.2 Ästhetik und Philosophie

Dieser Abschnitt gibt einen knappen Überblick zur Geschichte des Ästhetik-Begriffs im kontinentaleuropäischen Raum. Anschließend erfolgt eine pädagogische Begriffsklärung im Rahmen des Karlsruher Konzeptes „Ästhetische Bildung".

Philosophisch ist der Begriff Ästhetik (griechisch: aisthesis [15]) eng verknüpft mit den Begriffen Kunst und Schönheit im Sinne des „Schönen an sich". Überlegungen über das Wesen des Schönen reichen weit zurück in die Antike. Heraklits Ausspruch *„Die schönste Harmonie entsteht durch Zusammenbringen der Gegensätze"* sieht Schönheit in zu harmonischer Einheit

[13] Mit Ort ist hier nicht nur das Gebäude, sondern auch die Ausstattung und Verortung aller Beteiligten unter einem Verständnis von ästhetisch verfasster Erziehung und einem gemeinschaftlich ausgearbeiteten Curriculum gemeint.
[14] Das Adjektiv „schützend" verweist insbesondere auf eine Hauptaufgabe erzieherischer Tätigkeit hin, den Lernenden physisch und psychisch eine „angstfreie" Umgebung zu bieten.
[15] Aisthetik: Die Lehre der sinnlichen (körperlichen) Wahrnehmung und Empfindung, im Kontrast zur kognitiven (unkörperlich verstandenen) höheren Erkenntnis.

zusammengefasster Mannigfaltigkeit. [16] Polyklet erfasst Schönheit über ein geordnetes Verhältnis von Formen nach Maß und Zahl: *„[Chrysippos ...] glaubt aber, dass die Schönheit nicht in der Symmetria der Elemente, sondern in der der Teile liege, in der Symmetria eines Fingers zum anderen und aller Finger zur Handfläche und zum Handgelenk und dieser zur Elle und der Elle zum Oberarm und aller zu allem, wie im Kanon Polyklets geschrieben steht. Denn alle Symmetrien des Körpers hat uns Polyklet in seiner Schrift gelehrt; in seinem Werk hat er diese Lehre bekräftigt, indem er ein Standbild schuf gemäß den Vorschriften in seiner Abhandlung und das Standbild selbst dann ‚Kanon' nannte wie auch seine Schrift."* [17]

Aristoteles erkennt Schönheit über Symmetrie und Ordnung: „*Alles, was in seiner Art schön heißt, ist es nicht durch eine absolute, sondern durch eine proportionierliche Größe und Anzahl seiner Teile."* [18]

Die Renaissance greift die antike Philosophie wieder auf und verknüpft sie mit religiösen und moralischen Elementen, indem sich das Schöne über Göttliches und Sittliches vermittelt. Die bildenden Künste besinnen sich auf die antike Proportionslehre.

Bei den Beschreibungen von „Schönheit" werden Begriffe wie Harmonie, Symmetrie, Proportion, Ordnung und Struktur benutzt, die bis heute zentral für die Mathematik sind.

Mit Blick auf Ästhetik als „Theorie des Schönen" schreibt Schwarzfischer unter Bezugnahme auf den Dialog zwischen Sokrates und Hippias (siehe Abbildung 1.1) [19]:

> *„In diesem Fragen wird die Wissenschaft nach dem Schönen begründet, die sich nicht mit dem Aufzählen von Beispielen oder dem Beschreiben derselben begnügt. Es wird nach dem Wesen des Schönen gefragt – und also nach einer Regel gesucht, wodurch etwas schön wird, das es sonst nicht ist oder zuvor nicht war."* [20]

Schwarzfischer merkt an, dass es quellenmäßig nicht gesichert sei, ob Platon diesen Dialog Sokrates zuschreibt oder selbst der Urheber sei. Für letzteres spreche, dass der Dialog nur zu verstehen sei, wenn man die Kenntnis von Platons idealisiertem Unterschied zwischen der Idee des eigentlich Schönen, das sich im göttlich Schönen und in der absoluten Wahrheit manifestiere, und dem einzelnen Schönen, das nur ein Abbild der Idee des eigentlich Schönen sei, voraussetzt. [21]

---

[16] Diels, 2017.
[17] Beck, et al., Norbert Kaiser, Schriftquellen zu Polyklet, S. 74f.
[18] Quelle: Aristoteles, Politik. 1326a (VII, 4.) Übersetzt von Christian Garve (1799).
[19] Schwarzfischer, 2014, S. 12f.
[20] Ebd. S. 13.
[21] Ebd. S. 13.

Schwarzfischer verdeutlicht den paradigmatischen Konflikt zwischen alltäglicher Empfindung für das Schöne und einer abstrakt verallgemeinernden Begrifflichkeit. Sokrates spricht exemplarisch das allgemeine Prinzip jeglicher Theoriebildung an: Eine Theorie muss mehr sein als die Summe ihrer Beispiele. Sie muss eine verallgemeinerte Sichtweise bieten, unter der die Beispiele als Repräsentanten des allgemeinen Konzepts erkennbar sind und sich dieses Konzept wiederum über einen Repräsentanten zeigt.

Sokrates: Ist also auch alles Schöne durch das Schöne schön?

Hippias: Ja, durch das Schöne.

Sokrates: Welches doch auch etwas ist?

Hippias: Allerdings etwas. Aber was will er nur?

Sokrates: So sag mir denn, Fremdling, wird er sprechen, was ist denn dieses, das Schöne?

Hippias: Will er nicht wissen, wer dieses fragt, Sokrates, was schön ist?

Sokrates: Nein, dünkt mich, sondern was das Schöne ist, Hippias.

Hippias: Und wie ist denn dies verschieden von jenem?

Sokrates: Dünkt es dich etwa gar nicht verschieden?

Hippias: Nein, gar nicht.

Sokrates: Du weißt es freilich gewiss besser. Indes sieh nur Guter, er fragt dich ja nicht was schön ist, sondern was das Schöne ist.

Hippias: Ich verstehe, Guter, und will ihm beantworten was das Schöne ist, und er soll gewiss nichts dagegen haben. Nämlich wisse nur, Sokrates, wenn ich es dir recht sagen soll, ein schönes Mädchen ist schön.

[…]

Abbildung 1.1: Dialog zwischen Sokrates und Hippias über das Wesen des Schönen (ca. 2400 v. Chr.)

So offen und unbefriedigend wie Hippias die Antwort auf die Frage nach dem ‚Schönen an sich' formuliert, schreibt Schwarzfischer zur prinzipiellen Problematik des Ästhetik-Begriffs: *„Dieses […] Kapitel kann keine Einführung in ‚die Ästhetik' sein, weil es ‚die' Ästhetik weder gibt, noch gegeben hat".* [22]

Die Frage nach dem Ästhetischen, als dem Schönen an sich, sucht nach einer Transformationsregel, nach einer ästhetischen Konstante, die über das einzelne Exemplar und dessen reine Nennung oder statistische Beschreibung hinausgeht. Die antike Philosophie hat erstmals dieses Problem erfasst und einen Ansatz gefunden, diesen „gordischen Knoten" zwischen begrifflicher

[22] Schwarzfischer, 2014, S. 11. Die Überschrift des Kapitels ist „Ästhetik/Aisthetik": Eine kurze Einführung, eine Verführung oder doch eine Entführung?"

Abstraktion und dem als ästhetisch konnotierten physischen Objekt aufzulösen, indem sie „die Aisthesis“ verallgemeinernd über den Begriff des Schönen „gelegt“ hat. Aisthetik als Theorie der sinnlichen Wahrnehmung bezieht sich auf die Ganzheitlichkeit der Wahrnehmung im Sinne von Merken, Spüren, Erkennen, Fühlen usw. Damit ist ein aisthetisches Objekt oder Produkt über diese Ganzheitlichkeit der Wahrnehmung erfasst. und damit aisthetisch verfasst. [23]

Alexander Gottlieb Baumgarten (1714 - 1762) gilt als philosophischer Urheber des Ästhetikbegriffs der Neuzeit. In „Aesthetica“ [24] beschäftigt er sich mit Fragen im Zusammenhang von Schönem und sinnlicher Wahrnehmung und versucht über eine Erweiterung des griechischen Ansatzes, „Ästhetik“ als die Wissenschaft der sinnlichen Erkenntnis im Sinne einer Wahrnehmung des Schönen, Vollkommenen, Erhabenen aufzufassen.

Dazu erklärt Hans R. Schweizer im Vorwort einer Übersetzung grundlegender Abschnitte der "Aesthetica" (1750/58) [25]:

> *„Die philosophische Ästhetik reflektiert seit Kant und Schiller die Vorgänge oder Zustände, die durch das Kunstwerk und das Schöne überhaupt ausgelöst werden. […] Dem Begründer der Ästhetik als philosophischer Disziplin geht es in erste Linie darum, das Eigenrecht der ‚sinnlichen Erkenntnis‘ zur Geltung zu bringen. Er hält sich dabei genau an die Grundbedeutung des Wortes ‚ästhetisch‘: die Empfindung und Wahrnehmung betreffend, für die Sinne faßbar. Seine Philosophie ist also eine Philosophie der sinnlichen Empfindung und Wahrnehmung, und sie nimmt die Aktivität der Sinne nicht als äußeren Reiz und als Material für den Verstand, sondern als eine besondere Art der Erkenntnis ernst. Sie wird daher als ‚Wissenschaft von der Erkenntnis‘ definiert.*

Baumgarten öffnet Ästhetik begrifflich für jene Eigenschaften, die darüber entscheiden, wie Menschen wahrgenommene Gegenstände bewerten. Ästhetik unterteilt oder forscht nun nicht mehr nach Kategorien wie das Schöne, Hässliche, Erhabene usw. Der Begriff öffnet sich auch Fragen allgemeiner Wahrnehmung unter Einbeziehung anderer Wissenschaften.

Immanuel Kant bezeichnet „*das Schöne als das, was ohne Interesse gefällt*“[26]. Dabei erweitert er implizit Baumgartens Ansatz um den Aspekt der Subjektivität des Betrachters. Diese Erweiterung erscheint wiederum vernünftig im Sinne der Aufklärung. Wenn nach Kant der

[23] Nach diesem Verständnis kann auch Hässliches und Abstoßendes begrifflich einbezogen sein.
[24] Baumgarten, 1750/1758.
[25] Lat.-deutsche Übersetzung von Hans R. Schweizer in (Baumgarten, et al., 1988, Philosophische Bibliothek, Band 355, 2. Auflage), Einführung, S. 1.
[26] Kant, Kr. d. Urt. § 9.

Mensch seiner - selbstverschuldeten - Unmündigkeit nur durch eigenes Streben und Denken entrinnen kann, zeigt sich dies auch in einer eigenen Werturteilsfähigkeit für das Schöne. Diese Sicht auf die persönliche Verfügung eines freien Spiels der Vorstellungskräfte relativiert Kant jedoch mit Blick auf gesellschaftliche Verknüpfungen, über die das „*interesselose Wohlgefallen durchaus einen gewissen Anspruch auf Verallgemeinerung habe“ (Ebd.).*

Während für Goethe Schönheit sich über die Gesetzlichkeit in der Natur und die Vollkommenheit des Lebendigen zeigt, betrachtet Schiller das Schöne als die im Spiel erfolgende Vereinigung von niederem Stofftrieb und höherem Formtrieb. Wenn die Kunst sich über den Spieltrieb des Menschen verwirklicht, befreit sich der Mensch von den Sorgen und Engen des Alltags, erhebt sich zu etwas Höherem, lebt ein reineres, freieres Leben.

> *„Der Mensch spielt nur, wo er in voller Bedeutung des Wortes Mensch ist, und er ist nur da ganz Mensch, wo er spielt.“* [27]

Dazu Schiller an gleicher Stelle: *„Spieltrieb soll nicht bloß Sachtrieb, und soll nicht blos Formtrieb, sondern beydes zugleich, das ist, Spieltrieb seyn. Mit andern Worten: der Mensch soll mit der Schönheit nur spielen, und er soll nur mit der Schönheit spielen […] Aber dieser Satz ist auch nur in der Wissenschaft unerwartet; längst schon lebte und wirkte er in der Kunst, und in dem Gefühle der Griechen […]“.*

Hegel betrachtet das *Schöne als das sinnliche Scheinen der Idee* [28]:

> *„Sagten wir nun, die Schönheit sei Idee, so ist Schönheit und Wahrheit einerseits dasselbe. Das Schöne nämlich muß wahr an sich selbst sein. Näher aber unterscheidet sich ebensosehr das Wahre von dem Schönen. Wahr nämlich ist die Idee, wie sie als Idee ihrem Ansich und allgemeinen Prinzip nach ist und als solches gedacht wird. Dann ist nicht ihre sinnliche und äußere Existenz, sondern in dieser nur die allgemeine Idee für das Denken. Doch die Idee soll sich auch äußerlich realisieren und bestimmte vorhandene Existenz als natürliche und geistige Objektivität gewinnen. Das Wahre, das als solches ist, existiert auch. Indem es nun in diesem seinem äußerlichen Dasein unmittelbar für das Bewußtsein ist und der Begriff unmittelbar in Einheit bleibt mit seiner äußeren Erscheinung, ist die Idee nicht nur wahr, sondern schön. Das Schöne bestimmt sich dadurch als das sinnliche Scheinen der Idee.“*

[27] Schiller, 1795, S. 88.
[28] G.W.F. Hegel, Vorlesungen über Ästhetik, 1835 – 1838, Quelle: http://www.textlog.de/5690.html.

Und er folgert:

> *„Aus diesem Grunde ist es denn auch für den Verstand nicht möglich, die Schönheit zu erfassen, weil der Verstand, statt zu jener Einheit durchzudringen, stets deren Unterschiede […] festhält, insofern ja die Realität etwas ganz anderes als die Idealität, das Sinnliche etwas ganz anderes als der Begriff, das Objektive etwas ganz anderes als das Subjektive sei und solche Gegensätze nicht vereinigt werden dürften […] der Verstand bleibe im Endlichen, Einseitigen und Unwahren stehen. Das Schöne dagegen ist in sich selber unendlich und frei" (a. a. O.).*

Die Romantik erhebt *das Schöne* in den Rang absoluter Kunst und ewiger Ideen, spielt mit der *Unendlichkeit des Schönen in sich* und bewirkt verklärende Begriffsbeschreibungen des Ästhetischen, die wegen ihrer Betonung der Beziehungslosigkeit zum Verstand insbesondere aus der Sicht moderner Hirnforschung kritisch für eine ästhetische Fundierung der Pädagogik hinterfragt werden muss. Exemplarisch für Nachwehen der Romantik ist eine in Wilhelm Reins Wörterbuch der philosophischen Begriffe verfasste Formulierung (i. S. definitorischer Beschreibung von „Ästhetischer Bildung") zitiert:

> *„[…] unter ästhetischer Bildung verstehen wir die Fähigkeit ästhetisch zu empfinden, d. h. die Natur und gute Kunstwerke ästhetisch zu genießen".* [29]

Wegen ihrer tautologischen Konstruktion kann diese Begriffs-Beschreibung nicht erhellend sein. [30] Allerdings ergänzt Rein diese um die Erkenntnis, dass sich Ästhetik von der Nähe zu anderen Begrifflichkeiten und Ausweitungen absetzen könne und als eigenständiger Begriff angesehen werden sollte:

> *„Man hat den Begriff* (Ästhetik, Anm. d. Verf.) *zuweilen noch weiter ausgedehnt, besonders das Moralische und Ethische mit hineingezogen. So ist man schließlich dazu gekommen, auch das ganze Auftreten und Benehmen des Menschen […] zur ästhetischen Bildung zu rechnen. Diese Erweiterung des Begriffes beruhte auf jener unklaren Begrenzung des Ästhetischen, die früher allgemein gebräuchlich war, jetzt aber von der wissenschaftlichen Ästhetik wenigstens der Intention nach überwunden ist. Ästhetische Bildung ist keine ethische und moralische. Hat man für verschiedene Dinge verschiedene Namen, so soll man sie auch streng auseinanderhalten."* [31]

---

[29] Rein, 1903, S. 290 ff. (2. Auflage).
[30] Der tautologische Bezug erschließt sich über die dreifache Verwendung des Adjektivs ästhetisch in einem Satz.
[31] Rein, 1903, Ebd.

Diese philosophische Sicht von Ästhetik (besser des Ästhetischen), die 1903 in einer Enzyklopädie noch definitorisch zeigt, welche Objekte zeitlos idealisiert als ästhetisch bezeichnet werden können, setzt einen gesellschaftlich verfassten Merkmal-Katalog voraus, anhand dessen eine „objektive" Bewertung der jeweiligen Objekte vorgenommen werden kann. Im deutschen Sprachgebrauch zeigt sich dies in der adjektivischen Verwendung „ästhetisch", worüber ein Kunstwerk - aber auch ein Objekt welcher Gattung auch immer - schön sei, indem eine ihm zugeschriebene Idee [32] erfahrbar wird.

Mit einer Erweiterung des Begriffs auf die Ursprungsbedeutung des griechischen Wortes „aisthesis" ergibt sich eine fundamentale Wandlung im Begriffsverständnis, in dem Fragen allgemeiner Wahrnehmung und Ästhetik als Gegenstand interdisziplinärer Forschung auch unter Einbeziehung der Naturwissenschaften und insbesondere der Neurobiologie im Zentrum ästhetischer Forschung stehen [33]. Eine auf Pädagogik ausgerichtete bildungsphilosophische Interpretation von Ästhetik im Rahmen des Karlsruher Forschungskonzeptes Ästhetische Bildung wird im folgenden Abschnitt dargestellt.

1.3 Ästhetik und Pädagogik

In der Pädagogik sind die Begriffe Ästhetische Bildung und - hinsichtlich der schulischen Dimension - Ästhetische Erziehung eng mit künstlerischen Fächern bzw. Fächerverbünden verknüpft. Dies zeigt sich auch im Werk „Ästhetische Bildung" [34] von Johann Beichel, welches den Untertitel „als Potentialentfaltung und Kulturerschließung in aufbauendem Unterricht und nachhaltiger Erziehung auf kunstnahen Begegnungs- und Lernfeldern" trägt. Pädagogisch bezieht sich Ästhetik im Zusammenhang mit Bildungs- und Lern-Prozessen, d. h. im Sinne ästhetisch fundierter Erziehung, auf prozessbegleitende Planungen, bei denen das SOLLEN durch die Kunst[35] so kultiviert ist, dass es das WOLLEN in seinen Willen aufnimmt [36]. Entscheidend für eine derart positive Transformation zwischen projektierten Lernzielen der Lehrenden und einer zugewendeten Lernbereitschaft der Lernenden ist, dass Bildungsprozesse von den beteiligten Subjekten gewollt und selbst in die Wege geleitet werden [37].

---

[32] Die wiederum einem Katalog-Merkmal entsprechen sollte.
[33] Vgl. Jüdt, 2014, Kap. 2.
[34] Beichel, 2010.
[35] Vom Autor in diesem Kontext als *Erziehungs-Kunst* interpretiert.
[36] Adaption eines Zitats von Rüdiger Safranski, in Beichel, 2010, S. 1. „Das Sollen solle nicht herrschen über das Wollen, sondern das Wollen soll durch die Kunst so kultiviert werden, dass es das Sollen in seinen Willen aufnimmt."
[37] Ebd. S. 12. Diese Forderung kann mit Blick auf kunstnahe Fächer naheliegend sein. Sie ist zu variieren, wenn es um zielorientiertes fachliches Lernen geht.

Johann Beichel regt im Karlsruher Forschungsschwerpunkt „Ästhetische Bildung“ [38] an,

> *„Bildung als grundsätzlich ästhetisch verfasst zu verstehen“,* indem sich das Ästhetische *„in der Entfaltung subjektiver Wahrnehmungsfähigkeit, Empfindsamkeit, Vorstellungskraft und Gestaltungswillen zeigt und sich in theoriebasierten Erziehungsprozessen persönlichkeitsbildend wirksam erweist“.* [39]

Auch das Karlsruher Konzept bezieht sich auf die griechische Wurzel a*isthesis*, die Wahrnehmung als Ganzes betreffend, als Gemeinsamkeit von sinnlicher Wahrnehmung im Zusammenwirken mit kognitiven Prozessen des Erkennens und Verstehens. Eine derart fundierte ästhetische Erziehung zielt auf die Entwicklung einer eigenständigen Urteilskraft, die sich über die subjektiv-mentale innere (Ein)Bildung wiederum äußerlich konstruktiv-gestaltend und über Empfindsamkeit sinnlich wahrnehmbar vermittelt.

Eine neuzeitliche philosophische Grundlegung des Konzeptes beginnt mit der Philosophie der Aufklärung, die Kant mit einer Dreigliedrigkeit der „Reinen Vernunft“, der „Urteilskraft“ und der „Praktischen Vernunft“ einleitet [40], dabei jedoch einen deutlichen Hinweis darauf gibt, dass, entsprechend der Mündigkeit des sich seines Verstandes bedienen könnenden Individuums, dieses nicht ohne Selbstverpflichtung für eine sittliche und moralische Haltung gesehen werden darf:

> *„Aufklärung ist der Ausgang des Menschen aus seiner selbst verschuldeten Unmündigkeit. Unmündigkeit ist das Unvermögen, sich seines Verstandes ohne Anleitung eines anderen zu bedienen. Selbst verschuldet ist diese Unmündigkeit, wenn die Ursache derselben nicht am Mangel des Verstandes, sondern der Entschließung und des Muthes liegt, sich seiner ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Sapere aude!* [wage es, verständig zu sein; Übers. d. A.] *Habe Muth, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!* [41] *ist also der Wahlspruch der Aufklärung.“* [42]

---

[38] Die folgenden Ausführungen beziehen sich in Teilen auf Zusammenfassungen aus Beiträgen und Diskussionen in Seminaren. An Stellen, an denen ein Bezug zu Quellen möglich ist, wird dieser jeweils in einer Fußnote hergestellt und ggf. auf „Zweit-Zitate“ hingewiesen. Hinsichtlich der Komprimierung kann dabei nicht durchgängig „formatgerecht“ zitiert werden (vgl. Anm. S.7), da es sich um inhaltliche Angaben handelt, die sprachlich adaptiert wurden. Der zum Teil vorgenommene globale Verweis auf ein Werk will nicht die Urheberschaft verfälschen, sondern eine Anregung sein, sich mit dieser Literatur zu befassen, um einen besseren Einblick in das Forschungsgebiet „Ästhetische Bildung“ zu erlangen.

[39] Johann Beichel: Zitat aus einem Gesprächsprotokoll, naturwissenschaftliche Fächer im Kanon ästhetischer Bildung zu sehen.

[40] Dargelegt in drei getrennten Werken „Kritik der reinen Vernunft“ (1781/87), „Kritik der praktischen Vernunft“ (1788) und „Kritik der Urteilskraft“ (1790).

[41] Eine Aufforderung, die für den pädagogisch Tätigen nur allzu oft ein Wunsch bleibt.

[42] Kants Beantwortung der Frage: Was ist Aufklärung? - Berlinische Monatsschrift, 1784,2, S. 481–494.

Relativierend dazu stellt David Hume einen Gegenpol zu Kants differenzierter Darstellung her, nach dem unser (moralisches) Gefühlsvermögen nicht durch die Vernunft bestimmt ist, sondern eigenständig wirkt, und ergänzt, dass zwischen moralischen und ästhetischen Eigenschaften des Schönen, Angenehmen und Guten eine Beziehung besteht.

Das Zusammenwirken der Begrifflichkeiten des Schönen, des Erhabenen, des Sittlichen und Moralischen mit dem Ästhetischen (dem Schönen und Wahren an sich) wird von Kant (Kritik der Urteilskraft) zum ästhetischen Prinzip als solches erhoben,

> *„in dem Schön ist, was ohne Begriff als Gegenstand eines notwendigen Wohlgefallens erkannt wird“.* [43]

Nach Viehoff sieht Friedrich Schiller die sittliche Entwicklung des Menschen als „*ganzheitliche Aufgabe, bei der nicht die einzelnen Handlungen, sondern der ganze Charakter sittlich ist.*“ [44]

Johann Friedrich Herbart kann als Urvater der Einbringung der Ästhetik in die Pädagogik angesehen werden. Herbart begreift Ästhetik als Einheit von Schönem und Gutem im Sinne des Sittlichen und verbindet es darüber auch mit dem Moralischen, aus dem sich der gute Wille und der Entschluss, unter „*dem Gesetz zu denken, das allgemein verpflichtet*“ [45], Gesetzmäßigkeiten für das Handeln und damit auch ästhetische Prämissen für erzieherische Aufgaben ableiten lassen. In dieser Nähe des Moralisch-Ethischen zum Ästhetischen versteht sich die Vernunft als begleitende Basis jeglichen ästhetischen Handelns.

Nach Martin Seel, einem zeitgenössischen Philosophen und Hochschullehrer der Frankfurter Johann Wolfgang Goethe Universität, zeige sich die Kant‘sche „Dreigliedrigkeit der Welt“ in einem „*Zusammenspiel von drei Rationalitäten der Vernunft: einer theoretischen, einer praktischen und einer ästhetischen, die sich wechselseitig aufeinander beziehen und im heutigen Sprachgebrauch als Erkenntnistheorie, Ethik und Ästhetik erscheinen“.* [46]

Richard Rorty kritisiert diese zerlegende Methode und schlägt vor, Kants Dreiteilung, die sich in Erkennen, Wollen und Streben nach Lustgewinn zeige, durch eine Zweiteilung zu ersetzen, bei der Problemlösung und imaginative Neubeschreibung ein Mittel zum Verstehen und Gestalten der Welt sei. Nach Rorty sei die Welt nur durch mehr Einfühlungsvermögen und Empathie zu retten. Diese Haltungen könne durch Literatur und insbesondere über Romane geschult werden.

---

[43] Kant, Kritik der Urteilskraft, Kap. 30, §22.
[44] Viehoff, 1839, S. 64.
[45] Herbart, 1804, S. 105.
[46] Beichel, 2007, S. 38.

Rorty schreibt:

> *„Spezifischer ausgedrückt, können wir sowohl den geistigen als auch den moralischen Fortschritt als etwas nicht von der Annäherung an das Wahre, das Gute oder das Richtige Abhängiges sehen, sondern als Zunahme der Vorstellungskraft. Sie, die Phantasie, bringt die kulturelle Evolution voran. Sie ist die Kraft, die unter Voraussetzung von Frieden und Wohlstand ständig dahingehend wirkt, daß sich die Zukunft des Menschen reichhaltiger gestaltet als seine Vergangenheit.“* [47]

Als radikalen Kritiker solcher „Zergliederungen“ zitiert Johann Beichel den Prager Philosophen Vilèm Flusser, der eine heftige Kritik beider Ansätze unternehme. [48] Flusser argumentiere, dass solche Unterteilungen jeweils gesellschaftliche Unterkulturen erzeugten, die sich voneinander abgrenzten. Dies zeige sich zum Beispiel in der Trennung von wissenschaftlichen, technischen und künstlerischen Akademien und Hochschulen, bei der es trotz der so genannten Interdisziplinarität kaum Brücken gebe, auch deshalb, weil verwendete Codes nicht gegenseitig übersetzbar seien und deshalb Kulturen mangels Kommunikation auseinanderfielen. [49]

Als globale Folge dieser Entwicklung zeichnet Vilèm Flusser ein kritisch-düsteres gesellschaftliches Bild:

> *„Die wissenschaftlich-technischen Disziplinen werden politisch verantwortungslos und ästhetisch widerlich, die politischen und ökonomischen werden wissenschaftlich falsch und ästhetisch unannehmbar, und die künstlerischen werden sowohl wissenschaftlich wie politisch immer inkompetenter.“* [50]

Flussers Kritik ist für Johann Beichel ein weiteres Argument für eine Sichtweise, Ästhetik als integrative Klammer für pädagogisches Handeln anzusehen. Bildungstheoretische Erkenntnisse sprächen dafür, den Bereich des intentionalen ästhetischen Unterrichts, der Ästhetischen Erziehung und der sich hierbei ereignenden Ästhetischen Bildung im Sinne ästhetischer Erfahrungen und des Lernens über die Wahrnehmung auf alle schulischen Bereiche im Kanon der Unterrichtsfächer zu übertragen:

> *„Empfindsamkeit und Vorstellungskraft zu entfalten erfolgt nicht in Fächergrenzen, auch deshalb nicht, weil Lernprozesse vom Subjekt aus zu denken sind und nicht auf der Grundlage einer Scheinsachlichkeit. Dementsprechend sind die oben*

---

[47] Rorty, zitiert nach Durczok, 2016, S.17.
[48] Beichel, 2007, S. 41f.
[49] Diese Argumentation besitzt eine Affinität zu Niklas Luhmanns Theorie sozialer Systeme, nach der ein System stets durch eine innere Systematik versucht, sich selbst zu erhalten. Vgl. Luhmann, 1984.
[50] Vilèm Flusser, Ästhetische Erziehung, in Zacharias, 1991, S. 121.

genannten Aspekte der zu verstärkenden Sensibilität und Phantasieentfaltung über alle Fachgebiete hinweg in didaktische Entwürfe hineinzudenken. Diese sind interdisziplinär vom Schüler, seinen Erfahrungen und seiner subjektiven Weltsicht ausgehend zu entfalten, die dann seine Erkenntnisse und Interessen, sein Wissen und Wollen im Rahmen der gemeinsamen Weltaneignung sprachlich und dialogisch qualifizieren werden.“ [51]

Unter dem Aspekt von Ästhetik als Theorie der Wahrnehmung wäre es unvollständig, emotionale und rationale Sichtweisen kognitiver Prozesse aus einer Sicht wissenschaftlicher Systematik oder dem Versuch fachbezogener Gliederungen herauszulösen, da sie beide in jedem Bildungsprozess stets vernetzt beteiligt sind. Dies ermöglicht eine für Erziehungsaufgaben allgemeine Beschreibung von Ästhetik im Zusammenhang mit Lernprozessen.

Ästhetik bzw. ästhetisches Empfinden wird dann ausgelöst, wenn das Produkt vom Empfänger als bereichernd, angenehm, weiterbringend und somit als „gewollt“ empfunden wird.

Abbildung 1.2 vermittelt einen Überblick zum bildungsphilosophischen Ansatz des Karlsruher Forschungsprojekts Ästhetische Bildung. [52] In dieser Übersicht ist Baumgartens Parallelität von sensitiver und rationaler Erkenntnis implizit verortet, da Empfindsamkeit gegenüber fachlichem Lernen konkret mit aisthetischen Vorgängen verknüpft werden muss. Zum Beispiel ist in den Bereichen der Naturwissenschaften eine unvoreingenommene, geschärfte Beobachtung ein zentraler Ausgangspunkt und im Bereich der Mathematik das über altersgemäße Grundvorstellungen spiralförmig entwickelte mathematische Wissens- und Begriffsnetz, über deren gedankliche Verflechtung fachliche Empfindsamkeit erst möglich wird. [53]

Nach Johann Beichel verlagert Gunter Otto den Begriff *ästhetische Erfahrung* in den Bereich des praktisch-prozesshaften: Ästhetische Erfahrung, als Produkt der Sinne und des Verstandes mit einer kritischen Verarbeitung des Empfindungsmaterials durch das Denken, sei propädeutisch für ästhetische Bildung als ein fächerübergreifendes Prinzip, das sich am besten in projektartig angelegten Unterrichts- und Erfahrungsprozessen verwirklichen lasse. [54]

Insbesondere ein Verständnis von Bildung im intransitiven Sinn mache dabei deutlich, dass weder Ästhetische Erziehung noch Ästhetischer Unterricht als eigenständige Fachgebiete angesehen werden können, da sie ein ganzheitliches Bildungsprinzip darstellten.

---

[51] Johann Beichel: Unveröffentlichtes Zitat einer „Erstschrift“, in der eine Integration naturwissenschaftlicher Fächer in das Konzept „Ästhetische Bildung“ beschrieben wurde.
[52] Für eine ausführliche Darstellung vgl. Beichel, 2010, Kapitel B) und C).
[53] Für einen Überblick zur Entwicklung des Grundvorstellungskonzeptes in der Pädagogik vgl. vom Hofe, 1996.
[54] Beichel, 2010, S. 9.

Bildung und Ästhetik

Theoretisch	Ästhetisch	Praktisch
Natur	Natur u. Kunst	Kultur
	Immanuel Kant	
Reine Vernunft	*Urteilskraft*	*Praktische Vernunft*
Unterricht		**Erziehung**
Sache	Werturteilsfähigkeit	*Mensch*
Wert	Werturteilsbereitschaft	*Würde*
Wahrheit	**Können und Wollen**	*Sittlichkeit*
Rationalität		*Moralität*

Platon

Aristoteles

Baumgarten

Kant

Schiller

Herbart

Rorty

…

Problemlösung und imaginative Neubeschreibung

Wahrnehmungsfähigkeit und Empfindsamkeit	**Phantasie und Vorstellungskraft**	**Gestaltungsfähigkeit und Gestaltungswille**

BILDUNG

Objektive Seite	Subjektive Seite
Kunstnaher Unterricht	**Ästhetische Erziehung**

Ästhetisch verfasster Fachunterricht

Vermittlungskategorie Ästhetik

Ästhetische Bildung

Abbildung 1.2: Überblick zum bildungsphilosophischen Konzept des Karlsruher Forschungsprojekts „Ästhetische Bildung“

Nach Beichel zeigt sich Ästhetische Erziehung demnach [55]

- *über projekt- und prozessorientiertes Lernen,*
- *im Vorrang eigenschöpferischer und kollektiver Produktion vor der nachgestalteten Abbildung und Wiedergabe (Reproduktion),*
- *in der Förderung und Entfaltung individueller sowie kollektiver Wahrnehmungs-, Ausdrucks- und Gestaltungsfähigkeiten sowie -bereitschaften,*
- *in einer auditiven, visuellen, haptischen, sensomotorischen und multimedialen Wahrnehmungserziehung, die auf eine qualitative Veränderung und Verbesserung der Bewusstseins- und Antriebslage der Schüler für Kommunikation zielt.*

Johann Beichel sieht ästhetische Werturteilsfähigkeit als Vermittlungs-, Vernunft- und Verantwortungskategorie zwischen Wissen, Können und Handeln, zwischen Sachlichkeit und Menschlichkeit als vornehmstes Bildungsziel. In Analogie zu moralischer Erziehung soll Ästhetik ein, jegliches Fach und jeglichen Unterricht begleitendes, durchgängiges Konzept sein, das über ästhetische Rezeption und ästhetisches Werten und Urteilen per se überfachliche Qualität aufweist. Das Ästhetische beansprucht deshalb auch keine zusätzlichen schulischen Ressourcen, da es keinem Fach oder Lernbereich zeitliche, sachliche oder personelle Einbußen bringe.

Nach Adelheid Sievert-Staudte sollte sich

> *„das Ästhetische so gut, so kompetent, so vielseitig und künstlerisch professionell wie möglich in alle Themenfelder des schulischen Lernens einmischen und dort seinen besonderen Anteil zur Erkenntnis des Gegenstandes beitragen und darüber in einer sich dann notwendig veränderten Schule von morgen Bestand haben“.* [56]

Hinsichtlich einer methodischen Ausrichtung sollte aus erziehungs- und lerntechnischer Sicht das Augenmerk mehr weg vom fachorientierten „Was“ bezüglich der Stoff- und Sachlichkeit auf das methodische „Wie“ der Wissensaneignung und ihrer Verwendung gelegt werden. Auch im Kontext von Erziehung und Unterricht sollte vorrangig der Mensch als Person und Individuum im Zentrum stehen und nicht eine kanonisierte Fachlichkeit.

Johann Beichel entgegnet einer pessimistischen Einschätzung aus gesellschaftlicher und philosophischer Sicht, dass Schulen nicht notwendig vor der Problematik familiärer Benachteiligung durch bildungsferne Milieus kapitulieren müssen. Empirische Studien zu ästhetischen Projekten, bei denen Akteure neue Horizonte des Erkennens und des Handelns erschließen, belegten,

---

[55] Beichel, 2010, S. 23.
[56] Sievert-Staudte, 1991, S. 245.

dass sich eine positive Emotionalität, Sympathie und Werturteilsfähigkeit entwickelt, wenn Beteiligte in freier Improvisation sich selbst und ihre Welt wahrzunehmen und zu gestalten lernen und dabei Ver- und Zutrauen zur eigenen Gestaltungsfähigkeit erlangen. [57]

Aber er warnt auch vor einer „Spaß-Schule", wo Projekte sich als bloße Unterhaltung darstellen, bei der fortschreitendes Lernen als aufbauende ästhetische Erfahrung nicht erkennbar ist und auf Erkenntnisfortschritte der Lernenden verzichtet wird. Und er bemängelt dies noch drastischer anhand von Unterrichtsbeobachtungen, bei denen sichtbar wird, dass Lehrpersonen nicht erkennen, wenn Lernen im eben genannten Sinn gar nicht stattfindet.

1.4 Ästhetik und Neurobiologie

In seiner philosophisch-pädagogisch orientierten Dissertation „Ästhetik und Lehrerbildung" an der Fakultät für Geistes- und Sozialwissenschaften am KIT hat Norbert Jüdt den Begriff *Ästhetik* aus seiner in der Alltagssprache mit dem Attribut des „Schönen" und „Objekthaften" assoziierten Bedeutung abgelöst und wertneutral auf den antiken griechischen Wortgebrauch *aisthanomai* (mit den Sinnen wahrnehmen, empfinden, spüren) bezogen. Das davon abgeleitete Adjektiv *aisthetikos* kann somit als wahrnehmbar, für die Wahrnehmung geeignet bzw. die Wahrnehmung betreffend interpretiert werden. Norbert Jüdt verknüpft Ästhetik mit Erkenntnissen der Gehirnforschung und konstruktivistisch orientierter Gestaltung von Lernprozessen. Lernen vollzieht sich danach im Prinzip in einem weitestgehend individuell-autonomen Prozess, in dem sich Erfolge nur dann einstellen können, wenn *das „Wollen der Lernenden"* beteiligt ist. Es ist unter dem Aspekt von *Ästhetik als Theorie der Wahrnehmung* unmöglich, emotionale und rationale Sichtweisen kognitiver Prozesse von der Sichtweise wissenschaftlicher Systematik oder dem Versuch fachbezogener Gliederungen zu trennen, da sie beide in jedem Bildungsprozess vernetzt beteiligt sind.

Norbert Jüdt stellt heraus, dass neurologische Gestaltungsprinzipien mit grundlegenden ästhetischen Gestaltungsprinzipien übereinstimmen. Unser Gehirn nehme Sinneseindrücke zwar getrennt auf, verarbeite diese jedoch neuronal hochgradig assoziativ vernetzt. Zum Beispiel bewirke ein Sinneseindruck nachfolgend etwa 10 Millionen innere Eindrücke. Zusätzlich sei das Gehirn unabhängig von äußeren Eindrücken ständig aktiv, erzeuge innere Repräsentationen für konkrete Objekte, Eigenschaften und Ereignisse und lerne autonom und automatisiert über Assoziationen, bei denen sich Ähnliches und/oder zeitlich parallel Verlaufendes miteinander verknüpft.

[57] Beichel, 2010, S. 28.

Für pädagogisch fundierte Lernangebote sei hierbei von grundlegender Bedeutung, dass jegliche kognitive Verarbeitung begleitet sei von einer emotionalen Bewertung, die auf jeder kognitiven Verarbeitungsebene wirke, über Akzeptanz oder Ablehnung von Angeboten entscheide und bei anhaltender Verstärkung Verdrängungscharakter annehmen könne, wodurch Lernangebote unabhängig von ihrer Qualität von einem Individuum emotional negativ bewertet und unbewusst abgelehnt werden können. Kognition und Emotion (Empfindung) verbinde im Vollzug der Wahrnehmung mental konstruierte Repräsentationen (sogenannte Apperzepte), die nicht nur denotiert, sondern parallel dazu in ihrer individuellen Bedeutsamkeit emotional bewertet (konnotiert) seien. Dies relativiere nicht nur die Bedeutsamkeit der sogenannten Rationalität, sondern mache ihre isolierte Betrachtung hinfällig. Mit Bezug zu philosophischer Analogie schreibt Wolfgang Welsch:

> *„Aisthesis hat bekanntlich eine doppelte Bedeutung. Aisthesis meint einerseits Wahrnehmung, andererseits Empfindung. Dieser Doppelsinn war schon im Griechischen vorhanden und findet sich ebenso in den meisten anderen Sprachen. Er gehört zum Phänomen. Als Wahrnehmung richtet sich die Aisthesis auf die genuinen Sinnesqualitäten wie Farben, Töne, Geschmäcke, Gerüche. Sie dient deren Erkenntnis. Als Empfindung hingegen verfolgt sie eine Gefühlsperspektive. Sie bewertet Sinnenhaftes im Horizont von Lust und Unlust.“* [58]

Damit sind neurobiologisch zwei Funktionsbereiche zu unterscheiden, die in der Lokalisation in entsprechenden Arealen im Gehirn zwar räumlich getrennt, aber funktional intensiv vernetzt sind und für pädagogische Aufgaben nur gemeinsam erzieherisch wirksam sein können. Indem auf diese Weise traditionelle Vorstellungen von Bildung ergänzt und auf neurobiologisch-konstruktivistische Grundlagen bezogen werden, ergibt sich nach Norbert Jüdt ein Plädoyer für die folgende These:

> *„Es gibt keine Bildung, sie sei denn ästhetisch, denn Bildung vollzieht sich nicht nur über alle Sinne (d.h. aisthetisch), sondern auch unter stetiger Begleitung bzw. Berücksichtigung dieses ästhetischen Zustands, in dem sich das Individuum auch der emotionalen Werthaltigkeit eines jeden Gegenstandes bewusst zu werden versucht, mit dem es sich kognitiv beschäftigt. Weltinnewerden im traditionellen Sinne von Erkenntnis ist nur vollständig, wenn der Gegenstand nicht nur unter dem rationalen Gesichtspunkt der Zähl- und Messbarkeit gesehen wird, sondern wenn auch*

---

[58] Welsch, 1996, S. 109; zitiert nach Jüdt, 2013, Kap. 1, S. 27.

die Dimensionen der ‚emotionalen Anmutung' von Gegenständen und der Verantwortlichkeit ihnen gegenüber in den Blick genommen wird. Dieser Selbst-Zuwendung wird besonders (aber nicht ausschließlich) in der traditionell verstandenen ‚ästhetischen Erziehung' Raum gegeben – sofern und soweit sie sich nicht auf die Vermittlung von Wissen über Kunst und Kunstgeschichte beschränkt." [59]

Gestützt werde diese These aus neurobiologischer Sicht wie folgt:

„Alle Außenweltphänomene werden über […] einfache neuronale Wahrnehmungsmechanismen […] und andererseits über hochgradig komplexe Vernetzungen und Kooperationen vieler Subsysteme im zentralen Nervensystem dem Bewusstsein ‚ein-gebildet'. Das ‚Sich-Bilden' des Menschen beginnt […] mit seiner Geburt als Interaktion […]. Die Sinne […] übertragen die externen Impulsmuster invariant in eigene bioelektrochemische Impulsfolgen, die im sensorischen Kortex Qualia [60] *auslösen […], Sinnesempfindungen ermöglichen […], Vorstellungen von der Außenwelt wie vom eigenen ‚Systemzustand' liefern […] Nach der Speicherung […] können Qualia […] als Erinnerung reaktiviert werden. […] Bedeutung (*muss erst, Erg. d. A.*) durch Erfahrung generiert werden. […] Leistungen des Wahrnehmens […] können somit als Anfangsformen geistiger Tätigkeit betrachtet werden. Die Anfänge des ‚Sich-Bildens' funktionieren also genuin ‚ästhetisch' […] Bildung als der innere Aufbau von Erkenntnis vollzieht sich somit über sämtliche Sinne, die […] gemeinsam agieren […]."* [61]

Auch die Begriffsbildung beginne bereits mit dem handelnden Begreifen. Dabei würden zu jedem wahrgenommenen Gegenstand der Außenwelt neuronal realisierte bzw. codierte Qualia aller jeweils beteiligten Sinne als Bedeutungskomplexe zusammengeschaltet. Diese bestünden aus dem jeweiligen Vorstellungsinhalt, der emotionalen Einfärbung und dem Funktionszusammenhang (in dem die Bedeutung durch Handeln entstanden ist).

Von dieser „figurativen" Basis aus entwickelten sich durch Vergleichen und Feststellen von Ähnlichkeiten und Unterschieden kategorisierende Schemata von zunehmendem Abstraktionsgrad. Diese würden schließlich durch die Sprache interindividuell kommunizierbar gemacht, wobei sich Lautgestalten in ihrer Bedeutung durch gemeinsames Handeln in konsensuellen

---

[59] Jüdt, 2013, Kap. 5, S. 323.

[60] Nach Jüdt, 2013, S. 23 ff, umfasst der Begriff Qualia das gesamte „phänomenale Innenleben", welches in drei Bereiche gegliedert werden kann, welche die erkennenden, bewertenden und willentlichen (voluntativen) Funktionen erfüllen.

[61] Jüdt, 2013, S. 401.

Situationen validierten. Bereits die vorsprachliche „Ein-Bildung" der Welt sei somit der Anfang von Bildung, die ein ganzes Leben lang andaure. [62]

Zu dieser kognitiv-objektbezogenen Sicht komme die Vernetzung von kognitiven und emotionalen Systemen hinzu. Abbildung 1.3 zeigt schematisch die innere kognitive Verarbeitung äußerer Sinneswahrnehmungen und verdeutlicht die Rolle der Emotionalität als zentrales Bewertungsinstrument.

Aisthetik des menschlichen Gehirns [63]

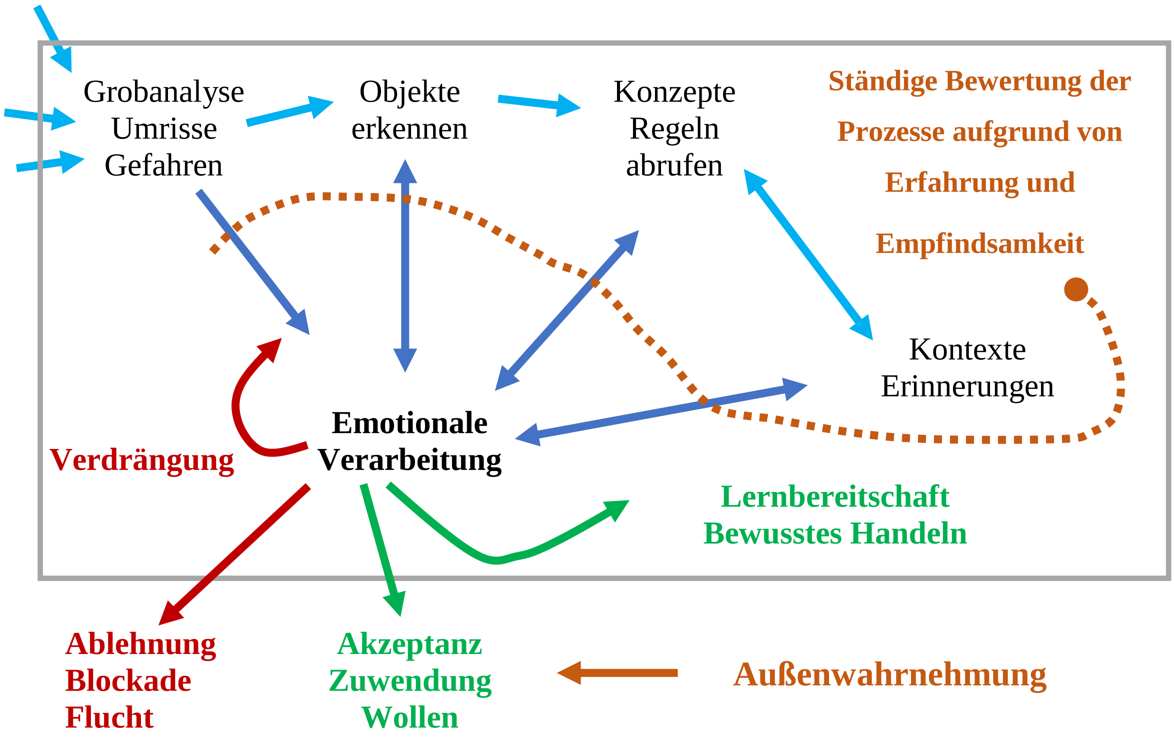


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung der Verarbeitung von Wahrnehmungen im menschlichen Gehirn unter der Vernetzung von Kognition und Emotion

Nach Norbert Jüdt kommt

> *„durch die Vernetzung von kognitiven und emotionalen Subsystemen die unhintergehbare bewertende Stellungnahme zu den Gegenständen der Erkenntnis, die sich auf der untersten Ebene zunächst beschränkt auf die Frage, ob etwas angenehm oder unangenehm, ob es dem Überleben zuträglich oder abträglich ist.*
>
> *Mit zunehmender Bewusstheit des stellungnehmenden Bewertens erweitert und differenziert sich dieses in Richtung auf die Frage nach dem ‚guten' Leben: Wie kann ich mir mein Leben angenehmer und lustvoller machen? Dies ist nicht nur ein*

[62] Für eine ausführliche Darstellung vgl. Jüdt, 2014, Kapitel 2 und 3.
[63] Vgl. Jüdt, 2016, S. 82. Die dort gestaltete Abbildung wurde strukturell vereinfacht dargestellt.

egoistisches Streben, denn von Beginn des Lebens an zeigt die Erfahrung, dass es vor allem durch andere angenehmer gemacht wird, und dass es deshalb sinnvoll ist, auch die Belange der Anderen in den Blick zu nehmen und mit ihnen eine wechselseitig positive Interaktivität zu gestalten. Dabei wird allerdings auch die Erfahrung zu machen sein, dass man den eigenen Lebensraum mitunter gegen die anderen behaupten muss.“ [64]

1.5 Zur ästhetischen Erfahrbarkeit der Welt

Erfahrung setzt Erfahrbarkeit voraus und Erfahrbarkeit setzt Wahrnehmbarkeit voraus. In der Geschichte der Erfahrbarkeit der Welt haben die Menschen in allen Wissenschaften technische Instrumente und Verfahren entwickelt, die unsere primäre sinnliche Wahrnehmung erweitert. Aber Wahrnehmungen liefern auch nur dann Erfahrungen, wenn eine entsprechende kognitive Verortung bzw. Konstruktion stattfindet. Wenn Ästhetik die Wissenschaft von der Wahrnehmung als Ganzes ist, sind auch diese Wahrnehmungen durch das beschränkt, was unser Gehirn ermöglicht. Deshalb ist jegliche menschliche Vorstellung von einer – wie auch immer dargestellten – *Welt als Ganzes* oder eines Teils von ihr immer nur ein Denk-Modell dieser Welt oder des Teils.

Dabei gelten drei Erkenntnisprinzipien:

1. Die Begrifflichkeiten und die Logik eines Modells stellen keine *Begrifflichkeiten* und keine *Logik der Welt* dar, sondern eine menschliche Anpassung bzw. Zuweisung, mit der das Modell hinsichtlich seiner Funktion gültig und damit vernünftig wirksam erscheint.
2. Unterschiedliche *Weltmodelle* können nicht unreflektiert zusammengeführt werden, da sich hinsichtlich ihrer Begrifflichkeiten und Logiken Antinomien ergeben können oder sich wegen der prinzipiellen Unvereinbarkeit Kontingenzen ergeben, die Tautologien hervorbringen [65].
3. *Begrifflichkeiten* und *Logiken*, die im Rahmen menschlicher Erkenntnisgewinnung unter Verwendung der aisthetisch verfügbaren Vernunft bildbar sind, beziehen sich auf sogenannte Sach- oder Glaubens-Modelle, die sich wiederum durch die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer Falsifizierung unterscheiden.

[64] Jüdt, 2013, S. 402.
[65] Im Sinne der zweiwertigen Logik der Mathematik.

Im Zusammenhang dieser drei Thesen mit der neuronal-funktionalen Arbeitsweise unseres Gehirns zeigt sich, dass alles, was Menschen über die Welt als Ganzes und in ihren Teilen – und damit auch über sich selbst als ein Teil davon – wissen können, sich ausschließlich über Sprache und Text sinnlich wahrnehmbar gemachter mentaler Konstruktionen unseres Gehirns verwirklicht, über welche diese Kommunikation möglich ist und über die sich überdies auch die Sprache entwickelt hat, mit der wir kommunizieren.

Diese Konstruktionen sind jedoch wiederum stets kausal mit äußeren sinnlichen Wahrnehmungen verknüpft, die das Gehirn verarbeitet und konstruktiv nutzt. Dieses Zusammenwirken zwischen äußerer und innerer Erfahrung zeigt deutlich, wie wenig Sinn es macht, Wahrnehmung, Denken und Sprache in ihrer genetisch kognitiven Entwicklung zu trennen oder gar kausal unabhängig voneinander verstehen zu wollen.

Ergänzt wird dies durch ein zusätzliches „Eigenleben des Gehirns", das innere Begrifflichkeiten und Kommunikationstechniken entwickeln und geistige Erfindungen machen kann, die als Ideen der kognitiven Ebene nicht als transzendental bezeichnet werden können, weil sich diese Begrifflichkeiten nicht nur nach den gleichen neuronalen Verarbeitungsmechanismen einstellen, sondern auch hinsichtlich einer möglichen äußeren Wirksamkeit modellhaft denkbar sind. Deshalb sind bezüglich der Gestaltungsfähigkeit des Menschen Rationalität und kognitive Transzendenz keine unterschiedlichen Konstruktionen. Sie unterscheiden sich nur im Modellierungscharakter und in der Art der Möglichkeit der Verifikation.

Abbildung 1.4 stellt die in diesem Kapitel beschriebenen bildungsphilosophischen und kognitionswissenschaftlichen Beschreibungen der Arbeitsweise des menschlichen Gehirns in einer Übersicht dar. Dort werden auch die Transformationen im Zusammenspiel äußerer sinnlicher Wahrnehmung und kognitiver Verarbeitung sowie die beiden Modell-Ausprägungen hinsichtlich Sachbezogenheit oder Glaube verdeutlicht. In beiden Fällen ist dieses Zusammenspiel nach den gleichen mentalen Prinzipien konstruiert, die stets nur zwischenmenschlich-kommunikativ vermittelbar sind.

Die Modelle unterscheiden sich nur über kognitive Assoziationen mit einer sinnlich wahrnehmbaren Sache beziehungsweise einer reinen Konstruktion des Geistes und einer möglichen beziehungsweise nicht möglichen Falsifizierbarkeit. Diese Gegebenheiten relativieren auch die Trennung zwischen realen und metaphysischen Modellen. Ein Modell, das eine Trennung in Körper und *Geist* aufhebt, ist Karl Poppers *Drei-Welten-Modell*. [66]

---

[66] Siehe Abschnitt 1.6

<table>
<tr><th colspan="3">Mensch und Welt</th></tr>
<tr><th>WELT (real !?)</th><th colspan="2">GEHIRN (Modell-Generator)</th></tr>
<tr><th>Modell-Welten</th><th>Kommunikation</th><th>Konstruktion</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sach-Welt

sinnlich wahrnehmbare Objekte, sachbezogene Begrifflichkeiten, Konstruktionen und Darstellungen

Begriffe
Vorstellungen
Wünsche
Hoffnungen
…

Falsifizierbarkeit als Qualifizierungsmittel</td><td>Objektbezogen

sinnliches
Wahrnehmen
Verarbeiten
Verstehen
Gestalten
…</td><td rowspan="5">Kognitive Wahrnehmung

Apperzeption, Assoziation
Analogie, Symmetrie
…

Bewusstsein

Wissen, Verstand
Gefühl, Vorstellung
…

Gestaltung

Einfühlsamkeit
Bewusstwerdung
Vorstellungskraft
Phantasie
Gestaltungsfähigkeit
Gestaltungswille
…

Emotionalität

Akzeptanz, Ablehnung
Wertung, Bewertung
Motivation
…

Haltungen

moralisch
ethisch
sozial
gesellschaftlich
…</td></tr>
<tr><td>Wahrnehmungsformen
Darstellungsmuster
Denkformen
…</td></tr>
<tr><td>Sach-Modelle

sinnlich wahrnehmbare Konstrukte in Sprache, Text, Bild …

Glaubens-Modelle</td><td>Mentales Bewusstsein
Kognitive Konstruktion
und Transformation
über Sprache oder andere Kommunikationsformen</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Glaubens-Welt

Ideen
Vorstellungen
Wünsche
Hoffnungen
…

sinnlich wahrnehmbar
darstellbar

nicht falsifizierbar</td><td>Konstruktionen über Kognition, Emotionalität, Wertung und Bewertung</td></tr>
<tr><td>Transzendental
nichtsinnliche
Wahrnehmung

geistig-kognitiv
konstruierte
Weltanschauung</td></tr>
<tr><td colspan="3">Eine Sache muss Idee werden, um verstanden werden zu können.
Eine Idee kann Sache werden, ohne vorher Sache gewesen zu sein.</td></tr>
</table>

Abbildung 1.4: Zusammenführung einer scheinbaren Trennung von Geist und Welt, Sach- und Glaubenswelt im Zusammenspiel von Kognition (blau), Kommunikation (orange), der sogenannten realen Welt (grün) und der Welt des Glaubens (gelb).

1.6 Das Drei-Welten-Modell nach Karl R. Popper

Sir Karl R. Popper und John C. Eccles haben 1996 in dem gemeinsam herausgegebenen Werk „Das Ich und sein Gehirn“ [67] eine Brücke zwischen den Neurowissenschaften und philosophischen Modellen zur Kernfrage menschlicher Vorstellungen über „Gehirn und Geist“, „Verstand und Seele“ usf. geschlagen. Karl Popper hat ein philosophisches Drei-Welten-Modell dargestellt und John Eccles bestätigt, dass diesem Modell Erkenntnisse über neuronale Tätigkeiten des Gehirns nicht widersprechen, sondern es ergänzen. Das Zusammenwirken dieser beiden Modelle ist in zwei von ihnen erstellten Übersichten verdeutlicht. Popper fügt der Zwei-Welten-Theorie der „Materie“ und des „Geistes“ eine dritte Welt objektiver „Gedanken“ hinzu. [68]

Abbildung 1.5 zeigt die Darstellung der drei Welten, die nach Poppers Auffassung *„alles Existierende und alles Erfahrbare umfassen“.* [69]

WELT 1 **PHYSIKALISCHE OBJEKTE UND ZUSTÄNDE**	**WELT 2** **BEWUSSTSEINS-ZUSTÄNDE**	**WELT 3** **WISSEN IM OBJEKTIVEN SINN**
1. ANORGANISCH Materie und Energie des Kosmos 2. BIOLOGIE Struktur und Aktionen aller Lebewesen menschliche Gehirne 3. ARTEFAKTE Materielle Substrate menschlicher Kreativität von Werkzeugen von Maschinen von Büchern von Kunstwerken von Musik	Subjektives Wissen Erleben von Wahrnehmung Denken Gefühlen Plänen und Absichten Erinnerungen Träumen kreativer Vorstellungskraft	In materiellen Substraten kodiertes kulturelles Erbe philosophisch theologisch wissenschaftlich historisch künstlerisch technisch Theoretische Systeme wissenschaftliche Probleme kritische Argumente

Abbildung 1.5: Darstellung der Drei-Welten-Theorie nach Sir Karl Popper
(die Aufzählungen sind exemplarisch zu sehen).

[67] Popper, et al., 1996 / 1992.
[68] Popper, 1968.
[69] Eccles, 1990, S. 205 f. Die Erläuterung zur Abbildung erfolgt nach Abschnitt 7.2, S. 204ff.

Nach Karl Popper ist *Welt 1* die Welt der physikalischen Objekte und Zustände, die gesamte Biologie, aber auch menschliche Gehirne eingeschlossen. *Welt 2* ist die Welt der Bewusstseinszustände. *Welt 3* ist die *„Welt der Erzeugnisse des menschlichen Geistes, wie Erzählungen, erklärende Mythen, Werkzeuge, wissenschaftliche Theorien (wahre wie falsche), wissenschaftliche Probleme, soziale Einrichtungen und Kunstwerke.“* [70]

Eccles ergänzt aus der Sicht des Naturwissenschaftlers:

> *„Die zentrale Aufgabe der Geisteswissenschaften ist, die Menschen zu verstehen, während die Naturwissenschaften zur Aufgabe haben, die Natur, einschließlich des Menschen als Teil der Natur, zu verstehen. Da in beiden Fällen das Verständnis seinen Ausdruck in der Sprache findet, können beide als Zweige der Literatur angesehen werden, und beide haben in Welt 3 einen Ehrenplatz.“* [71]

Eccles Beitrag zu Poppers philosophischem Modell ist eine dynamische Sicht auf neurobiologische Prozesse des Gehirns in Welt 1, welche diese drei Welten verknüpft. Aus der Darstellung in Abbildung 1.6 wird deutlich, dass die verschiedenen Arten von Wechselwirkungen zwischen diesen drei Welten im Materie-Energie-System von Welt 1 stattfinden. [72] Danach verstehe es sich, *„dass jedes Individuum willkürlich seine Beziehung zu Welt 3 weit ausdehnen kann“* [73], also insbesondere über Beziehungen zu Welt 3 lernen und gestalten kann.

Das Drei-Welten-Modell besitzt einen entscheidenden Vorteil gegenüber einem dualen „Geist-Körper-Modell“. Es benötigt keine selbstreferentielle Bewusstseinsbildung, da sich kognitive Bewusstseins-Prozesse in *Welt 2* in und über *Welt 1* ereignen. Für den Verfasser bildet es ein akzeptables integratives Modell, welches geisteswissenschaftlich, neurobiologisch und kognitionswissenschaftlich konsistent ist. Dieses Modell bildet in dieser Arbeit einen Abschluss der bildungstheoretischen Überlegungen und wird sich auch beim Übergang zu einer ästhetisch verfassten Erziehung im Mathematikunterricht als anwendbar erweisen. [74]

---

[70] Eccles, 1990, S. 205.
[71] Ebd. S. 206.
[72] Ebd. S. 208. Die Originalabbildung wurde durch den Verfasser erweitert (Text in roter Farbe).
[73] Ebd. S. 208 im Abbildungstext. Entscheidend ist die Betonung auf „über“ und nicht auf „mit“.
[74] Popper exemplifiziert sein Modell am Beispiel des Betrachtens einer Skulptur von Michelangelo (Popper, et al., 1996 / 1992); 1982, S. 648 f, zitiert nach (Eccles, 1990), S. 210). Es ist nachfolgend wiedergegeben:
„Ich glaube, daß das, was wir beim Betrachten einer Figur von Michelangelo sehen, einmal natürlich insofern ein Gegenstand der Welt 1 ist, als es ein Stück Marmor ist. Zum anderen wird selbst das Materielle daran, etwa die Härte des Marmors, nicht unerheblich für die zu Welt 2 gehörende Wertschätzung dieses Gegenstandes der Welt 3 sein, der in einem Substrat aus Welt l verschlüsselt ist; denn es ist das Ringen des Künstlers mit dem Material und die Überwindung des Widerstandes des Materials durch den Künstler, was einen Teil des Reizes und des Sinns dieses Gegenstandes der Welt 3 ausmacht. Ich will also nicht grundsätzlich den Aspekt der Welt 1 bei einem verschlüsselten Gegenstand der Welt 3 zu einem Epiphänomen herunterspielen, doch manchmal ist er das. Wenn wir ein Buch haben, das recht ordentlich, aber nicht sonderlich gut gedruckt ist - also keine Prachtausgabe - dann kann der Gesichtspunkt von Welt 1 dieses Buches völlig unwichtig und in gewissem Sinn nicht viel mehr als ein

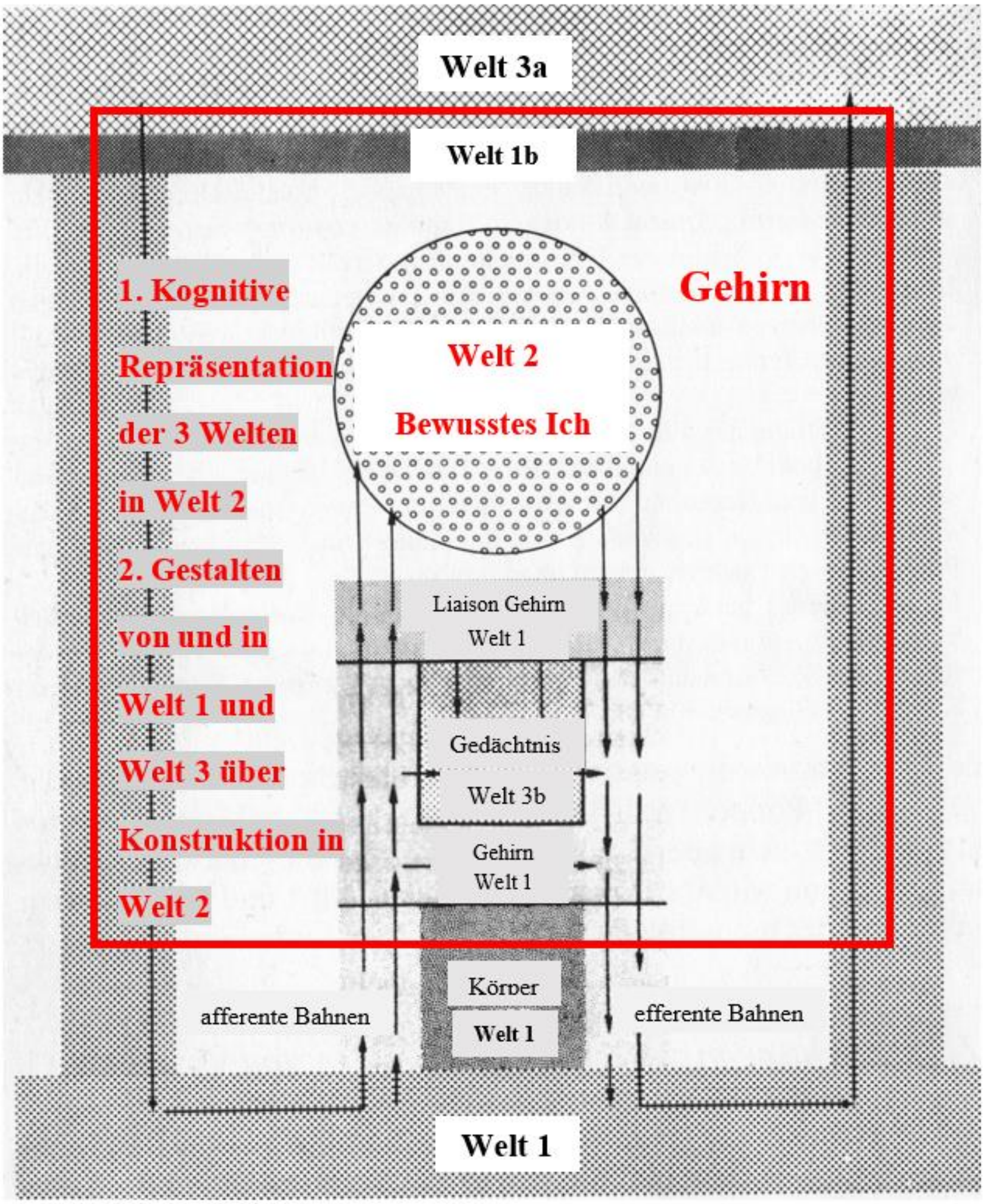


Abbildung 1.6: Schema des Informationsflusses der verschiedenen Arten von Wechselwirkungen zwischen den drei Welten.

Epiphänomen sein, ein uninteressantes Anhängsel des Gehaltes von Welt 3 des Buches. Doch das, womit wir – unsere Welt 2 – unser bewußtes Ich – sowohl im Falle der Figur Michelangelos als auch bei dem Buch wirklich in Berührung kommen, ist der Gegenstand der Welt 3. Im Falle der Statue ist der Gesichtspunkt von Welt 1 wichtig; aber er ist nur wichtig wegen der Leistung von Welt 3, die in der Veränderung und Gestaltung des Gegenstandes der Welt 1 besteht. Was wir in beiden Fällen wirklich anschauen, bewundern und verstehen, ist nicht so sehr der materialisierte Gegenstand der Welt 3, sondern die verschiedenen Aspekte der Welt 3, ungeachtet ihrer Materialisierung.“

Zusammenfassend werden einige Aspekte genannt, die nach den bisherigen Überlegungen als grundlegend für Modellbildungen angesehen werden können:

1. Es gibt entsprechend der aisthetischen Arbeitsweise des menschlichen Gehirns prinzipiell kein universelles Modell der Welt und deshalb auch keine universelle Begrifflichkeit und/oder Logik.
2. Glaubens-Modelle haben den gleichen Anspruch auf *Gültigkeit* wie Sach-Modelle.
3. Ein Modell erhält seine gesellschaftliche Akzeptanz ausschließlich über zwischenmenschliche Kommunikation. Es wird in einer Gruppe diskutiert und kann nur dann als akzeptiert gelten, wenn jedes Individuum persönlich und frei entscheidend von dessen Wirksamkeit überzeugt ist und wird, aber bei einer Akzeptanz auch danach handelt (insbesondere hier bekommt *Welt 3* ihre Bedeutung als kulturstiftendes Moment).
4. Ein Modell muss immer dynamisch und prinzipiell auch veränderbar gesehen werden, gegebenenfalls auch fundamental.
5. Ein Modell, das sich nicht reflektieren lässt oder sich grundsätzlich unveränderlich darstellt, kann nicht von Dauer sein.
6. Ein Modell, das sich über Handlungen der Menschen als akzeptiert und positiv bewertet zeigt, kann als ästhetisches Modell bezeichnet werden.

1.7 Ästhetisch verfasste Erziehungs- und Gestaltungsprinzipien

Eine pädagogische Erkenntnis dieser modellhaft funktionalen Sicht kognitiver Verarbeitung ist, dass Wissen prinzipiell nicht instruierend abbildbar ist, sondern nur über eine wechselseitige Kommunikation zwischen Lehrenden und Lernenden über ein geeignetes Angebot und ein bewusstes inneres Handeln des/der Lernenden konstruiert und nachhaltig verankert werden kann.

Das Gesollte kann sich hierbei jedoch nur in einer beidseitig gefühlten und entsprechend empfundenen Einheit von Kognition und Emotion zum Gewollten entwickeln.

Charakteristisch für diese Kommunikation zwischen Lehrenden und Lernenden sind zudem der asymmetrische Charakter der Ausgangssituation hinsichtlich des Wissenstandes und das gegenseitig *Sinnlich-Wahrnehmbar-Machen* als einziger Weg für gelingende Kommunikation. Dabei erhalten die verwendete Sprache, die Art der Darstellung und die Art der kognitiven Anforderung zentrale Rollen hinsichtlich der Bewertung und Akzeptanz seitens der Lernenden.

Auch hier zeigt sich, dass Ästhetik begrifflich nicht universell beschreibbar ist, aber jeder Begrifflichkeit von Ästhetik deren basal aisthetische Fundierung bei Kognitionsprozessen zugrunde liegen sollte.

Wenn sich ästhetisches Empfinden, und damit auch ästhetische Wahrnehmung als solche, über subjektive Bewertungen jeglicher kognitiver Prozesse der Wahrnehmung, des Verstehens und des Gestaltens einstellt, und Ästhetik sich wiederum darin zeigen soll, dass die Empfindsamkeit, die Vorstellungskraft und der Gestaltungswille der Lernenden gefördert werden, ist es empfehlenswert, das Augenmerk ästhetischer Erziehung auf den Prozess des Lernens als solchen zu lenken und nicht auf die Ästhetik als solche, da sich Ästhetik über diese Zirkularität als tautologisch darstellen würde.

Eine Theorie *Ästhetischer Bildung* kann das Ideal des sich-bilden-wollenden Individuums als eine Hoffnung auf die Bildsamkeit des Menschen postulieren: *„Bildung ist die Hoffnung auf eine mögliche bessere Zukunft“* [75], ist eine These der Dissertation von Frederik Durczok, der, angeregt durch unterrichtliche Hospitationsphasen, eine Bildungstheorie in neun Thesen entwirft, welche die Frage nach der Vereinbarkeit von ästhetischen Bildungskonzepten und didaktisch-systemischen Ansätzen klären und darüber hinaus in einen breiteren bildungsphilosophischen Kontext stellen möchte.

Frederik Durczok verweist auf einen hinsichtlich ästhetischer Fundierung entstehenden Konflikt zwischen transitiv bzw. intransitiv verfasster Erziehung, die es, insbesondere unter dem Aspekt zielorientierter Erziehung und der Prämisse gesellschaftlich verordneter Schulpflicht, bei der Realisierung von Zielen schwer habe, das Wollen der Lernenden über den Prozess des *Sollens* zu erreichen.

Die „Hoffnung“ auf eine Bildungswirksamkeit ästhetisch verfasster Lernprozesse, auch über „Pflichtunterricht“, gibt Anlass, einige Aspekte zu nennen, an der sich Handlungs- und Umgangsformen orientieren sollten: Sie sollten einem kommunizierten Ideal von Bildung entsprechen, einem Bildungs-Modell als Ideal des Handelns,

(1) das Erziehungsaufgaben begründbar und transparent vermittelbar macht und sie in einem gesellschaftlich und kulturell vereinbarten und gemeinsam verantworteten Bildungsrahmen verortet,

(2) in dem ein, als lernbereit angesehenes und erwartetes Individuum über ein Konzept im Sinne normativer Wertevermittlung nach (1) Erziehung erfahren und befürworten kann und wo sich darüber Erziehungsziele als transparent kommunizierbar erweisen,

(3) wo das lernende Individuum bei aller Freiheit der Erfahrung und Gestaltung der Persönlichkeit Selbstverpflichtung und Selbstverantwortung für seine eigene Entwicklung

[75] Durczok, 2016, S. 58.

übernimmt und dabei moralische Verantwortung für einen toleranten Umgang mit anderen und bei der Wahrnehmung der Welt entwickelt

(4) und wo die Lehrenden eine dementsprechend umfassende Verantwortung hinsichtlich der zu erhaltenden Lernbereitschaft der Lernenden aufweisen, die sich in einer Prozessführung zeigt, in der sich *Neues* über das schon vorhandene Wissens- und Gestaltungs-Potenzial der Lernenden bzw. der Lerngruppe erschließt als ein Lernen über Eigenkonstruktionen.

Darüber können allgemeine charakterisierende Merkmale einer Ästhetischen Erziehung und eines ästhetisch verfassten Unterrichts formuliert werden.

Ein ästhetisch verfasster Unterricht

- ist sich des Zusammenwirkens von Sachlichkeit, Emotionalität und individueller Bewertung bewusst und nutzt dies für den Lernprozess,
- verknüpft Sachlichkeit und Fachlichkeit mit Anwendbarkeit und Nützlichkeit in der Erfahrungswelt der Lernenden,
- erweitert das Wissen im Sinne einer Steigerung der individuellen Performanz des/der Lernenden,
- erhöht den Gestaltungswillen über die Förderung der Vorstellungskraft und Gestaltungsfähigkeit,
- steigert die willentliche Beteiligung und Motivation über erfolgreiche Selbsterfahrungen beim Lernen und Problemlösen,
- vermeidet eine rein kumulative Wissensvermittlung an sich,
- vermittelt Wissen über wissentliches Handeln im Einklang von Aisthetik, Kognition und Konstruktion,
- entwickelt das Selbstvertrauen über erfolgreiche Selbsterfahrungen,
- bindet den Lernort als schützenden Raum für die Entwicklung der Persönlichkeit ein,
- legt Wert auf vertrauensvolle Beziehungen zwischen Lehrenden und Lernenden und zwischen den Persönlichkeiten der Lerngruppe.

Mit dem in diesem Kapitel entwickelten Verständnis von ästhetisch fundierter Bildung vollzieht sich Ästhetik im Bereich der Erziehung weder als Theorie noch als Methode, sondern in einer gelingenden prozessbegleitenden Bewertung des Lernangebots seitens der Lernenden als Adressaten des Erziehungsauftrags. In Verantwortung für den gesellschaftlichen Auftrag eines allgemein verpflichtenden Unterrichts an öffentlichen Schulen ist eine Begriffsbeschreibung für ästhetisch verfasste Erziehung möglich:

Ästhetische Erziehung verwirklicht sich in einem Prozess, der zwischen einer gesellschaftlich-normativ angestrebten Zielorientierung, den fachlichen Lernzielen und einer individuell gefühlsmäßig angelegten aisthetischen Bewertung eines jeglichen Lernprozesses eine Verbindung herstellt, die das *Wollen der Lernenden* fördert, ausbildet und nachhaltig aufrechterhält.

Ein unter dieser Prämisse gestalteter Unterricht kann somit ebenfalls als ästhetisch verfasst angesehen werden:

Ästhetisch verfasster Unterricht verwirklicht sich im Einklang von Erfahrung, Empfinden, Kognition, Denken und Handeln.

Wenn Ästhetik sich nach Baumgarten als Wissenschaft von der Wahrnehmung als Ganzes versteht, sind die drei letztgenannten Begriffe Unterbegriffe mit eigener Wirksamkeit:

Ein ästhetisch fundierter Unterricht stellt sich der Aufgabe, diesen Einklang zu erreichen.

2 Ästhetische Erziehung und Mathematikunterricht

In diesem Kapitel soll ein didaktisches Modell entwickelt werden, welches die Aufgaben eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts mit den in Kapitel 1 beschriebenen Aspekten ästhetischer Erziehung verknüpft. Dazu gehört einerseits die Konstruktion von Lern- und Gestaltungs-Prozessen, aus denen methodisch und inhaltlich ein motivationales Potenzial entfaltet werden kann, welches bei den Lernenden eine Akzeptanz der angebotenen Unterrichtsprozesse, eine wesentliche Voraussetzung für die Bereitschaft, sich selbstverantwortlich zu beteiligen, möglichst durchgängig erhält.

Andererseits soll aber auch nicht das Ziel vernachlässigt werden, anschlussfähige Ausbildungsgänge zu ermöglichen, insbesondere auch bei entsprechend ausgestatteten Schularten eine *allgemeine Studierfähigkeit* zu erwerben. Außerdem soll das Modell den Allgemeinbildungsauftrag des Faches repräsentieren, um der gesellschaftlichen Verpflichtung zu entsprechen, was das vielleicht wesentlichste Argument zur Begründung des Eigenständigkeitsaspekts des Faches Mathematik darstellt.

2.1 Gesellschaftliches Bild von Mathematik

Weltweit ist in allen gesellschaftlichen Systemen die Bedeutung von Mathematik hoch eingestuft. In Ländern mit allgemeinbildenden Schularten wird Mathematik als eigenständiges Fach unterrichtet und diese Eigenständigkeit nicht grundsätzlich hinterfragt. Aber eine nicht zu übersehende Folge von Schulmathematik ist eine äußerst ambivalente Einstellung der Lernenden und oft auch deren Eltern zur Mathematik. Viele Personen zweifeln die hohe Bedeutung von Mathematik nicht an, wollen aber selbst eigentlich nicht viel damit zu tun haben. Mathematik macht man entweder gerne, und ist damit etwas Besonderes, oder man überlässt sie anderen. [76] Eine auf gesellschaftlichen Prozessen beruhende und auf tragische Weise eine individuelle Akzeptanz des Faches verhindernde Ausprägung zeigt sich auch im familiären Bereich, wo das Verdrängen und die Abneigung gegenüber dem Fachlichen tröstend aufgefangen und oft auch fürsorglich belohnt wird. Typisch für Erklärungen sind Aussagen wie etwa „Mach dir nichts draus, auch ich war in Mathe eine Niete“, oder „Wenn du als Beurteilung der heute geschriebenen Arbeit eine Fünf erhältst, koche ich dein Lieblingsgericht“. Solche mitfühlsamen Äußerungen wären in einem Fach wie z. B. Deutsch oder einer Fremdsprache nicht denkbar. Anknüpfend daran muss sich aber auch Mathematikunterricht der Frage stellen, wie sehr er an

[76] Unabhängig vom Bildungsstand.

diesen Einstellungen beteiligt ist. Häufig wird der formalistische und alltagsfremde Ansatz der Mathematik als Verursacher des „Aussteigens" angeführt oder die Überflüssigkeit des Stoffes im persönlichen Leben:

> *„Was uns an der Mathematik immer abschreckte, war der Umgang mit Formeln, Zahlen und Buchstaben, deren Sinn nie erkannt wurde und deren Bedeutung uns bis heute nicht klar ist"* oder fachlich konkreter *„Rechnen sollte man ja schon lernen – aber was Wurzel zwei ist, braucht ein normaler Mensch nicht zu wissen."* [77]

Solche Ansätze des kritischen Umgangs mit Mathematik gibt es auch von Prominenten. Die folgende Zusammenstellung von Zitaten über Mathematik und Mathematiker ist einer Internetquelle entnommen. [78] Diese Form der Zitat-Recherche entspricht zwar nicht dem Anspruch einer wissenschaftlichen Arbeit, aber die Stellen sind auch unabhängig von der personellen Zuordnung typisch für die allgemeine Sicht von Wissenschaftlern auf ein anderes oder gar das eigene Fachgebiet und somit auch repräsentativ.

Wolfgang Goethe vergleicht die Mathematiker mit Übersetzern in eine ungewohnte Sprache:

> *„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsbald etwas anderes."*

Herbert Weyl ergänzt diese Besonderheit des mathematischen Umgangs mit der Fachsprache und ihrer Abstraktionstiefe aus der Sicht eines Mathematikers:

> *„Wir kommen nun zu dem entscheidenden Schritt mathematischer Abstraktion: wir vergessen, wofür die Symbole stehen.* [...] Der Mathematiker [Erg. d. Verf.] *braucht die Hände nicht in den Schoß zu legen; es gibt viele Operationen, die er mit diesen Symbolen ausführen kann, ohne jemals die Dinge betrachten zu müssen, für die sie stehen."*

Bertrand Russel betont den ästhetischen Aspekt einer Beziehung zu den Künsten:

> *„Mathematik beinhaltet nicht nur Wahrheit, sondern auch allerhöchste Schönheit – eine Schönheit kühl und streng wie die einer Marmorstatue, ohne Wirkung auf jenen Teil unserer Natur, den wir den Trieben zurechnen, ohne den glänzenden Staat, wie ihn die Malerei und Musik machen können, aber von erhabener Reinheit und fähig zu strengster Vollendung, wie sie nur ganz große Kunst aufweist. Das*

---

[77] Die beiden Zitate sind erinnerte Äußerungen von Sekretärinnen des Staatlichen Seminars Karlsruhe anlässlich eines Gesprächs über Mathematik beim Neujahrsempfang am 10.01.2017.
[78] Quelle: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/Allgemein/zitate.htm.

Wesen des Entzückens, das Außersichsein, das Gefühl, mehr zu sein als ein Mensch, was ja ein Prüfstein höchster Leistung ist, ist in der Mathematik ebenso sicher zu finden wie in der Dichtkunst.“

Last, not least stellt Georg Christof Lichtenberg den Bezug zur routinehaften Anwendung der Mathematik her:

„Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen oft den Henker nicht. Es ist fast mit der Mathematik wie mit der Theologie. So wie die der letztern Beflissenen, zumal wenn sie in Ämtern stehen, Anspruch auf einen besondern Kredit von Heiligkeit und eine nähere Verwandtschaft mit Gott machen, obgleich sehr viele darunter wahre Taugenichtse sind, so verlangt sehr oft der so genannte Mathematiker für einen tiefen Denker gehalten zu werden, ob es gleich darunter die größten Plunderköpfe gibt, die man nur finden kann, untauglich zu irgend einem Geschäft, das Nachdenken erfordert, wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine, als des Denkens sind.“ [79]

Darüber stellt sich wiederum ein Bezug zu jenen Persönlichkeiten her, die vor allem Gefallen an formal fachlichen Algorithmen entwickeln und diesen Gefallen leider auch als Motivation für ein Lehramtsstudium Mathematik ansehen. Über Begegnungen mit Referendaren in ersten Fachsitzungen eines Kurses kann der Verfasser sich gut an Äußerungen von Referendarinnen und Referendaren erinnern wie etwa:

„Mathematik [in meiner eigenen Schulzeit, Anm. d. Verf.] *fand ich gut, weil man da immer nach Regeln vorgehen konnte.“*

Oder:

„Das Lösen von Gleichungen hat mir doch immer so viel Freude gebracht“.

Diese Zitate und Meinungen zeigen, dass zwischen gesellschaftlicher und subjektiv empfundener Bedeutsamkeit der Mathematik eine Differenz besteht. Einerseits ist Mathematik ein wesentliches Instrument unserer Kultur und unsere Zivilisation ist ohne Mathematik nicht denkbar. Vielen Heranwachsenden und Erwachsenen ist jedoch nicht einsichtig zu vermitteln, weshalb es sinnvoll ist, sich über die gesamte Schulzeit hinweg mit diesem Fach zu beschäftigen.

Ohne hier auf eine Kritik am real existierenden Mathematikunterricht abzuheben, sei an dieser Stelle ein Hinweis auf eine nicht außer Acht zu lassende Mitwirkung der Lehrenden dieses

---

[79] Lichtenberg, 2013, K 185.

Faches gestattet, der mit einem Blick auf curriculare Darstellungen von Unterricht in mathematischen Lehrwerke verknüpft werden kann. Hier zeigt sich in der Regel eine tradierte Gliederung des Stofflichen, bei der eine von mathematischen Experten didaktisch aufbereitete fachsystematische Ordnung über Teilgebiete wie Algebra, Geometrie, Analysis, analytische Geometrie usw. vorgenommen wurde. [80] Fachliche Vorherrschaft und lineare Progression zeigen sich dabei auch deutlich bei einem Blick in das Inhaltsverzeichnis. [81] Im Unterricht werden diese Teilgebiete häufig von Lehrenden linear und damit für die Lernenden zunächst unabhängig voneinander vermittelt. Die vorab genannten ablehnenden Einstellungen zu Mathematik beziehen sich häufig auf die Erfahrungen mit dieser allein das Fachliche betonenden Entwicklung. Darüber wird ein Kernproblem angesprochen, was ein allgemeinbildender Mathematikunterricht leisten sollte und wie er danach zu gestalten sei. Für eine Einstimmung werden nachfolgend Beiträge von Hans Werner Heymann und Heinrich Winter herangezogen.

2.2 Mathematikunterricht und Allgemeinbildung

Hans Werner Heymann hat 1995 in seiner erziehungswissenschaftlichen Habilitationsschrift [82] einen Entwurf für einen Mathematikunterricht im Rahmen eines Allgemeinbildungskonzeptes entwickelt. Nachfolgend werden wesentliche Thesen zusammengefasst.

Als Ausgangspunkt formuliert Werner Heymann:

> *„Der herkömmliche Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen wird weder absehbaren gesellschaftlichen Forderungen noch den individuellen Bedürfnissen und Qualifikationsinteressen einer Mehrzahl der Heranwachsenden gerecht.“* [83]

Danach müsse sich Mathematikunterricht wie jedes andere Fach an allgemeinbildenden Schulen der Frage stellen, was er zur Allgemeinbildung der Lernenden beiträgt. Mit einem Konzept zur Allgemeinbildung lasse sich zwar nicht ableiten, wie der Fachunterricht im Detail auszusehen habe, aber ein Allgemeinbildungskonzept könne Kriterien liefern, anhand derer sich Unterricht beurteilen und gestalten lasse.

Heymann differenziert den Begriff „*Bildung*“ allgemein in drei Bedeutungsdimensionen.

---

[80] Nach der (hinreichend großen) Erfahrung des Verfassers dieser Studie über Unterrichtsbesuche ist im Mathematikunterricht das lineare Vorgehen nach dem Lehrwerk eine häufig praktizierte Lehrmethode.

[81] Auf eine explizite Angabe eines Lehrwerks wird verzichtet, da dies grundsätzlich so ist. Mit Verweis auf die in Kapitel 1 geschilderte Problematik der Linearisierung von schriftlich verfassten Texten stellt dies allein noch keine grundsätzliche Kritik an Lehrbüchern der Schulmathematik dar.

[82] Veröffentlicht als Buch, Heymann, 1996.

[83] Ebd. S. 8.

Er unterscheidet Bildung als „*Idee, Produkt und Prozess*“. [84] Bildung im Rang einer *Idee, als* „*explizit regulatives Prinzip im Sinne Kants*“ [85], sei in dieser Bedeutung (in konkreten Unterrichtssituationen, Anm. d. Verf.) kein fassbarer Sachverhalt. Es könne empirisch nicht belegt werden, ob tatsächliche Handlungen dieser *Idee* gerecht werden. [86]

Mit Bildung als *Produkt* (oder *Zustand*) werde im Alltagsgebrauch vorwiegend ein spezifisch verfügbares Wissen bezeichnet, das gegenüber anderem Wissen als Bildungswissen ausgezeichnet sei. Häufig werde dieses Wissen gleichgesetzt mit dem für Bildungsabschlüsse zu erwerbendem Wissen. Die Aussage „*X verfügt über Bildung*“ [87] zeige sich dann in einem Ensemble von Wissen und/oder Fähigkeiten, über das eine Person verfüge. In dieser Bedeutung seien empirisch überprüfbare Untersuchungen möglich, wenn die Fähigkeiten hinreichend genau bestimmt sind.

Bildung als *Prozess* verweise auf die Selbstbildung eines Individuums, die sich nicht primär in schulischen Kontexten, sondern in Prozessen der Selbstaktivierung ereigne, z.B. mit dem Besuch eines Konzerts, der Besichtigung einer Stadt u. Ä. Der Unterschied zur Produktauffassung – mit Blick auf Unterricht – bestehe darin, dass „*die Begegnung als gefühlsmäßige und intellektuelle Auseinandersetzung mit den betreffenden Gegenständen (Kulturgütern im weitesten Sinne) als Selbstzweck und Wert an sich*“ gedeutet werde.

Zusammenfassend formuliert Heymann:

> „*Bildung ist ein Prozess der Auseinandersetzung mit Welt und Aneignung von Welt; dieser Prozess kann Bildung als Produkt oder Zustand für den Einzelnen hervorbringen, wenn er im Geiste der Bildungsidee verläuft. Das ‚Verlaufen im Geiste der Bildungsidee‘ bezeichnet eine Qualität des Prozesses, […], die in dem gesuchten Leitkriterium konkretisiert werden muss*“. [88]

Außerdem verweist Heymann darauf, dass Bildungsideen zumindest implizit stets auch normativen Charakter haben und Bildung sich immer auch über ein diesbezügliches Bild der Gesellschaft definiere.

Begriffsdifferenzierend nimmt Heymann eine Gegenüberstellung von Kriterien für Bildung und Allgemeinbildung vor und leitet daraus sieben Aufgaben allgemeinbildender Schule ab.

---

[84] Heymann, 1996. Mit Sicht auf Bildung bzw. Allgemeinbildung als pädagogisches Leitkriterium, das sich auf Unterricht und alle schulischen Ebenen bezieht, also auch auf die Gestaltung des Lehrplans bis hin zu einer curricular verantworteten Unterrichtsvorbereitung und -durchführung.
[85] Ebd. S. 35.
[86] Umso wichtiger wäre es, wenn sie durchgängig implizit wirkten (Anm. d. Verf.).
[87] Ebd. S. 36.
[88] Ebd. S. 36.

Eine Übersicht ist in Abbildung 2.1 zusammengestellt, gefolgt von einer Zusammenstellung und Kurzbeschreibung der Aufgaben.

Bildung	Allgemeinbildung
setzt ein Menschenbild, ein Bildungs- oder Persönlichkeits-Ideal voraus,	ist offen für eine Vielzahl von Idealen (pluralistisch),
bezeichnet ein anthropologisches und philosophisches Kulturproblem, das nicht allgemeinverbindlich lösbar ist,	bezeichnet ein politisches und gesellschaftliches Problem, das praktisch gelöst werden muss,
ist Kultur nach der Seite ihrer subjektiven Zueignung (Adorno),	ist Kultur nach der Seite ihrer sozialen Universalisierung,
ist eine Aufgabe für den Einzelnen, beinhaltet einen Appell zur Selbstverwirklichung, zur individuellen Gestaltung des eigenen Lebensweges,	ist eine Aufgabe der Gesellschaft, die sie zu weiten Teilen an die Institution der Pflichtschule delegiert,
ist eine empathische Kategorie.	ist eine pragmatische Kategorie.

Abbildung 2.1: Gegenüberstellung von Kriterien zu Bildung und Allgemeinbildung [89]

In das Zentrum eines allgemeinbildenden Unterrichts stellt Heymann einen Katalog zentraler schulischer Aufgaben mit Blick auf das pragmatische Element eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts: [90]

- *Lebensvorbereitung*

Für den Alltag wichtige Qualifikationen würden im herkömmlichen Mathematikunterricht vernachlässig werden, wie zum Beispiel Schätzen, Überschlagen, Interpretieren und Darstellen. Die verständige Handhabung technischer Hilfsmittel wie Taschenrechner und Computer sollte im Mathematikunterricht aller Stufen, bei steigendem Anspruchsniveau, häufiger und intensiver thematisiert, mathematisch reflektiert und geübt werden.

- *Stiftung kultureller Kohärenz*

Mathematikunterricht müsse der kulturellen Isolierung der Mathematik entgegenwirken. Mathematik sollte exemplarisch als eine besondere Art des Denkens und des Problemlösens von universeller Wirksamkeit erfahrbar gemacht werden. Der Mathematikunterricht sollte sich deutlicher an zentralen Ideen orientieren, in deren Licht die Verbindung von Mathematik und außermathematischer Kultur deutlich werde, z. B. der Idee der Zahl, des Messens, des funktionalen Zusammenhangs, des räumlichen Strukturierens, des Algorithmus, des mathematischen Modellierens.

[89] Heymann, 1996, S. 46; für diese Arbeit gekürzt aufbereitet.
[90] Die Abschnitte sind eine kompakte Zusammenfassung von Kapitel 2 und Teilen von Kap. 3 aus Heymann, 1996.

- *Weltorientierung*

Mathematik sei ein Teil unserer Welt und zugleich in ihr verborgen. Mathematikunterricht sollte deshalb vielfältige Erfahrungen ermöglichen, wie Mathematik zur Deutung und Modellierung, zum besseren Verständnis und zur Beherrschung primär nicht-mathematischer Probleme herangezogen werden könne. Der Enge herkömmlicher Anwendungen der Schulmathematik, die in den traditionellen „eingekleideten Aufgaben" zum Ausdruck komme, sollte durch einen reflektierenden Umgang mit den betrachteten Problemen begegnet werden.

- *Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch*

Paradoxerweise sei für viele Schüler Mathematik das Fach unverstandenen Lernens schlechthin. An unverstandener Mathematik lasse sich jedoch weder alltägliches noch mathematisches Denken schulen. Der Unterricht sollte deshalb den Besonderheiten mathematischer Abstraktion und den dadurch bedingten Schwierigkeiten des Mathematiklernens entschiedener Rechnung tragen. Hinsichtlich der Lehrenden sei zu bedenken, dass die neu zu lernende Mathematik den Schülern häufig als etwas Fremdes und Unbekanntes gegenübertrete, mit dem sie sich nur im aktiven Gebrauch vertraut machen könnten, als Widerständiges, das bewältigt, als Noch-nicht-Vorhandenes, das erst konstruiert werden müsse. Den Schülern sollte genügend Zeit und Gelegenheit gegeben werden, den eigenen Verstand aktiv konstruierend und analysierend einzusetzen, um Mathematik verstehen und zur Klärung fragwürdiger Phänomene verwenden zu können – gleichsam als „Verstärker" ihres Alltagsdenkens.

- *Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft [...],*

- *Einübung von Verständnis und Kooperation [...],*

- *Stärkung des Schüler-Ichs*

Soziale und subjektive Momente des Mathematiklernens wie Verantwortungsbereitschaft, Verständigung und Kooperation, Ich-Stärke der Schüler scheine mit Mathematikunterricht im herkömmlichen Sinne wenig zu tun zu haben. Es sei aber bedenklich, diese fachliche von der sozialen Dimension des Lernens abzuspalten. Die allgemeinbildende Qualität des Mathematikunterrichts sei nicht nur vom Stoff abhängig, sondern von der Art, wie im Unterricht mit dem Stoff und miteinander umgegangen werde, kurz: von der Unterrichtskultur. Es sei eine Unterrichtskultur zu entwickeln, in der Raum bleibe für subjektive Sichtweisen der Schüler, für Umwege, produktive Fehler, alternative Deutungen, Ideenaustausch, spielerischen Umgang mit Mathematik, Fragen nach Sinn und Bedeutung sowie Raum für eigenverantwortliches Tun.

Heymann war 1995 mit seiner Habilitationsschrift in die Schlagzeilen der Presse und die Kritik von Fachlehrern und Mathematikwissenschaftlern geraten, nachdem aus Teilen seiner Studie u.a. die radikale Forderung *sieben Jahre Mathematikunterricht sind genug* herausgelesen wurde. Heymann betont in seinem Buch allerdings, dass er keine grundsätzliche Veränderung der Vorstellungen von Allgemeinbildung oder gar eine radikale Umgestaltung des Mathematikunterrichts anstrebe, sondern Anregungen für eine Veränderung der Unterrichtskultur geben wolle. Wichtige Punkte sind für ihn unter anderem z. B. der richtige Umgang mit Fehlern und Reflexionen über mathematisches Tun hinsichtlich eines Allgemeinbildungsauftrags. Dabei sollte den Schülern Raum bleiben für subjektive Betrachtungsweisen und alternative Deutungen mathematischer Probleme.[91] Auch der spielerische Umgang mit Mathematik sollte nicht zu kurz kommen.[92]

2.3 Allgemeinbildung über Grunderfahrungen

Heinrich Winter stellt im Zusammenhang mit dem Erscheinen von Heymanns Arbeit in einem Diskussionsbeitrag ein prägnantes Konzept unter dem Titel *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung* vor.[93] Die Aufgabe, ein übergeordnetes fachliches Konzept für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht zu formulieren und curricular zu präzisieren, wird über die fragend formulierte Teilüberschrift „Was ist mathematische Allgemeinbildung?“ hervorgehoben. Heinrich Winters Antwort:

> *„Zur Allgemeinbildung soll hier das an Wissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einstellungen gezählt werden, was jeden Menschen als Individuum und Mitglied von Gesellschaften in einer wesentlichen Weise betrifft, was für jeden Menschen unabhängig von Beruf, Geschlecht, Religion u.a. von Bedeutung ist“.*[94]

Diese Antwort sei natürlich nicht als Definition zu verstehen, da hierzu mindestens noch weitere Konzepte von den möglichen Bestimmungen des Menschen aufgezeigt werden müssten.

Wie Werner Heymann bezieht sich Heinrich Winter auf das Merkmal von Mathematik als eigenständiges schulisches Fach, weist aber ebenfalls auf seine Begründungspflicht hin:

---

[91] Heymann, 1996, S. 99: Anlehnung an den kognitionspsychologischen Ansatz: (Bauersfeld, et al., 1983, S. 1-56).
[92] Ebd. S. 242. Im Zusammenhang mit selbstverantwortlichem Handeln, sinnlichem Erfahren und kreativem Erfinden.
[93] Winter, 1996, S. 37-46; der Beitrag ist auch auf einer Internetseite der Universität Bayreuth veröffentlicht. Quelle: http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/46/muundallgemeinbildung.pdf.
[94] Winter, 1996, S. 37.

> *„Da sich Schulunterricht – ungeachtet der berechtigten Forderung nach interdisziplinären Aktivitäten – als Fachunterricht versteht, muss jedes Fach der allgemeinbildenden Schulen öffentlich aufweisen und begründen, inwieweit es für Allgemeinbildung unentbehrlich ist. Das kann nur als eine permanente Aufgabe verstanden werden.“* [95]

Hinsichtlich des Bildungs- und Erziehungsauftrags formuliert Heinrich Winter:

> *„Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:*
>
> *(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,*
>
> *(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art zu lernen und zu begreifen,*
>
> *(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.*
>
> *Das Wort Erfahrung soll zum Ausdruck bringen, dass das Lernen von Mathematik weit mehr sein muss als eine Entgegennahme und Abspeicherung von Information, dass Mathematik erlebt (möglicherweise auch erlitten) werden muss.“* [96]

Mit (1) wird die Anwendbarkeit der Mathematik angesprochen und deren Nützlichkeit betont. Mit (2) wird der wissenschaftliche Aspekt von Mathematik dargestellt, einer Mathematik als *Welt eigener Art* mit einer eigenen Sprache, Symbolik und Logik.

Aspekt (3) betrifft einen überfachlichen Beitrag des Faches zur Allgemeinbildung. Angesprochen wird, was früher ein formaler Bildungswert der Mathematik genannt wurde: *Mathematik als Schule des Denkens*, die unterrichtlich über die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten erschließbar sei.

Heinrich Winter greift auch Kernprobleme auf hinsichtlich der gesellschaftlichen Akzeptanz von Mathematik in ambivalenten Unterrichtssituationen zwischen Förderung von leistungsfähigen Schülern und Allgemeinbildungsauftrag im täglichen Unterricht:

> *Im Falle der Mathematik scheint es erstens eine besonders radikale Extinktion von*

---

[95] Winter, 1996, S. 37.
[96] Ebd.

> *Wissen zu geben, die zweitens häufig genug mit ausgesprochenen Hassgefühlen verknüpft ist. […] Ausgerechnet Mathematik als Musterfall absoluter Klarheit wird verbreitet als Musterfall besonderer Unverständlichkeit empfunden. Es darf daher nicht wundern, wenn Vorschläge, die auf eine Reduktion des Mathematikunterrichts für alle hinauszulaufen scheinen, eine so große Resonanz in den Medien und so viel Beifall in der Öffentlichkeit finden. Wenn Universitätsmathematiker in erster Linie ein Interesse an der Förderung leistungsfähiger (begabter Schüler) zeigen, die später eine akademische Berufsausbildung mit höheren Anteilen von Mathematik ansteuern und Versuche zur Republikanisierung mathematischer Gedanken eher misstrauisch betrachten, so wird nicht nur – gewollt oder nicht – das verbreitete Vorurteil, Mathematik sei nur Leuten mit Spezialbegabung zugänglich, unterstützt, sondern auch denen indirekt argumentativ zugearbeitet, die keinen Sinn (mehr) darin sehen, dass Mathematik ein gewichtiges Pflichtfach bis zum Abitur bleiben soll. Soll aber an der Forderung nach mathematischer Allgemeinbildung (etwa im Sinne der o.g. Grunderfahrungen) festgehalten werden, so läuft das im Wesentlichen darauf hinaus, den Mathematikunterricht in seinen Zielvorstellungen, Inhalten und Lehr- und Lernweisen entsprechend zu verbessern.“* [97]

Dies sollte auch auf die erste Phase der Lehrerausbildung anwendbar sein, indem mathematische Inhalte nicht nur nach innerfachlichen Ordnungsprinzipien strukturiert, sondern auch aus anderen pädagogisch relevanten Blickwinkeln gesehen und verstanden werden müssten, vor allem aus einer Sicht

> *„der historischen Genese von Ideen, der möglichen Bezüge zu unterschiedlichen außermathematischen Bereichen, der Akzentuierung nach übergeordneten fundamentalen Ideen, der möglichen Verwurzelungen in Alltagserfahrungen, der möglichen unterschiedlichen Repräsentationsformen, der möglichen Distanzen zu Primärintuitionen und damit zu möglichen Verständnishürden, der möglichen Erschließbarkeit durch selbständige Lernaktivitäten in überschaubaren Problemfeldern.“* [98]

Heinrich Winters Appell ist deutlich. Schulmathematik sollte sich dem vordergründigen Diktat einer von Experten fachlich verordneten Gliederung und selbstbezüglicher Verortung entziehen, indem sie den Lernenden erfahrbar mache, welche Mathematik die Menschen aus der

---

[97] Winter, 1996, S. 44.
[98] Ebd. S. 46.

Wahrnehmung der Welt und über die geistige Auseinandersetzung mit ihr entdeckt, entworfen oder gar erfunden haben. Mit dieser Orientierung, und vor der nicht zu übersehenden und nicht unerheblichen Anzahl von Personen, welche Mathematik am liebsten anderen überlassen, muss es dem Fach gelegen sein, das Bild zu verändern, das man sich von ihm macht.

Der Fachdidaktik täte es dabei gut, sich auf eine bildungsrelevante Basis zu beziehen, bei der die Rechtfertigung des Faches sich auf eine überfachliche Begründung stützen kann:

Wenn fachdidaktische Prinzipien nicht als isolierte Basis, sondern als Teil einer pädagogischen Verortung des Faches in einem gesellschaftlichen Verständnis von Bildung angesehen wären, könnten Lehrende die Wahrnehmung ihrer Aufgaben und Handlungen gegenüber den Lernenden auch überzeugender begründen und gegenüber deren Eltern besser rechtfertigen. Darüber könnte die begriffliche Entwicklung mehr Wertschätzung erfahren, als die von Pädagogen erwartete „Garantie für gute Beurteilungen“. Eine solche Verortung des Fachlichen in einem gesellschaftlichen Verständnis ist nicht nur hilfreich hinsichtlich der Unterrichtsgestaltung. Ein derart bildungstheoretisch begründeter Rahmen ermöglichte insbesondere auch die Entwicklung von nichtformalen Test- und Evaluationsinstrumenten zur Qualitätssicherung.

In Verbindung mit Erfahrungen aus eigenen Unterrichtsversuchen ist nach der persönlichen Überzeugung des Autors damit ist auch die Hoffnung verbunden, dass hierauf gründende Unterrichtskonzepte individuelle Lernhaltungen und Einstellungen zum Fach positiv beeinflussen können. Die letztgenannte Behauptung ist hier selbstverständlich als These aufzufassen, die zunächst über eine Begriffsannäherung an einen ästhetisch verfassten Mathematikunterricht entwickelt werden soll.

2.4 Fachdidaktik und Ästhetische Erziehung

Die Neurobiologie hat erkannt, dass die Ausbildung und Verwendung unserer Fähigkeiten, planen, agieren und reflektieren zu können, in zeitlichen Prozessen abläuft, welche in unserem Wahrnehmungs- und Verarbeitungssystem weder dauerhaft gespeichert noch eindeutig lokalisierbar sind. Alle Sinneseindrücke und ihre kognitive Verarbeitung werden physisch über neuronal-dynamische Aktivierungsspuren vernetzter Zellen aktiviert. Diese verlaufen gleichartig und sind vergänglich. Unsere Fähigkeit, konkrete Erfahrungen zu verallgemeinern und mit diesen „Denkobjekten“ konkretes Handeln zu beeinflussen, zeigt die enge Verknüpfung zwischen dem, was Theorie und Praxis genannt wird. Solche *Meta-Tätigkeiten* sind im Unterschied zu den physischen Vorgängen geistige Schöpfungen, die nur dann bildend wirksam werden können, wenn sie sich von den Lernenden als verstanden erweisen. Für Lehrende ergibt sich daraus eine Prämisse für eine ästhetisch fundierte Unterrichtsgestaltung:

Wer erfolgreich lernen will, in der Schule begriffsbildend zu unterrichten, muss die Vorstellungskraft entwickeln, von den Lernenden aus zu denken und zu handeln.

Für eine Annäherung des Fachdidaktischen an eine ästhetisch fundierte Bildungstheorie ist es angebracht, diesen Abschnitt exemplarisch mit einigen Zitaten zum Mathematikunterricht zu beleuchten, die für einen Zeitraum der 1970er Jahre bis heute als „Statements" führender Didaktiker oder Erziehungswissenschaftler zum jeweils vorherrschenden Bild von Schulmathematik bzw. zu erzieherischen Aufgaben der Schule gelten können. [99]

Hans Freudenthal schrieb 1970 im Vorwort von „Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1":

> *„Vorworte werden, wie Ouvertüren, hintendrein komponiert. (...) In der publikationsreifen Darstellung ist der Weg zum Resultat der umgekehrte dessen, den der Verfasser beim Erfinden ging. (...) Allerdings sollte man seine Mathematik anderen nicht so mitteilen, wie sie einem eingefallen ist, aber doch so, wie sie einem hätte einfallen können, wenn man damals gewußt hätte, was man nun weiß, und wie sie dem Schüler einfallen könnte, wenn man sein Lernen leitet."* [100]

Er nimmt damit schon vor 40 Jahren direkten Bezug zur oben genannten Orientierung des Lernweges am Wissen der Lernenden.

Arnold Kirsch schreibt 1987 im Vorwort seines Werkes „Mathematik wirklich verstehen" mit dem Untertitel „Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen":

> *„Dieses Buch, das auch heißen könnte ‚Grundbegriffe der Mathematik und ihre Bedeutung' ist aus Einführungsvorlesungen für Lehramtsstudenten in den Jahren 1980 bis 1986 hervorgegangen. In ihm werden Inhalte der Schulmathematik behandelt: nicht alle, insbesondere kaum solche der höheren Mathematik und nur wenige aus der Geometrie, aber jedenfalls solche, die für eine weitere Beschäftigung mit Mathematik – sei es im Fachstudium, sei es in einer Tätigkeit als Lehrer – wichtig, ja unentbehrlich sind. Der Absolvent des Gymnasiums sollte die meisten dieser Inhalte schon kennen* [101]*; er muss sie für ein tieferes Eindringen in die Mathematik wirklich verstanden haben und als geistiges Eigentum besitzen (...) Er* (der vorliegende Kurs, Erg. d. Autors) *wendet sich einerseits an Studienanfänger, ja*

[99] Und die zu dem Zeitraum gehören, in denen der Verfasser der Studie seine pädagogischen Erfahrungen mit dem Fach erworben hat.
[100] Vgl. Freudenthal, 1977, S. 7.
[101] Diese Aussage macht Arnold Kirsch mit dem damaligen Blick auf Leistungskurse im Fach Mathematik.

schon an interessierte Schüler; andererseits kann er durchaus auch ein Studium oder eine Lehrtätigkeit in Mathematik weiter begleiten (…).“ [102]

Die Gliederung dieses Werkes in A: Zahlen, B: Mengen, Aussagen, Beweise, C: Funktionen (Abbildungen), unterteilt in die Kapitel: Natürliche Zahlen, Bruchzahlen und Größen, Rationale Zahlen, Reelle Zahlen, Mengen – Aussagen – Beweise, Operationen für Aussagen und Mengen, Wenn – dann und also, ist typisch für die Sicht auf einen damaligen Bildungsauftrag der Schulmathematik, bei dem eine *Mathematik der Strukturen* betont wurde. Das Werk ist exemplarisch für die Orientierung des schulischen Unterrichts der 80er Jahre an Gymnasien, bei der der Mathematikunterricht auch als Vorbereitung auf die Studierfähigkeit gesehen wurde. [103]

Eine Verknüpfung von ästhetisch verfasster Erziehung mit fachlicher Didaktik wird über einige Erkenntnisse bzw. Erfahrungen aus der Psychologie und der Mathematik eingeleitet.

Nach Paul Watzlawicks zweitem Axiom seines *Modells der menschlichen Kommunikation* [104] sollte sich auch die Schule eingestehen, was die systemische Forschung seit den frühen Sechzigerjahren propagiert: *Die Beziehungsebene bestimmt die Inhaltsebene*. [105]

Problemlösungsprozesse zwischen Menschen spielen sich größtenteils auf der Beziehungsebene ab. In Schulen wird jedoch im Fachunterricht häufig die Beziehungsebene übergangen bzw. nicht primär gesehen. Die fachliche Kompetenz der Lehrperson (zusammen mit fachlich-methodischen Fähigkeiten der Vermittlung) ist nötig, reicht aber keineswegs aus, um fachlich erfolgreichen Unterricht zu garantieren. Nach Watzlawicks Modell kann sich dieser Erfolg nur ergeben, wenn auch die zwischenmenschliche Beziehungsebene stimmig ist, die sich primär über die Beziehungsqualitäten der Beteiligten ergibt. Vertrauensvolle Beziehungen zwischen Lehrenden und Lernenden sind demnach notwendige Voraussetzungen für die Akzeptanz des Fachlichen.

Martin Stein [106] antwortet in einem Interview auf die Fragen „*Können Sie erklären, woran das liegt, dass das Fach Mathematik so vielen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereitet? Wo liegen die Ursachen für Mathematikprobleme?*“

---

[102] Vgl. Kirsch, 1987, S. 11.
[103] Was er ja letztendlich auch sein sollte.
[104] Vgl. Watzlawick, et al., 1980.
[105] Ebd. Kap 2; Kurzfassung der fünf Axiome durch den Autor: (1) Man kann nicht nicht kommunizieren, (2) Jede Kommunikation hat einen Inhalts- und einen Beziehungsaspekt, (3) Kommunikation ergibt sich über Ereignisfolgen von Ursache und Wirkung, (4) Menschliche Kommunikation bedient sich analoger und digitaler Modalitäten, (5) Kommunikation ist symmetrisch oder komplementär.
[106] Martin Stein ist Professor am Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik in Münster. Der zitierte Text ist Teil eines Interviews. Quelle: http://de.bettermarks.com/spickzettel/problemfach-mathematik-interview-prof-dr-martin-stein.html.

„Die Ursachen sind so verschiedener Natur, dass sie hier kaum alle aufgelistet werden können. Zwei Besonderheiten lassen sich aber für das Fach aufzeigen: Zum einen verwendet das Fach an vielen Stellen regelbasierte Routinen. Werden diese ohne Einsicht gelehrt oder gelernt, werden spätere Fehler sehr wahrscheinlich. Und zum anderen bauen die Inhalte des Faches Mathematik weitgehend aufeinander auf. So können sich z. B. Versäumnisse in der Bruchrechnung in der Sekundarstufe I später negativ auf den Erfolg in der Sekundarstufe II auswirken.“ [107]

Martin Stein spricht hier zwei Problembereiche an, die für die Problematik der Akzeptanz von Mathematik wesentlich sind: das Vermitteln von Routinen, die begrifflich nicht verstanden sind, und ein linearer Aufbau des Wissens, bei dem für die Lernenden keine Wissensvernetzung erkennbar ist.

Timo Leuders ergänzt diese unterrichtlich belegbaren Argumente mit Schüleräußerungen, deren Kritik sich auf eine fehlende lebenspraktische Nützlichkeit des Faches beziehen. Exemplarisch dafür schreibt Yvonne, Klasse 8:

„Ich finde, bis zur Klasse 8 bekommt man so gut wie gar nichts von der Welt mit. Ich finde ab der 5. Klasse müsste man ein Fach erfinden, wo man mehr von der Realität mitbekommt, eben das Fach ‚Real‘ wie Realität.“ [108]

Auch Menschen mit akademischen Abschlüssen äußern sich befremdlich über das, was im Mathematikunterricht vermittelt wurde, da es weder verstanden noch als bedingt brauchbar erlebt wurde, verweisen dafür aber auf fehlende elementare Kenntnisse, die (angeblich) niemals unterrichtlich behandelt worden seien. Eine Juristin schreibt:

„Ich bin nach dem Abitur nicht ansatzweise je wieder mit Vektoren-, Integral- oder Differenzialrechnung konfrontiert worden. Wie vorteilhaft würde es sich bei meiner heutigen juristischen Tätigkeit auswirken, wäre stattdessen die alltäglich anzuwendende Dreisatz-, Bruch- und Prozentrechnung vertieft worden.“ [109]

Unter der naheliegenden Annahme, dass diese Juristin in der Sekundarstufe 1 die vermissten elementaren fachlichen Inhalte im Unterricht erfahren hat, lässt sich ihre an kognitive Verdrängung erinnernde Haltung nur über zwei gekoppelte Aspekte von jeweils rein individuell empfundener Mangelhaftigkeit abgrenzen:

[107] Vgl. Fußnote 104.
[108] Leuders, 2001, S. 39.
[109] Ebd. S. 39. Unter Bezugnahme auf Heymann, 1996.

- Mathematische Grundbegriffe werden im Unterricht der Sekundarstufe 1 nicht so behandelt, dass sich nachhaltig eine begrifflich adäquate kognitive Verortung einstellt,
- dieses Defizit wird im Unterricht häufig durch eine algorithmisch-formale Handlungsanweisung ersetzt, also operationalisiert, ohne verstanden zu sein, oft auch noch unter Verwendung von Symbolen, die neu und ungewohnt sind. [110]

Unterrichtliche Konsequenzen

Hinsichtlich dieser Einschätzungen wird im Folgenden der Versuch unternommen, den Erwerb von Mathematikwissen über ästhetisch verfasste Erziehungs-Prozesse verstehensorientiert und darüber auch nachhaltiger zu gestalten. Eine solche Wirksamkeit ist derzeit auch bildungspolitisch im Rahmen von Veränderungen im Schulsystem und anschlussfähigen Übergängen von Bedeutung, sowohl bezüglich einer wachsenden Heterogenität von Lerngruppen in allen erzieherisch tätigen Organisationen und Schularten als auch hinsichtlich neuer Schularten wie z. B. der Gemeinschaftsschule in Baden-Württemberg [111] mit dem Anspruch auf binnendifferenzierende Bildungsgänge. Befähigungen wie z. B. allgemeine Studierfähigkeit müssen Schularten übergreifend in einem praktikablen Entwurfsrahmen über Curricula mit differenzierenden Angeboten über die gesamte Schulzeit entwickelt werden. Diese sollten nicht formal aufbauend nach bestimmten Abschlüssen wie z. B. der mittleren Reife geregelt werden, da hierbei Talente über Jahre hinweg bezüglich ihrer Begabungen nicht würdigend gefördert werden können.

Außerdem soll das Modell Studierenden des Lehramts Mathematik, aber auch Lehrkräften des Faches mit Unterrichtserfahrung, als ein Rahmen für die Entwicklung von Unterricht bereitgestellt werden, welcher konkrete Unterrichts-Planungen und -Realisierungen hinsichtlich des Aspekts ästhetischer Erziehung begründbar und damit bezüglich der anzustrebenden Ziele reflektierbar und bei Bedarf evaluierbar machen kann. Mit Implementierungen ästhetisch verfasster Erziehungsprozesse im Unterricht ist eine Hoffnung verbunden, dass individuelle Lernhaltungen und Einstellungen der Lernenden zum Fach positiv beeinflusst werden können. Diese Hoffnung wurde in persönlichen Erfahrungen des Autors in Schulversuchen mehrfach erfüllt.

Pädagogische Aspekte

In der Mathematikwissenschaft wird Ästhetik häufig verknüpft mit einer besonderen Wirkung des Fachlichen oder einer besonderen Art, etwas fachlich zu begründen. Derart wird eine Ästhetik der Mathematik über eine *innere Ästhetik der Wissenschaft* vermittelt als ein von

[110] Im Praxisteil dieser Arbeit wird auf diese Einschätzung mehrfach Bezug genommen.
[111] Vgl. ähnliche Ansätze in anderen Bundesländern und auch in anderen Ländern.

Mathematik-Experten als schön empfundener Prozess oder als genial anzusehendes fachliches Produkt.

Ästhetik mit dem Fach Mathematik pädagogisch zu verbinden und insbesondere ästhetisch verfasste Kriterien als Planungs- und Begründungsinstrument für Lernprozesse zu nutzen, bedeutet, ein fachliches Szenario zu entwickeln, das den Erfolg von Lernprozessen positiv beeinflussen kann.

Hinsichtlich einer allgemeinbildend verfassten Fachlichkeit und praktischen Anwendbarkeit kann als zentrales Unterrichtsziel das *Modellieren-Lernen mit Mathematikwissen* angesehen werden. Nach Heinrich Winters Ansatz [112] vertieft und manifestiert sich das fachliche Wissen über vernetzte Grunderfahrungen in Bereich der Anwendbarkeit im Zusammenwirken mit zunehmender Problemlösefähigkeit, die sich ihrerseits über kognitiv bewusste Abstraktionen sinnlich wahrnehmbarer Objekte und Handlungen entwickelt. Dazu sollte ein ästhetisch fundierter Mathematikunterricht von Lehrpersonen mit Überblickswissen und Sachkompetenz geplant sein, und bei der unterrichtlichen Durchführung muss der Wissensaufbau der Lernenden begleitet und professionell moderiert werden. Fachlich sollte ein Werkzeugkasten eingerichtet und spiralig ergänzt werden, der den Lernenden hilft, Probleme zu lösen, die sie sonst nicht geeignet formulieren und deshalb auch nicht lösen könnten.

Maßgeblich mitbeteiligt am Erfolg des Lernprozesses ist dabei, wie bereits betont, das Wollen der Lernenden. Lernende der Grundschule und der Sekundarstufe I sind in der Regel offen für das Sachliche, das die Lehrperson ihnen vermitteln will. Aber sie haben ein Gefühl für Situationen, in denen ein Lerngegenstand vorgetragen wird, der ihrer Wissensrepräsentation (noch) nicht entspricht. Diese Wahrnehmung macht Lernende unsicher hinsichtlich der Sache, wenn etwa zu wenige Beispiele behandelt sind und diese, oft sogar noch instruierend von der Lehrperson vorgeführt, eine Begrifflichkeit vorgeben, die kognitiv (noch) nicht verankert ist. Solche Situationen sind im Mathematikunterricht auch häufig mit zu schneller Verallgemeinerung verbunden, die zum Beispiel ein Ergebnis in syntaktischer Form darstellt oder es nur algorithmisch verortet. Diese Begriffs-Verkürzung, die auf der Seite vieler Lernenden begleitet ist durch eine emotional negative Bewertung, führt zu einer Aversion gegen das zu Lernende und konnotiert die Sache selbst negativ. Diese Ablehnung verstärkt sich oft über Kommunikationsprozesse in der Lerngruppe, weitet sich dabei häufig aus und polarisiert sich in der Klasse.

Als Mittel zur Vermeidung von ablehnenden Haltungen wird nachfolgend ein Modell für den

[112] Vgl. Abschnitt 2.3.

Mathematikunterricht entwickelt, in dem Lernprozesse ästhetische Bewertungen bei den Lernenden auslösen können, die dieses Wollen begünstigen. Es wird die These vertreten, dass derart verfasste Lernprozesse von den Lernenden ästhetisch konnotiert wahrgenommen werden.

Nachfolgend werden zunächst didaktische Grundlagen für solche Prozesse aufgeführt. Das Modell wird in Kapitel 3 entwickelt. Hinsichtlich der praktischen Umsetzungen in Kapitel 4 wird auf die Grundschule und Sekundarstufe I Bezug genommen. [113]

2.5 Gestaltungsprinzipien für den Mathematikunterricht

Dieser Abschnitt stellt ausgewählte tradierte didaktische Prinzipien der Prozessgestaltung vor, die über die Orientierung am Wissen und am Erfahrungsvermögen der Lernenden hinsichtlich einer Eignung für ästhetisch fundierte Lernprozesse herangezogen werden können.

2.5.1 Genetisches Lernen

Der Begriff „Genetisches Lernen", abgeleitet vom griechischen Verb „gignomai" (ursprünglich werdend, entstehend), hat in der deutschsprachigen pädagogisch orientierten Literatur eine lange geschichtliche Entwicklung. John Dewey erfasst 1915 einen zentralen Aspekt:

> *„Der Weg zum Verständnis eines entwickelten Produktes führt durch das Studium seines Werdeganges (…) Indem wir es im Werden studieren, wird manches unserem Verständnis zugänglich, das heute zu verwickelt ist, um unmittelbar erfasst zu werden (…). Der Ausgangspunkt eines solchen Lernens ist dabei stets eine gegenwärtige Sachlage mit ihren Problemen."* [114]

In der naturwissenschaftlich orientierten Pädagogik entwickelt Martin Wagenschein den Begriff über eine Methode des „*genetisch-sokratisch-exemplarischen Lehrens*". [115] Genetisches Lehren und Lernen bezeichnet ein pädagogisches Konzept, das den Schwerpunkt auf die dialogische Entwicklung des Lerngegenstandes legt und dabei die Lernenden als Subjekte des Lernens begreift. Dazu Wagenschein: [116]

> *„Pädagogik hat mit dem Werdenden zu tun: mit dem werdenden Menschen und mit dem Werden des Wissens in ihm. Die sokratische Methode gehört dazu, weil das Werden, das Erwachen geistiger Kräfte, sich am wirksamsten im Gespräch*

[113] Auf eine Erweiterung auf Unterrichtsprozesse in der Sekundarstufe II wird nicht eingegangen, da hinsichtlich der Abiturvorbereitung erweiterte Rahmenbedingungen zu berücksichtigen wären.
[114] Dewey, 1993 (Orig. 1915), S. 283f.
[115] Wagenschein, 1992, 9. Aufl. (hinsichtlich unterrichtlicher Praxis speziell für das Fach Physik).
[116] Wagenschein, 1992, 9. Aufl., S. 75.

> *vollzieht. Das exemplarische Prinzip gehört dazu, weil ein genetisch-sokratisches Verfahren sich auf exemplarische Themenkreise beschränken muss und auch kann.“*

Martin Wagenschein entwickelt dieses genetische Lernprinzip auch in Entgegnung zu einem naturwissenschaftlichen Unterricht, der sich auf die Vermittlung vorgefertigter Wissenskomplexe beschränkt. Sein Beitrag zur einer inhaltlich-methodischen Neubesinnung ist beachtenswert: Die Lehrperson soll das Gespräch mit der Lerngruppe leiten, aber nicht dozierend informieren und Ergebnisse unterbreiten, sondern dialogisch Beiträge der Schüler aufnehmen und gegebenenfalls auch provokativ agieren. Wagenschein sucht eine Verknüpfung des Erlernten mit einer „ursprünglichen Wirklichkeit“ und dem Sprechen und Denken der Lernenden.

Das genetische Prinzip verknüpft den fachlichen Aufbau von Wissen mit dem individuellen Wissensstand der Lernenden und ihrer intuitiven Denkweise. Hinsichtlich der bisher entwickelten Begriffsbeschreibung ästhetischer Erziehung kann Wagenscheins didaktischer Ansatz durchgängig als ästhetisch verfasst angesehen werden. Allerdings wird die Methode in der schulischen Praxis hinsichtlich der Kommunikation dort fragwürdig, wo die verantwortungsvolle Rolle einer sokratisch orientierten Gesprächsführung seitens des Lehrenden auf zahlenmäßig größere Lerngruppen angewendet werden soll, die in dieser Größe erfahrungsgemäß sich nicht ganzheitlich mit der entsprechenden Hinwendung und Selbstverantwortung am Gespräch beteiligen. Die folgende Zusammenstellung listet drei Aspekte des genetischen Lernens auf und nennt erwünschte Einstellungen bzw. Aktivitäten der Lehrenden und Lernenden.

Genetisch: Die Schüler versuchen das Besondere eines Lerngegenstandes sprachlich zu fassen und suchen nach Erklärungsansätzen ("fassendes Sprechen"). In einer Abfolge von Entwicklungsschritten wird Wissen induktiv erschlossen. Im Vordergrund stehen also das Verstehen von Zusammenhängen und ein nachhaltiger Zugang zu den Inhalten des jeweiligen Faches. Theorien und Gesetzmäßigkeiten werden aus ihrer inneren Logik heraus erschlossen. Es geht dabei um interessegeleitete Bewusstwerdungsprozesse.

Sokratisch: Die Lernenden sollen im sokratischen Dialog durch die Auseinandersetzung mit Naturphänomenen zu eigenen Lernprozessen motiviert werden und durch Diskutieren darüber selbstgesteuert lernen. Die Lehrkraft spielt dabei eine begleitende Rolle.

Exemplarisch: Um die Stofffülle zu reduzieren, empfiehlt Wagenschein das exemplarische Lernen am Beispiel: Qualität geht vor Quantität.

2.5.2 Entdeckendes versus rezeptives Lernen

Die amerikanischen Psychologen Jerome Bruner und David P. Ausubel haben zwei gegensätzliche Lernkonzepte propagiert, die auch für den aktuell praktizierten Mathematikunterricht eine zentrale Bedeutung haben, weil sie in der Unterrichtspraxis in der Regel zu sehr unterschiedlichen Lernformen führen können und diese häufig auch beobachtbar sind. [117]

Jerome Bruners Beitrag zur Didaktik des Lernens kann mit drei methodischen Ansätzen charakterisiert werden: [118]

- in einer Lernmethode „Entdeckendes Lernen“ (engl. learning by discovery), die sich dadurch auszeichnet, dass ein Wissensgebiet von Schülern selbstständig erschlossen wird; der Lehrperson kommt dabei (im Idealfall, Anm. D. Verf.) eine beobachtende und helfende Funktion zu,

- in einem spiralig angeordneten Curriculum, in der deutschsprachigen Literatur auch Spiralprinzip genannt, bei dem der fachliche Wissensaufbau der altersgemäßen kognitiven Verfasstheit entsprechend angepasst ist, ohne die eigentliche Begrifflichkeit zu verfälschen,

- in der Darstellung von Wissen in den drei Repräsentationsformen enaktiv (i. S. von handelnd), ikonisch (i. S. von bildhaft) und symbolisch (i. S. von sprachlich/textlich). [119]

Nach Jerome Bruner liegt im entdeckenden Lernen der Vorteil, dass die Lernenden neben der stofflichen Wissensaneignung das Lernen lernten. Dabei würde auch das selbstständige situations- und problemübergreifende Denken, die Wissensaneignung und die Motivation der Lernenden gefördert, was vor allem den Sinn habe, Lernende zu präparieren, das zukünftige Leben erfolgreicher zu bewältigen. [120] Dies könne dann nur durch Übertragung (Transfer) früher erworbener Kenntnisse auf die neuen Situationen gemeistert werden.

Dagegen postuliert David Ausubel, dass Lernen stets in einer assimilativen [121] Verknüpfung von neuem Stoff mit bereits vorhandenem Wissen erfolgt und schreibt einem Unterricht über Anleitung und Erklärung (auch in Form von reiner Instruktion), also rezeptivem Lernen, eine höhere Wirksamkeit zu als einem Unterricht durch entdeckendes Lernen.

Danach nennt er als wesentliches Merkmal und Ausgangspunkt einer Kritik am genetischen Lernprinzip, *„dass der Hauptinhalt dessen, was gelernt werden soll, nicht gegeben ist, sondern*

---

[117] Diese Anmerkung erlaubt sich der Autor aufgrund seiner Erfahrungen mit Unterrichtsbesuchen von Referendarinnen und Referendaren und Nachgesprächen, auch unter Beteiligung der jeweiligen Fachlehrer.
[118] Zusammengefasst nach Bruner, 1961 und Bruner, 1970 / 1980, 5. Aufl.
[119] Als Mittel der fachlichen Kommunikation sowie als Ausdruck kognitiver Verortung.
[120] Bruner 1961.
[121] Assimilation (französisch assimilation ‚Angleichung') bedeutet in der Lernpsychologie das Zuordnen einer Wahrnehmung zu einem vorhandenen Wahrnehmungsschema, das bereits für ähnliche Wahrnehmungen verwendet wird. Dadurch wird eine Wahrnehmung kognitiv verallgemeinert und als bekannt eingestuft.

von den Lernenden entdeckt werden muss, bevor er ihn sinnvoll in seine kognitive Struktur einverleiben kann.“ [122] Alternativ dazu wird eine Form des *rezeptiven Lernens* vorgeschlagen, welches sich in zwei Kategorien des *sinnvollen* respektive *mechanischen Lernens* zeige:

> *„Bei rezeptivem Lernen (mechanischem oder sinnvollem) wird dem Schüler der vollständige Inhalt von dem, was gelernt werden soll, in seiner fertigen Form übermittelt. Die Lernaufgabe verlangt von ihm keinerlei selbstständige Entdeckung. Von ihm wird nur gefordert, dass er sich den Stoff, der ihm gegeben wird, [...] so einprägt oder einverleibt, dass (sic!) er zu einem späteren Zeitpunkt zur Verfügung steht oder reproduziert werden kann. Bei sinnvollem rezeptivem Lernen wird die potentiell sinnvolle Aufgabe oder der Stoff während des Prozesses des Einprägens verstanden oder sinnvoll gemacht. Bei mechanischem rezeptivem Lernen ist die Aufgabe nicht sinnvoll, oder sie wird während des Prozesses des Einprägens nicht sinnvoll gemacht.“* [123]

David Ausubel vergleicht nachfolgend die beiden Lernformen und ihre Ausprägungen *mechanisch* bzw. *sinnvoll* und verbindet diese mit unterschiedlichen Anwendungssituationen. [124]

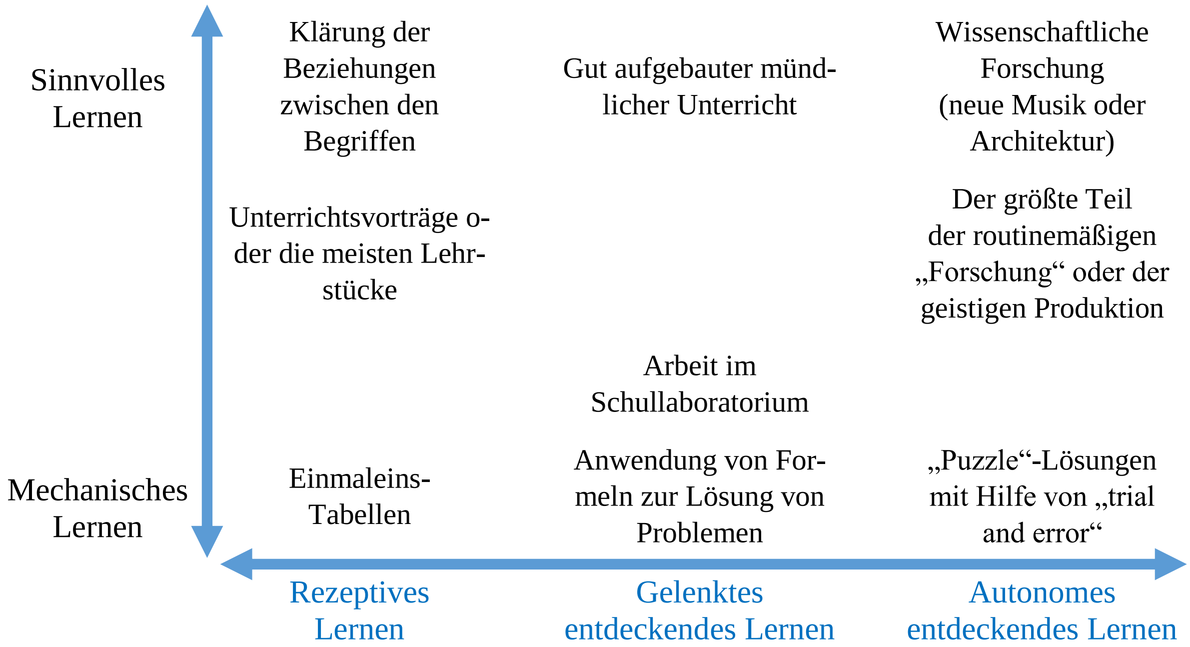


Abbildung 2.2: Rezeptives und entdeckendes Lernen in den Ausprägungen „mechanisch“ und „sinnvoll“ mit Bezügen zu Lernsituationen nach Ausubel

Abbildung 2.2 zeigt Eigenschaften, die mit Blick auf die Darstellung und eine Verwendung für schulischen Mathematikunterricht kritisch hinterfragt werden können. Auch die Beispiele sind

---

[122] Ausubel, 1980/81, S.48.
[123] Ebd. S. 47.
[124] Ebd. S. 48.

diesbezüglich sehr heterogen, da sie einerseits aus sehr unterschiedlichen Anwendungsbereichen, vom „Kleinen Einmaleins“ bis zu „wissenschaftlich-kreativer Forschung“, gewählt sind und ihre Anordnung hinsichtlich der Lernformen aus fachlichen Gründen nicht an einer geeigneten Stelle in der Darstellung zu finden ist.

Exemplarisch lässt sich dies an der Verortung des Lernens von „Einmaleins-Tabellen“ begründen, das aus Sicht eines aisthetisch verorteten Lernens nicht als mechanisch bezeichnet werden sollte. Das „Kleine Einmaleins“ hat eine wichtige Teilfunktion bei der Ziffernverarbeitung im Algorithmus des schriftlichen Rechnens im Zehnersystem. Hebt man diese Bedeutung bei der Begriffsentwicklung der Dezimalzahlen hervor, ist das „Kleine Einmaleins“ eher als ein Beispiel für sinnvolles Lernen einzuordnen.

Im vierten Kapitel dieser Studie wird außerdem herausgearbeitet, dass dem „Kleinen Einmaleins“ bei der Entwicklung des Zahlbegriffs eine Bedeutung als strukturierte Beschreibungssprache von elementaren Rechenausdrücken zugeschrieben werden kann. [125]

Mit Sicht auf eine derart mögliche Bedeutungszuweisung und unter Berücksichtigung emotionaler Beteiligung kann mechanisches Lernen unter diesen Gegebenheiten eher als lernhemmend bezeichnet werden.

Eine Sichtung der Beispiele in der Reihe „sinnvolles Lernen“ zeigt, dass sich die beiden Formen des rezeptiven und entdeckenden Lernens keineswegs ausschließen müssen, sondern ideal ergänzen können, wenn die Methoden zur richtigen Zeit und in der passenden Reihenfolge angewendet werden.

Aber auch hier kann das Beispiel der „Anwendung von Formeln zur Lösung von Problemen“ als höchst ungeschickt eingeordnet gesehen werden. Zwar ist es der Vorteil einer Formel, universell anwendbar zu sein, aber es wäre mit Blick auf einen begriffsorientierten Mathematikunterricht nicht lernförderlich, die reine Anwendung der Formel ohne Begründung ihrer Funktion zu verwenden. Hier fällt es schwer, die Anwendung unter der Rubrik „Gelenktes Entdecken“ unterzubringen. Die mechanisierte Anwendung einer Formel sollte nicht ohne die Begründung ihrer Wirksamkeit verordnet werden.

Im Spektrum des Vermittelns von Wissen zwischen den Ausprägungen „mechanisch“ und „sinnvoll“ wird hinsichtlich der Darstellung nicht ausreichend zwischen der Produkt- und Prozesshaftigkeit von Lernprozessen unterschieden. David Ausubel greift diese Unschärfe selbst

---

[125] Dessen alltägliche Bedeutung als mechanische Rechenhilfe beim schriftlichen Rechnen ist heute in der Praxis vollständig durch elektronische Verfahren abgelöst. Das Prinzip des Verfahrens hat jedoch weiterhin eine wesentliche Funktion beim Verstehen eines Stellenwertsystems und des Rechnens mit Zahlen in dieser Darstellung.

auf und nimmt dazu Stellung.

> *„Obwohl die Unterscheidung zwischen rezeptivem und entdeckendem Lernen […] absolut nichts mit der Dimension „mechanisch/sinnvoll“ im Lernprozess zu tun hat, sind diese beiden Dimensionen des Lernens immer wieder miteinander verwechselt worden.*
>
> *Diese Verwechslung ist teilweise für die beiden weitverbreiteten, aber unbegründeten Ansichten verantwortlich, daß rezeptives Lernen in jedem Fall mechanisch ist und daß entdeckendes Lernen seinem Wesen nach notwendigerweise sinnvoll ist.*
>
> *In beiden Annahmen spiegelt sich wider, daß die einzige Kenntnis, die man wirklich besitzt und versteht, die Kenntnis ist, die man selbst entdeckt.“*

Und er interpretiert rezeptives Lernen hinsichtlich seiner schulischen Wirksamkeit:

> *„Soweit es sich um Lernen in der Schule handelt […], ist natürlich sinnvolles Lernen dem mechanischen Lernen ebenso überlegen wie rezeptives dem entdeckenden Lernen.“* [126]

Für diese Argumentation spräche das Beispiel des rezeptiven Vokabellernens in einer Fremdsprache, mit dem Hinweis, *„dass die analoge Bedeutung der Wörter in der Muttersprache den Lernenden ja bewusst sei.“* [127]

Aber auch dann, wenn begrifflich assimilierte Wortzuweisungen für spätere Stadien des Problemlösens charakteristisch sein können, sollte bei dieser Art des rezeptiven Lernens der Sinnzusammenhang mit einem verbindenden Unterrichtsthema hergestellt sein.

Es wäre zum Beispiel nicht lernförderlich, wenn Lernende ohne assoziierte sinnstiftende Verknüpfung dreißig Wörter mit dem Anfangsbuchstaben „S“ allein aus diesem Grund lernen sollten.

Aus der Sicht der Kognitionswissenschaften und aus der Erkenntnis, dass Lernprozesse stets unter Berücksichtigung emotionaler und wertender Anteilnahme geplant werden sollten, müssen die beiden Dimensionen *rezeptiv-entdeckend* und *mechanisch-sinnvoll* für den Mathematikunterricht erweitert und variiert werden.

Entsprechend den bisherigen Ausführungen sollte die Prozessführung in Lernsituationen die Aufmerksamkeit und die Akzeptanz der Lernenden für das Fachliche dadurch erhalten, dass

[126] Ausubel, 1980/81, S. 50.
[127] Dto. Beispiel mit eigenen Worten zusammengefasst, vgl. S. 50f.

das Fachliche nicht durchgängig zum Selbstzweck des Lernens erhoben wird, und den Lernenden bewusst wird, dass sie mit ihrem Wissen auch in Lernsituationen nicht nur auf die Lehrperson angewiesen sind, sondern eigenständig etwas dazu beitragen können und auf diesen Beitrag seitens der Lehrperson auch Wert gelegt und darauf verwiesen wird. Fortschritte in einem Lernprozess sollten als Steigerung der persönlichen Performanz empfunden und nicht nur als eine reine Progression des fachlichen Wissens wahrgenommen werden.

Da sich diese Studie auf einen Mathematikunterricht bezieht, der die Lernenden einer Klasse nicht nur als Individuen sieht, sondern auch als soziale Gruppe [128], die über Lernprozesse auch soziale Fähigkeiten und gegenseitiges Vertrauen gewinnen soll, ist Wagenscheins genetisches Lernen wegen seiner sokratisch-dialogischen Prozessführung über verbale Kommunikation der Lehrperson hier nicht geeignet. Der Wunsch nach Mitbeteiligung der Lernenden erfordert eine Methode, die Aufträge so formuliert, dass sie in selbständigen Handlungen der oder über gemeinsame Tätigkeiten von Lerngruppen gelöst werden können und sollen. Dabei erhält die Lehrperson jene Entlastung hinsichtlich der eigenständigen Verantwortung der inhaltlichen Führung, die es ihr ermöglicht, den Prozess als Beobachter der Lernenden und deren Problemlöseverhalten wahrzunehmen und über die Beiträge der Lernenden den Fokus auf etwas Neues zu lenken, das dann als eigentliches fachliches Lernziel herausgestellt werden kann. Dabei stützen, sofern möglich, als eigenständig wahrgenommene Entdeckungen oder Erfindungen die emotionale Zuwendung zum Fachlichen und stärken diesbezüglich das Selbstvertrauen der Schüler. Die hierbei von den Lernenden erbrachten Beiträge entwickeln die fachsprachliche Ausdrucksfähigkeit und bieten Gelegenheit, fachliches Argumentieren und Begründen zu entwickeln und zu fördern.

Mit dieser Thematik hat sich bereits seit längerer Zeit auch die mathematikdidaktische Literatur befasst und zu Verortungen in Lehrplänen geführt: *„Von den Schülern wird gefordert, dass sie die Inhalte des Mathematikunterrichts nicht nur rezipieren, sondern auch selbständig erarbeiten.“* [129] Als adäquates Unterrichtsprinzip wird ein „gelenktes entdeckendes Lernen“ genannt, das u.a. auch als „aktiv entdeckendes Lernen" bezeichnet wird. In der Mathematikdidaktik werden diese Unterrichtsformen auch als "gelenktes Entdecken" (Winter 1991 und 1987) und "genetischer Unterricht" (Wittmann 1981) aufgeführt.

[128] Die in staatlichen Schulen ab der Klasse 5 in der Regel aus etwa bis zu 30 Personen besteht.
[129] Vgl. KM, 1985 S.26; MKJS, 2004, S. 11 f.

2.5.3 Fundamentale Ideen

Im September 1959 trafen sich in Woods Hole (USA) amerikanische Wissenschaftler verschiedenster Fachrichtungen unter dem Vorsitz von Jerome Bruner, um sich mit der Frage zu befassen, wie die Erziehung an amerikanischen Schulen und Universitäten verbessert werden könnte. Bruner hat die Ergebnisse in seinem 1960 erschienenen Buch „The Process of Education" beschrieben. [130]

In diesem Werk wurde erstmals der Begriff *fundamental idea* im Zusammenhang mit fachlichen Unterrichtsgegenständen genannt, die nach Johann Humenberger [131] hinsichtlich des Adjektivs „fundamental" auch mit *basic, general, powerful, elementary* und anstelle von „idea" auch *attitude, structure* oder *principle* geschrieben werden könnte.

In der deutschen Ausgabe von Jerome Bruners Werk *Der Prozess der Erziehung* fasst Werner Loch im Vorwort die grundlegenden Ergebnisse des sechstägigen Kongresses in sechs Thesen zusammen: [132]

1. *Die Konstruktion neuer Curricula erfordere die Mitarbeit der führenden Forscher der Wissenschaftsgebiete, die den Fächern zugrunde liegen.*
2. *Das entscheidende Unterrichtsprinzip in jedem Fach (oder in jeder Fächergruppe) sei die Vermittlung der Struktur, der ‚fundamental ideas' der jeweiligen zugrundeliegenden Wissenschaften, und die entsprechende Wiederholung der Einstellung des Lehrenden durch die Lernenden, dessen Bemühungen […] sich nicht in der Art, sondern nur im Niveau […] von der wissenschaftlichen Forschungshaltung unterschieden.*
3. *Die Grundlagen eines Faches seien jedem Menschen, gleich welcher Altersstufe und sozialer Herkunft, über die Denk- und Darstellungsmittel, die er mitbringe, vermittelbar.*
4. *Der Aufbau des Curriculums solle spiralig erfolgen und eine Wiederholung der Grundbegriffe auf den verschiedenen kognitiven und sprachlichen Niveaus ermöglichen.*
5. *Der Aufstieg des Lernenden von den konkreten zu den formalen Operationen solle durch die antizipierende Form des intuitiven Erfassens von Zusammenhängen […] insbesondere auf den elementaren Stufen des Unterrichts kultiviert werden.*
6. *Die entscheidenden Motive des Lernens sollten nicht durch Leistungsorientierung und*

---

[130] Es ist erkennbar, dass ab der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts die Pädagogik stark beeinflusst wurde durch die Psychologie. Deren Forschungsergebnisse haben sich z. B. im Mathematikunterricht bis in didaktische und fachliche Ebenen ausgewirkt - nach Meinung des Verfassers dieser Studie in diesem Fall nicht unbedingt zum Besten dieses Faches.
[131] Humenberger, et al., 1995, S. 1.
[132] Werner Loch in Bruner, 1970 / 1980, 5. Aufl., siehe Vorwort (zusammengefasst vom Autor mit Blick auf schulischen Unterricht).

Konkurrenzstreben der gegenwärtigen Gesellschaft geweckt werden, sondern aus dem Interesse an den Gegenständen des Lernens selbst, auf dem Weg des aktiven Nachvollzugs ihrer Strukturen.

Die Thesen 3. und 4. entsprechen inhaltlich Jerome Bruners Prinzip des entdeckenden Lernens. Bei Bruner sind sie jedoch stärker auf das schulische Lernen abgestimmt, während die sechs Punkte insgesamt auch das Lernen an weiterführenden Institutionen einschließen.

Fundamentale Ideen beziehen sich auf die fachliche Entwicklung.[133] Sie berücksichtigen nicht die Parallelität von Fachlichkeit und Emotionalität. Aber hinsichtlich der fachlichen Progression kann eine Unterscheidung in einen vertikal bzw. horizontal vernetzten Aufbau von Wissen für die Gestaltung von Lernprozessen herangezogen werden. Abbildung 2.3 stellt die beiden Kriterien vergleichend gegenüber.

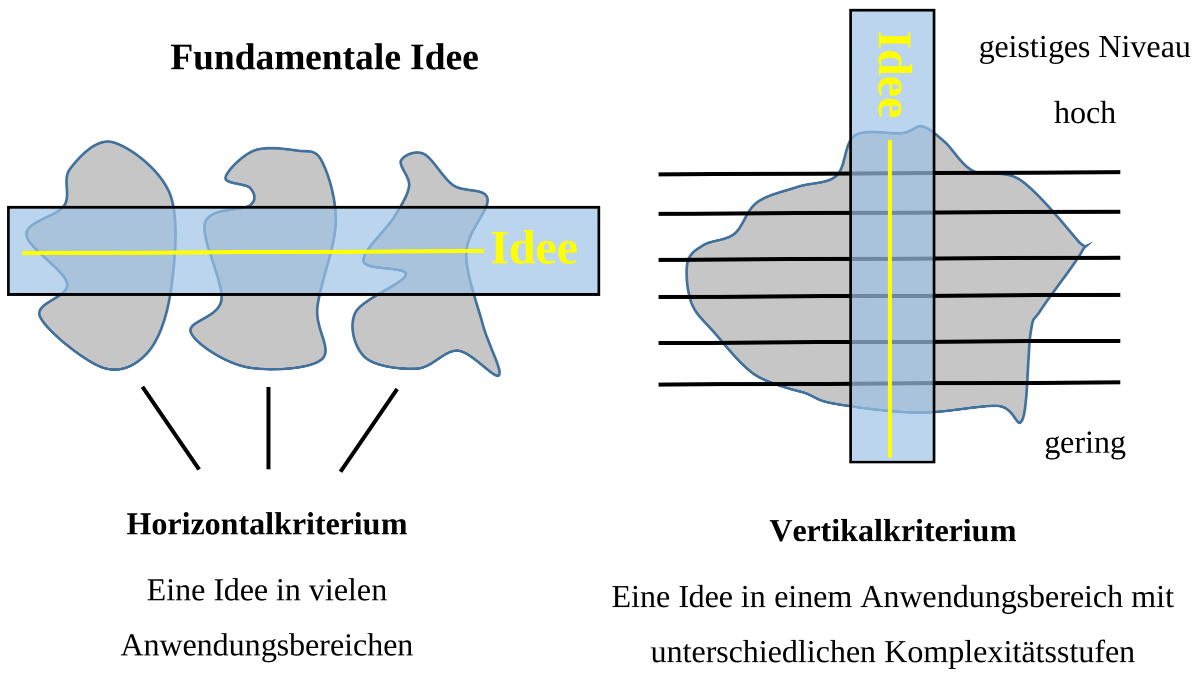


Abbildung 2.3: Horizontal- und Vertikalkriterium des Prinzips „Fundamentale Idee“

Beim Horizontalkriterium zeigt sich eine fundamentale Idee in vielen Anwendungsbereichen und wird dadurch immer wieder erinnert. Beim Vertikalkriterium zeigt sich eine Idee in einem Anwendungsbereich in Stufen unterschiedlicher geistiger Komplexität.

[133] Humenberger, et al., 1995, Kap 1: Johann Humenberger gibt dort einen Überblick der Entwicklung der Bedeutung des Begriffs „Fundamentale Ideen“ für die Mathematik und ihre Didaktik. Dort ist eine starke Betonung des Fachlichen wahrnehmbar.

Das Vertikalkriterium kann auch in einer Nähe zum Spiralprinzip gesehen werden. Bruner betont jedoch die Entwicklung der Fachinhalte, deren Komplexität nach und nach zunimmt. Dagegen bezieht sich das Spiralprinzip auf die Anwendungen und Situationen, über die sich das fachliche Wissen entwickelt und in denen es wieder Anwendung findet und entsprechend steigender Komplexität der anwendungsbezogenen Anforderungen die Bereitschaft der Lernenden fördert, mehr lernen zu wollen, weil die Anwendung reizt, das Fachliche als Mittel zum Zweck des problemlösenden Wollens zu verinnerlichen.

Das Prinzip der fundamentalen Ideen betrifft insbesondere die fachinhaltliche Entwicklung über Anwendungen mit dem Ziel, die Problemlösefähigkeit zu erweitern. Damit zeigt es sich aber auch als ästhetisches Prinzip zur Gestaltung inhaltlicher Szenarien für Lernprozesse des Mathematikunterrichts, in denen die Anwendungen entsprechend mathematikhaltig sind, aber nicht vordergründig das Mathematikwissen zum Thema machen.

Abbildung 2.4 veranschaulicht das Prozesshafte des Lernprinzips *Fundamentale Ideen.* Es wird herausgestellt, dass mit dieser Methode auch insbesondere die dritte Grunderfahrung Heinrich Winters unterrichtlich umsetzbar ist, indem das erworbene Wissen, entwickelt über die spezifischen Lernangebote, sich auch in neuen Situationen als problemlösend erweist und derart den Lernenden Mathematikwissen sinnstiftend nahebringt.

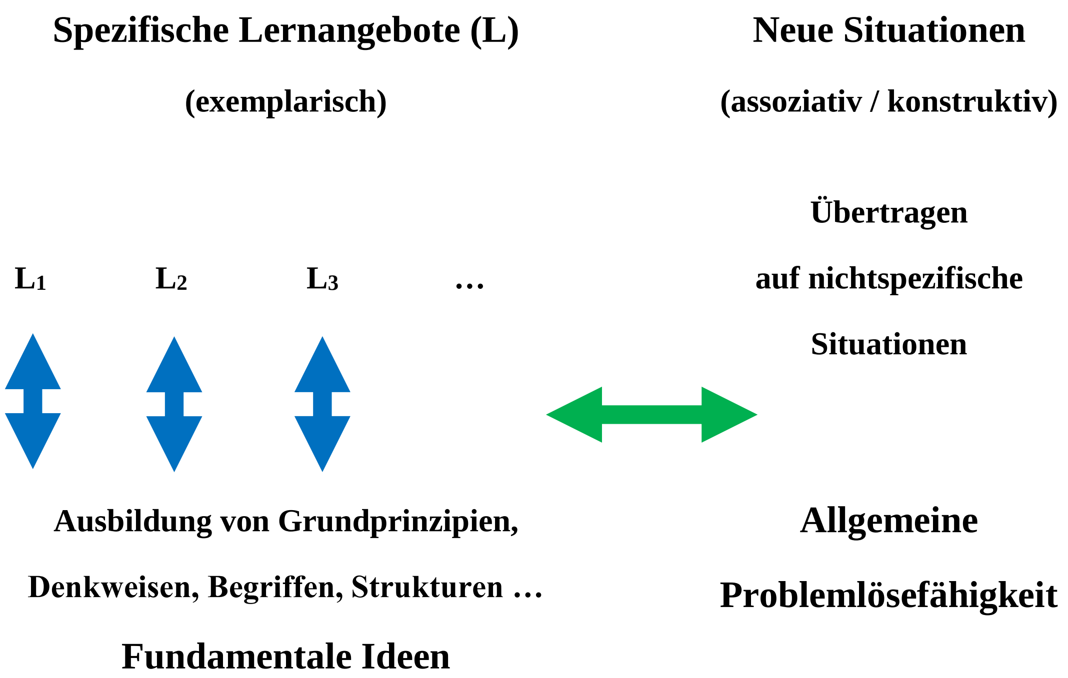


Abbildung 2.4: Spezifisches Wissen überträgt sich auf nichtspezifische Situationen.

2.5.4 Charakterisierung eines ästhetisch verfassten Lernprozesses

Eigentliches Ziel eines ästhetisch verfassten Lernprozesses ist eine Entwicklung der Fachlichkeit unter dem Wissen emotional begleiteter Wahrnehmung und gefühlsmäßiger Bewertung seitens der Lernenden. Über eine geeignete Gestaltung von Lernprozessen soll sich bei Lernenden ein „**Wollen für das Sollen**" einstellen können.

Die Hoffnung auf eine Ausbildung dieser Haltung bei den Lernenden stützt sich auf folgende Gestaltungsprinzipien, die als prozessuale Verfeinerungen der in Abschnitt 2.5.3 genannten Aspekte gesehen werden können:

(1) Die fachliche Entwicklung muss aus der Sicht und dem Vermögen der Lernenden gestaltet sein. Sie sollte nicht über einen vorstrukturierten fachlich gegliederten Lehrgang vermittelt werden, bei dem Wissen abgebildet wird, ohne in der Erfahrungswelt der Schüler als bedeutend erkannt worden zu sein. Ein diesbezüglich nach den Winter'schen Grunderfahrungen anwendungsorientiert gestalteter und wissensaufbauend wirksamer Lernprozess verbessert nicht nur die erhoffte Bereitschaft zur Mitarbeit seitens der Lernenden. Er fördert diese über das Zusammenspiel fachlicher und emotionaler Bewertung und einer darüber positiv konnotierten Wahrnehmung des Unterrichtsverlaufs und der Wissenserweiterung.

(2) Eine wesentliche Aufgabe des Lehrenden besteht darin, mit den Lernenden einen vertrauensvollen Kontakt aufzunehmen, auszubauen und aufrecht zu erhalten. Im Zusammenhang mit Lernprozessen kommt dazu jedoch eine ebenso wichtige Aufgabe hinzu: Der Unterricht muss die Lernenden bezüglich der stofflichen Progression derart kommunikationsfähig machen, dass sie über die neuen Inhalte auch sprechen können.

(3) Die Lernbereitschaft kann gesteigert werden, wenn es möglich ist, die Situation, über die gelernt wird, nicht direkt und primär auf das fachliche Lernziel zu beziehen, sondern das zu Lernende als eine Hilfe bei der Lösung eines Problems herauszustellen, bei der das Neue sich über eine Hürde ergibt, mit deren Überwindung der Lösungsweg weitergeführt werden kann. Dazu passend kann der Lernprozess als szenisch gestaltete Aufführung gestaltet werden, in der Lernende aktive Rollen annehmen und sie Wissenserweiterungen als Steigerung ihrer Performanz erfahren können. Dafür entworfene Lernskripte müssen dazu geeignet sein, die Fähigkeiten der Lernenden derart einzubinden.

(4) Schulmathematik muss sich ganzheitlich an der Erfahrungswelt der Lernenden orientieren und deren altersgemäße kognitive Entwicklung berücksichtigen. Dazu muss die fachliche Entwicklung von den Lernenden aus gedacht und gestaltet sein.

2.6 Ästhetisch verfasster Mathematikunterricht

Wie geht und wozu braucht man Mathematik? Und wodurch zeigt sich Mathematikunterricht als *ästhetisch verfasst* aus der Sicht der Lehrenden und entsprechend *ästhetisch empfunden* in der bewertenden Sicht der Lernenden?

Unter Berücksichtigung des Allgemeinbildungsauftrags des Faches und auch aus aisthetischer Sicht entscheidet nicht ausschließlich der fachliche und fachmethodische Aspekt darüber, ob Mathematikunterricht derart konnotiert ist. Maßgeblich für eine ästhetische Fundierung ist die Gestaltung eines langwährenden zirkulären Prozesses der Fach-Erziehung zwischen inhaltlicher Entwicklung und emotionaler Bewertung durch die Lernenden, über den sich die Antworten auf beide Kernfragen im Bewusstsein der Lernenden verorten und dem Fachlichen eine überfachliche Bedeutung geben.

Nach Norbert Jüdt gibt es *„in jedem Fach einen Kanon spezifischer Inhalte und Fachbegriffe, die mit Bedeutungsvorstellungen verknüpft werden müssen“*. Dabei gehe es um die Art, wie das Neue wahrgenommen werde, also um „*Differenzierung und Wahrnehmung*“, um die „*Versprachlichung der neuen Vokabeln*“ und um „*fachspezifische Darstellungsformen für die Sachbegegnung und die Ergebnissicherung*.“ [134]

Mit Blick auf Mathematik stellen sich diesbezüglich Fragen:

Wie viel gemeinsames Verständnis für Mathematik haben Menschen?

Wie groß ist die Bereitschaft, sich überhaupt mit Mathematik zu befassen?

Wie viel hat die schulische Bildung zum Bild von Mathematik beigetragen?

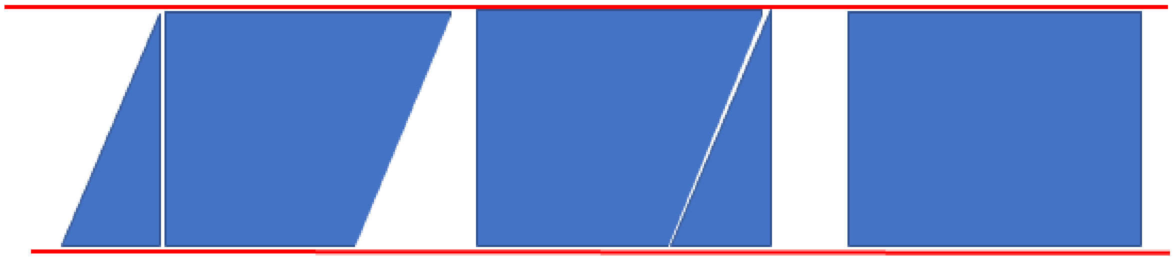
Vor einer konstruktiven Befassung mit der Thematik der Unterrichtsplanung und -praxis sollen zwei Beispiele aus dem Unterricht und der alltäglichen Erfahrung des Verfassers defizitäre Erfahrungen hinsichtlich der gestellten Fragen aufzeigen:

- Wenn zum Beispiel das Wort *Dreihundertsiebenundvierzig* gesprochen wird, können Menschen unseres Kulturkreises, ohne zu überlegen die Ziffernfolge 347 schreiben und haben dabei ein gemeinschaftlich verfasstes Bewusstsein, die gleiche Zahl darzustellen. Auf die Frage, warum das so ist, sind die Antworten nach Erfahrung des Verfassers unscharf: „Das hat mit dem Zehnersystem zu tun, aber wie das ist, weiß ich nicht mehr so genau.“

- Mehr Sicherheit hinsichtlich der Begründung eines Sachverhalts gibt es, wenn Lernende eine Bilderfolge wie in Abbildung 2.5 davon überzeugt, dass die Fläche eines Parallelogramms mit

[134] Jüdt, 2014, S. 173f.

Hilfe der Fläche eines Rechtecks bestimmt werden kann.



Satz: Ein Parallelogramm hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Rechteck, das aus einer Seite und der zugehörigen Höhe des Parallelogramms gebildet ist.

Abbildung 2.5: Ikonische und textlich/sprachliche Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Flächeninhalt eines Rechtecks und eines Parallelogramms

Das Verständnis für beide Sachverhalte beruht auf dem Prinzip von Zerlegen und Zusammensetzen. Eine Erklärung der unterschiedlichen Nachhaltigkeit beim Verstehen liegt im Abstraktionsgrad der Begrifflichkeit. Die Flächeninhalt-Problematik beruht auf einer Verallgemeinerung sinnlich wahrnehmbarer Formen, während sich die symbolische Schreib- und Sprechweise der Zahldarstellung auf eine Erfindung durch die Menschen bezieht, die hinsichtlich der kognitiven Leistung gegenüber der Formwahrnehmung einem höheren Abstraktionsgrad entspricht. Ursächlich für das Unverständnis der dezimalen Schreibweise kann auch eine zu schnell vorgenommene Formalisierung der Darstellung in der Begriffsbildungsphase sein.

Zerlegen und Zusammensetzen sind allgemeine, überfachliche heuristische Strategien. Sie werden bei jeder wissenschaftlichen Tätigkeit verwendet. In der fachsystematisch aufbauenden Schulmathematik führten diese beiden Prinzipien in Analogie zur Hochschulmathematik zu Fachgebieten wie z. B. Geometrie, Algebra, Funktionen usw. mit einem jeweils spezifischen begrifflichen Aufbau und einer spezifischen Symbolik.

Eine rein formal-regelbasierte Vermittlung von Mathematik in Sprache und symbolisch-algorithmisch betonter Notation entspricht jedoch nicht einem aisthetisch verfassten Prozess der Aneignung von Wissen, weil hier das *singuläre* Denken und das eigenständige Konstruieren, also die Entfaltung des individuell bewussten Wissens, zu früh überlagert bzw. ersetzt wird durch sowohl in Abstraktion als auch in Notation aufgesetztes *reguläres* Wissen. [135]

Bei dieser Methode werden die drei Ebenen des individuellen Wahrnehmens, Verarbeitens und Verstehens, die erst zusammenwirkend eine Begriffsverortung ergeben, nicht ausreichend ausgeprägt. Eine Folge dieser auch zeitlich zu schnell verlaufenden Ergebnis-Sicherung ist eine

---

[135] Die Begriffe reguläres und singuläres Wissen beziehen sich auf eine Studie von Gallin. Vgl. Gallin, 1998.

formalisierte Wissensrepräsentation, bei der die individuellen Vorstellungen keine entsprechenden Assoziationen auslösen. Als Beispiel für eine solche Entwicklung kann das Wort „Rechenregel“ dienen. Das regelbasierte Vorgehen beim Verarbeiten von Rechenausdrücken könnte

zum Beispiel bei einer entsprechenden begrifflichen Entwicklung des Rechnens mit Zahlen über Eigenschaften im Umgang mit Zahlen hergestellt werden. [136]

Zur Verdeutlichung solcher Begriffsabkürzungen dient eine praktische Erfahrung des Verfassers als Lehrerbildner. Zum Unterrichtsbesuch eines Referendars in Klassenstufe 6, der einige Stunden der Unterrichtseinheit Rechnen mit Bruchzahlen vom Fachlehrer übernommen hatte, wurde das Thema „Multiplikation von Bruchzahlen“ behandelt, dessen Ergebnis – nach einem Beispiel – als zwölfte(!) Regel für das Rechnen mit Brüchen allgemein formuliert und zusammen mit dem Beispiel in Plakatform an der Wand des Klassenzimmers ausgehängt wurde: „Zwei Brüche werden multipliziert, indem man den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner multipliziert“. [137]

Nach den beruflichen Erfahrungen des Autors ist das Beispiel typisch für eine ausreichende Anzahl analoger Erfahrungen, die aufzeigen, dass mit solchen Methoden keine ausreichenden, den Lernenden angepassten, prozessualen Begriffsentwicklungs-Beziehungen hergestellt werden. Eine Folge davon ist eine gestörte Syntax-Semantik-Beziehung, die ebenfalls als eine Ursache des individuellen Ablehnens von allem, was mathematisch konnotiert ist, angesehen werden kann.

2.7 Elemente des Spielerischen

Die Pädagogik kunstnaher Fächer sieht ein hohes Potenzial für ästhetische Erfahrungen über projektartigen Unterricht. [138] Wenn in einer schulischen Theatergruppe (meist als klassenübergreifende Arbeitsgemeinschaft angeboten) ein Theaterstück einstudiert wird, lernen die Akteure als „Schauspieler“ zunächst eine Rolle auszufüllen, die zu einer Aufführung für ein Publikum führt. Ähnlich ist dies mit entsprechenden Projekten in Musik und Bildender Kunst. Johann Beichel propagiert, szenische, musikalische, tänzerische und mediale Gestaltungselemente in jeden Unterricht einzuführen, um über eine derart ästhetische Erziehung die Akteure

[136] Vgl. dazu die szenischen Gestaltungen von Unterrichtseinheiten zur Begriffsbildung der Zählzahlen und des Rechnens mit ihnen in der „Welt der Würfelzwerge“ in den Abschnitten 4.3.1 und 4.3.2.

[137] Die anderen elf Plakate waren vorab ausgehängt worden. Für eine begriffsbildende Vorgehensweise zu diesem Thema vgl. die Abschnitte 3.4.3.2 und das Unterrichtskonzept 4.3.3.

[138] Beichel, 2010, S. 8; Beichel, et al., 2017, Einleitung.

in ihrer sinnlichen Wahrnehmungsfähigkeit, Entfaltung von Werturteilsfähigkeit, Geschmacksbildung und Bereitschaft zu stärken und zu befähigen, Werturteile intersubjektiv in das ästhetische und moralische Handeln einzubringen [139], und Frederik Durczok schärft diese Sicht pädagogisch: Er sieht das ästhetische Potenzial spielerischer Elemente nicht einfach darin, dass etwas Theater gespielt werde, sondern dass „*das Spiel als Ganzes theatralische Kraft und Spannung habe*“. [140]

Mathematikunterricht hat als Fachunterricht ein weiteres Problem hinsichtlich gestalterischer Freiheiten. Während sich ästhetische Prinzipien in kunstnahen Fächern dem schillerschen Prinzip des Spielerischen widmen können, muss sich ästhetisch verfasster Mathematikunterricht an einer stärker betonten Zielorientierung hinsichtlich der fachlichen Entwicklung orientieren.
Fachunterricht hat jedoch als primäre Aufgabe, die Lernenden nicht zu „mit Mathematik spielenden“ Akteuren zu erziehen, sondern sie zu „mit Mathematikwissen gestaltenden „Dramaturgen“ auszubilden, die fachliches Wissen konstruktiv anwenden. Das projektartige Arbeiten im Unterricht muss sich dabei allerdings nicht immer auf die Anwendbarkeit des Gelernten in der Welt und außerhalb des Faches beziehen. Das bedeutet aber nicht, dass der Mathematikunterricht in Lernsituationen auf szenisches Spiel verzichten muss. Beispiele dafür finden sich im Praxisteil in Kapitel 4. Insbesondere Phasen des entdeckenden Lernens bieten Möglichkeiten szenischer Gestaltung.

[139] Beichel, et al., 2017, S. 5.
[140] Durzcok, in Beichel, et al., 2017, S. 33.

3 Ein Modell für Lernprozesse im Mathematikunterricht

Dieses Kapitel widmet sich der Zusammenführung fachdidaktischer Erkenntnisse mit einer ästhetischen Fundierung des Unterrichts im Fach Mathematik. Fachunterricht wird hier aufgefasst als ein hinsichtlich der Entwicklung der Fachlichkeit gelenkter Prozess, in dem grundlegende Kenntnisse und Methoden vermittelt werden und der die Lernenden dazu befähigt, Gelerntes gestaltend anzuwenden und bewusst zu verorten, zu erinnern und zu behalten.

Das eigentlich Neue dieser Vorgehensweise, eine „ästhetisch verfasste Gestaltung von Lernprozessen“, wird über eine erweiterte Sicht auf erzieherische Tätigkeiten hergestellt, deren Bildungswirksamkeit auf die Lernenden über einen aisthetisch konsistenten Aufbau der Wissensbasis hergestellt wird. [141] Daraus abgeleitete „Elemente des Modells“ werden für eine integrative Prozessführung verwendet, bei der Lernende mit Fachlichem zusammengeführt werden, welches in der erfahrbaren Welt der Lernenden eine überfachlich bildungswirksame Bedeutung erhält.

Das Modell legt den Schwerpunkt auf die Entwicklung von Lernprozessen und nicht auf ebenso wichtige Prozesse des Übens, der praxisnahen Anwendung und der Vertiefung von Inhalten für fachlich Begabte, da bei diesen Prozessen den Lehrenden und Lernenden andere Funktionen zukommen und stärker individuelle Neigungen und Fähigkeiten der Lernenden beachtet werden sollten.

In ästhetisch verfassten Lernprozessen sollte die grundlegend fachliche Basis in einer Lerngruppe gemeinschaftlich angeboten werden, da das Sprechen über Fachliches unter den Lernenden die Sache fördert. Für das Unterrichten in Lerngruppen sprechen auch soziale Gründe. Ein allgemeinbildendes Schulsystem sollte ermöglichen, dass Lernende den eigenen Lernstand im Vergleich zur Lerngruppe einschätzen können, um entsprechend der Eigenwahrnehmung handeln zu können und damit gegebenenfalls erkannte Defizite individuell differenzierend aufgearbeitet werden können.

Als Einstimmung und Überleitung gibt Abschnitt 3.1 eine ergänzte Rückschau auf die Kapitel 1 und 2, bevor in Abschnitt 3.2 die Elemente des Modells entwickelt werden, die in Kapitel 4 exemplarisch über unterrichtspraktische Anwendungen belegt werden. Abschnitt 3.3 behandelt grundlegende mathematische Begriffe, deren Entwicklung im Unterricht als eine zentrale Aufgabe der Lehrenden angesehen werden sollte.

---

[141] Vgl. Abschnitt 1.6.

3.1 Ästhetische Fundierung von Lernprozessen

Hinsichtlich der Suche nach einer theoretischen Basis für Bildungsziele im Zusammenhang mit *Lernen* schreibt Norbert Jüdt:

> *„Die vielen Beschreibungen von Lernen aus verschiedenen Theorien und Kontexten, angesiedelt auf sehr unterschiedlichen Komplexitäts-Ebenen, die für sich genommen auch alle Sinn machen, indem sie jeweils bestimmte Hinsichten des Lernens aus verschiedenen Blickrichtungen formulieren, lassen aber (...) auch kein System erkennen, das sich (*durchgängig und fundamental, Anm. d. Verf.*) als Grundlage für eine Formulierung von Bildungszielen eignen würde.“* [142]

Auch eine rein neurowissenschaftlich-aisthetisch fundierte Beschreibung von Lernen, als *Modifikation synaptischer Übertragungsstärke vernetzter Neuronen*, ist zwar eine jeden Lernvorgang begleitende Aktivität (in Poppers *Welt 1* [143]). Sie eignet sich jedoch nicht als Definition von Lernen in pädagogischem Sinn (in *Welt 2*, dokumentiert in *Welt 3*), da diese neuronalen Aktivitäten auf der biologischen Ebene nur eine physikalisch-chemisch organisierte Voraussetzung für Lernen darstellen. Dies betrifft alle Vorgänge menschlicher Aktivitäten, sowohl bei willentlichen als auch bei unbewussten kognitiven Handlungen.

Derart auch als biologisches Lernen aufzufassenden Vorgänge stellen jedoch nur eine Grundvoraussetzung für zielorientiertes und wertevermittelndes Lernen dar, das sich im fachlichen Aufbau und über seine Anwendungen im Unterricht ereignen sollte. In diesem Kontext sollte jedoch auch anerkannt sein, dass sich Bewusstwerdungs- und Bewusstseins-Prozesse, die sich in *Welt 2* ereignen, nicht ausschließlich transzendental oder (gemäßigt ausgedrückt) rein geistig und unabhängig von *Welt 1* ereignen können.

Für die nachfolgenden Überlegungen stützt sich der Autor folglich auf die These, dass jede Form geistiger Prozesse unabdingbar mit neurologischen (also materiellen) Vorgängen verknüpft ist und deshalb jeder kognitive Prozess nicht unabhängig von *Welt 1* gesehen werden kann.

Ob es darüber hinaus weitere Einflüsse immaterieller Art gibt, geben kann oder könnte, erscheint dem Verfasser dieser Studie mit den derzeit den Menschen zur Verfügung stehenden Wahrnehmungsmöglichkeiten bzw. die Wahrnehmung unterstützenden Darstellungs-Werkzeugen nicht überzeugend begründbar zu sein. Auch jenes, was gemeinhin als „transzendentales

[142] Jüdt, 2016, S. 123.
[143] Zu Poppers *Drei-Welten-Modell* vgl. Abschnitt 1.5.

Denken“ bezeichnet wird, ist in unserer wahrnehmbaren Welt weitreichend wirksam und besitzt im vorab genannten Sinn *seine* Wirklichkeit in *Welt 1*.

Poppers *Drei-Welten-Modell* ist darüber hinaus auch grundsätzlich verträglich mit der in Abschnitt 1.5 (vgl. Abb. 1.4) dargestellten Untrennbarkeit von Materie und Geist [144], dort mit Sach- und Glaubenswelt bezeichnet. So kann man zum Beispiel das, was als phantasievolles Gestalten oder Lernen bezeichnet wird, gut mit der menschlichen Fähigkeit verknüpfen, etwas über dem Gegebenen als möglich erachtetes Neues anstreben zu wollen, als *Möglichkeit oberhalb der Wirklichkeit*.

3.1.1 Bildung ist grundsätzlich ästhetisch verfasst

Die Darstellungen in der nachfolgenden Abbildung 3.1 zeigen Aspekte Ästhetischer Bildung, die von Norbert Jüdt mit einer Interpretation zur Anwendung auf das Fach und das Fachgebiet Mathematik verknüpft wurden. [145]

Die in der Abbildung zitierten Texte von Klaus Mollenhauer und Richard Rorty betonen den Prozesscharakter der Bildung und die erzieherische Wirksamkeit eines angewandten Pragmatismus in lebenspraktischen Situationen.

Diese Übersicht wird in diesem Kapitel als „Konstruktionsbasis“ dienen, an der sich eine ästhetische Fundierung von Lernprozessen im Mathematikunterricht orientieren kann.

Sofern Bildung mit der Wahrnehmung beginnt und ästhetisch geschieht [146], müssen Erziehungsprozesse mit Wahrnehmbar-Machen beginnen und auf das Verstehen der Lernenden ausgerichtet sein. Verstandenes zeigt sich aber wiederum nur über die Befähigung der Lernenden, ihrer Lerngruppe und den Lehrenden die zu lernende Sache verstehbar kommunizieren zu können.

Diese Wirksamkeit solcher Konstruktionen muss im Verlauf des Lernprozesses zwischen Lehrenden und Lernenden transparent vermittelt und für die Lernenden bewusst wahrnehmbar gemacht werden, damit Mathematikunterricht sinnstiftend ist und darüber hinaus auch Nachhaltigkeit erlangt.

Mit den Ausführungen in Kapitel 1 und 2 sollte die Darstellung ohne weitere Erläuterungen inhaltlich einzuordnen sein.

---

[144] Dabei ist anzumerken, dass es sich hinsichtlich dieser Problematik um eine grundsätzliche und nicht eine begriffliche Gemeinsamkeit handelt. Glaube hat als religiöser Begriff (z. B. als Vertrauen in Gott) eine andere Bedeutung als ein wissenschaftlich orientierter Glaube (z. B. ein Für-Wahr-Halten). Vgl. Pleines, 2008.

[145] Vgl. Jüdt, 2016, Abb. 24, S. 152. Die Abbildung wurde im Format der Arbeit angepasst und farblich gestaltet, ist jedoch inhaltlich unverändert übertragen.

[146] Vgl. Abbildung 3.1.

Nach Klaus Mollenhauer umfasst Bildung alles, was der Fall ist, “wenn ein heranwachsendes Individuum u.a. durch die Vorgänge der „Aneignung von Welt“ und in der Herausbildung von Kräften (Humboldt) allmählich durch verschiedene Stände von Erlebnissen, Erfahrungen, Kognitionen, durch Formen von Bewusstsein, Selbstreflexion, kulturellen Anpassungen sich hindurchbewegt – im Sinne eines nie endenden Weges …“

Bildung und Ästhetik

Ausgangspunkt: ein neurobiologisch unterlegter kulturanthropologischer Bildungsbegriff

Richard Rorty “beurteilt Theorien nach dem lebenspraktischen Nutzen und bezieht sich damit auf Gedanken des amerikanischen Pragmatismus. Ein Pluralismus von Theorien wird somit unterstützt, weil dadurch die Erfüllung grundsätzlich verschiedener Bedürfnisse garantiert ist.“

ästhetisch: Empfindung der eigenen Begrenztheit, Bedürftigkeit, Endlichkeit angesichts des „Erhabenen“

Ergänzt um eine Anwendung auf Mathematik (M)

aisthetisch: Erzeugung von Gegenstands-Qualia

(Z. B. „Transzendentalität“, Religiosität, Bindungsbereitschaft)

Wenn Mathematik die abstrakt-formale Modellierung der Welt bedeutet, so müssen auch dort Grenzfragen des Menschseins auftauchen: die Idee der Unendlichkeit, von Chaos und Ordnung …

(Z.B. Sachorientierung, Sachlichkeit, Rationalität als Haltung)

Mathematik greift auf konkret-figurative Gegenstandsqualia zurück und erzeugt selbst neue.

ästhetisch: Wahrnehmung des Anderen mit seinen Emotionen und Werten (Empathie)

Bildung *geschieht* ästhetisch

ästhetisch: Bewusstwerdung und Ausdifferenzierung von emotionalen Bewertungs-Qualia

(Z. B. Sozialität, Empathiefähigkeit, Mitleid, Verantwortlichkeit)

Der Andere begeistert mich möglicherweise für die Mathematik, weil ich seine emotionale Beteiligung ebenso spüre wie seine Einfühlsamkeitsbereitschaft in meine mathematischen Schwierigkeiten.

(Z. B. Emotionalität, Bindungsfähigkeit, Wertebezug, Geschmack, Schönheit)

Das Individuum bewertet auch mathematische Gegenstände emotional hinsichtlich ihrer Bedeutsamkeit.

aisthetisch: Wahrnehmung des Anderen und seiner Wirklichkeitskonstruktion (Konsensualität)

ästhetisch: aus Emotions-Qualia folgende Selbstbezüglichkeit

(Z. B. Validitätsprüfung der eigenen Wahrnehmung, kritische Distanz von eigener Wahrnehmung und Meinung – Kommunikation / Interaktion)

Im Kontext sozial arrangierten Lernens bin ich angewiesen auf den Anderen, der mir (intentional oder indirekt) hilft, mathematische Sachverhalte zu verstehen.

In der Konsensualität ereignet sich Kultur

(Z. B. Individuation, Identitätskonstruktion, Eigenbewusstsein, Reflexivität – aber auch „Relativitätsbewusstsein“, vielleicht i. S. Rortys)

Am Umgang mit Mathematik entscheidet sich, ob ich mich für einen begabten Mathematiker halte und wie weit Mathematik mein Leben bestimmen soll.

Abbildung 3.1: Bildung geschieht ästhetisch – zum Beispiel auch in Mathematik (vgl. Jüdt, 2016, Abb. 24, S. 152).

3.1.2 Der „hermeneutische Zirkel“ in Bezug auf fachliche Lernprozesse

Die Hermeneutik, altgriechisch ἑρμηνεύειν (hermēneúein), dt. erklären, auslegen, übersetzen, ist eine bis auf die Antike zurückgehende philosophische Wissenschaft, die sich mit der Interpretation und dem Verstehen von Texten und Symbolen beschäftigt. [147]

Nach Platons *Ideenlehre* [148] gibt es *zwei Seiten des Seins, die es zu verstehen gelte, die sinnlich wahrnehmbare Beschaffenheit und das nicht sinnlich wahrnehmbare wesenhafte Sein*. Danach komme bei jedem erkennbaren Ding eine vollständige geistige Erkenntnis in fünf Schritten zustande:

1. *über den ausgesprochenen Namen,*
2. *durch eine sprachlich formulierte Begriffsbestimmung,*
3. *über das durch die fünf Sinne wahrnehmbar Erfasste,*
4. *vermittels der kognitiven Vorstellungen von solchen Dingen,*
5. *über dasjenige, was sich nur durch Vertiefung in der Vernunft erkennen lässt und das wahre Urbild, die Idee des Dinges ist, eine reine, nicht sinnliche Wahrheit – das ursprünglich vollkommen Wesenhafte*.

Der fünfte Schritt stellt eine Stufe dar, die in der Geschichte der Philosophie mit dem *Universalienproblem* bzw. dem *Universalienstreit* korrespondiert. Diese Stufe betrifft die grundlegende Frage, ob es *ein Allgemeines* wirklich (also wesenhaft) gibt oder ob es sich dabei nur um reine Konstruktionen des menschlichen Geistes handelt. Dieser Frage wird in dieser Arbeit nicht weiter nachgegangen, da sie hinsichtlich einer zugrundgelegten Drei-Welten-Theorie nicht beantwortet werden kann. [149] Platons Stufen eins bis vier sind jedoch wesentliche Elemente, deren Zusammenwirken das Verstehen von Dingen treffend charakterisiert.

Aristoteles ergänzt Platons Beschreibung um eine logische Komponente, indem jegliche Aussage, als Ausdruck und elementare Grundlage des logischen Denkens, immer im Fragebezug zu dem stehe, was mit ihr gemeint ist, somit als ein Interpretieren aufgefasst werden könne, welches ein *innerlich Gedachtes in geäußerte Sprache* umwandelt. Andererseits erfordert dann aber - als logische Symmetrie - die Auslegung des Gesprochenen den umgekehrten Weg von der Äußerung zur gedachten Aussageabsicht. Das Interpretieren erweist sich dabei als ein symmetrischer Vorgang zwischen verbalen Äußerungen und ihrer Sinnhaftigkeit.

---

[147] Zusammenfassung in eigenen Worten nach Störig, 1981, 2. Kapitel, S. 143ff.
[148] Ebd.
[149] In Poppers Modell (vgl. Abschnitt 1.6) sind auch Verstehensprozesse stets in jeder der drei Welten verortet, aber kulturell nur über deren Zusammenführung erschließbar.

Prägnanter als Platon und Aristoteles kann man nach Meinung des Autors den Vorgang des Verstehens auch mit heutigen aisthetischen Theorien in dieser Kürze begrifflich nicht besser fassen. [150]

Hans Georg Gadamer, unstrittig anerkannt als ein Hauptvertreter der philosophischen Hermeneutik des 20. Jahrhunderts, beschreibt wissenschaftliche Hermeneutik - in Abgrenzung zu einer Theorie oder Methode - als ein *Phänomen des Verstehens und der sachgerechten Auslegung des Verstandenen über eine Herausbildung der Begriffe Wahrheit, Sinn, Erkenntnis und Verstehen über einen nicht endenden Prozess*, der zur Änderung und Weiterentwicklung des ursprünglichen Vorwissens führt, wenn eine Bereitschaft zur Revidierung der eigenen Vorurteile besteht und Offenheit und Empfänglichkeit der Interpreten vorausgesetzt werden kann. [151]

Ein Grundproblem jeglicher Kommunikation, insbesondere der sprachlichen, ist, dass etwas, das verstanden oder interpretiert werden soll, in einem individuellen Prozess angeeignet oder erworben werden muss. Dabei können die Unterschiede je nach Komplexität der Sache oder der Voreingenommenheit der Beteiligten erheblich sein. [152]

In der Hermeneutik spricht man in diesem Zusammenhang von einer *hermeneutischen Distanz oder Differenz*. [153] Während diese Distanz bei alltäglichen Gesprächen oft nicht von Bedeutung ist, kann sie bei Äußerungen über ein spezielles Wissenschaftsgebiet erheblich sein, etwa beim Verstehen-Wollen des Beweises eines „Satzes der Mathematik“. Etwas, das zunächst völlig unverständlich erscheint und auch sein kann, muss in einem Verstehens-Akt gedeutet, verarbeitet und persönlich angeeignet werden.

Im Gegensatz zu Wilhelm Dilthey, der noch davon ausging, dass hermeneutische Differenz über ein *unmittelbares Verstehen* überwunden werden könne, entwickelt Gadamer die Auffassung, die *Zeit als produktive Möglichkeit des Verstehens nutzbar zu machen* und *immer auch die geschichtliche Situation des Verfassers* (als ursprünglichem Interpreten) *zu berücksichtigen* und in das Urteil der (sekundären) Interpretation einzubeziehen. [154]

Gadamer ergänzt diese Differenzüberwindung, indem er beim Verstehen wissenschaftlicher Sachverhalte die Grenzen der Wissenschaft weiter fasst als die Grenzen der wissenschaftlichen Methoden: In der Wissenschaft darf beim Erkennen *„das eigene Sein des Erkennenden mit ins*

---

[150] S. dazu auch Abschnitt 3.1.3.
[151] Vgl. Gadamer, 1986, Bd. I, Zweiter Teil.
[152] Weil sich dabei Menschen nicht nur mit einem Text auseinandersetzen, sondern mit ihren Empfindungen und Gefühlen bei der Verständigung über eine Sache gegenüberstehen.
[153] Gadamer, 1960, S.250ff., 275ff.
[154] Gadamer, 1986, S. 227ff; Gadamer, 1960, S.280f.

Spiel kommen, und sei es nur durch das Stellen von Fragen“. [155]

Aus aisthetischer Sicht und unter der Annahme, dass die Antwort auf die Fragen des Erkennen-Wollenden von außen kommt, kann dieser dies nicht allein über das Stellen von Fragen erreichen. Er muss sich dazu aufmachen oder dazu aufgefordert werden, etwas dafür zu tun. Dies ist ein deutlicher Hinweis darauf, dass insbesondere im Fachunterricht neues Wissen nicht als abgebildetes Produkt angeboten werden darf und Verständnis nicht auf Hausaufgaben oder isoliertes Üben verlagert werden kann.

„Üben, üben, üben“ ist keine Methode eines auf Verstehen und Sinnhaftigkeit zielenden Unterrichts, wenn dieser nicht den Lernprozess als Vermittler des Wissens sieht. Der im Mathematikunterricht didaktisch wohlgemeinte und oft angewendete Versuch der Überwindung einer hermeneutischen Differenz über ausgiebiges „Üben“ (oft von noch nicht Verstandenem) ist nach Meinung des Verfassers eine nicht zu vernachlässigende Ursache für jene unüberwindlich erscheinenden, individuell emotionalen Abneigungen von Lernenden hinsichtlich der Akzeptanz von Mathematik durch schulisch dauerhaft negativ konnotierte Erfahrungen.

Die Hermeneutik beschränkt sich nicht nur auf eine philosophische Wahrheitsfindung. Auch durch Kunst und andere Wissenschaften kann Wahrheit offenbart werden. Zum Beispiel ist auch eine Übertragung der Überwindung hermeneutischer Differenz auf ein Modell eines ästhetisch fundierten Mathematikunterrichts denkbar, bei der die Prozesshaftigkeit in der Überwindung der hermeneutischen Differenz mathematischer Begriffe einer regulären Wissenschaft mit der singulären Auffassung des lernenden Individuums überwunden wird.

Mathematikverstehen vollzieht sich demnach in einem zeitlichen Vorgang der Beschäftigung mit einer Sache. Diese zu verstehen, kann nicht durch die postulierende Darstellung des zu verstehenden Produkts (der Sache) abgekürzt werden.

Gadamer spricht in diesem Zusammenhang von einer hermeneutischen Bedeutung des Zeitabstandes, in dessen Überwindung der wahre Ort der Hermeneutik zwischen Fremdheit und Vertrautheit liege. Hinsichtlich der Prozesshaftigkeit des Verstehens entwickelt die Hermeneutik eine Methode für das Interpretieren von Texten (nach dem bisher Dargestellten nicht nur in philosophisch-historischem Bezug) als ein prinzipiell nicht zu beendendes Gespräch über die Deutung wichtiger Zeugnisse geschichtlicher und kultureller Überlieferungen in Form eines *hermeneutischen Zirkels*, der in vier Stadien beschrieben werden kann (vgl. Abbildung 3.2).

---

[155] Gadamer, 1986, Bd. I, S. 494.

Vier Stadien eines hermeneutischen Zirkels

Zunächst gibt es ein **Vorstadium,** zu dem ein *Vorverständnis* erforderlich ist, für welches eine *Sprache* beherrscht werden und entsprechendes *Vorwissen* vorhanden sein muss. Damit sind *Vorurteile* bzw. *Vorwegnahmen* möglich, mit denen Vermutungen oder Voraussagen über den Sinn eines Textes (oder eines Textabschnittes) gemacht werden können. Daran schließt sich eine *Erarbeitung* des Textes (oder Textabschnittes) in **drei Stadien** an. Diese werden bezeichnete als:

1. **der hermeneutische Entwurf,** in dem eine Verknüpfung zwischen dem bisherigen Verstehenshorizont und dem Anwendungshorizont hergestellt wird,
2. **die hermeneutische Erfahrung**, in der das Vorverständnis erweitert und ggf. korrigiert wird,
3. **der verbesserte Entwurf**, in dem ein tieferes Verständnis erworben und eine Erweiterung und Reifung des Vorverständnisses erreicht wird.

Mit diesem derart überarbeiteten Vorwissen kann der Verstehensprozess erneut angestoßen werden.

Prinzipiell kann dieser Zirkel spiralig wissenserweiternd beliebig oft durchlaufen werden.

Abbildung 3.2: Stadien eines hermeneutischen Zirkels zur Überwindung von Fehlinterpretationen im Zusammenhang mit philosophischem, kulturellem und wissenschaftlichem Interpretieren und Verstehen.

Werden Lernprozesse als Anregungen zu einem schrittweisen und spiralig erfolgenden Erwerb von Bildung aufgefasst, bei dem das lernende Individuum die einzelnen Schritte nachvollziehbar verstehen kann, insbesondere auch deshalb, weil es diesen Weg auch selbst geht und mitgehen will, dann ist der Bildungserwerb ein kontinuierlicher Prozess, der nicht endet, aber in einer kulturell geprägten Gesellschaft auch Übergänge beachten und Rahmenbedingungen erfüllen muss. [156]

Im Fachunterricht sind dazu, zwar in der Regie der Lehrenden verantwortete, aber von den Lernenden möglichst selbstverantwortlich gestaltete Lernprozesse zielführend, die zu einer Änderung oder Weiterentwicklung des ursprünglichen Vor-Wissens führen, indem unerwartete Situationen (sogenannte hermeneutische Schwellen) die Bereitschaft stärken, mehr Wissen

[156] Zum Beispiel die Beachtung von Bildungsplänen und anderen gesellschaftlich gesetzten normativen Rahmenbedingungen öffentlichen Schulen.

aufnehmen zu wollen, um einen Lösungsweg erfolgreich abschließen zu können. Zur Gestaltung unterrichtspraktisch wirksamer Szenarien müssen dafür geeignete fachliche und pädagogische Methoden angepasst werden und, sowohl kommunikativ als auch emotional, in ein gelingendes Gesamtkonzept eines ästhetisch verfassten Unterrichts integriert werden. Die folgenden Abschnitte geben dazu Anregungen entsprechend den in den Überschriften angesprochenen Aspekten und Verknüpfungen.

3.1.3 Fachliche Entwicklung über „symmetrisierende Kommunikation"

Die Vermittlung von Wissen zwischen Lehrenden und Lernenden (und die jeweiligen individuellen Repräsentationen des Wissens in diesem Prozess) kann strukturell als ein Konzept zwischenmenschlicher Kommunikation angesehen werden, bei dem ein verallgemeinerter Symmetriebegriff der Naturwissenschaften und Mathematik pädagogisch verwendet wird. [157]

Abgeleitet vom altgriechischen *symmetria* (*Ebenmaß*) ist die in der Geometrie übliche anschauliche Vorstellung von Symmetrie bei geometrischen Figuren und Körpern mit dem Kongruenzbegriff verknüpft. Geometrische Symmetrie beschreibt die besondere Eigenschaft einer Form, die bei einer entsprechenden Transformation [158] auf sich selbst abgebildet wird.

Eine Verallgemeinerung dieser auch im Alltag üblichen Verwendung bei visuellen Wahrnehmungen verlagert die Begrifflichkeit auf eine die *Invarianz einer Sache* erhaltende Eigenschaft der Transformation. Jan Stewart schreibt dazu [159]:

> *„Symmetrie ist eine besondere Art von Transformation, eine Möglichkeit, ein Objekt zu bewegen. Sieht dieses Objekt nach der Transformation immer noch so aus wie vorher, dann bezeichnet man diese Transformation als eine Symmetrie."* [160]

Nach dieser Beschreibung können auch Lernprozesse als *begriffliche Symmetrie herstellen wollende Transformationen* zwischen Lehrenden und Lernenden aufgefasst werden.

Unterschiedliche mentale Wahrnehmungen und Repräsentationen einer *Sache* (z. B. eines mathematischen Objektes oder Begriffs) sind dann zunächst asymmetrisch. Die jeweiligen kommunikativ und kognitiv stattfindenden Prozesse des Lernvorgangs können als

---

[157] Die Bezeichnung *symmetrisierende Kommunikation* wurde vom Verfasser in Anlehnung an Paul Watzlawicks fünftes Axiom zwischenmenschlicher Beziehungen gewählt: *Kommunikation ist entweder symmetrisch oder komplementär*. Vgl. Watzlawick, et al., 1980, Abschnitt 2.6.

[158] Gemeint ist hier z. B. die Symmetrie einer geometrischen Figur z. B. im Sinne von Achsen- oder Punktsymmetrie.

[159] Stewart, 2008, Vorwort, erste Seite.

[160] Entscheidend für die begriffliche Unterscheidung ist, dass hierbei die Transformation als Symmetrie aufgefasst wird und nicht mehr das transformierte Objekt. Somit können z. B. die Kongruenzabbildungen der ebenen Geometrie als Symmetrien aufgefasst werden i. S. der Invarianz der Erhaltung der Form.

symmetrisierende Transformationen angesehen werden, über die sich das Sachverständnis und damit die Sache selbst als Invariante entwickelt.

Zum Beispiel kann auch die Übersetzung eines Wortes in eine andere Sprache unter Erhaltung seiner Bedeutung als semantische Symmetrie aufgefasst werden.

Abbildung 3.3 stellt die an dieser Transformation mental bzw. wahrnehmbar beteiligten Vorgänge dar, die in dieser Funktion bei Lernprozessen als begriffs-symmetrisierende Kommunikation zwischen Lehrenden und Lernendem angesehen werden kann.

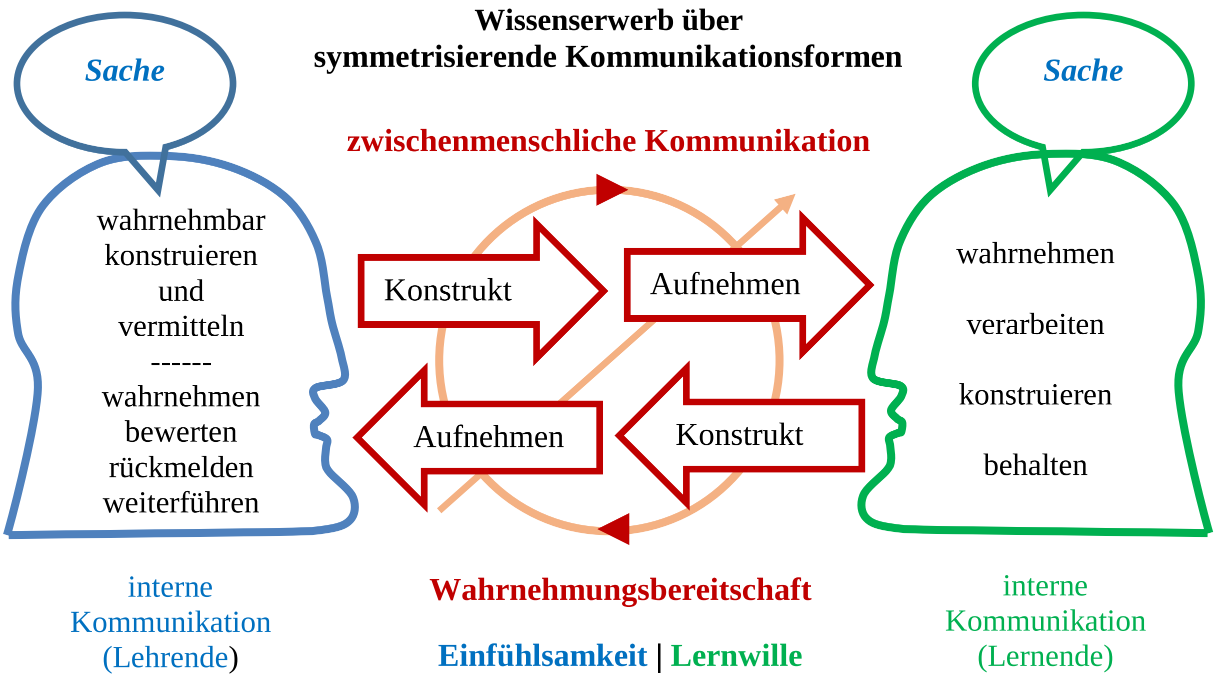


Abbildung 3.3: Visualisierung symmetrisierender Transformationen hinsichtlich eines Lerngegenstandes (einer Sache) zwischen Lehrenden und Lernenden

Der Pfeil und die gerichtete Kreislinie (in brauner Farbe) stehen für den zeitlichen Verlauf des Prozesses und den dabei spiralig angelegten Aufbau des Wissens. Die beiden Legenden, beide jeweils beschriftet mit ***Sache*** (analog zu philosophischer Gepflogenheit wird unter Sache das verstanden, was zur Fachlichkeit gehört), veranschaulichen die anzustrebende *Kongruenz der Bedeutung* hinsichtlich des zu vermittelnden Sachverhalts. Die Beschriftungen in den „Köpfen" vermitteln die jeweiligen Aufgaben, welche Lehrende und Lernende in gegenseitiger Verpflichtung erfüllen müssen. Die Pfeile stehen für die Kommunikationsrichtungen bei der Vermittlung bzw. beim Nachweis von Wissen. Werden Kommunikationsprozesse entsprechend dieser Darstellung als symmetrische Transformationen zwischen Lehrenden und Lernenden hinsichtlich der „Invarianz einer Sache" gesehen, führt dies implizit auch zu einer zentralen Prämisse eines ästhetisch verfassten Unterrichts.

Ein ästhetisch verfasster Lernprozess stützt sich grundsätzlich auf eine Kommunikation zwischen den Individuen einer Lerngruppe (den Lernenden) unter Führung eines Experten (einer Lehrperson), der die Lernenden dazu befähigt, über ihr bisher erworbenes Wissen neues Wissen zu erwerben und diese Erweiterung dadurch zu demonstrieren, dass sie unter sich und in der Gruppe über sachorientierte Gespräche oder Präsentationen den Eindruck gewinnen lassen, dass das zu Lernende verstanden ist.

Über diese Darstellung ist implizit die gegenseitige Verantwortung von Lehrenden und Lernenden bei der Übertragung von Wissen angesprochen. Die Lehrperson organisiert die Führung des Lernprozesses aus der Sicht der Lernenden, und die Lernenden zeigen ihrerseits Verantwortung hinsichtlich ihrer Bereitschaft, bei diesem Prozess mitzuwirken.

Eine solche Bereitschaft in einer zunächst asymmetrischen Situation gelingt über den Aufbau vertrauensvoller Beziehungen – in der unterrichtspraktischen Version auch gelingendes Unterrichtsklima genannt.

3.2 Elemente des Modells

Ein Modell muss hinsichtlich seiner Wirksamkeit Grundvoraussetzungen bieten, die seine planmäßige und zielgerichtete Anwendbarkeit garantieren. Hinsichtlich der Komplexität sollte es mit Blick auf die Lernenden so einfach wie möglich sein, andererseits aber auch ausreichend umfassend, um Prozessplanungen und -gestaltungen begründen und sie nachträglich reflektierend bewerten zu können.

Der Blick auf Mathematikunterricht als schulisches Pflichtfach enthebt die Lehrperson nicht der Verantwortung, auf dessen Bedeutung hinzuweisen. Dazu eignet sich der von Heinrich Winter verfasste Ansatz, Grunderfahrungen zum Fach zu machen und auf diese im Verlauf des Unterrichts immer wieder bewusst zu verweisen. Heinrich Winters Formulierung [161] ist zu komplex, um schülergemäß anwendbar zu sein. Für Lerngruppen, z. B. einer Primar- oder Sekundarstufe, könnte die Antwort auf die Frage der Lernenden – „Warum müssen wir denn Mathe lernen?“ – etwa so lauten: „Wir haben Mathematikunterricht, weil ihr erfahren sollt, dass Mathematik nützlich ist für euren Alltag (1). Aber dazu müsst ihr bereit sein, eine Fachsprache zu lernen, die ihr noch nicht kennt (2). Außerdem kann ich euch dabei noch vermitteln, wie man beim Problemlösen prinzipiell vorgehen kann und wie ihr dabei auch lernt, etwas Neues zu begründen, indem man logisch argumentiert (3).“

[161] Vgl. Abschnitt 2.5.

Im Folgenden werden Aspekte dargestellt, die als grundlegende Elemente eines ästhetisch verfassten Mathematikunterrichts bei Prozessen der Wissenserweiterung berücksichtigt und insbesondere für die Begründung der Prozessgestaltung herangezogen werden sollten. Die Orientierung und Verortung des Unterrichts müssen den Lernenden die Fachlichkeit in Verbindung von und mit Anwendbarkeit vermitteln, um gewollt zu sein. Aber auch die Fachlichkeit muss hinsichtlich ihrer Struktur und Begrifflichkeit entwickelt werden.

3.2.1 Mathematischer Modellierungskreislauf als Element fachlicher Motivation

Für eine Orientierung und Verortung des Fachlichen kann ein in Abbildung 3.4 dargestellter einfacher mathematischer Modellierungskreislauf dazu verwendet werden, den Lernenden sowohl die inhaltliche Bedeutung einer Stunde als auch ihre Mitverantwortung an dieser transparent zu vermitteln. Die vier statischen Stufen 1. bis 4. dieses Kreislaufs sind in Analogie zum „Problemlösezirkel" nach George Polya zusammen mit den (dynamischen) Transformationen dargestellt. Polya nennt in „Schule des Denkens" diese vier Stufen „*Verstehen der Aufgabe, Ausdenken eines Plans, Ausführen des Plans und Rückschau*" und betont hierbei stärker den Prozess gegenüber dem Produkt. Peter Roquette schreibt im Vorwort zur 4. Auflage:

> *„Das Buch [...] ist jedoch kein Mathematikbuch im geläufigen Sinn. Es wird kein Resultat der Mathematik besprochen oder hergeleitet, sondern es geht um die Art und Weise, wie Mathematik betrieben wird, wie mathematische Entdeckungen zustande kommen und wie sie vermittelt werden können und sollten".* [162]

Roquette bedauert, dass wichtige Aspekte der Mathematik, in welcher Analogie, Heuristik, Plausibilität und experimentelle Erfahrung eine bedeutende Rolle spielten, im *modernen Unterricht* oft zurückgedrängt oder gänzlich verschwiegen seien [163].

Mit Abbildung 3.4 kann den Lernenden die Bedeutung der Mathematik im Sinne eines mathematischen Werkzeugkastens zum Lösen von Problemen der Alltagswelt verdeutlicht werden, der nach und nach erweitert wird. Die farblichen Unterscheidungen in der Abbildung ermöglichen im Unterricht das Sprechen über die „blaue" Welt der Mathematik und die „grüne" Welt des Alltags und der jeweiligen Bedeutung der Mathematik in diesen beiden Welten, die es im Mathematikunterricht zu verknüpfen gilt. Wenn diese Abbildung z. B. als Wandplakat während eines Schuljahres dauerhaft im Klassenzimmer aushängt, kann die Lehrperson darüber inhaltlich in ein Stundenthema einstimmen.

[162] Polya, 1949, 4. Aufl. 1995, S. 1 f.
[163] Ebd. S. 2.

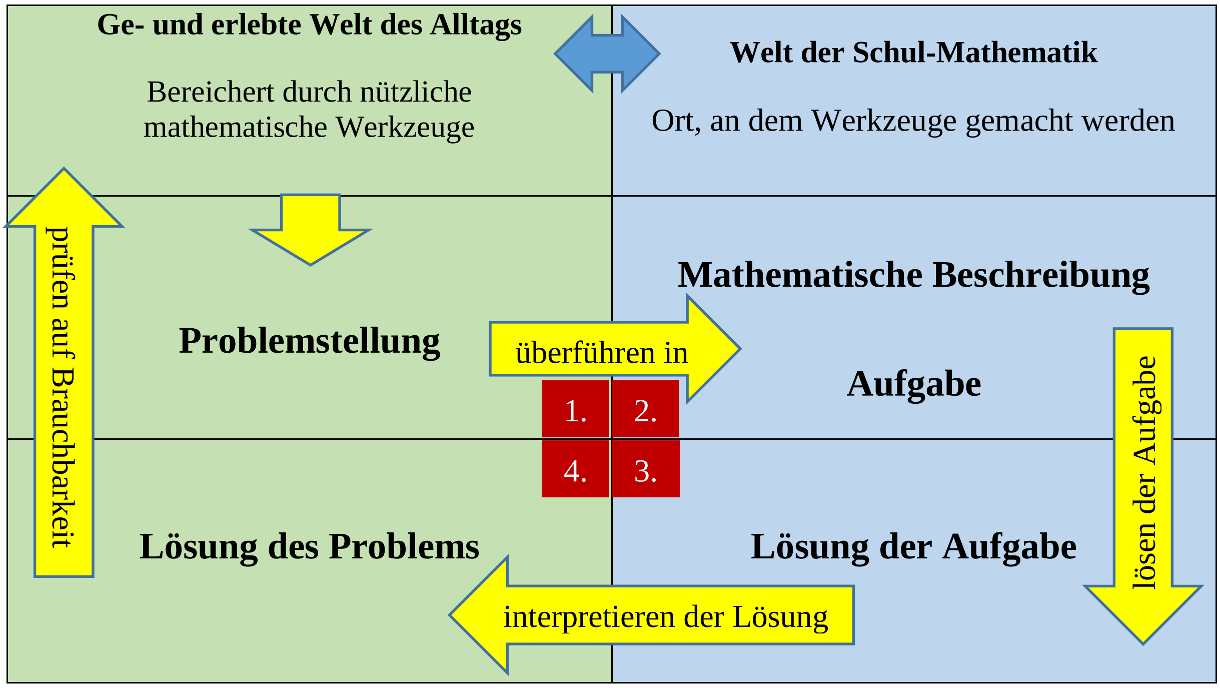


Abbildung 3.4: Mathematik als ausbaufähiger Werkzeugkasten für Probleme der Alltagswelt

Bei der eigenen unterrichtlichen Tätigkeit des Autors war diese Folie nach ihrer erstmaligen Einführung im Unterricht in Klasse 7 und in den darauffolgenden Schuljahren dauerhaft sichtbar im Klassenzimmer angebracht.[164] Dies bot dem Lehrer die Möglichkeit, eine Verortung des Stundenschwerpunkts visuell zu unterstützen und Rollenverteilungen anzusprechen. Zum Beispiel: „Heute stellen wir uns einem Problem, bei dem wir die Phasen 1. bis 4. durchlaufen müssen“ (es geht um ein Anwendungsproblem) oder „Für das Problem, das wir behandeln, benötigen wir die Schritte 2. und 3.“ (es geht also um ein rein mathematisches Problem) oder „Findet für eine Problemstellung der blauen Welt eine Lösung“ usw.

Die Möglichkeit des Sprechens über die grüne und blaue Welt alias Alltags- und Mathewelt bewirkte beim Lehrer den Eindruck einer positiv emotionalen Kopplung mit sachmotivierender Wirkung seitens der Klasse. In der Unterrichtspraxis hat dies dazu geführt, dass sich für die Lernenden die Trennung in „grüne Alltagswelt“ und „blaue Mathewelt“ mit fortschreitender Bezugnahme abschwächte. Die „Mathewelt“ wurde mehr und mehr als Teil der Alltagswelt aufgefasst, in der sie als nützliches Werkzeug weiterentwickelt wird und beim Lösen von Problemstellungen als bedeutend für die Erweiterung der Problemlösefähigkeit in der grünen Welt erkannt wurde. [165]

[164] Auch im nachfolgenden Schuljahr in Klasse 8.
[165] In den praktischen Beispielen in Kapitel 4 wird darauf Bezug genommen.

3.2.2 Fachsprachliche Entwicklung

Die fachsprachliche Entwicklung in Mathematik kann im Unterschied zum Lernen einer Fremdsprache als Einbettung der Fachsprache in die Muttersprache angesehen werden. Dabei haben viele Fachwörter schon alltagssprachliche Bedeutung wie z. B. Kongruenz, Ähnlichkeit, Stetigkeit usw. Außerdem werden in der Mathematik unterschiedliche Darstellungsformen zur Veranschaulichung von Begrifflichkeiten und Inhalten verwendet.

Die am häufigsten in der Mathematik genutzten Darstellungsformen verwenden grafische, numerische, symbolische und sprachlich/textliche Elemente zur Veranschaulichung von Mathematik. Insbesondere die verallgemeinernde „Sprache der Algebra", die für die wissenschaftliche Notation entscheidend dazu beigetragen hat, mathematische Sachverhalte in einer prägnanten Form darzustellen, erweist sich in der schulischen Praxis als motivationshemmend, insbesondere dann, wenn etwa algebraische Formen ohne eine sinngebende Interpretation nach Regeln transformiert werden, die den Lernenden sich inhaltlich nicht erschließen, sondern nur formal angewendet werden.

3.2.2.1 Fachsprache und Muttersprache

Diese Ambivalenz von Alltagssprache und Fachsprache im begriffsbildenden Unterricht naturwissenschaftlicher Fächer drückt Martin Wagenschein treffend aus, wenn er „*die Muttersprache als die Sprache des Verstehens*" und die „*Fachsprache als die Sprache des Verstandenen*" bezeichnet. [166]

Peter Gallin und Urs Ruf verwenden bezüglich dieser Problematik die Begriffe „*singuläre Sprache*" für die Sprache des lernenden Individuums und „*reguläre Sprache*" für die wissenschaftlich normativ verfasste fachliche Kommunikation *repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln*. [167]

Die genannten Autoren sehen es als Aufgabe eines Fachunterrichts, langfristig einen präzisen Sprachgebrauch und eine schriftliche Ausdrucksfähigkeit auszubilden. Sie stimmen jedoch darin überein, altersbedingt die Alltagssprache nicht ständig verbessern zu wollen. Hinsichtlich dieser zu überwindenden sprachlichen Differenz und der Altersgemäßheit der Sprache erscheint es sinnvoll, zu frühe fachsprachliche Regularisierung kritisch zu hinterfragen.

Bei einer in einer Grundschule in Klasse 2 vom Autor angebotenen Projekt „Rechnen lernen in

---

[166] Vgl. Wagenschein, 1988, S. 137. Das Originalzitat lautet: „Die Muttersprache ist die Sprache des Verstehens, die Fachsprache besiegelt es, als die Sprache des Verstandenen."

[167] Vgl. Gallin, 1998 und Winter, 1996, Abschnitt 2.3.

der Welt der Würfelzwerge“ [168] war der Autor erstaunt, dass Kinder ihn nach einer Aufgabenstellung, wie zum Beispiel „Was ist 12 und 24“, belehrend verbesserten: „12 und 24“ sagen wir nicht. Das heißt bei uns „12 plus 24“.

Josef Leisen äußert sich dazu als Didaktiker des Faches Physik. Seine Ausführungen gelten ebenso für den Mathematikunterricht, insbesondere dort, wo Verstehen mit „sauberem Formulieren“ verwechselt wird:

> *„Wir Lehrkräfte machen oft den Fehler, dass wir den Grad des Verstehens daran festmachen, wie viel Fachsprache vom Schüler verwendet wird. Wenn er es in der Fachsprache formulieren kann, dann hat er es verstanden. Anders formuliert, wir machen das Verstehen häufig an der Syntax fest und nicht an der Semantik. […] Sprache ist ein guter und der am häufigsten benutzte Indikator zum Überprüfen des Verstehens. Verstehen findet meistens in einem langen Prozess des sprachlichen Aushandelns statt. Wir Lehrer brauchen einen detektivischen Sinn für das semantische Spurenlesen.“* [169]

Und Heinz Muckenfuß [170] (Muckenfuß, 1995) setzt sich grundsätzlich mit der Problematik auseinander, indem er über die Frage „*In welchem Sinn ist die Fachsprache präziser*“ (gegenüber alltagssprachlichen Formulierungen, Erg. d. Verf.) referiert:

> *„Naturwissenschaftliche Lehrer neigen dazu, Bedeutungsunschärfe von Sätzen und Begriffen grundsätzlich negativ zu bewerten, dies auch unter der professionellen Identität, ein Fach zu vertreten, dessen festgeknüpftes Begriffsnetz der Fachsprache absichere gegenüber dem ‚Kampf um das richtige Wort‘, der zum Alltag der Geisteswissenschaften gehört.“* [171]

In unterrichtlicher Praxis sei es eine tägliche Erfahrung, dass eine noch so saubere Begriffsdefinition Missverstehen nicht ausschließe und dies eine doppelte pädagogische Gefahr darstelle, weil der Grund für Fehlleistungen im subjektiven Unvermögen der Lernenden gesehen werde und Exaktheit im Gewandt der Abstraktheit oder des Formalismus jenen Merkmalen zukommt, die einen Inhalt schwierig, lebensfern und unattraktiv erscheinen ließe.

Fachsprache erscheine in diesem Zusammenhang begrenzt, da der *Sinngehalt* in der Alltagssprache beschrieben und repräsentiert sei. Mit Blick auf die subjektiv kognitive Verortung von

---

[168] Vgl. Abschnitt 4.2.1.
[169] Leisen, et al., 2005, S. 26f.
[170] Heinz Muckenfuß veröffentlicht ebenfalls als Fachdidaktiker des Faches Physik. Die hier verwendeten Ausführungen sind jedoch ohne Einschränkung auf das Fach Mathematik übertragbar.
[171] Muckenfuß, 1995, S. 246f.

Begriffen, die Ausdruck der jeweils individuellen V*erstehensmöglichkeit* der Lernenden sei, sei *„kein Begriff präziser zu verstehen, als es die individuelle Denkstruktur jeweils zulässt“.*

Deshalb sei die

> *„Diversifikation des Bedeutungsinhaltes bei der Einordnung eines Begriffs, Satzes oder Theorieelements in das individuelle Denken eine zwangsläufige Erscheinung eines Lernvorgangs und zugleich eine Voraussetzung dafür, dass es überhaupt zu einem Verstehen kommt“.* [172]

Wenn man die wesentliche Aufgabe eines Faches darin sehe, Fachliches in lebenspraktischen Zusammenhängen kommunizierbar zu machen, dann bilde die Fähigkeit, sich alltagssprachlich ausdrücken zu können, das Unterrichtsziel.

> *„Kommunikative Kompetenz auf der Ebene der Alltagssprache steht dann am Ende des Lernprozesses und ist kein Durchgangsstadium.“* [173]

Abbildung 3.5 veranschaulicht diese Entwicklung der fachlichen Ausdrucksfähigkeit. [174]

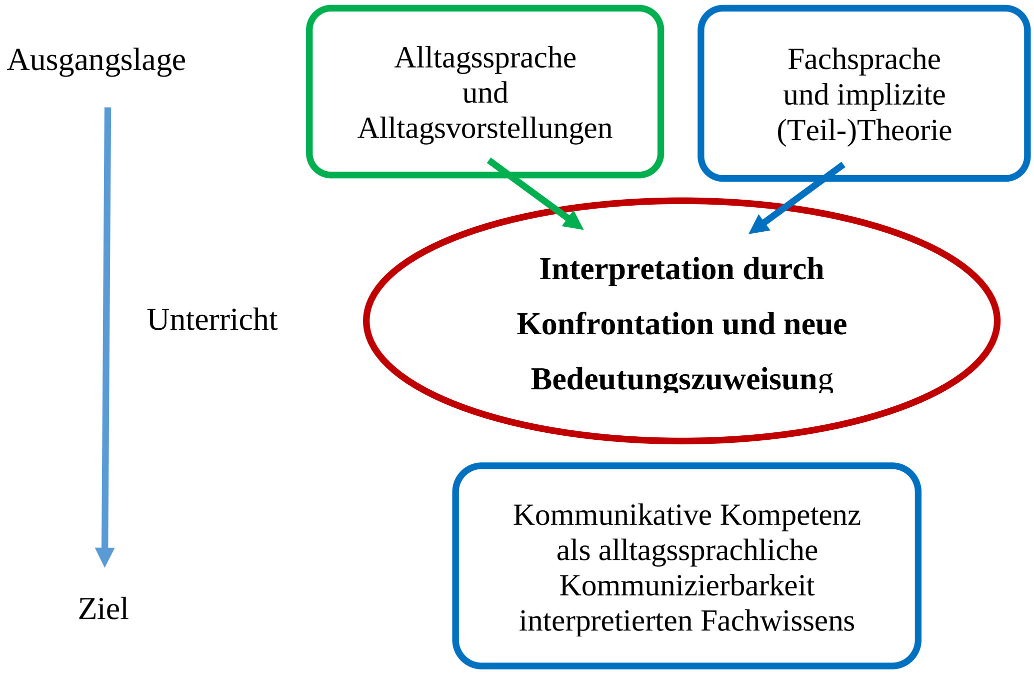


Abbildung 3.5: Darstellung des Weges zu kommunikativer Kompetenz in naturwissenschaftlichen Fächern nach Heinz Muckenfuß

[172] Muckenfuß, 1995, S. 248.
[173] Ebd. S. 248 f.
[174] Ebd. S. 267.

Mit dieser Auffassung sieht Muckenfuß die Fachsprache nicht in der von Wagenschein angestrebten Überführung der Muttersprache in die Fachsprache verortet. Der Fachsprache komme lediglich eine Vermittlerfunktion zu, soweit sie den Interpretationshintergrund bilde, an dem sich die alltagssprachliche Kompetenz entwickeln muss.

3.2.2.2 Darstellungsformen sind Denkformen und Sprachelemente

Ähnlich wie die Naturwissenschaften orientiert sich die schulische Mathematik an alltäglichen Grundvorstellungen des praktischen Lebens, bei denen alltagssprachliche Bezeichnungen und Tätigkeiten in mathematische Begriffe übergehen. Beispiele dafür sind etwa Worte wie „und“ und „weniger“ im Zusammenhang mit Rechnungen oder „Proportion“ und „Ähnlichkeit“.

Dabei wird Fachwissen nicht nur über Gesprochenes entwickelt. Neben sprachlich/textlichen Ausführungen werden häufig grafische, numerische und symbolische Darstellungen genutzt.

Diese Wissensentwicklung ereignet sich jedoch stets über kommunikative Prozesse zwischen Lernenden und Lehrenden, die nur über sinnlich wahrnehmbare Transformationen wirksam sein können. Deshalb können solche Darstellungsformen sowohl als Elemente der Sprache als auch als Denkformen aufgefasst werden.

Entscheidend für das Begriffslernen in Mathematik ist die Befähigung der Lernenden, Sachverhalte in diesen vier genannten zentralen Darstellungsformen auszudrücken, und sie zu befähigen, diese Darstellungsformen jeweils auch in eine andere transformieren zu können. Abbildung 3.6 verdeutlicht dies am Beispiel *Flächeninhalt beim Quadrat* in Klassenstufe 5/6.

Darstellungsformen sind Denkformen und Sprachelemente

Flächeninhalt beim Quadrat

grafisch

a A

numerisch

a	1	2	3	4	5	6	…
A	1	4	9	16	25	36	…

symbolisch

$A = a^2$

verbal /textlich

Beim Quadrat ist der Flächeninhalt A das Quadrat der Seitenlänge a.

4 Darstellungsformen - 12 Transformationen

Abbildung 3.6: Die Darstellungsformen grafisch, numerisch, symbolisch und verbal/textlich am Beispiel des Flächeninhalts beim Quadrat in Klassenstufe 5/6.

Abstrakt-mental verortete Objekte können sich nicht ohne äußere sinnlich wahrnehmbare Repräsentationen entwickeln. [175] Es ist jenes Konstrukt im Wechsel zwischen sinnlicher Erfahrung und kognitiver Verflechtung, welches das Verstehen und Begreifen von Mathematik bewirkt. In diesem Zusammenhang kann auch eine Verstehenshemmung eintreten, wenn die reguläre fachsprachliche Formulierung zeitlich zu nah mit der Begriffsbildung erfolgt oder sogar schon vor einer kognitiven Begriffsrepräsentation verwendet wird.

Während sich im Lernprozess die kognitive Verortung einer Sache zunächst über die sinnliche Wahrnehmung ereignet, kehrt sich diese Richtung beim Konstruieren der Sache um. Dies zeigt, wie vernetzt sinnlich wahrnehmbare Handlungen mit neuronalen Repräsentationen und Verarbeitungen zusammenhängen. Der italienische Neurophysiologe Giacomo Rizzolati [176] (Universität Parma) vertritt die These, dass aktive Handlungen nicht nur neuronal begleitet, sondern kognitiv vorbereitet sind, bevor die gewollten Handlungen wie z. B. Bewegungen von Gegenständen oder Sprechakte ausgeführt werden.

Der Wissenschaftler schließt daraus, dass bei Menschen *Klassen von Handlungen* mental repräsentiert sind und vor der Ausführung kognitiv simuliert werden. Dieser Weg vom Denken zum Handeln besitzt somit eine Symmetrie, bei der Handlungen wiederum auf das Denken wirken. Zum Beispiel ist auch das *aktive Sprechen* kognitiv vorbereitet. Etwa eine viertel Sekunde, bevor gesprochen wird, bildet das Gehirn die Worte und Sätze, die gesprochen werden sollen, und setzt diese danach in Laute um, die äußerlich wahrnehmbar sind. [177]

Solche Erkenntnisse zeigen, dass unser Wissen um die Handhabung von Objekten und das konzeptionelle Wissen über die Objekte nicht voneinander trennbar sind. Wahrnehmen, Denken und Handeln sind somit im Gehirn nicht teilbar.

Gadamers philosophisches Bekenntnis *„Sein, das verstanden ist, ist Sprache“* besitzt eine kognitionswissenschaftliche Analogie: Verstandenes kann kognitiv rekonstruiert, simuliert und variiert werden. Letzteres liefert auch einen „Schlüssel“ zu Phantasie und Gestaltungfähigkeit.

---

[175] Für den Unterrichtseinsatz war Abbildung 3.6 nicht vollständig beschriftet. Das in roter Farbe Dargestellte mussten die Lernenden ergänzen, um zu zeigen, welche Bedeutungen den Symbolen a und A in der jeweiligen Darstellungsform bzw. bei Transformationen in eine andere zugeordnet werden müssen. Erwähnenswert ist, dass es bei vier Darstellungsformen zwölf unterschiedliche Transformationen gibt. Hier zeigt sich die Vielfalt und Variationsbreite mathematischer Begriffsbildung.

[176] Rizzolatti, 2009. Giacomo Rizzolatti erforschte über die Messung von Hirnströmen Vorgänge in Nervenzellen, die Handlungen steuern. 1992 wies er mit Experimenten bei Makaken nach, dass in deren Gehirn die gleichen neuralen Prozesse ablaufen, unabhängig davon, ob eine Handlung ausgeführt wird oder diese bei einem anderen Artgenossen beobachtet wurde. Nervenzellen, die beim Beobachten die gleichen Reaktionen zeigen wie beim eigenen gezeigten Verhalten, nannte Rizzolatti Spiegelneuronen.

[177] Gehirn und Geist, 2011, S. 69

3.2.3 Basale Wahrnehmungsprinzipien und fachliche Methoden

Norbert Jüdt hat hinsichtlich einer Aisthetik der Kognition ein Grundphänomen herausgestellt: Grundlegende Gestaltungsprinzipien sind kulturelle Ausdifferenzierungen neurobiologischer Wahrnehmungsprinzipien. [178] Abbildung 3.7 zeigt exemplarisch diesen Zusammenhang zwischen allgemeinen kognitiv angelegten und korrespondierenden mathematischen Prinzipien, die bei der fachlichen Begriffsbildung und Wissenserweiterung maßgeblich beteiligt sind.

Basale neuronale Gestaltungsprinzipien	**Analoge mathematische Prinzipien**
Destruktion / Konstruktion	Zerlegen / Zusammensetzen
Kontinuität / Zerlegung	Verallgemeinern / Spezialisieren
Gestalt / Ganzheit / Form	Kongruenz und Ähnlichkeit
Symmetrie / Analogie / Assoziation	Differenzieren / Integrieren
Operation / Verknüpfung / Struktur	Formen / Strukturieren / Ordnen
Abstraktion / Konkretisierung	diskret / kontinuierlich / diskretisiert
Statik / Ruhe	Argumentieren / Begründen
Bewegung / Dynamik	Entdecken / Erfinden
Proportion / Ähnlichkeit	Logik
Ähnlichkeit / Gegensatz / Neuheit	…
…	

Abbildung 3.7: Basale neuronale Gestaltungsprinzipien und analoge fundamentale fachliche Methoden des Mathematikunterrichts

Diese neuronale Kommunikation zwischen Poppers *Welt 1* und *Welt 2* kann gewinnbringend für die fachliche Entwicklung eingesetzt werden, indem solche neuronal basalen Wahrnehmungsprinzipien für die Entwicklung des fachlichen Wissens als mathematische Methoden bewusst gemacht und genutzt werden.

In Analogie zum Begriff „Fundamentale Ideen“ könnte man hier auch von „Fundamentalen Gestaltungsprinzipien“ sprechen. Die beiden Bilder in Abbildung 3.8 zeigen Beispiele für neuronale Unterstützungen bei der Wahrnehmung und mentalen Konstruktion von Formen.

[178] Vgl. Jüdt, 2016, Abschnitt 5.2, S. 91

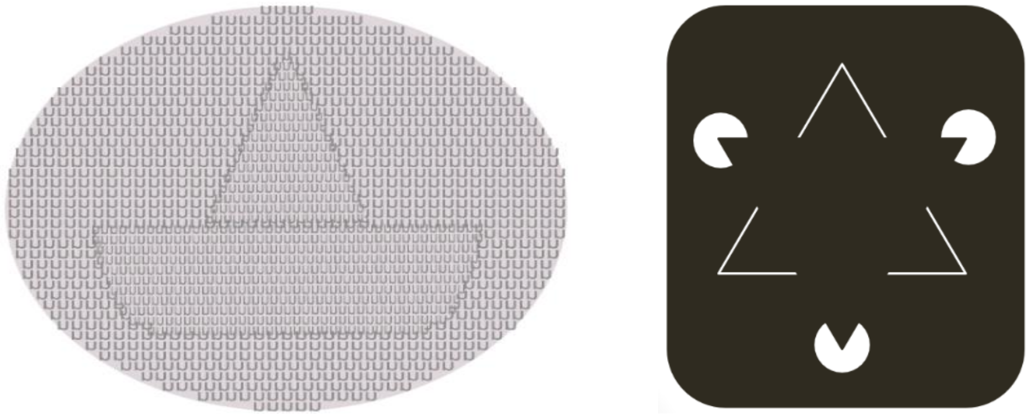


Abbildung 3.8: Wahrnehmung und kognitive Sinngebung mittels neuronaler Kontrastverstärkung

Das Bild links zeigt eine Darstellung der neuronalen Verarbeitung eines Netzhautbildes. Die gestaltgebend gezeichneten Umrisse eines „Schiffs mit einem Segel“ sind keine direkte Übermittlung der Netzhaut, sondern eine neuronale „Nachbearbeitung“ mittels Kontrastverstärkung an den Übergängen von Flächen unterschiedlichen Kontrastes. Das „Segelschiff“ ist darüber mental rekonstruierbar, indem nachträglich allein der Umriß auf einem einfarbigen Blatt Papier das Objekt „erzeugt“, d. h. ein Kontrastunterschied nicht mehr notwendig ist, um das Bild zu erkennen.[179]

Das Bild auf der rechten Seite zeigt die Fähigkeit des menschlichen Gehirns, *unvollständige* Netzhaut-Bilder mittels kognitiver Ergänzung imaginativ zu vervollständigen. Dies ist z. B. eine wesentliche Voraussetzung dafür, dass wir Menschen ebene Bilder räumlich interpretieren können. Hinsichtlich einer Wahrnehmung beider Bilder ist allerdings anzumerken, dass diese nur möglich ist, wenn vorab mental ein Segelschiff *bekannt* und die *Dreiecksform* bewusst repräsentiert ist als gedankliches Konstrukt. Als Beispiele von kontrastunterscheidender bzw. randvermittelter Wahrnehmung sind die beiden Darstellungen eines Dreiecks in Abbildung 3.9 gegenübergestellt.

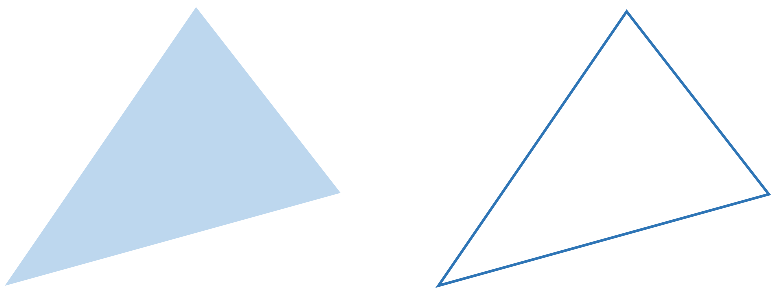


Abbildung 3.9: Unterschiedliche kognitive Wahrnehmungsformen eines Dreiecks.
die Form generiert die Umrandung, die Umrandung imaginiert die Form.

[179] Die beiden Darstellungen sind (mit Genehmigung des Vortragenden) Folien eines Vortags von Norbert Jüdt entnommen, der in einer Vorlesung von Johannes Beichel am 11.05.2017 am Erziehungswissenschaftlichen Institut der Universität Heidelberg gehalten wurde.

3.2.4 Kognitive Entlastung

In Analogie zu Watzlawicks *Axiom* der menschlichen Kommunikation „*Man kann nicht nicht kommunizieren*“ [180] kann unser Gehirn nicht *nicht* wahrnehmen. Selbst dann nicht, wenn wir bewusst nicht wahrnehmen wollten. Da Wahrnehmung und Denken aber unabdingbar verknüpft sind, denkt also jeder Mensch in jedem Augenblick, also immer. [181] In jedem Moment muss dabei das Gehirn Entscheidungen treffen, was es für wichtig hält, oder genauer, was es unter der Vielfalt von Eindrücken für wichtiger hält.

Selbst im Schlaf ist das Gehirn aktiv, nicht nur dann, wenn wir träumen. Genauso wie unser vegetatives Nervensystem uns vor einer (völlig) bewussten Wahrnehmung des Blutkreislaufes oder der Magenbewegungen bei der Verdauung schützt, schützt sich das Gehirn vor Überlastung durch zu viele Eindrücke.

Neuere Studien von Schlafforschern geben den Träumen wichtige Funktionen hinsichtlich kognitiver Entlastungsarbeit. Nachfolgend einige Thesen zur Bedeutung von Träumen, die auch für pädagogische Funktionen bedeutsam sein können.

Träumen könnte zum Beispiel [182]

- eine Bereinigungsfunktion haben, man träumt, um zu vergessen,
- helfen beim Verarbeiten von Lösen von Problemen des „Wachlebens“,
- emotionale und angstbesetzte Erlebnisse verarbeiten und glätten,
- kreativere Lösungsansätze schaffen als im Wachen.

Diese durchgängige Eigentätigkeit des Gehirns auch in Wachphasen kann aber gestört sein durch ein zu großes Angebot an wahrnehmungswürdigen Dingen und dann hinsichtlich einer Fokussierung auf ein Thema zu unerwünschten Handlungen führen.

Dies soll durch eine kürzlich gemachte Erfahrung des Verfassers bestätigt werden, die für die tägliche Erziehungsarbeit exemplarisch ist, und einen ständig zu berücksichtigenden Faktor darstellt. Anlässlich eines Projektes *Zählen und Rechnen lernen mit Zwergwürfeln* [183] in der Thiebauth-Grundschule Ettlingen unterrichtete der Verfasser (als Rechenpate) eine Gruppe von sechs Schülern in einem vom Klassenzimmer getrennten Raum an einem vorbereiteten Tisch. Der Raum war als Aufenthaltsraum für die Nachmittagsbetreuung ausgestattet mit vielen frei zugänglichen Angeboten für eigentätiges Handeln. Einige Schülerinnen und Schüler kannten

---

[180] Watzlawick, et al., 1980, S. 53.
[181] Diese Aussagen beziehen sich natürlich auf die Gehirnaktivität und nicht auf durchgängig bewusstes Handeln.
[182] Auszug nach https://de.wikipedia.org/wiki/Traumdeutung.
[183] Siehe Abschnitt 4.2.1.

diesen Raum. Sie waren sofort bereit, am Tisch Platz zu nehmen. Die anderen verteilten sich und inspizierten die Angebote. Es war für sie nicht einsichtig, dass bei einer so anregenden und neugierig machenden Umgebung der Lehrer einen so langweilig-leeren Tisch im Raum zur gemeinsamen Versammlung vorschlug.

Für die Konzentrierung auf Fachliches in einem Lernprozess ist die gewohnte Umgebung und das bisher „vorhandene“ Wissen, auf das die Lehrperson auch verweisen darf, und die Art der Wahrnehmung des Neuen im Verhältnis zum schon Gelernten wesentlich für die Konzentrationsfähigkeit der Lernenden.

Lernprozesse können sich unter Beachtung der folgenden mental entlastenden Faktoren positiv auswirken auf die Lernbereitschaft und Nachhaltigkeit des Wissensaufbaus bei den Lernenden:

- *Vermeidung äußerer Ablenkung*: Der Fachunterricht findet in einer für die Lerngruppe gewohnten Umgebung statt.
- *Methodische Entlastung*: Die Lehrmethode wird bei Lernsituationen möglichst wenig variiert, damit das Inhaltliche ins Zentrum der Wahrnehmung rücken kann.
- *Fachliche Vernetzung*: Das Neue wird soweit möglich vernetzt mit schon Bekanntem.
- *Alltags-Verankerung*: Die überfachliche Funktion des Neuen wird alltagspraktisch verortet.
- *Entlastung durch Werkzeuge*: Der Unterricht wird (wann immer möglich) entlastet durch mathematische Werkzeuge, elektronische Rechenhilfen und computerunterstützte Darstellungshilfen.
- *Analoges häusliches und schulisches Handeln*: Das häusliche Werkzeug muss dem schulischen entsprechen - was im Unterricht verwendet wird, muss individuell verfügbar sein.
- *Entlastung über fachlich syntaktische Formen und Bezeichnungen*: Fachsprachliche, strukturelle und symbolische Notationen müssen als entlastend empfunden werden gegenüber der alltagssprachlichen singulären Ausdrucksweise.
- *Selbstwahrnehmung der individuellen Entwicklung*: Die Akzeptanz des Neuen wird verstärkt durch die wahrgenommene eigenständige Mitarbeit beim Prozess der Aneignung.

3.2.5 Einsatz elementarer Werkzeuge

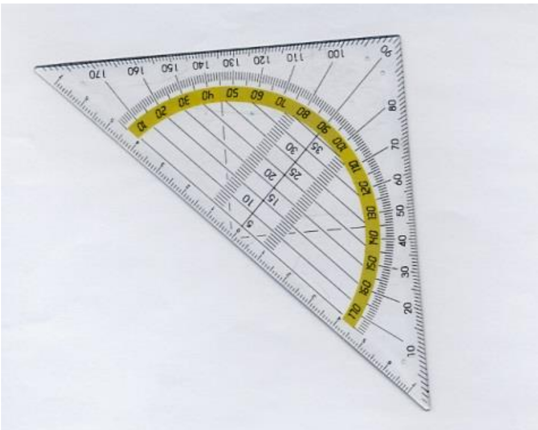
Wenn Mathematikwissen sich entsprechend Abbildung 3.4 als hilfreiches Werkzeug erweisen soll, dann sollte das, was im Mathematikunterricht vermittelt wird, auch hinsichtlich dieser Verwendung Bedeutung erhalten. Für eine transparente Vermittlung an die Lernenden ist es deshalb angebracht, Werkzeuge entsprechend ihrer Komplexität zu differenzieren in jene, die eine sinnlich wahrnehmbare Darstellung eines Gegenstandes ermöglichen, und solche, die diesen Handlungen kognitiv vorausgehen, also mentale Werkzeuge des Planens, Entwerfens und Gestaltens sind.

Die Werkzeuge der zweiten Art entwickeln sich in der Regel parallel zu Begriffsbildungen oder bei der Entwicklung von Lösungsverfahren und haben hinsichtlich der sinnlichen Wahrnehmung oft spezielle Darstellungsformen. Dazu gehören zum Beispiel Begriffe wie Zahl, Term, Variable oder Form, Körper, Figur usw.

Als elementar werden in diesem Abschnitt Werkzeuge bezeichnet, die im Wesentlichen eine Funktion haben. Die nachfolgende Aufzählung ist gegliedert nach der Verwendung als flächiges, also die ebene Geometrie betreffendes Darstellungsmittel. Ein weiterer Abschnitt bezieht sich auf die Unterstützung von Darstellungsformen mit Computerprogrammen.

Werkzeuge für ebene Darstellungen

Abbildung 3.11 (siehe nächste Seite) zeigt tradierte elementare schulische Werkzeuge zum Zeichnen und Messen, wie Lineal, Winkelmesser usf. Als Werkzeuge werden dabei auch das karierte Heft und das kartesische Koordinatensystem aufgefasst. In der rechten Spalte sind Beispiele für Anwendungen dieser Werkzeuge aufgezählt. Das Geodreieck wird zwar im Unterricht der Grundschule schon ab dem ersten Schuljahr verwendet. Wegen seiner in Abbildung 3.10 beschriebenen vielseitigen und vernetzten Verwendungsmöglichkeiten sollte es jedoch nicht als elementar eingestuft sein



Geodreieck

- symmetrisch als Gesamtfigur und in Teilen
- Lineal mit symmetrischer Skala zur Null
- Halbwinkelmesser mit gegenläufigen Skalen
- Gradskala auf Seiten des Dreiecks verlängert
- mehrfach parallele und zueinander senkrechte Strecken
- vielseitige Funktion der Mitte der Basisstrecke (Null)

Abbildung 3.10: Beschreibung der Komplexität des Geodreiecks hinsichtlich der Vielfalt seiner Funktionen

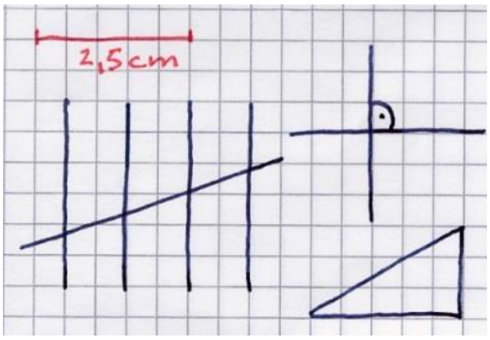
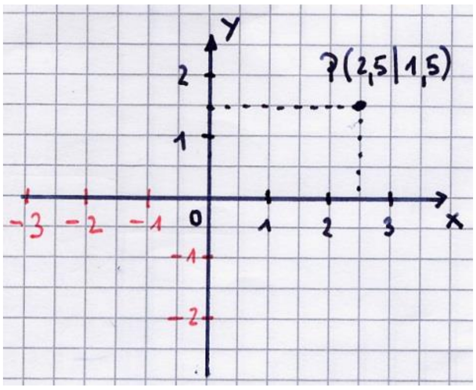
Elementare Werkzeuge für den Mathematikunterricht	
	**Lineal und Zirkel** - Zeichnen von Strecken und Geraden - Längenmaße „cm“ und „mm“ - Messen von Streckenlängen - Zeichnen von Kreisen
	**Vollwinkelmesser** - Analog zum Lineal, nur kreisförmig gebogen - (rote) Nullwinkel-Linie entspricht der Null - Winkelweiten von 0° bis 360° auf einer Skala - Scheitel ist Zentrum - Nulllinie (rot) entspricht erstem Schenkel - Winkeldrehsinn wird intuitiv unterstützt
	**Gitternetz** - Strecken mit Gitternetz-Länge - zueinander senkrechte Strecken und Geraden - parallele Strecken und Geraden - maßstäbliches Zeichnen von Figuren - Auszählen von Flächeninhalten
	**Koordinatensystem** - Punkte erhalten Koordinaten - Koordinaten liefern Punkte - Erzeugung gleicher Figuren - Vergleich von Ergebnissen - Geometrie trifft Algebra - Terme erhalten Schaubilder

Abbildung 3.11: Übersicht elementarer Werkzeuge für den Mathematikunterricht

Werkzeuge zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens

Wenn ein Werkzeug für einen Begriff eine unterstützende Funktion haben soll, muss es während der begriffsbildenden Phase eingesetzt werden. Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens ist in der Mathematik verknüpft mit einer Reihe von kognitiven Entwicklungen und mitbedingt durch einen stetigen Wechsel von wahrnehmbarer Darstellung und abstrahierender mentaler Vorstellung bzw. kognitiv rekonstruierter Repräsentation.

Lernen bedeutet nicht nur, etwas mental zu verorten, sondern es auch wieder wahrnehmbar rekonstruiert darzustellen. Für den Lehrenden ist die kommunikativ wahrgenommene Fähigkeit eines Lernenden, „selbst wahrgenommene Konstruktionen“ rekonstruieren zu können, der objektive Hinweis dafür, dass Lernen „stattgefunden“ hat. Dabei sind insbesondere visuelle Informationen und deren Verarbeitung beteiligt. Für diese Entwicklung ist es förderlich, wenn das zweidimensional gestaltete Lehrbuch mit räumlich erfahrbaren analogen Handlungen verknüpft ist. [184]

3.2.6 Computerunterstützung für mathematische Darstellungsformen

Der Rechnereinsatz im Mathematikunterricht ist seitens der Bildungspläne nicht nur curricular empfohlen, er ist in den meisten Bundesländern teilweise sogar verpflichtend vorgeschrieben. Über die Verwendung von Mathematiksoftware im Unterricht wurde und wird in der fachdidaktischen Literatur viel berichtet. Dabei wird dieses Thema sowohl von Theoretikern, Praktikern und auch gesellschaftlichen Gruppen sehr kontrovers diskutiert.

Zwischen Vertretern mit der grundsätzlichen Überzeugung, dass Computerprogramme sich schädlich für die fachliche Entwicklung der Lernenden auswirken, und dazu diametral entgegengesetzten Meinungen kann aus der Sicht des Autors nicht sachdienlich vermittelt werden, weil hier neben fachlich und methodisch unterschiedlichen Funktionen solcher Programme oft auch kulturell und individuell geprägte Haltungen und Überzeugungen der jeweiligen „Protagonisten“ meinungsbildend sind.

„Man sagt doch, Mathematiker benötigen nur Bleistift und Papier“, bemerkte beispielsweise einleitend ein Teilnehmer des Lehrbereichs an der Universität Stuttgart anlässlich eines Meinungsaustausches zwischen Vertretern der Universität Stuttgart und einer Lehrervertretung des Unterrichtsprojektes „Einsatz eines CAS im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1“, das

[184] In Abschnitt 4.3.1 wird zum Beispiel die Entwicklung des Zahlbegriffs gekoppelt mit räumlich variierenden Würfelkonstellationen.

sich damals mit der Entwicklung eines Schulcurriculums unter Verwendung von Computersoftware befasste. [185] Die in diesem Zitat ausgedrückte Meinung – sofern es für die jetzige Ausbildung von Mathematikern an Universitäten überhaupt noch Gültigkeit haben kann – verkennt hinsichtlich der schulischen Anwendung vollständig die Bezugsgruppe einer „normalen“ Klasse.

Auch die allgemeine Erfahrung von Ausbildern, dass Schulabsolventen (auch von beruflichen Schulen) „nicht mehr rechnen können“, sind nicht primär auf den Einsatz solcher Werkzeuge zurückzuführen, sondern auf eine Veränderung des Bedürfnisses, im täglichen Umgang überhaupt noch rechnen zu müssen. [186]

Dieser Problematik müsste nach Meinung des Autors (auch entsprechend seiner langjährigen berufspraktischen Erfahrungen mit häufig wechselnden Werkzeugen für das Fach Mathematik in den Jahren 1974 bis heute) nicht mit Verboten, sondern mit didaktischen Überlegungen begegnet werden, wie man Fähigkeiten, die ein System (syntaktisch) übernimmt, unterrichtlich verortet, wenn man der Überzeugung ist, dass durch die Übergabe an die „Maschine“ begriffliche Defizite bei den Lernenden entstehen.

Um ein konkretes Beispiel mit einer positiven Wirkung in diese Diskussion zu bringen, wird nachfolgend ein Beispiel zitiert, das die begriffsbildende Funktion solcher Anwenderprogramme zeigt: Variationen eines Sachverhalts und der Wechsel seiner Darstellungsformen wären ohne solche Hilfen nicht möglich. [187]

Abbildung 3.12 (siehe nächste Seite) zeigt eine Bildschirmkopie des Mathematikprogramms *GeoGebra Classic* mit einer Anwendung in einer achten Klasse im Zusammenhang mit quadratischen Funktionen. Das Beispiel ist typisch für einen gewinnbringenden Beitrag durch den Einsatz von Mathematikprogrammen in Begriffsbildungsphasen.

Seine motivierende unterrichtliche Funktion erhält dieses Programm jedoch nicht allein dadurch, dass nur die Lehrperson es demonstrierend verwenden kann. Denn die eigentliche

---

[185] Das Gespräch wurde am 24.3.2014 am Schickard-Gymnasium Herrenberg geführt. Anlass war ein in Baden-Württemberg vom Kultusministerium herausgegebener Erlass, nach dem Abitur 2019 nur noch Taschenrechner ohne grafische und numerische Unterstützung im Abitur zuzulassen. Ein Erlass, der nach Meinung der Projektgruppe ein grundsätzliches Aus für den Einsatz von modernen Hilfsmitteln in allen Klassenstufen nach sich ziehen würde (was derzeit tatsächlich auch so beobachtbar ist, Anm. d. Verf.). Teilnehmer waren Rolf Reimer (KIT Karlsruhe), Dr. Mathias Gercken, Sonny Timm (Seminar Karlsruhe), Michaela Ewald (Gymnasium in den Pfarrwiesen), Uta Plath (Gymnasium in den Pfarrwiesen Sindelfingen), Eckhard Rathe, Simon Zolg (Schickardt Gymnasium Herrenberg), PD Dr. Peter Lesky, Dr. Norbert Röhrl, Dr. Timo Weidl (Universität Stuttgart).
Zum Projekt selbst siehe Abschnitt 4.1.

[186] Einen Überblick über wissenschaftliche Studien zu diesem Thema vermittelt eine Veröffentlichung von Bärbel Barzel, Computeralgebra im Mathematikunterricht: Ein Mehrwert - aber wann? Vgl. (Barzel, 2012).

[187] Vgl. Abschnitt 3.2.2.2: Darstellungsformen sind Denkformen.

begriffsbildende Wirkung entfaltet sich über Anwendungen in der Hand der Lernenden, welche Variationen und Veränderungen nach ihren eigenen Vorstellungen ausführen können.

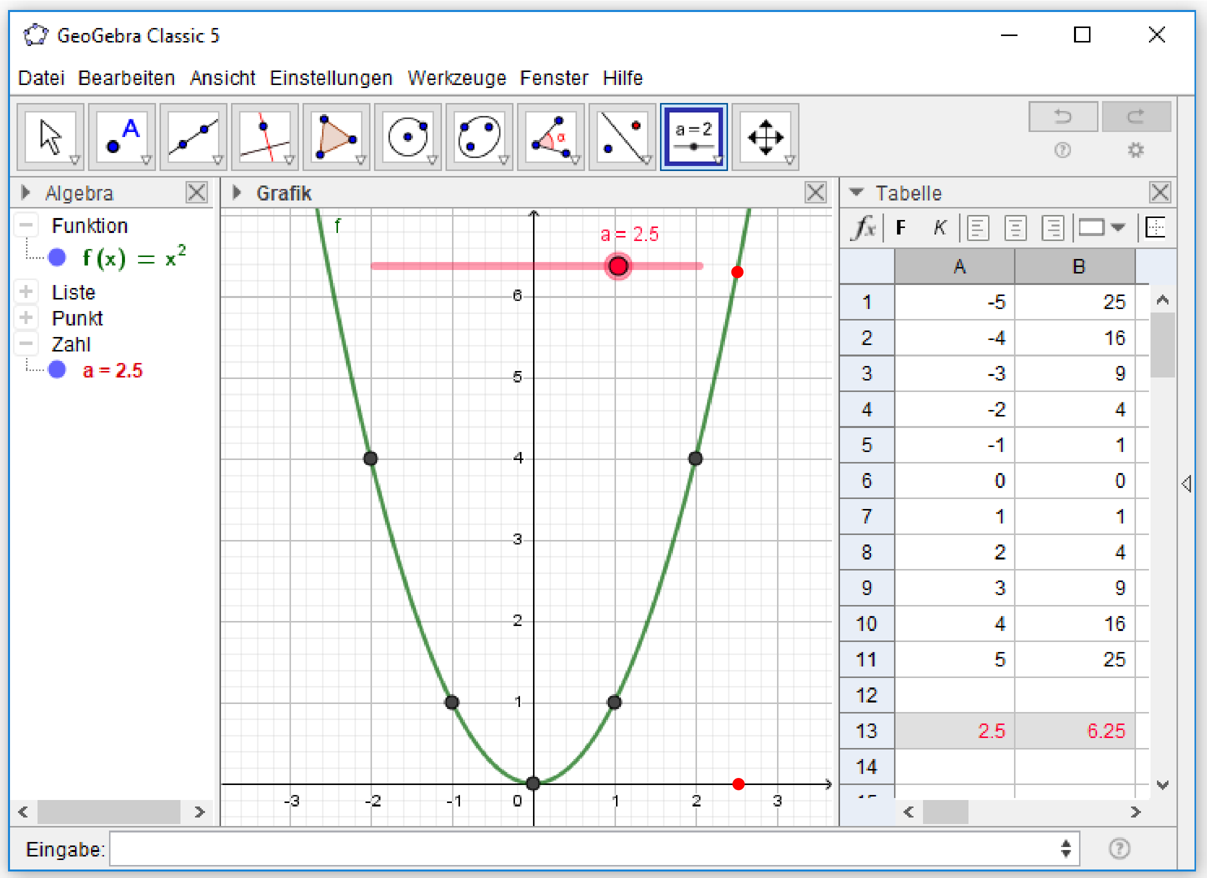


Abbildung 3.12: Darstellung einer Funktion in den Formen Term, Graph und Tabelle mit GeoGebra. (Gezeigt ist eine Bildschirmkopie des Programms GeoGebra mit der Darstellung einer Parabel, deren Eingabe entsprechend der Syntax des Programms in der Form f(x) = x^2 vorgenommen wurde. Parallel dazu wird eine grafische Darstellung und eine Wertetabelle erzeugt, die vom Anwender hinsichtlich des dargestellten Bereiches selbst gestaltet werden kann. Ein zusätzlich verwendeter Schieberegler (in der Grafik- und Tabellenansicht rot hervorgehoben) ermöglicht eine Variation des a-Wertes (alias x-Wert) mit einer Berechnung des jeweiligen Funktionswertes und der Darstellung in der Tabelle als Punkt auf der x-Achse und als Punkt (a | f(a)) des Graphen von f im Schaubild. [188]*)*

Der Autor verzichtet im weiteren Verlauf dieser Studie auf eine allgemeine Diskussion zu diesem Thema und verlässt sich hinsichtlich der Einschätzung einer Sinnhaftigkeit des Einsatzes von computerunterstützter Software auf eine implizit verlaufende Beurteilung seitens der Leser, indem die Bedeutung dort gezeigt wird, wo man sie didaktisch und pädagogisch, ohne sich auf andere Urteile stützen zu müssen, im konkreten unterrichtspraktischen Einsatz wahrnehmen und selbst bewerten kann. [189]

---

[188] GeoGebra ist eine dynamische Geometrie-Software, die eine geometrische, algebraische und symbolische Schnittstelle zur Verfügung stellt. Die Nutzung der Software ist für Bildungseinrichtungen kostenlos. Für weitere Informationen wird auf Internetquellen verwiesen (Adresse: https://www.geogebra.org).

[189189] Vgl. Barzel, 2012.

3.2.7 Fachliche Entwicklung über „Erfinden“ und „Entdecken“

Nach Martin Wagenschein ist hinsichtlich eines kreativen Umgangs mit Mathematik Entdecken nicht gleichzusetzen mit Erfinden:

> *„Erfinden setzt das Entdecken, und zwar das gelungene Entdecken, voraus. Das wird jetzt ‚gebraucht‘. Aber man fragt jetzt ganz anders. Man fragt nicht mehr: ‚wer bist du?‘ Man sucht nicht etwas Unbekanntes, man will etwas Bestimmtes: nicht erfahren, sondern tun lassen.“* [190]

Hinsichtlich der Entwicklung mathematischer Begriffsbildungen entsprechend dieser Kategorien sind zum Beispiel algebraische Begriffe wie Zahlen, Variablen und Terme primär als Erfindungen des Geistes anzusehen, während Figuren und Körper als idealisierte Vorstellungen sinnlich wahrnehmbarer Formen und Körper als Entdeckungen aufgefasst werden können. Beide Arten unterscheiden sich hinsichtlich der Dualität sinnlicher bzw. kognitiver Wahrnehmung jedoch nicht mehr nach einer erfolgten aisthetischen Begriffsbildung im Sinne der kognitiven Repräsentationen.

Betrachtet man den Aspekt der unterschiedlichen Transformations-Richtungen zwischen geistiger und sinnlich wahrnehmbarer Repräsentation, macht es jedoch einen Unterschied, ob die begriffsbildende Repräsentation der sinnlich wahrnehmbaren Welt zugeordnet werden kann oder zunächst nur einer kognitiven Vorstellungsfähigkeit unseres Gehirns entspringt.

Fachinhalte, die nach Prinzipien des Entdeckens und Erfindens verortet sind, können nach diesen beiden „Dimensionen“ koordiniert und in der Prozessführung methodisch berücksichtigt und mit geeigneten Lernzielen verknüpft werden. Dabei sind natürlich auch Mischformen entsprechend ihrer Zugehörigkeit in dieser „zweidimensionalen“ Konstruktion verortbar.

Mit einer solchen Strukturierung kann die Lehrperson – über ein gelenktes Nacherfinden- bzw. Nachentdeckenlassen – eine unterrichtliche Differenzierung entsprechend dieser Kategorien des Denkens methodisch so nutzen, dass die Lernenden diese beiden Verortungen unter aktiver Beteiligung *nacherleben* können.

Abbildung 3.13 visualisiert einen solchen Ansatz, ohne ihn vollständig auszuführen. Eine solche Vorgehensweise kann motivierend wirken, wenn Lernende eine bewusst erlebte Beteiligung über einen spiraligen Aufbau einer solchen Wissensbasis erfahren, deren fachliche Progression für die Lernenden dazu transparent nachvollziehbar sein muss und bei entsprechender Beteiligung auch miterlebt werden kann.

---

[190] Wagenschein, 1965, S. 238.

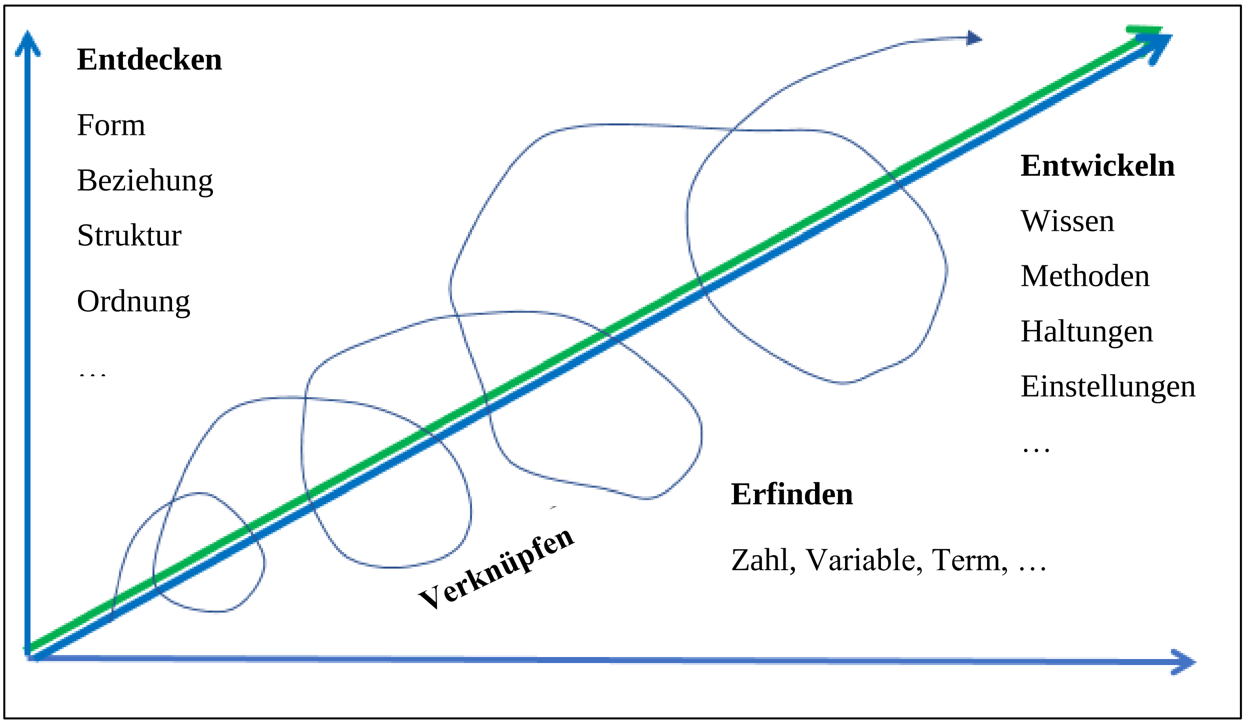


Abbildung 3.13: Aufbau der Wissensbasis über gelenktes Entdecken und Erfinden (Die sich ausweitende Spirale symbolisiert die fachliche Entwicklung der Lernenden. Sie ist nicht geglättet, weil dieser Weg ja auch nicht immer ganz glatt verläuft.)

Abbildung 3.14 ordnet exemplarisch mathematische Sachverhalte entsprechend dieser Dualität von Entdecken und Erfinden und ergänzt deren integrative Verwendung als mathematisches Modellierungswerkzeug.

Entdeckungen (Welt → Geist)	**Erfindungen (Geist → Welt)**
Körper (räumliche Geometrie)	Zahlen, Zahlarten, Rechnen
Figuren (ebene Geometrie)	Terme, Variablen
Symmetrie und Ähnlichkeit	Funktionen und Gleichungen
…	…

Integration (Welt ↔ Geist)

Zählen, Messen, Rechnen, Ordnen, Umformen, Variieren, Übertragen …

Mathematisches Modellieren
(mathematische Werkzeuge)

Abbildung 3.14: Fachinhalte primär geordnet nach ihrer mentalen Entstehung und integrativer Verknüpfung

3.2.8 Ästhetische Gestaltung von Lernprozessen

3.2.8.1 Fachlichkeit, Sinnhaftigkeit und Emotionalität

Mathematikunterricht wird in der Regel über Aufgaben oder Problemstellungen geführt, und dies nicht nur in Übungs-, sondern auch in Lernsituationen. Zunächst wird in diesem Zusammenhang eine Begriffstrennung zwischen dem, was man unter einem Problem, und dem, was man unter einer Aufgabe versteht, vorgenommen. David Tobinski schreibt dazu [191]:

> *„Zu einem Problem gehört immer ein gewünschter Zustand und somit entsteht das Problem erst in einer bestimmten Situation mit einer bestimmten Zielsetzung eines Organismus oder eines kognitiven Systems. Voraussetzung ist es, dass die gegebene Situation nicht der gewünschten Situation entspricht und eine Überführung im Moment durch eine Barriere verhindert wird.“* [192]

Nach Tobinski sei nach dieser Definition zwischen einem Problem und einer Aufgabe zu unterscheiden. Beiden Formaten gemeinsam sei, eine gegebene Situation (Ist-Zustand) in eine gewünschte Situation (Soll-Zustand) zu überführen.

Aufgaben seien als geistige Anforderungen verstanden, für deren Bewältigung die notwendigen Methoden (eine Reihe bekannter Operatoren) vorlägen, wodurch die Aufgabe ein rein reproduktives Denken erfordere.

Problemlösen unterscheide sich dadurch, dass etwas Neues geschaffen werden müsse.

Dieses Merkmal ermögliche es auch, als schwierig bezeichnete Aufgaben von echten Problemen zu unterscheiden. Methodisch nicht immer einfach für solche möglichst allgemeinen Beschreibungen von Begriffen ist die Übertragung in konkrete unterrichtliche Situationen, bei deren Transformation zu oft auf rein fachliches Operieren geachtet wird.

Aus der Sicht eines ästhetisch fundierten Mathematikunterrichts müssen für eine Gestaltung eines Lernprozesses unbedingt weitere Aspekte hinzugezogen werden. Dazu gehört auch die Verknüpfung der Aufgabe oder der Problemstellung, über die gelernt werden soll, mit der kognitiven Verfassung der Lernenden unter Berücksichtigung von Emotionalität, Fachlichkeit und gefühlsmäßiger Beteiligung und Bewertung von Prozessen durch die Lernenden.

Lernsituationen im Unterricht erfordern deshalb eine vorausgehende Prozessplanung, die hinsichtlich der fachlichen Zielorientierung – dem Neuen, das gelernt werden soll – eine überfachliche Sinnhaftigkeit für die Lernenden haben sollte, damit sich das Wollen für das Neue ergeben

---

[191] Tobinski et al. 2007.
[192] Ebd. S. 6.

kann. Eine unterrichtspraktische Integration dieser Aspekte sollte auch die persönlichen und sozialen Beziehungen in der Lerngruppe positiv beeinflussen. Dazu müssen auch die Kommunikationsformen von Lernprozessen mit der Aufgaben- bzw. Problemstellung koordiniert werden, über die sich ein Lernfortschritt einstellt, wobei die Lernenden als selbstverantwortliche Problemlöser in einer Lerngruppe agieren, die sich gegenseitig auch in der fachlichen Performanz und Entwicklung ergänzen und unterstützen und sich für den Lernprozess mitverantwortlich fühlen.

3.2.8.2 Auftragsgesteuertes Lernen und Lernaufgaben [193]

Eine (indirekte) Methode, die nicht das fachlich neu zu Erwerbende zum eigentlichen Inhaltsziel des Unterrichts erklärt (das transitiv-instruierend über die Lehrpersönlichkeit vermittelt und dann genutzt wird), kann dieses Wollen für Neues über ein Aufgabenformat der *Lernaufgabe* erreichen. Abbildung 3.15 zeigt den strukturellen Aufbau einer Lernaufgabe und ihrer Lösungsfindung.

Struktur einer Lernaufgabe	
Ausgangssituation:	Eine Aufgabe oder Problemstellung mit Bezug zur Alltagswelt der Lernenden (anwendungsorientiert) oder im Zusammenhang mit bisher erarbeitetem Wissen (innermathematisch)
Geführte Lösung: Von Lehrperson vorstrukturiert und moderiert, durchgeführt im Unterricht	- über eine Sequenz von Teilaufgaben bzw. Teilaufträgen, - deren Lösungen eigenständig von den Lernenden erstellt und vorgestellt werden, - in deren Verlauf ein Teilproblem entsteht, dessen Lösung mit dem bisherigen Wissen nicht möglich ist, - der Suche nach einer Lösung i. S. einer Wissenserweiterung, ggf. durch Lernende oder geführt durch Lehrperson, - einer Anwendung des Neuen zur Lösung des Teilproblem
Anwendung:	Geeignete Übungen und Aufgaben, ggf. differenzierendes Vertiefen
Reflektion:	Herausarbeiten der Bedeutung und Qualität des neuen Wissens
Dokumentation:	Aufnehmen in eine Wissenssammlung entsprechend einem vereinbarten Format (z. B. Wissenskarten o. ä.)

Abbildung 3.15: Struktur und unterrichtliche Phasen einer Lernaufgabe

Eine Lernaufgabe zielt auf eine Sequenzierung des Unterrichts, bei der die Lernenden mit ihrem Vorwissen möglichst selbstverantwortlich am Lösungsweg beteiligt werden können und dies

[193] Dieses Format hat der Autor zusammen mit Kolleginnen und Kollegen am Staatlichen Seminar Karlsruhe entwickelt, um Referendaren einen methodischen Rahmen für den Anfangsunterricht zu geben. Das Format wurde im Sindelfinger-Projekt durchgängig von Klasse 7 bis 10 benutzt (vgl. Abschnitt 4.1). Für die textliche Gestaltung wurden eigene Symbole und Abkürzungen eingeführt, die an diesem Beispiel durch Bemerkungen oder Fußnoten erläutert werden.

von ihnen auch eingefordert wird. Lernaufgaben sind deshalb charakterisiert durch eine fachliche Zielorientierung, eine dem Lernfortschritt der Schüler angepassten Form der Bearbeitung und einer besonderen Führung durch die Lehrperson über eine auftragsgesteuerte Sequenzierung der Aufträge. Abbildung 3.16 gibt einen Einblick in dieses Zusammenwirken.

Verantwortlichkeiten von Lehrenden und Lernenden beim Lösen von *Lernaufgaben*

Lehrperson **L**	**Anlass** **= Lernaufgabe (A)**	**Lerngruppe / Lernende** **S**
Aufgabe verstehen Individuelle Hilfen auf Fragen von S Präsentationen einfordern und werten Übergänge gestalten Lernziel nicht verlieren	Teilprobleme u. [Lösungsschritte] A1 […] A2 […] A3 […] …	Eigenständiges Lösen Sozialform wählbar Hilfe von L anfordern Gegenseitige Hilfen Teillösungen präsentieren Vergleichen unterschiedlicher Lösungen
Ideen der Lernenden aufnehmen oder Instruieren	**Teilproblem** Mit bisher erworbenen Fertigkeiten nicht lösbar!	Lösungsvorschläge erlaubt und erwünscht
Verstehen prüfen	**Neues Wissen** **= Lernziel**	Verstehen bestätigen
Lernaufgabe weiterführen Präsentation(en) werten	Lösung der Lernaufgabe	Teilproblem lösen und präsentieren
Lösungen einfordern und würdigen	Weitere Übungen	Selbstständiges Lösen Sozialform wählbar
Würdigung und Bewertung des Wissenszuwachses Gemeinsame Erarbeitung einer Dokumentation	**Neues Wissen einbinden und darstellen**	Singuläre Vor- und Darstellungen „regularisieren“

Abbildung 3.16: Verantwortlichkeit von Lehrenden und Lernenden bei der Bearbeitung von Lernaufgaben

Lernaufgaben, welche nach den in diesem Abschnitt beschriebenen Aspekten konstruiert sind, werden als eine zentrale Methode des Modells für das fachliche Lernen genutzt. Sie können den gesamten Unterricht der Sekundarstufe 1 begleiten. Da sie für den Verfasser der Studie eine zentrale Methode des Lernmodells darstellen, wird das über Lernaufgaben gestaltete Lernen zusammen mit dem Planungs- und Moderationsauftrag der Lehrenden als *Auftragsgesteuertes Lernen* bezeichnet. Abbildung 3.16 wird nachfolgend noch ergänzt durch eine Darstellung des Wissenszuwachses über die Prozessführung (siehe Abbildung 3.17).

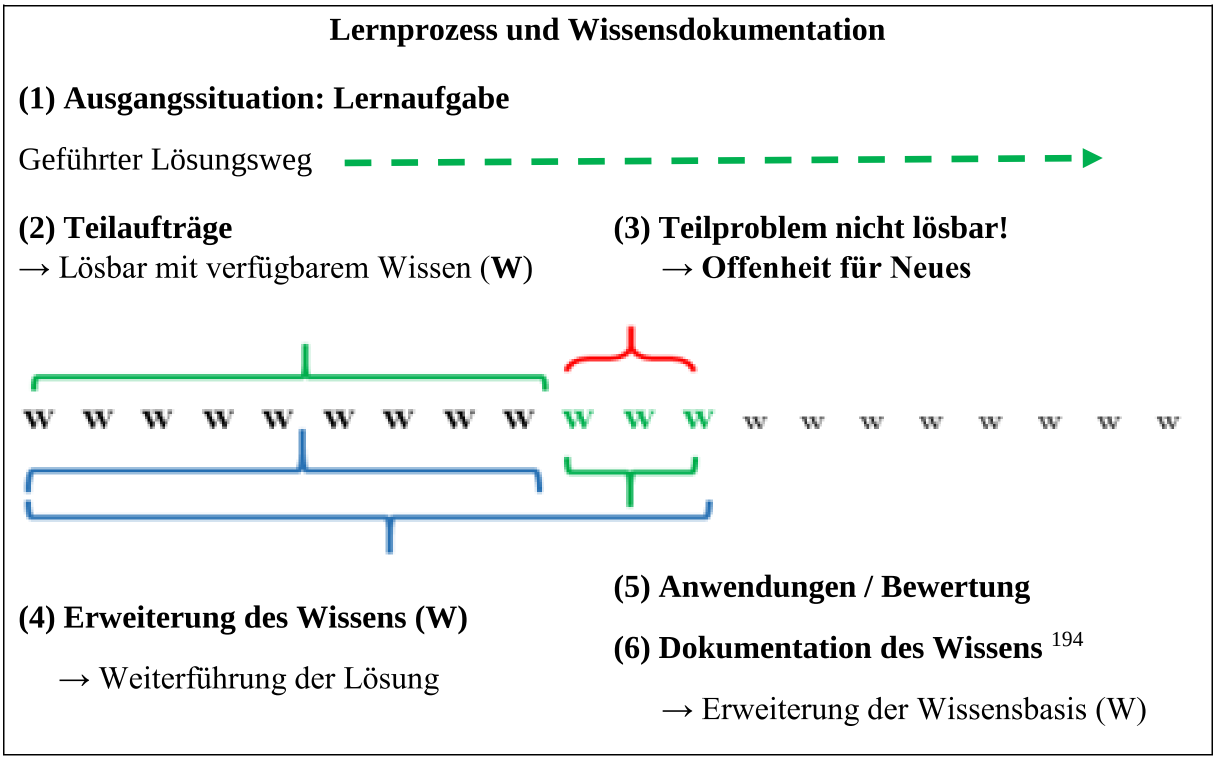


Abbildung 3.17: Darstellung des prozessbegleitenden Wissenszuwachses

Eine Lernform muss zudem passend in ein emotional positiv wirksames Lern- und Klassenklima eingebettet sein. Entscheidend für dieses Gelingen ist hierbei insbesondere die Kommunikationsgestaltung, welche nicht nur die fachliche Ebene betreffen darf. Ebenso wichtig ist die Integration des Lernprozesses in den emotionalen Beziehungsaufbau und dessen Pflege.

Abbildung 3.18 veranschaulicht die vielfältigen kommunikativen Vernetzungen in den drei Vermittlungsebenen Inhalt, Beziehung und soziales Verhalten. Die Pflege dieser Beziehungen kann nicht allein in der Verantwortung des bzw. der Lehrenden einer Lerngruppe liegen. Sie muss auch von der Lerngruppe mitgetragen sein.

---

[194] Entscheidend hierbei ist die Dokumentation des neuen Wissens nach der Begriffsbildung und geeigneten Anwendungen unter der Mitbeteiligung der Lernenden in einer vereinbarten und klassenübergreifend verwendeten Dokumentationsform, auf die sich die Fachschaft einer Schule einigen muss.

In der Abbildung stellen zwei äußere Kreise den Beziehungsaufbau zur Fachlichkeit (blaue Farbe) und der emotionalen Verfasstheit hinsichtlich der Einstellungen zum Stoff (grüne Farbe) dar. Der soziale und zwischenmenschliche Umgang der Lerngruppe ist im Inneren der Kreise veranschaulicht. Die Doppelpfeile (braune Farbe) deuten die Kommunikationsformen in den jeweiligen Ebenen an.

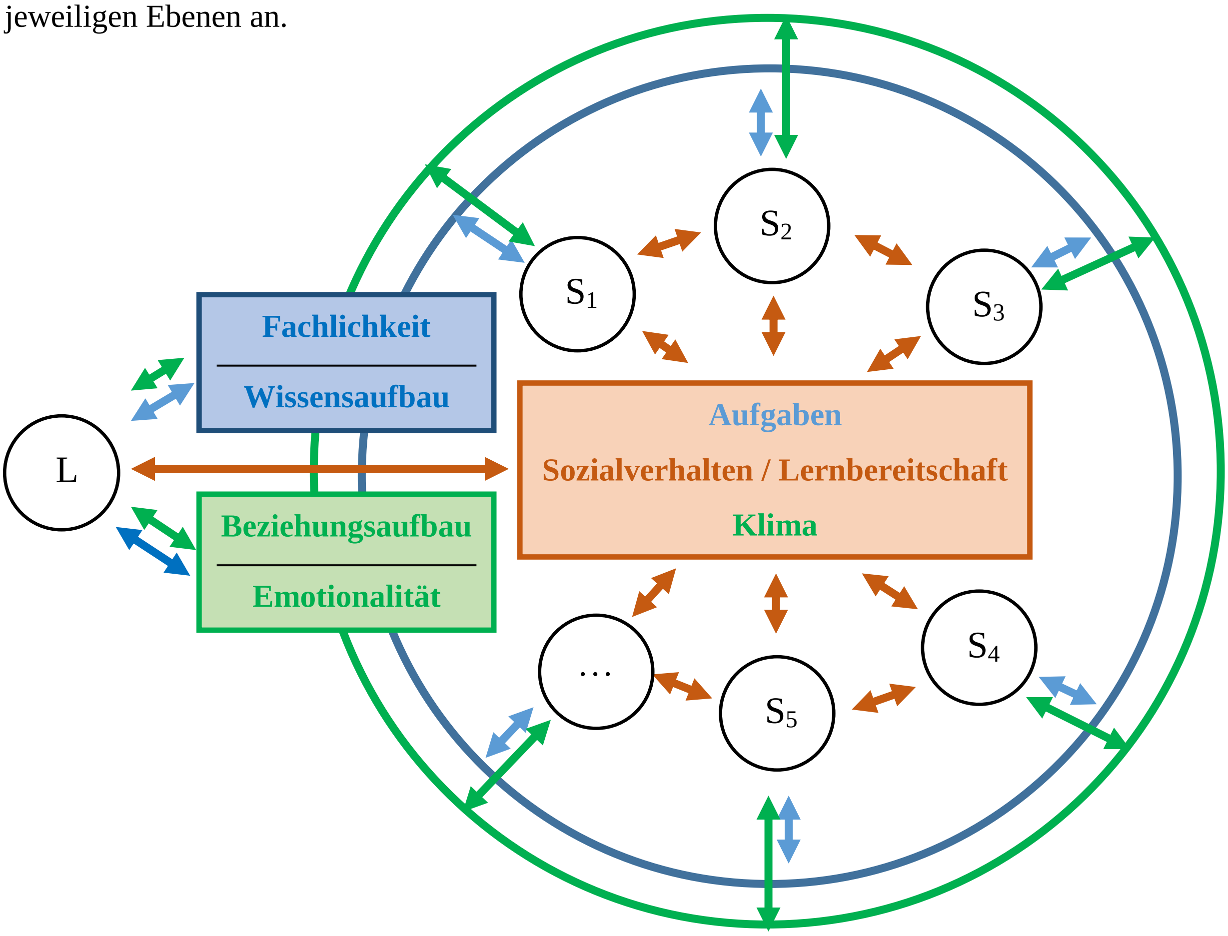


Abbildung 3.18: Parallel verlaufender Wissens- und Beziehungsaufbau in einer Lerngruppe über Kommunikationsprozesse, geführt durch die/den Lehrenden.

Die Übersicht will vermitteln, dass die unterschiedlichen Kommunikationsebenen stets gleichermaßen angesprochen und zusammenhängend gesehen werden müssen und sich ein vertrauensvoller gemeinsamer Umgang aller Handelnden nur über jene positiv empfundene emotionale Basis bilden kann, welche die entscheidende Voraussetzung für die Bereitschaft der Lernenden zur Mitarbeit anzusehen ist.

3.2.8.3 Methodische Entlastung in Lernsituationen

Bei dem Unterrichtsprojekt in Sindelfingen und Herrenberg wurde für Lernsituationen durchgängig die auftragsgesteuerte Methode verwendet. Diese Entscheidung der Lehrenden entsprach der Absicht, in Lernsituationen, welche in der Regel inhaltliche Komplexität besitzen, die Lernenden durch eine gewohnte und verlässliche Methode mental zu entlasten. Die gewohnte Methode erinnert die Lernenden implizit an den Charakter der Stunde – es wird etwas Neues gelernt. Eine Vermeidung der Methodenvielfalt in Lernsituationen ist auch durch den besonderen Auftrag des Faches Mathematik angezeigt: In Mathematik wird eine stärkere Fokussierung auf Inhalte des Fachlichen gelegt und weniger auf die Beschreibung und Charakterisierung von Phänomenen (wie zum Beispiel im Fach Physik).

Grundsätzlich darf jedoch eine Methode nicht zu einem durchgängig einzuhaltenden dogmatischen Prinzip erklärt werden. Methodische Variationen sind allein deswegen geboten, weil die Gruppenstärke einer Lerngruppe es erfordert, dass die Mitbeteiligung der Lernenden nicht allein über verbale Kommunikation zu erreichen ist, sondern über Aufträge gestaltet sein muss, bei denen Lehrende von der inhaltlichen Führung partiell entlastet sind und Zeit haben, individuelle Aktivitäten der Lernenden wahrzunehmen und bei Bedarf Hilfen anzubieten.

3.2.8.4 Auftragsgesteuertes Lernen und genetische Methode

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird das *Auftragsgesteuerte Lernen* mit der schon vorgestellten genetischen Methode nach Martin Wagenschein [195] verglichen. Obwohl diese primär auf das Fach Physik bezogen war, können doch einige Gemeinsamkeiten aufgezeigt werden.

Auftragsgesteuertes Lernen ist genetisch, weil die Lernenden mit einem Problem konfrontiert werden und darüber versuchen, den Lerngegenstand zu erfassen, Lösungsansätze zu suchen, zu finden und auszuführen. In einer Abfolge von seitens des Lehrenden geführten Entwicklungsschritten über Teilaufgaben wird zunächst das vorhandene Wissen angewendet. Im Vordergrund steht das eigenständige Lösen von Teilaufgaben und einer Präsentation in der Lerngruppe. Dabei wird Fachliches sprachlich formuliert, kommuniziert und textlich erfasst.

Auftragsgesteuertes Lernen ist sokratisch, weil der Lehrende eine lenkende Funktion übernimmt, über die Lernende zu eigenständigem Handeln angeleitet werden. Im Dialog mit den Lernenden moderiert er die Prozessschritte, fordert zu Präsentationen und wertender Kritik auf und leitet jeweils die Übergänge der Teilaufgaben ein. Dabei übernimmt die Lehrkraft nie die inhaltliche Regie. Die Lernenden werden als fachliche Experten behandelt, die ihr Wissen hinsichtlich ihres Vermögens anwenden können und dabei Selbstvertrauen aufbauen. Die Lehrperson begleitet den Prozess und verzichtet auf instruktive fachliche Vermittlung, wenn diese nicht von einzelnen angefordert wird oder an entsprechenden Stellen vorab geplant war.

Auftragsgesteuertes Lernen ist exemplarisch, weil die von Wagenschein vorgeschlagene Stofffülle bei dieser Methode allein dadurch reduziert wird, dass sich ein neuer Inhalt über eine

[195] Vgl. Abschnitt 2.5.1.

Aufgabenstellung entwickelt. Über die geführte Lösung dieser Aufgabe wird das Wissen erweitert. Dabei ist allein durch die zeitliche Beschränkung der Unterrichtszeit eines Schuljahres eine Beschränkung auf zentrale fachliche Inhalte bei der curricularen Planung geboten. Wagenscheins Leitsatz „Qualität geht vor Quantität“ kann man auch ergänzen mit der Aussage, *weniger kann mehr sein*.

3.2.8.5 Auftragsgesteuertes Lernen am Beispiel „Entdeckungen mit Dreiecken“

Die bisher didaktisch orientierten Ausführungen zu auftragsgesteuertem Lernen werden nun exemplarisch an einem lernzielorientierten Thema für eine unterrichtliche Behandlung aufbereitet. Dazu werden zwei Alternativen angeboten, die als Extreme anzusehen sind hinsichtlich des methodischen Spektrums, über das die Lernenden Gelegenheit zu selbstständigem Arbeiten in Lernsituationen erhalten.

Stundenthema: Entdeckungen mit Dreiecken (Klassenstufe 5 oder 6).

Beispiel 1: Ein Arbeitsblatt zur selbstständigen Bearbeitung

Aufgabenblatt: Entdeckungen am Dreieck

Unten ist ein Dreieck gezeichnet.

a) Zeichne die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ein.
b) Verbinde die Mittelpunkte durch Strecken.
c) Beschreibe die neue Situation.
   Welche Figuren siehst du?
   Welche Eigenschaften erkennst du?
d) Betrachte die Winkel. Markiere alle Winkel mit gleicher Weite jeweils mit gleicher Farbe.
e) Erkennst du Beziehungen zwischen diesen Winkeln?

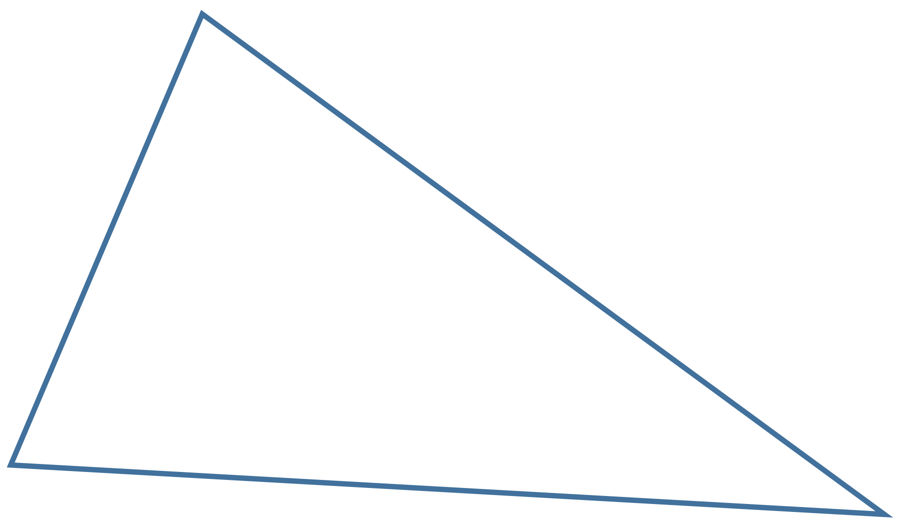


Abbildung 3.19: Aufgabenblatt mit vorab formulierten Aufträgen zum Entdecken des Winkelsummensatzes beim Dreieck

Abbildung 3.19 zeigt ein Arbeitsblatt, das exemplarisch ist für lernzielorientiert geführte Aufgabenblätter zur selbstständigen Erarbeitung eines Sachverhalts. Die Aufträge sind typisch für ein Format, das sehr oft anzutreffen ist. Solche Aufgabenblätter werden oft auch in Ordnern im Klassenzimmer gesammelt, um sogenanntes selbstorganisiertes Lernen zu veranlassen.

Alternativ hierzu wird ein Skript für die Lehrperson mit dem gleichen Lernziel über *auftragsgesteuertes Lernen* angefügt.

Beispiel 2: Ein Unterrichtsskript für auftragsgesteuertes Lernen

Bemerkungen zum Format: Die Aufträge sind so formuliert, dass sie schriftlich (mit dokumentierendem Hefteintrag) oder mündlich gestellt werden können. Kursiv geschrieben sind Anregungen für die Lehrperson zur Gestaltung des Prozesses und zur Überleitung zum nächsten Auftrag. Die Unterrichtsführung muss so gestaltet sein, dass der Heftmitschrieb der Lernenden den Prozess abbildet und nicht nur das Ergebnis.

Das Skript

Die Klasse ist aufgeteilt in Gruppen zu 2-3 Personen. Jede Person erhält ein DIN-A4-Blatt.

Auftrag 1: (*Für diesen Auftrag dürfen nur Schere, Bleistift und Lineal verwendet werden.)*

Ihr könnt das DIN-A4-Blatt falten und ihr dürft schneiden. Beschreibt, wie man in eurer Gruppe vorgehen kann, um vier deckungsgleiche Dreiecke zu erhalten.

[…] [196]

Über die Vorschläge einigt man sich auf eine <u>gemeinsame Vorgehensweise</u>. Es wird auch eine Lösung vorgestellt, bei der man durch genaues zweimaliges, zu den Blattseiten paralleles, mittiges Falten auf DIN-A6-Größe mit nur zwei geraden Schnitten von der offenen Seite her vier gleiche Dreiecke erhält. Mit Bleistift und Lineal können die Schnittlinien zuvor gezeichnet und die Form des Dreiecks vor dem Ausschneiden bestimmt werden.

Auftrag 2:

Erstellt die Dreiecke wie vereinbart.

[…]

Falls jemand beim Falten bzw. Ausschneiden ungenau gearbeitet hat, erhält er vorbereitete Exemplare. Neben gleich langen Seiten gibt es auch gleiche Winkel. Diese sollen zur besseren Kennung mit jeweils gleicher Farbe markiert werden (z. B. rot, grün und blau; für die Kommunikation ist es hilfreich, wenn gleiche Farben verwendet werden).

[196] Das Symbol […] steht für die Phasen des Unterrichts, in der die Lerngruppe die Verantwortung für die Lösung und Präsentation des Auftrags erhält. Hier hält sich die Lehrperson zurück, nimmt jedoch den Prozessverlauf wahr, moderiert einfühlsam und gegebenenfalls auch differenzierend, und führt geschickt lenkend zum nächsten Auftrag und letztlich zum stofflich angestrebten Lernziel. Es sind jedoch gerade die Selbsterfahrungen der Lernenden in den Phasen […], die darüber entscheiden, ob der Unterricht auf lange Sicht „gewollt wird“.

Auftrag 3:

Markiert auf euren Dreiecken gleiche Winkel mit jeweils gleicher Farbe. Wir verwenden rot, grün und blau.

[…]

Der folgende Auftrag bereitet das angestrebte Lernziel vor.

Auftrag 4: Verwendet die vier Dreiecke, um ein neues Dreieck zu legen. Vergleicht die Lösungen eurer Gruppe. Was ist verschieden, was ist gleich?

[…]

Über die Zusammenführung der Gruppenergebnisse wird festgehalten, dass die gelegten Dreiecke die gleichen Winkelweiten haben wie die Ausgangsdreiecke und dass die Seiten jeweils doppelt so lang sind wie die ursprünglichen. Mit einer Übertragung der gelegten Gesamtfigur als Zeichnung ins Heft können die für die Begründung des Satzes wesentlichen Sachverhalte visuell erkannt und formuliert werden.

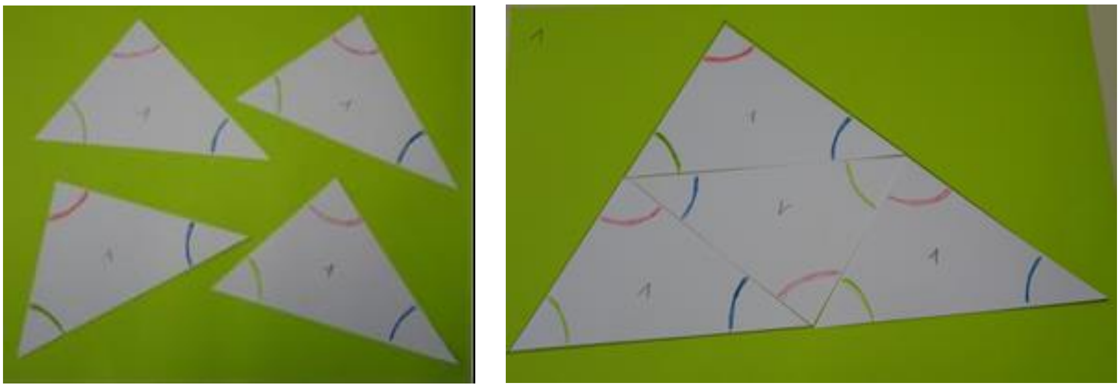


Abbildung 3.20: Ergebnisse zu den Aufträgen 3 und 4.

Auftrag 5: Übertragt die gelegte Figur als Zeichnung in eure Hefte. Markiert dabei auch gleiche Winkel wie in der gelegten Figur. Überlegt zuerst, wie ihr vorgeht, und zeichnet danach die Figur.

[…]

Bei der Nachbesprechung können unterschiedliche Strategien vorgestellt werden. Zum Beispiel: die Gesamtfigur auf eine Heftseite legen, markante Punkte abbilden und die Zeichnung fertigstellen, oder mit einem Ausgangsdreieck beginnen und zur Gesamtfigur ergänzen, oder zuerst das äußere ausgelegte Dreieck zeichnen, dann über die Mittelpunkte der Seiten die inneren Dreiecke bekommen, oder die gelegte Figur „vermessen“ und über Seitenlängen und Winkelweiten die Figur konstruieren …

Die Lehrperson fasst rückblickend die Ergebnisse zusammen:

(1) Alle haben in ihren Heften eine eigene Figur entsprechend Abbildung 3.20 erstellt.

(2) Alle Zeichnungen haben etwas gemeinsam: Die Winkelweiten des äußeren Dreiecks stimmen mit den Winkelweiten der inneren Dreiecke überein.

(3) Die Seitenlängen des Außendreiecks sind doppelt so groß wie die Seitenlängen der inneren Dreiecke.

(4) An jeder Seitenmitte des äußeren Dreiecks bilden die Winkel der drei beteiligten inneren Dreiecke zusammen einen gestreckten Winkel, das heißt aber auch:

In jedem Dreieck ist die Summe der Winkelweiten 180°.

Die nachfolgende Auflistung in Abbildung 3.21 vergleicht an exemplarisch gewählten Aspekten die beiden Methoden.

Selbstständiges Lernen mit Arbeitsblättern	**Auftragsgesteuertes Lernen nach einem Unterrichtsskript**
Die Aufträge sind von Anfang an ganzheitlich wahrnehmbar.	Die Aufträge werden sequentiell bearbeitet und besprochen.
Die Kommunikation wird nicht explizit gefordert.	Es gibt einen hohen Anteil an Kommunikation.
Die unterschiedliche Zeitdauer der Bearbeitung in der Lerngruppe führt zum Problem der zeitlichen Koordinierung.	Die Phasen ermöglichen eine zeitliche und inhaltliche Synchronisierung des Unterrichtsgangs.
Alle Lernenden behandeln dasselbe Dreieck.	Jede Gruppe hat ihr eigenes Dreieck.
Es gibt keine enaktiven Tätigkeiten, sondern ein gelenktes Entdecken. Der Konstruktionsweg vom äußeren Dreieck zum inneren Dreiecken ist vorgegeben.	Enaktive und konstruktive Handlungen führen zu symmetrischen Transformationen zwischen den Eigenschaften von äußerem und inneren Dreiecken.
Die Aufgabe ist geschlossen und hat nur eine Funktion.	Es gibt viele Möglichkeiten der Öffnung: Parkettieren, DIN-A4 Reste untersuchen usw.
…	…

Abbildung 3.21: Vergleich von Lernprozessen, die über Arbeitsblätter bzw. auftragsgesteuertes Lernen geführt sind.

Erwähnt werden sollte hier, dass eine vergleichende Gegenüberstellung nicht impliziert, dass eine Methode aus strukturellen Gründen auf- oder abgewertet ist. Arbeitsblätter in selbstverantwortlichen Lernsituationen können jedoch nach den Erfahrungen des Verfassers nicht jene Situationen des Prozesses ersetzen oder auffangen, in denen durch Lenkungen der Lehrperson eine Zielorientierung beibehalten und das Lernklima auch emotional positiv empfunden wird. Als Ausbilder hat er immer wieder in seinen Kursen betont: „Sie werden in ihrer schulischen Praxis von vielen wohlmeinenden Kollegen Arbeitsblätter erhalten. Überlegen Sie, wie sie diese Blätter geeignet zerlegen können und gestalten Sie mit den Abschnitten zielorientiert „Ihren“ Unterricht.“ Arbeitsblätter sind in Übungsphasen besser aufgehoben als im ästhetisch verfassten Lernprozess, der von einer klassenspezifisch angepassten und lernzielförderlichen Kommunikationsform begleitet sein sollte.

3.2.9 Zusammenfassung

Für einen abschließenden Überblick zu Kapitel 3 werden Aspekte eines ästhetisch verfassten Mathematikunterrichts entsprechend der Abschnitte 3.1 und 3.2 zusammengefasst.

Ein ästhetisch verfasster Mathematikunterricht ist charakterisiert durch

- ein Begriffslernen über *symmetrische Kommunikation* zwischen Lehrenden und Lernenden,
- das Verorten von Inhalten in einen mathematischen Modellierungskreislauf, über dessen Anwendung sich die Wissenserweiterung für die Lernenden im Sinne eines vernetzt und spiralig erweiterungsfähigen „Mathematischen Werkzeugkasten" darstellen lässt,
- eine behutsame Entwicklung der Fachsprache unter Einbeziehung der Alltagssprache und einer Verknüpfung mit dieser,
- die Verwendung von Darstellungsformen, die den Lernenden auch als Denkformen und Sprachelemente bewusst gemacht werden sollen,
- eine kognitive Entlastung der Lernenden mit Hilfe methodischer Sparsamkeit und begriffsunterstützender enaktiver Tätigkeiten sowie dem Einsatz darstellungsunterstützender elektronischer Hilfsmittel,
- die Verwendung einer aisthetischen Basis des Wissensaufbaus über basale ästhetische Prinzipien der kognitiven Wahrnehmung und Verarbeitung,
- eine fachinhaltliche Entwicklung über eine Verortung nach Entdecken und Erfinden, das unterrichtlich gelenkt nachvollzogen werden kann (also eigentlich geführtes Nacherfinden bzw. Nachentdecken ist).

Als mentale Entlastung bei Lernprozessen eignet sich eine gewohnte Prozessführung über „Auftragsgesteuertes Lernen" mit „Lernaufgaben".

Fazit: Auftragsgesteuertes Lernen kann einen ästhetisch-integrativen Unterricht bewirken, der die Lernenden beim Wissensaufbau über inhaltlich geeignete und hinsichtlich des neuen Stoffes zielorientierte Lernaufgaben aktiviert und ihnen die Möglichkeit gibt, bisher Gelerntes gestaltend anzuwenden. Für eine emotionale Bindung der Lernenden an die Sache ist hierbei der erfolgreiche und möglichst eigenverantwortlich und selbsttätig gefundene Weg ebenso wichtig wie das Lernziel.

3.3 Vom Raum zur Form – Körper und Figuren

Mathematische Begriffe und Methoden der Schule bilden sich über verallgemeinernde und/oder klassifizierende Abstraktionen sinnlich wahrnehmbarer Objekte und ihrer Beziehungen. Diese müssen im Unterricht begrifflich entwickelt und kommuniziert werden über von Lehrenden gestaltete und geleitete Prozesse. Entscheidend dabei sind die Eigentätigkeiten der sich-bilden-wollenden Lernenden. Für derart zu gewinnenden Einsichten gibt es zwei unterschiedliche Bewusstseins-Formungen (vgl. Abschnitt 3.2.6).

3.3.1 Mentale Verortung von Begriffen

Ein Begriff stellt sich entweder als geistige Neuschöpfung heraus, ist somit eine *Erfindung* des Geistes, oder er entsteht über Abstraktionen sinnlich wahrnehmbarer Objekte und ist somit eine kognitiv verallgemeinerte *Entdeckung*. Dies ist zum Beispiel für Figuren (wie z. B. Dreieck, Viereck usw.) und Körper (wie Würfel, Quader usw.) einfach nachvollziehbar. Aber es gibt auch Begriffe (wie z. B. Zahl, Variable, Term usw.), die ihren Ursprung in kognitiven Neuschöpfungen haben und erst über konstruierte sinnlich wahrnehmbare Formen repräsentiert sind.

Analog zur Bildung einer Theorie kommt es bei der mathematischen Begriffsbildung darauf an, dass ein wahrnehmbares Objekt (ein Exemplar) als Repräsentant des mental verorteten Begriffs auftritt und dieser nicht ausschließlich über das handhabbare Objekt bildbar ist, sondern über eine kognitiv herauszuarbeitende gemeinsame Eigenschaft aller Exemplare. [197]

Sieht man ästhetisch fundierten Unterricht als „Erziehungsort“ einer ganzheitlich verfassten pädagogischen Ästhetik, sollte das aus fachlicher Systematik vorab „Geordnete“ nicht die Gliederung eines abbildenden Mathematikunterrichts sein. Über eine Verknüpfung von sinnlichen Wahrnehmungen mit basalen kognitiven Gestaltungsprinzipien und einer Verortung hinsichtlich des Erfindens oder des Entdeckens können mathematische Begriffsbildungen für die Lernenden stimmiger entwickelt und vernetzt werden.

Die nachfolgend aufgeführten Begriffsbildungen sind exemplarisch für fachliche Grundbegriffe, die vernetzbar und aufbaufähig sind. Es wird hier jedoch keine Vollständigkeit angestrebt, da diese Studie nicht dem Anspruch einer möglichst umfassenden Didaktik des Fachs genügen kann; dennoch behandeln die Beispiele zentrale Begriffe und ergeben ein ausbaufähiges inhaltliches Grundgerüst für den Mathematikunterricht. Die Entscheidung, ob man im Unterricht einer fünften Klasse hinsichtlich des Ziels der Zusammenführung von Begrifflichkeiten

[197] Im Unterricht repräsentiert durch „hinreichend“ viele Beispiele, im Idealfall nach Bedarf des Lernenden.

und Methoden des Fachlichen mit *Zahlen* oder mit *geometrischen Formen* beginnt, ist nicht eindeutig zu treffen, da sich beide Gebiete in der Schulmathematik vielfältig aufeinander beziehen, nicht nur hinsichtlich des Messens und Vergleichens, sondern auch hinsichtlich ihrer Darstellungen. Zahlvorstellungen werden mit Hilfe geometrischer Formen vermittelt und geometrische Formen werden über Maße quantifiziert. Die Entscheidung, zuerst mit geometrischen Begriffen zu beginnen, kann begründet werden mit der Transformationsrichtung zwischen visueller Wahrnehmung und kognitiver Repräsentation, in diesem Fall also zuerst das abstrahierende Entdecken von Formen vor der Erfindung der Zahlen.

3.3.2 Geometrische Formen und Elemente

In der Schule wurde bis in die 70er Jahre (und gelegentlich auch noch heute) Geometrie unterteilt in ebene oder räumliche Geometrie, in rein konstruktive (das „weiße Blatt" mit Zirkel und Lineal) bzw. analytische (das karierte Blatt mit kartesischen Koordinaten), und entsprechend dieser Gliederung in getrennten Unterrichtseinheiten vermittelt. Dies ist exemplarisch für eine inhaltliche Abfolge nach fachlich ordnender Gliederung, die sich nicht für einen ästhetischen Wissensaufbau in der Sekundarstufe 1 eignet, da hierbei der vernetzte Zusammenhang dieser Teile den Lernenden nicht transparent vermittelt wird. Dagegen stellt Abbildung 3.22 die Entwicklung geometrischer Begriffe in den Kontext kognitiver Wahrnehmungsvorgänge und Begriffsbildungen über den Weg eines *verallgemeinernden und abstrahierenden Entdeckens* von räumlichen Erfahrungen.

Die in der linken Spalte gezeigten Aufnahmen wurden vom Verfasser im Unterricht verwendet, um den Blick auf mathematikhaltige reale Objekte zu schärfen. Die Objekte in der Mitte stellen einen Zusammenhang her zwischen räumlichen Objekten, flächigen Figuren und geometrischen *Elementarfiguren* wie Strecken, Winkel, Geraden usw. Hier sind die Objekte der elementareren Ebenen wiederum Teile der komplexeren übergeordneten Objekte. Es ist einsichtig, dass diese Gliederung zwei Richtungen der Vermittlung ermöglicht, die den Prinzipien des Zerlegens bzw. Zusammensetzen entsprechen, also destruktiven bzw. konstruktiven Charakter aufweisen. Die Darstellung in dieser Abbildung will auch vermitteln, dass ästhetisch verfasster Geometrieunterricht der Klassen 5 und 6 geometrische Begriffe über Wahrnehmungen aus dem täglichen Erfahrungsbereich entwickeln kann. Zum Beispiel wurde das Foto des Hauses (eine eigene Aufnahme d. Verf.) selbst in der perspektivisch „verzerrten" ebenen Ansicht von Lernenden in der Klasse 5 oder 6 als symmetrisch bezeichnet. Schüler der Klasse 5 und 6 besitzen eine kognitiv veranlagte Fähigkeit, Symmetrie zu sehen und zu erfassen.

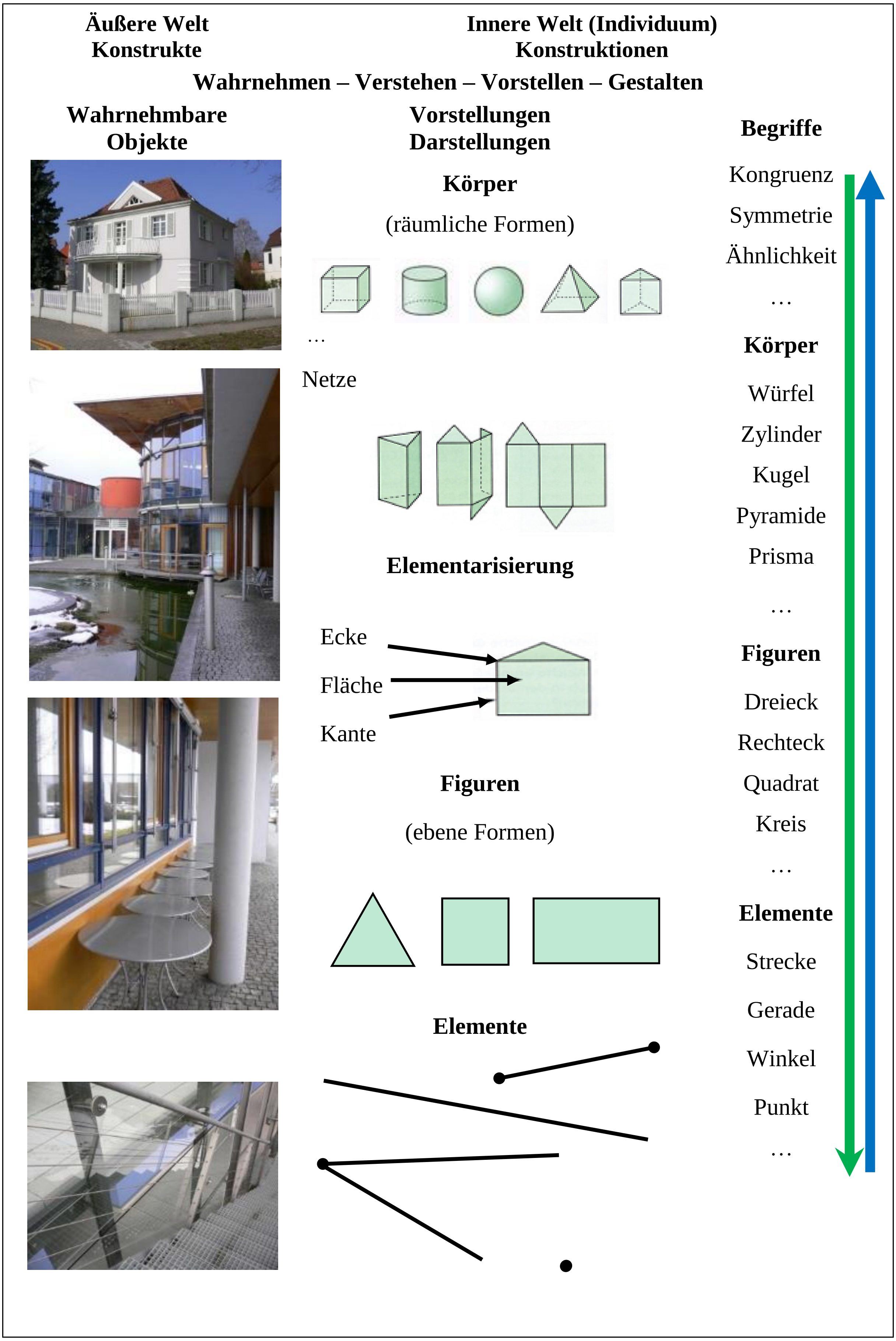
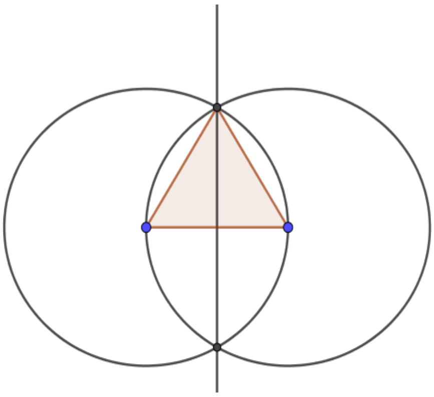


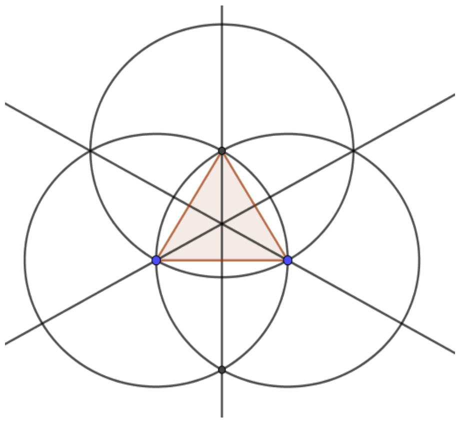
Abbildung 3.22: Entwicklung geometrischer Formen über Wahrnehmung und Abstraktion: vom Ganzen zu den Teilen (grüner Pfeil); von den Teilen zum Ganzen (blauer Pfeil)

Die weiteren Aufnahmen sind an der staatlichen Akademie Esslingen entstanden, einer Einrichtung des Landes Baden-Württemberg zur Lehrerfortbildung in naturwissenschaftlichen Fächern. Sie zeigen, dass der Architekt die Planung auch in Details auf die Funktion dieser Einrichtung abgestimmt hat, eine bemerkenswerte Form architektonischer Einfühlsamkeit in technisch-pädagogisch verknüpfter Formgebung.

Das geometrische Begriffsverständnis in der Klassenstufe 5 und 6 ist noch so geprägt, dass eine Figur etwas Flächiges ist und ein Körper etwas ist, was Volumen besitzt. Deshalb werden die geometrischen Objekte Punkt, Strecke, Gerade und Winkel noch nicht als geometrische Figuren wahrgenommen. Sie sind *wahrnehmbar gemachte figurative Objekte einer kognitiven Destruktion* und somit auch als Erfindungen in Poppers *Welt 2* deutbar. Wenn im Verlauf des Unterrichts in nachfolgenden Klassenstufen diese Elemente auch als Elementarfiguren der Geometrie bewusst verortet sind, ist die Schulung des Sehens von Teilfiguren in Gesamtfiguren und das Erweitern von Figuren ein motivierendes Betätigungsfeld für den Geometrieunterricht. Die Lernenden sind dann mit einem geometrischen Basiswissen ausgestattet, das konstruktiv verwendet wird und über die Beziehungen zwischen diesen Formen argumentatives Begründen ermöglicht. [198] Abbildung 3.23 zeigt exemplarisch solche elementaren Figurationen, die für erforschendes Lernen genutzt werden können.



Figur 1



Figur 2

Abbildung 3.23: Von der „Zweikreis“ zur „Dreikreisfigur“- Ausgangspunkt für entdeckendes und erforschendes Lernen im Problemkreis „Eigenschaften von Dreiecken“

Ausgehend von zwei Kreisen mit gleichen Radien, deren Mittelpunkte jeweils auf der Kreislinie des anderen liegen (siehe Figur 1), kann ein symmetrisches Dreieck „hineingesehen“ und gezeichnet werden, dessen Eckpunkte mit den Schnittpunkten der Kreise korrespondieren. Wird die Figur 1 „symmetrisch vervollständigt“ durch den sich anbietenden dritten Kreis (siehe

[198] Der begriffliche Übergang wird in Abschnitt 4.8 für eine Unterrichtseinheit verwendet, die propädeutisch ein axiomatisch begründetes Argumentieren in Klasse 7 vermittelt.

Figur 2) und ergänzt durch die weiteren Symmetrieachsen des gleichseitigen Dreiecks, entsteht auch eine hinsichtlich der gefühlsmäßigen Bewertung als ästhetisch empfundene Figur mit einer visuellen Darstellung aller Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks. [199]

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass nicht die linear geordnete fachliche Wissensdarbietung für das Fach motivierend wirkt, sondern szenisch arrangierte Gestaltungsfelder, die zu Entdeckungen führen, selbstverantwortete ganzheitliche Lösungen eines fachlichen Komplexes liefern und mitentscheidend sind für die emotionale Bewertung sowohl des Prozesses als auch seiner Produkte.

Symmetrie sehen

Symmetrie visuell zu erkennen ist ein basal unterstütztes kognitives Gestaltungsprinzip. Lernende erkennen und nutzen Symmetrie schon in der ersten Grundschulklasse. Abbildung 3.24 zeigt die Zusammenführung der Ergebnisse eines „Forschungsauftrags“ an Lernende einer Klassenstufe 7 zum Thema **Symmetrie bei einfachen Figuren**.

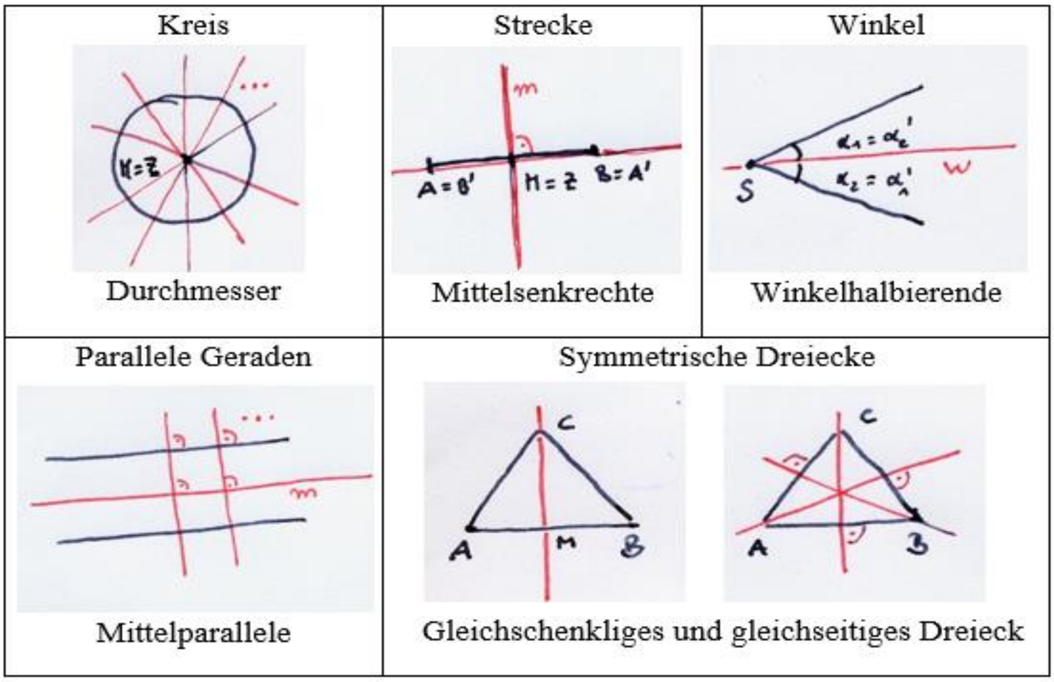


Abbildung 3.24: Symmetrie bei einfachen Figuren

Der unterrichtliche Auftrag zu Abbildung 3.24 lautete: Skizziert einfache geometrische Figuren, wie z. B. Dreiecke, Strecken, Winkel usw., bei denen ihr Symmetrie erkennt. Stellt eure Ergebnisse in einer übersichtlichen Skizze dar. [200] Für den Autor (damals Mathematiklehrer der

[199] Ein Leser, der erkennt, dass in beiden Figuren von Abbildung 3.24 noch weitere Dreiecke zu „sehen“ sind, hat jene Fähigkeit des „Figurenerweiterns“ erworben, die der Autor im Unterricht erreichen möchte.
[200] Zur Darstellung sollten die Ausgangsfiguren jeweils in schwarzer Farbe skizziert und die Symmetriebedingungen in roter Farbe hinzugefügt werden. Die Skizzenhaftigkeit in der Darstellung wird beibehalten.

Klasse) war es überraschend, dass Lernende bei parallelen Geraden auch dazu orthogonale als Symmetrieachsen erkannten. Sie hatten die Idee der „Unendlichkeit“ von Geraden verinnerlicht.

Symmetrie erzeugen

Im Gegensatz zum Wahrnehmen von Symmetrie erfordert das konstruktive Erzeugen von Symmetrie ein unterschiedliches Vorgehen. Symmetrie nimmt unser Gehirn wahr, Symmetrie sieht man ohne zusätzliche kognitive Tätigkeit. Aber zur Erzeugung einer symmetrischen Figur muss eine Konstruktion ausgeführt und begründet werden können. [201]

3.3.3 Vermitteln zwischen räumlichen und ebenen Darstellungen

Geometrische Objekte sind jedoch nicht nur Abstraktionen der räumlichen Wahrnehmung. Von Anfang an zeigt sich in der Kulturgeschichte des Menschen, dass räumliche Eindrücke und Erfahrungen auf ebenen Gegenständen abgebildet wurden. Dabei muss auch erwähnt werden, dass die räumliche Wahrnehmung auf einer hochgradig komplexen kognitiven Verarbeitung des Gehirns beruht, bei der zwei ebene und getrennte Bilder der Netzhaut mental zu einer räumlichen Wahrnehmung „verrechnet“ werden. Und mit einem hohen Aufwand an Rechnungen und Abbildungen ist es heute möglich, räumliches Wahrnehmen in Echtzeit zu simulieren. Die Dreidimensionalität des geometrischen Wahrnehmungsraums, unseres sogenannten Anschauungsraums, kann also auch eine „Erfindung“ der neuronalen Verarbeitung in John Poppers *Welt 1* sein, die sich in *Welt 2* und *Welt 3* begrifflich manifestiert hat (vgl. Abschnitt 1.6).

Die in Abbildung 3.25 gezeigte Folie wurde vom Verfasser für eine Vorlesung zur Didaktik der Mathematik für Studierende des Lehramts am Karlsruher Institut für Technologie zusammengestellt. Über die vier Darstellungen soll die Einsicht in die Veränderung von mentalen Vorstellungen bzw. Sichtweisen bei der Entwicklung und des Verstehens des räumlichen Sehens und seiner ebenen Darstellungsprinzipien hervorgehoben werden. Die Bilder auf der linken Seite zeigen die veränderte Sicht des Künstlers bei der Entwicklung perspektivisch darstellender Malerei. Aus der egozentrischen Sicht des sehenden Auges als „Auftreffpunkt“ der „Sehstrahlen“ wird beim Übergang zur Zentralperspektive ein Fernpunkt in der Bildebene fixiert. Fernpunkt und Auge bilden dabei quasi eine symmetrische Beziehung zur Leinwand, der Darstellungsebene. Der Künstler konstruiert nicht mehr mit seiner damals geglaubten naturwissenschaftlichen Sicht über die Natur, sondern mit geometrisch-mathematischen Methoden,

[201] Und die Beschreibung einer solchen Konstruktion bezieht sich wiederum auf das verwendete Werkzeug.

welche die Natur „wahrnehmungsgetreu“ abbilden.

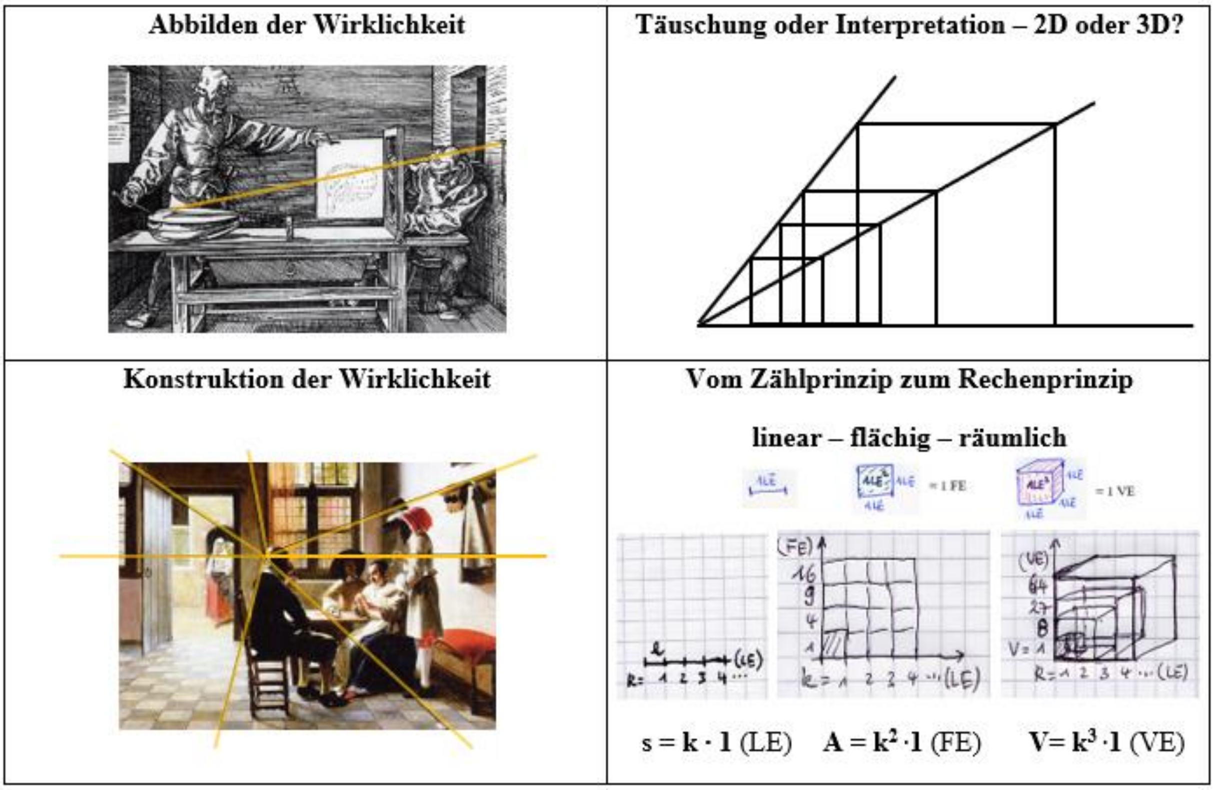


Abbildung 3.25: Folie aus einer Vorlesung mit dem Titel „Fachinhaltliche Didaktik des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts“ des Autors zur räumlichen Wahrnehmung, ebenen perspektiven Darstellungen und korrespondierenden Messprinzipien

Das Bild oben rechts vermittelt über die unterschiedlich interpretierte Darstellung – entweder sieht man ähnliche Quadrate oder ähnliche Pyramiden – einen Bezug zwischen flächiger und räumlicher Interpretation zweidimensionaler Darstellungen. Darunter sind die korrespondierenden Abbildungs- und Rechenprinzipien bei eindimensionaler, flächiger und räumlicher Ähnlichkeit angegeben. Wenn Lernende der Klassenstufe 5 (und in nachfolgenden Stufen) diese „Bilder“ mit den entsprechenden Zähl- und Rechenprinzipien assoziieren und nachhaltig erinnern können, werden sie auf die Frage „Wie viele Quadratzentimeter hat ein Quadrat von 1m Länge?“ nicht mit „100“ antworten. Aber die Antwort 100 wird häufig gegeben, z. B. in der Klassenstufe 10 oder gar in einer mündlichen Abiturprüfung. Sie ist nicht damit zu erklären, dass zu wenig geübt wurde, sondern damit, dass das Grundprinzip nie verstanden wurde, aber insbesondere auch keine bildhafte Vorstellung des Sachverhalts erinnert wird beziehungsweise im Unterricht angeboten wurde.

3.4 Entwicklung des Zahlbegriffs

Die Begriffsentwicklung der Zahlen wird in mehreren Abschnitten dargestellt. Zunächst wird eine Zusammenfassung der geschichtlichen Entwicklung der Zählzahlen dargestellt. Diese orientiert sich hauptsächlich an George Ifrahs Werk „Universalgeschichte der Zahlen". Danach wird eine ästhetisch fundierte Begriffsbildung der in der Schule verwendeten Zahlarten vorgeschlagen. Ein Abschnitt stellt die Zahlentwicklung in der Grundschule dar, eine weiterer die Zahlarten, die in den Klassenstufen 5 und 6 als Erweiterungen der natürlichen Zahlen hinzukommen.

3.4.1 Genetisch-historische Entwicklung der *Zählzahlen*

Die Zahlen wurden von den Menschen erfunden, um den Wunsch des Zählens zu erfüllen. Dieses *Zählen-Wollen* entspringt nach George Ifrah [202] und Gerhard Kropp [203] Entwicklungen, die über gesellschaftliche Prozesse entstanden sind. Mit dem Auftreten des modernen Menschen (etwa 10.000 v. Chr.) sei das Bedürfnis entstanden, einen Besitz genauer zu ermitteln oder zeitliche Abläufe messbar zu machen. Dieser Wunsch führte zur Bildung von Zählmethoden und der Verwendung sprachlicher Begriffe für Anzahlen und sinnlich wahrnehmbaren und kommunizierbaren *Zahlworte*. [204]

Diese entwicklungsgeschichtlich langwährende Phase beruhe auf Erfahrungen, Experimenten und Zufällen. Kropp spricht hier von einer „*empirischen Vorform des Zahlbegriffs*". [205]

Hans Freudenthal antwortet im Zusammenhang von kognitiver Entwicklung des Zahlverständnisses und der Entwicklung der Sprache auf die „Henne-Ei-Frage":

> *„Was die Menschen eher geübt haben, das Schreiben oder das Rechnen, wüßte ich nicht. Das Alphabet ist zweitausend Jahre älter als unser heutiges indisch arabisches Ziffernsystem. Aber das beweist nichts. Die Mathematik ist viel älter als die Ziffern. Mit den ersten Schreibübungen der Menschheit erscheinen die ersten*

---

[202] Ifrah, 1989
[203] Kropp, 1969
[204] Zur grundsätzlichen Frage, ob Menschen genetisch erworbene Konzepte zum Zahl-Verstehen haben, ohne dass es dafür eine sprachliche Ausdrucksform gibt, hat der Philosoph und Linguist Peter Gordon eine Studie mit 200 Jägern und Sammlern eines abgelegenen Stammes im Amazonas Dschungel erstellt. Dieser Stamm kennt kaum soziale Hierarchien, es gibt keine künstlerischen Tätigkeiten, gelebt wird nur vom Tauschhandel. Seine Ergebnisse untermauern die These, dass ein über Eins und Zwei hinausgehendes Zahlverständnis nicht genetisch veranlagt ist, und dieses insbesondere mit der sprachlichen (d. h. kognitiven) Fähigkeit zusammenhängt, vergleichend vorzugehen. Der Stamm kennt keine Worte für „Mehr als" oder „Weniger als". Das Fehlen von Worten und Vorstellungen für Zahlen kann demnach auch als Ergebnis kultureller Einschränkungen angesehen werden, welche die Entwicklung eines abstrakten Zahlbegriffs nicht erforderlich machen, [Peter Gordon, Jäger und Sammler Eins, Zwei, Viele, Zeitschrift Science, Onlineversion, DOI 1094492].
[205] Kropp, 1969, S. 11.

> *Rechenübungen [...] Bezeichnend ist, dass die Zahlworte bis 10 und das Zahlwort für 100 zum Urbestand z. B. der indogermanischen Sprachfamilie gehören, also lange, bevor die Schrift erfunden wurde.“* [206]

Zählen wird nicht allein durch äußere Handlungen wie Schreibübungen oder Tätigkeiten wie Kugelschieben oder Bauklötze-Stapeln gelernt, sondern über eine kognitive Verknüpfung von enaktiven Tätigkeiten und mentaler Abstraktion.

Entscheidend ist die mentale Begriffsbildung, wodurch die „Zahl“ Objekt der Vorstellung wird, die syntaktisch-semantisch wiederum wahrnehmbar gemacht werden muss, damit die Vorstellung kommunizierbar ist und zum Zahlobjekt werden kann.

Die folgenden Ausführungen orientieren sich an Ifrahs Werk „Universalgeschichte der Zahlen“, Teil I: „Das Zahlbewusstsein“. [207] Die dort historisch teilweise narrativ dargestellten Entwicklungsstufen werden in der Zusammenfassung als Gliederungspunkte verwendet.

3.4.1.1 Objekt-Objekt-Zuordnungen

Eine frühe „Zählweise“ für eine Ansammlung von Objekten ohne Zahlvorstellung bzw. sprachliche Repräsentation wurde möglich über eine wechselseitig eindeutige Zuordnung zu einer anderen Sammlung von Objekten.

George Ifrah zeigt dies am Beispiel eines Hirten (vgl. Abbildung 3.26), der für jedes Tier seiner Herde in einen Tierknochen eine Kerbe geschnitzt hat. Beim abendlichen Einlaufen seiner Herde fährt er, sequentiell zuordnend, die Kerben ab. Wenn er beim zuletzt einlaufenden Tier bei der letzten Kerbe angelangt ist, nimmt er an, dass die Anzahl der Tiere unverändert ist. [208]

Abbildung 3.26: Das Einkerben ermöglicht eine bijektive Zuordnung zwischen der Anzahl der Schafe und der Anzahl der Kerben.

Diese Methode setzt jedoch eine besondere kognitiv erworbene Fähigkeit des Zählenden voraus. Der Hirte besitzt ein

[206] Freudenthal, 1977, S. 11.
[207] Vgl. Ifrah, 1989, S. 21-79.
[208] Vgl. Ifrah 1989, S. 28, 29.

Bewusstsein für die „zahlenmäßige“ Gleichheit einer Population mit einer selbsterzeugten Notationsform, die er oder ein Vorgänger erfundenen hat oder hatte. Moritz Cantor führt bei der Begründung der Mengenlehre Ende des 19. Jh. dafür den Begriff *Mächtigkeit von Mengen* ein, der auf nicht endliche Mengen übertragbar ist. [209]

3.4.1.2 Zahlworte

Eine andere Ausprägung der Begriffsbildung ist das Zählen mit *Zahlworten,* das als bewusstes Zusammenfassen bestimmter Individuen (Objekten oder Elementen, Anm. d. Verf.) gedeutet werden kann.

Diese Fähigkeit ist nicht nur dem Menschen gegeben. Auch einige Tierarten können die Anzahl ihrer Jungen derart zählen. Nach Cantor [210] handle es sich um eine „*Fähigkeit zum genauen Schätzen*“, mit der zum Beispiel auch einige südafrikanische Stämme umgingen: „*Diese können kaum weiter zählen als zehn, haben jedoch so eine bestimmte Vorstellung von der Größe ihrer Herde, dass sofort bemerkt wird, wenn auch nur ein Tier fehlt.*"

Vorstufen des Ordnungsaspekts

Eine weitere Entwicklungsstufe war der Umgang mit rudimentären Größenvorstellungen, welches sich z. B. in der Verwendung von Wörtern wie *viel, wenig,* einer *großen oder kleinen Anzahl* zeigt und der das Vergleichen von Anzahlen ermöglicht. Analogien der Alltagssprache zu Zahlnamen wie Eins und Zwei kann man heute noch finden. Die Zahl Zwei ist zum Beispiel Teil von Zwilling, Zwiespalt oder Zwieback.

Eine zahlenmäßige Wahrnehmung der Wirklichkeit machte anfangs größere Zahlen überflüssig, so dass deren Existenz grundsätzlich in Frage gestellt war. [211]

Forscher versuchten z. B. Indianern das Zählen und Rechnen beizubringen. Diese weigerten sich jedoch die Information, „*Der weiße Mann hat heute sechs Bären geschossen*", zu akzeptieren, da man „*an einem Tag ja gar keine sechs Bären erlegen könne*“. [212]

Südseeinsulaner wollten die Aussage „*einhundert Schweine*" nicht akzeptieren, da es einhundert Schweine gar nicht gebe. [213]

---

[209] Vgl. Meschkowski, 1961
[210] Cantor, 1880, S. 4.
[211] Ein deutlicher Hinweis auf begriffliche Auswirkungen kultureller Entwicklungen.
[212] Glade, 1973, S. 24.
[213] Ebd. S. 24-25.

3.4.1.3 Körper- und Zählsprache

Zahlen sind in der Folge ihrer Entwicklung durch Gegenstände und häufig über Körperteile dargestellt worden: Eine Geste oder ein Objekt *repräsentiert* eine Zahl, genauer: ist Symbol für eine (kognitiv konstruierte) Anzahl von visuell wahrgenommenen Objekten.

Zum Beispiel stellten Lengua-Indianer in Paraguay die Zahlen 1 bis 10 mit den Fingern und die Zahlen 11 bis 20 mit den Zehen dar. Dem entsprechend (wörtlich übersetzt) bedeutet „auf dem Fuß, eins " die Anzahl 11 und „auf dem anderen Fuß, eins" die Anzahl 16. [214]

Jeder dieser körperlich-figurativen Darstellung von Zahlen entspricht also einer begrenzten Zahlvorstellung mit zugeordneten Wortbezeichnungen. Hatte sich eine gesellschaftliche Gruppe für eine Repräsentationsform entschieden, stand damit auch der darstellbare Zahlbereich fest.

Ein weiteres eindrucksvolles Beispiel zeigt Abbildung 3.27.

Die Menschen dieses Insulanerstammes verwenden Körperteile als Zahlsymbole. [215]

Das zur „Zahl“ gehörige Zahlwort ist jenes, welches für den entsprechenden Körperteil gesprochen wird.

Es wird deutlich, dass dieser Stamm für Anzahlen, die größer als 33 sind, keine Worte besitzt und deshalb wohl auch kein Bewusstsein für größere Zahlen entwickelt ist.

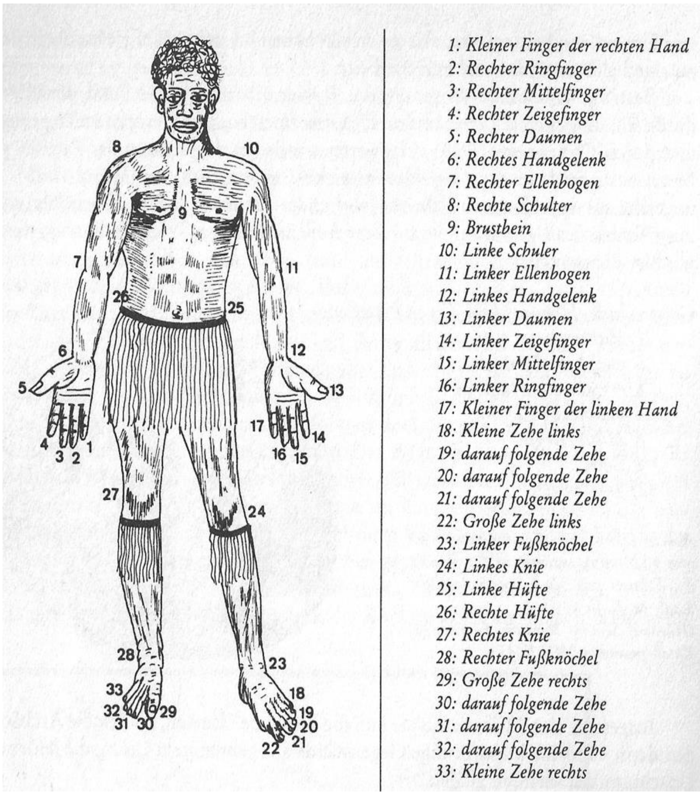


Abbildung 3.27: Die Menschen dieses Insulaner Stammes können nur von 1 bis 33 zählen.

In früheren Kulturen war es z. B. auch üblich, Zahlen mit den Fingern einer Hand darzustellen.

Abbildung 3.28 zeigt eine linke Hand. Wird vereinbart, dass jeder Finger und der Daumen, eigenständig oder gruppiert, eine Zahl repräsentieren, ergibt sich eine Zahldarstellung von eins

[214] Ifrah, 1989, S. 38f.
[215] Ifrah, 1989, Kapitel 1, S. 27-40

bis fünf (vgl. die schwarz dargestellten Zahlen). Wird vereinbart, dass die Fingerglieder Zahlen repräsentieren, ergibt sich ein Zahlbereich von eins bis zwölf (vgl. die weiß dargestellten Zahlen). Der Daumen wird dabei als Zeiger auf das jeweilige Fingerglied (= Zahl) verwendet. [216]

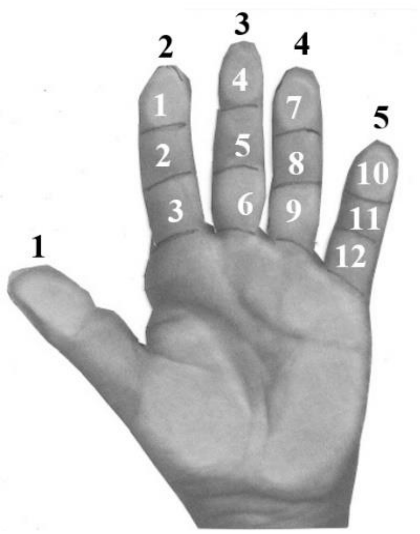


Abbildung 3.28: Zählen mit den Fingern von eins bis fünf oder mit den Fingergliedern von eins bis zwölf

In seinem Werk bezeichnet Georges Ifrah die Hand als „Erste Rechenmaschine des Menschen" (vgl. Ifrah, 1989, Kapitel 3). Spezielle Vereinbarungen ermöglichten Rechentätigkeiten in relativ großen Zahlbereichen. Nach Ifrah sind solche Techniken in einigen Kulturen noch heute in Gebrauch. [217]

3.4.1.4 Rechenbretter und Ziffernsysteme

Von der Zählsprache bis zur heute üblichen Arithmetik liegt ein langer Weg. Man hat Belege dafür, dass schon vor 2500 Jahren Rechenbretter benutzt wurden.

Abbildung 3.29: Darstellung auf der Dariusvase

Abbildung 3.29 zeigt auf einem Ausschnitt der sogenannten Dariusvase (486 v. Chr.) einen Schatzmeister, der das Ergebnis einer Abrechnung auf einer Wachstafel festhält. Römer und Chinesen entwickelten Rechenbretter weiter zum Abakus, der nach dem Mittelalter als Rechenbrett erneut verwendet wurde.

Im deutschsprachigen Raum hat Adam Ries im 16. Jahrhundert drei Rechenbücher für den Unterricht in Rechenschulen und für die Ausbildung von Kaufleuten und Handwerkern veröffentlicht. In seinem Werk *„Rechnung auff der linihen"* (1518) lehrt Ries „altbewährte" Techniken. Abbildung 3.31 zeigt den Einband des Werkes mit einem Rechentisch, auf dem mit Rechenpfennigen sogenannte „calculi" Rechnungen „gelegt" wurden.

Abbildung 3.30: Briefmarke mit Holzschnitt von Adam Ries. Warum wohl 10 ct?

[216] Hier handelt es sich um Zahlensymbole, die nicht mit Ziffernschreibweisen verwechselt werden dürfen.
[217] Ifrah, 1989, S. 79

Im Vorwort der zweiten Auflage wird betont, dass diese Methode auch für Kinder geeignet sei.

Im deutschsprachigen Raum hat Adam Ries im 16. Jh. drei Rechenbücher für den Unterricht in Rechenschulen und für die Ausbildung von Kaufleuten und Handwerkern veröffentlicht.

In seinem Werk *„Rechnung auff der linihen“* (1518) lehrt Ries „altbewährte“ Techniken. Abbildung 3.31 zeigt den Einband des Werkes mit einem Rechentisch, auf dem mit Rechenpfennigen sogenannter „calculi“ Rechnungen „gelegt“ wurden. Im Vorwort der zweiten Auflage wird betont, dass diese Methode auch für Kinder geeignet sei.

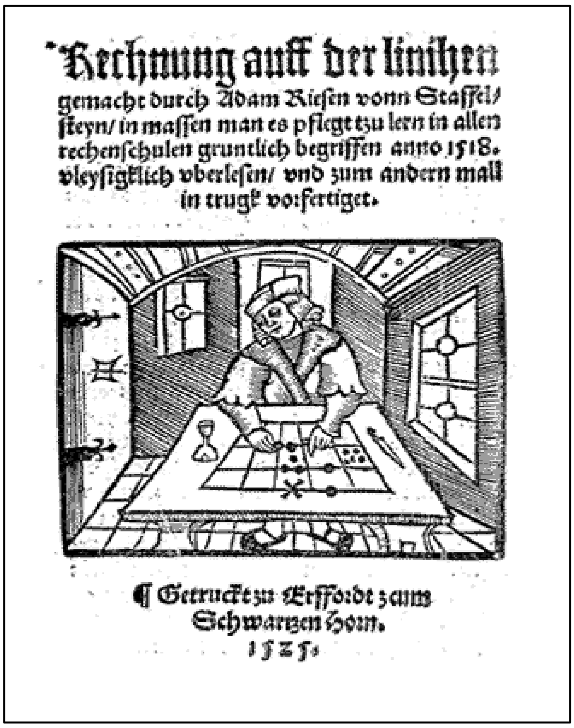


Abbildung 3.31: Titelblatt der Erfurter Ausgabe von 1525

Im Werk „*Rechenung auff der linihen und federn...“* (1522) wird dem Rechnen auf dem Rechenbrett das Ziffernrechnen mit indischen/arabischen Ziffern gegenübergestellt.

Das Buch wurde schon zu Lebzeiten von Ries über hundertmal aufgelegt und hat seinen Ruf als deutscher Rechenmeister begründet. Ein drittes Werk mit dem Titel *„Rechenung nach der lenge / auff den Linihen und Feder /.../ mit grüntlichem unterricht des visierens“* (1550) wird auch zitiert unter dem Titel „Practica“, da es praktische Beispiele behandelt, die mit unterschiedlichen Methoden gerechnet werden.

Abbildung 3.32: Georg Reisch, Margarita Arithmeticae, 1503.

Das Bild des Karthäuserpriors Gregor Reisch von 1503 mit dem Titel „Margarita Arithmeticae“ (siehe Abbildung 3.32) verbildlicht allegorisch den Streit zwischen den »Abakisten« und »Algoristen« im Spätmittelalter. Zur Rechten von Margarita sitzt der spätrömische Philosoph Boethius an einem Tisch mit arabischen Ziffern. Ihr zur Linken verwendet der griechische Philosoph Pythagoras ein Rechenbrett mit

„Rechenpfennigen“. [218] In ihren Händen hält die personifizierte „Arithmetica“ Bücher (wohl über die beiden verschiedenen Methoden), aber sie wendet ihren Blick in Richtung der neuen Symbole, die auch ihr Kleid zieren.

Ab dem 16. Jahrhundert verwenden Mathematiker und Astronomen mehr und mehr die algebraische Methode. Ein vollständiger Übergang zieht sich in Europa bis ins 19. Jh. hin. Noch im 18. Jh. wurde an Universitäten das „Rechnen auf der Linien“ unterrichtet, war aber mit dem „Rechnen mit der Feder“ zu überprüfen.

Nach Friedrich Naumann wurde in Frankreich der Abakus [219] im Zuge der französischen Revolution nach 1789 an Schulen und Behörden gesetzlich verboten. [220]

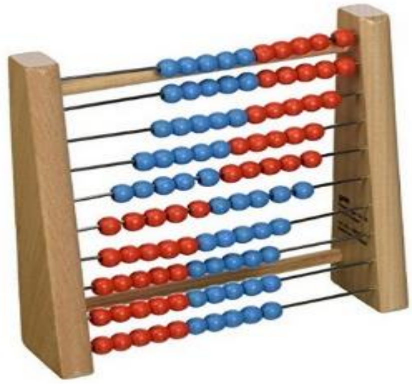


Abbildung 3.33: Dezimaler Abakus mit farbiger Fünferreihung

3.4.1.5 Phasen der Zahlentwicklung nach Ifrah [221]

George Ifrah gliedert die begriffliche Entwicklung vom Zahlwort zur Zahl in drei Phasen.

1. Phase: Der Mensch kann größere Mengen nicht mit seinen rudimentär vorhandenen Zahlvorstellungen erfassen. Er bedient sich jener Hilfsmittel, die eine bijektive Zuordung der zu zählenden Objekte mit einzelnen Elementen oder Konstellationen einer Vergleichsmenge zueinander herstellen. Die gesprochenen Zahlwörter sind Namen für die benutzten Vergleichsobjekte wie Finger, Körperteile usw.

2. Phase: Die Zahlwörter verlieren nach und nach beim Zählen ihren ursprünglichen Objektbezug. Sie werden *unbewusst* teils abstrakt und teils konkret verwendet, indem kleinere Zahlen auch ohne Objektbezug der Vorstellung der jeweiligen Anzahl entsprechen. Das Zahlwort wird direkt mit der entsprechenden Anzahl von zu zählenden Objekten assoziiert. Dabei wird auch der primär ordinale Aspekt des sequentiellen Abzählens in Phase 1 durch eine kardinale Sicht abgelöst. Die Zahl repräsentiert die Anzahl.

3. Phase: Zahlworte werden ganzheitlich unabhängig vom Gegenstand, der ihnen ursprünglich ihre Namen gab. Mit dieser *bewusst wahrgenommenen* Eigenständigkeit lösen sie sich kognitiv

[218] Irrtümlich wurde im Mittelalter Pythagoras (570-510 v. Chr.) die Erfindung des Rechnens mit dem Abakus und Boethius (ca. 480-526 n. Chr.) die Erfindung des Rechnens mit Ziffern zugeschrieben.
[219] In dieser Arbeit ist die Schreibweise nach Duden verwendet und nicht die lateinische Form *Abacus*.
[220] Vgl. Naumann, 2001.
[221] Vgl. Ifrah, 1989, S. 40f. Für diese Arbeit vom Autor zusammengefasst.

von den ursprünglichen Verortungen bzw. Assoziationen. Parallel dazu entsteht auch das Bedürfnis, sie durch eine eigene Notation und sprachliche Darstellung zu repräsentieren. Gesprochene Laute werden nun durch Zeichen ersetzt und der Verstand gibt diesen abstrakten Zeichen eine eigene Zahlvorstellung, die ganzheitlich mit der *Anzahl der Objekte* einer zu zählenden Menge assoziiert ist.

Dazu George Ifrah:

> *„Der menschliche Verstand ist erst dann in der Lage, die ganzen Zahlen* [im Sinne von natürlichen Zahlen, Anm. d. Verf.[222]] *abstrakt zu erfassen, wenn er getrennte Einheiten erkennt und zu einer begrifflichen Synthese zusammenfassen kann. Diese intellektuelle Fähigkeit (...) beruht auf einem Denkvorgang, der zusammen mit der Paarung* [i. S. von Zuordnung, Anm. d. Verf.] *und der Klassifikation den Ausgangspunkt aller Wissenschaften darstellt."*

Ifrah merkt auch an, dass die Entwicklung des Zahlbegriffs nicht direkt mit dem Rechnen mit Zahlen verknüpft ist:

> *„Das abstrakte Rechnen erfordert darüber hinaus, daß die ganzen Zahlen innerhalb eines Systems einander übergeordneter Zahleinheiten, die fortschreitend die vorhergehenden umfassen, eingeordnet werden können. Außerdem müssen die uns umgebenden Objekte in eine gegebene Reihenfolge gebracht werden können. Diese (...) beruht auf dem Gedanken der Rekursion, auf die sich bereits Aristoteles in seiner Metaphysik bezieht, wonach die ganze Zahl eine durch ‚das Eine' meßbare Vielheit sei."*

Geht man in der schulischen Entwicklung des Zahlbegriffs nach den von George Ifrah geschilderten Phasen vor, müssen diese drei Verallgemeinerungsstufen im Mathematikunterricht der Klassenstufen 1 bis 4 in Grundschulen und in den Klassenstufen 5 bis 7 durchlaufen und bewusst gemacht werden.

Der nachfolgend dargestellte Aufbau des Zahlsystems, das von den natürlichen Zahlen, den Zählzahlen, zu den rationalen Zahlen, welche bezüglich der vier Grundrechenarten einen abgeschlossenen Rechenbereich bilden, folgt inhaltlich dem Bildungsplan entsprechend einer tradierten Gliederung, verknüpft diese jedoch mit basalen ästhetischen Prinzipien, welche die jeweiligen Begriffsbildungen kognitiv unterstützen. Lesern, welche parallel dazu an unterrichtspraktischen Implementierungen interessiert sind, sei Abschnitt 4.3 empfohlen.

---

[222] Zu den ganzen Zahlen gehören heute auch negative Zahlen -1, -2, -3 usw.

3.4.2 Zahlen in der Grundschule

Die Mathematikdidaktik, insbesondere in der Grundschule und in der Sekundarstufe 1, verwendet zwei Begriffe, die für die Erhaltung der sachbezogenen Motivation seitens der Lernenden gewinnbringend sind. Grundvorstellungen, wie zum Beispiel das Aufteilen von Dingen oder das Zusammenfügen derselben, stellen einen Zusammenhang von alltäglichen Erfahrungen und Tätigkeiten mit Begrifflichkeiten des Fachlichen her. Wenn im Zusammenhang mit dem Erwerb fachlichen Wissens geeignete alltägliche Handlungen derart „mathematikhaltig“ sind, dass über sie Fachwissen und insbesondere Fachbegriffe vermittelt werden können, spricht man auch von Grunderfahrungen.

In der Grundschule werden die Zahlen hinsichtlich des zu erarbeitenden Zahlenraumes stufenweise erarbeitet: Er reicht von 1 bis 20 im ersten, von 1 bis 100 im zweiten und von 1 bis 1 000 im dritten Schuljahr. Im vierten Schuljahr wird er zunächst bis 10 000 und danach bis 1 000 000 erweitert. Entsprechend dieser Stufung folgt die Begriffsbildung einer visuell- und handlungsorientierten Entwicklung, bei der eine zunehmende Abstraktion den Zahlbegriff letztlich unabhängig von der Anschauung rein kognitiv unterstützen soll.

Zur begrifflichen Entwicklung dieser Stufen gibt es eine Fülle von Materialien, die Grundvorstellungen und -erfahrungen zu Zahlen handlungsorientiert unterstützen wollen. Zum Beispiel nennt Kirsten Pöller in einer Studie (vgl. Pöller, 2006) vierzehn verschiedene Ansätze zur Veranschaulichung von Zahlen und der Zahlraumvorstellung für die Grundschule. Exemplarisch sind in Abbildung 3.34 *Dienes-Blöcke* gezeigt, welche verwendet werden, um Anordnungen strukturierter Materialien in Ziffernschreibweisen zu übertragen.

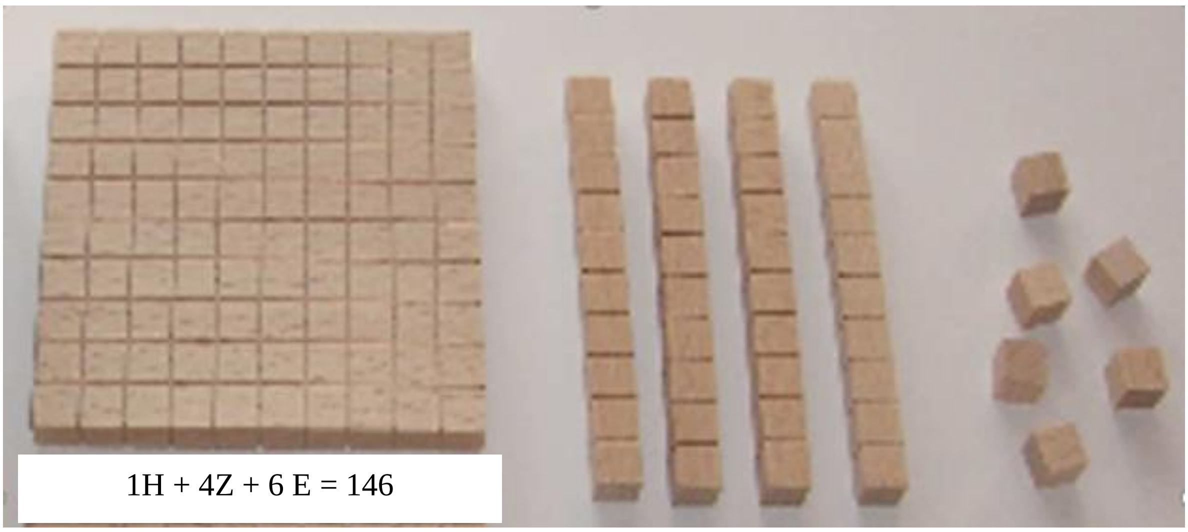


Abbildung 3.34: Dienes-Blöcke vermitteln einen Zusammenhang zwischen einer Darstellung von Zählzahlen und einer Schreibweise im Zehnersystem mit Ziffern und Stellenwerten.

Um das Zusammenwirken enaktiver Tätigkeiten mit kognitiven Abstraktionen zu unterstützen, empfehlen Jens Holger Lorenz und Hendrik Radatz zum Beispiel „*Einer-Würfel zusammenzukleben, um Kindern zu vermitteln, dass das Zählen in Mengen mit mehr als fünf Elementen visuell ohne zu zählen erfasst werden kann“*. [223]

In ihrer Arbeit spricht Kirsten Pöller die Problematik dieser Vielfalt an Materialien an, da diese ja auch selbst eine eigene Komplexität besäßen, die ebenfalls erfasst werden müsse, und deshalb häufig nicht der erwartete Erfolg einträte (vgl. Pöller, 2006, Abschnitt 2.6). Unter diesen Aspekten hat der Autor im Rahmen seiner Tätigkeit als „Rechenpate“ [224] an der Thiebauth-Grundschule in Ettlingen in Zusammenarbeit mit der Klassenlehrerin Ingrid König [225] in den Schuljahren 2016/17 und 2018/19 in der ersten und zweiten Klassenstufe sowohl bei rechenschwachen als auch bei begabteren Schülerinnen und Schülern eine handlungsorientierte Methode eingesetzt, bei der in den unterschiedlichen begrifflichen Entwicklungsstufen des Zahlbegriffs stets wieder das gleiche Material genutzt wird. In der Thiebauth-Schule wurden Bauwürfel mit einer Kantenlänge von zwei Zentimetern verwendet, mit denen alle weiteren die Entwicklung des Zahlbegriffs unterstützenden Objekte von den Lernenden selbst gebaut wurden. Für die Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 1 und 2 wurden die Handlungen phantasievoll in das *Land der Würfelzwerge* eingebettet, in dem mit *Zwergwürfeln* gebaut wird. [226]

Bauen und konstruieren mit *Zwergwürfeln*

Aus fachlicher Sicht ist die Entscheidung für eine Würfelform als Basis der Handlungen damit zu begründen, dass Würfel sich bestens dazu eignen, in den drei Dimensionen räumlicher Orientierung strukturierte zusammenhängende Körper zu bauen, bei denen die Entwicklung des Zählprinzips zum Zahl- und Rechenkonzept durch geometrische Analogien unterstützt wird. Darüber hinaus lassen sich über den strukturierten Umgang mit Würfelbauten Zusammenhänge mit Prinzipien des Messens und mit algebraischen Termen und Formeln herstellen. [227]

Bei dieser methodisch variationsarm gestalteten Vorgehensweise wird einer allgemeinen These aisthetischer Wirksamkeit vertraut: Äußere Wahrnehmungs-Vorgänge sind stets assoziativ mit zuvor behandelten und erworbenen begriffsbildenden Konzepten gekoppelt. Dabei kann die bisherige abstrakt-kognitive Verortung des Begrifflichen ohne zusätzliche Erinnerungen und Übungen konstruktiv wirksam reaktiviert und in ähnlichen Situationen assoziiert werden.

---

[223] Lorenz, 1993, S. 102.
[224] Diese Bezeichnung wurde in Analogie zum geläufigen Begriff „Lesepate“ gewählt.
[225] Ingrid König ist Grundschullehrerin mit den Fächern Mathematik, Musik und Sport.
[226] Vgl. Abbildung 3.40; Abbildung 3.46 und Kapitel 4, Abschnitt 4.3.
[227] Zum besseren Verständnis des inhaltlichen Aufbaus der folgenden Beispiele ist Abschnitt 3.3 hilfreich.

Ein Kind, das eine Ansammlung von Würfeln mit einer eigenen kognitiven Assoziation oder Konstruktion mit deren Anzahl verknüpft, die es nennen kann, wird diese Leistung auch dann erbringen, wenn stattdessen Knöpfe, ausgeschnittene Dreiecke oder sogar unterschiedliche Objekte wahrgenommen werden. Wenn jedoch in der begriffsbildenden Phase der Aufbau einer Verknüpfung zwischen den Objekten einer Menge mit der Anzahl ihrer Elemente durch zu viele variierende Angebote eher gestört als gefestigt wird, wird in keiner Situation die erwartete Antwort gegeben werden können.

Hierbei ist es ebenso wichtig, frühere begriffliche Konzepte des Zählens nicht grundsätzlich zu verbieten. Wenn zum Beispiel das Fingerzählen in Klasse 2 in einfachen Situationen überwunden ist, darf es in einer komplexeren Situation immer noch abgerufen werden. Wenn der Zahlbegriff in der Grundschule mit geometrischen Konstellationen aus Würfelkörpern verknüpft wird, kann das Rechnen mit natürlichen Zahlen als strukturiertes Zählen dargestellt werden. Dann erweisen sich jene Rechenarten, die in Lehrwerken regelbasiert formuliert sind, als Eigenschaften dieser Strukturierung, bei der sich das Zerlegen und das Zusammensetzen als begriffsbildend unterstützende basal-kognitive Gestaltungsprinzipien erweisen. In diesem Fall sind aber die *Rechenregeln* nicht formal gesetzte Formen. Sie können als Eigenschaften des strukturierten Zählens wahrgenommen und als adjungierte Eigenschaften des Rechnens erklärt werden.

3.4.3 Zahlen in den Klassen 5 und 6

Der Aufbau des Zahlverständnisses erfolgt in den Klassenstufen 5 und 6 nach dem Permanenzprinzip. Ausgehend von den aus der Grundschule bekannten natürlichen Zahlen werden unabhängig voneinander Zahlerweiterungen vorgenommen, welche zu den ganzen Zahlen und zu den Bruchzahlen (als positive rationale Zahlen) führen, welche danach zu den rationalen Zahlen zusammengeführt werden, welche einen abgeschlossenen Rechenbereich bezüglich der vier Grundrechenarten bilden. Diese werden entweder intuitiv-generisch oder definitorisch erweitert.

3.4.3.1 Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, … sind ein mentales Konstrukt, eine Erfindung der Menschen, welche den Wunsch erfüllt, zählen zu können. Neben diesem kardinalen Aspekt sind die natürlichen Zahlen aber zum Beispiel auch als Ordnungszahlen bei Rangfolgen und Maßzahlen von Größen beim Messen nützlich.

Eine diesen Vorstellungen entsprechende unterrichtliche Behandlung entwickelt diese Zahlen als *begrifflich eigenständig mental verortete „Objekte“*, die über sinnlich-wahrnehmbare kognitive Konstruktionen wiederum wahrnehmbar präsentiert werden können und darüber begrifflich kommunizierbar sind. Für diese Repräsentationen sind in unserer Kultur hauptsächlich zwei Darstellungsformen üblich: eine textlich-sprachliche über eine algebraisch-symbolische Darstellung in dezimaler Schreibweise und eine geometrische auf einem *Zahlenstrahl*.

Mit einer Veranschaulichung der natürlichen Zahlen auf einem *Zahlenstrahl* (vgl. Abbildung 3.35) erhalten Zahlen eine visuell anschauliche Repräsentation als Punkte auf diesem Strahl.

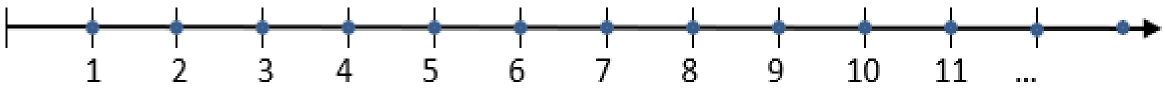


Abbildung 3.35: Veranschaulichung der natürlichen Zahlen auf einem Zahlenstrahl; jeder Zahl entspricht ein Punkt, der als ihr Wohnort angesehen wird.

Die Zahlen erhalten *Wohnorte* und sind lokalisierbar. Diese Darstellung erhält eine wichtige Funktion bei der Erweiterung des Zahlbegriffs in der Schule. Eine dezimale Schreibweise von Zahlen erfordert im Vergleich zum Zahlenstrahl einen höheren Abstraktionsaufwand. Gegenüber der sequentiell-iterativen Darstellung auf dem Zahlenstrahl folgt die Begriffsbildung dem Prinzip des Zerlegens und Zusammensetzens nach Stellenwerten und Ziffern. Zahlen, die dezimal geschrieben sind, wie etwa die Zifferndarstellung 412, die als Vierhundertzwölf gesprochen wird, sind in Abbildung 3.36 in einem korrespondierenden Stellenwert-System notiert. Die rechte Spalte zeigt unterschiedliche Darstellungen mit einer Betonung der Ziffernwertigkeit, die in der Klasse 6 üblich sind.

...	HT	T	H	Z	E	unterschiedliche Darstellungen
			4	1	2	= 4 Hunderter + 1 Zehner + 2 Einer = 412
		5	0	1	4	= 5T + 0H + 1Z + 4E = 5014
			3	2	0	$= 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$ = 320

Abbildung 3.36: Notation von Dezimalzahlen in unterschiedlichen Darstellungen (alle in Klasse 6 verwendet)

Abbildung 3.37 zeigt eine Übersicht der im Unterricht zu erwerbenden Fertigkeiten beim Rechnen mit natürlichen Zahlen, in der Handlungen und korrespondierendes Wissen verknüpft sind. Diese Zusammenstellung kann zum Beispiel den Schülerinnen und Schülern einer sechsten Klasse nach einer Wiederholung und Vertiefung ihrer nach der Grundschule erwarteten Rechenfertigkeiten ausgeteilt werden, um danach Aufgaben argumentativ begründend zu lösen. Der Auftrag zugehöriger Übungen sollte dann jedoch nicht kurz „Berechne“ heißen, sondern „Überlege anhand der Wissensübersicht, wie du vorgehst, um den Ausdruck zu berechnen, und bestimme danach das Ergebnis“.

Rechentechniken für natürliche Zahlen	
Handlungen	Wissen
Ergebnisse (auswendig) wissen und aufsagen Z.B.: $3 \cdot 4 = 12;\ 7 \cdot 8 = 56;\ 12 \cdot 12 = 144$	**Auswendig Gelerntes abrufen** - Kleines Einmaleins - Quadratzahlen von 1 bis 12
Ergebnis individuell bestimmen - Kopfrechnen - halbschriftliches Rechnen - schriftliche Verfahren - Taschenrechner Z. B.: $126 + 36 = 120 + 30 + 6 + 6 = 150 + 12 = 162$ $12 \cdot 72 = 10 \cdot 72 + 2 \cdot 72 = 720 + 144 = 864$	**Rechen-Strategien anwenden** - Zerlegen und Zusammensetzen Recheneigenschaften anwenden: - Vertauschen von Summanden oder Faktoren - Reihenfolge der Operation beim Addieren oder Multiplizieren ändern - Verteilen des Faktors bei Produkten mit einer Summe (als Faktor)
Schriftliches Rechnen Grundrechenarten +, -. ·, : - exemplarisch durchführen - Kulturtechniken algorithmisch begründen - bei komplexeren Rechnungen technische Hilfsmittel verwenden	**Verfahren kennen und anwenden** - Darstellungen verstehen - Begründung von Verfahren im Stellenwertsystem - TR verstehend nutzen, Ergebnisse reflektieren und beurteilen

Abbildung 3.37: Wissensdokumentation zum Rechnen mit natürlichen Zahlen

3.4.3.2 Bruchzahlen

Für die Einführung von Bruchzahlen wird in der fachdidaktischen Literatur verwiesen auf Grunderfahrungen, die über alltägliches Handeln beim Aufteilen von Sachen entstehen. Dabei wird die Handlung *operationalisiert*, indem man von einem *Bruch* spricht und diesen in der gleichen Notation schreibt, die nachfolgend für die entsprechende Bruchzahl verwendet wird.

Ein Alltagsbeispiel erläutert dieses Vorgehen:

Wenn jemand eine Tafel Schokolade mit drei Freunden teilen will (gerecht im Sinne von gleichmäßig), führt dies auf eine Handlung, die Tafel in vier gleiche Teile zu zerlegen und jeweils einen Anteil einem Freund zu geben. Dann hat jede der vier Personen $\frac{1}{4}$ der Tafel erhalten und vom Gebenden wurde insgesamt $\frac{3}{4}$ der Tafel abgegeben.

Der Bruch $\frac{1}{4}$ (gesprochen: *ein Viertel*) – aufgefasst als Handlungsanweisung (Operator) – bedeutet: *Teile ein Ganzes in 4 Teile.* Der Bruch $\frac{3}{4}$ (gesprochen: *drei Viertel*) bedeutet: „*Teile ein Ganzes in 4 Teile und nimm 3 davon.*“

Dieses alltagsgewohnte Handeln und Sprechen beim Aufteilen und Zusammenfügen von Anteilen eines Gegenstandes, der dabei als *Ganzes* gesehen wird, kann von Lernenden im Alter ab 10 Jahren leicht auf andere Situationen übertragen werden, wenn das konkret gegebene Ganze zahlen- oder mengenmäßig ein *Teilen durch den Nenner* innerhalb des verfügbaren Zahl- bzw. Mengenverständnisses der Lernenden ermöglicht. Überforderungen an solchen Stellen sind ein häufiger Grund für Ablehnungshaltungen gegenüber dem fachlich Neuen.

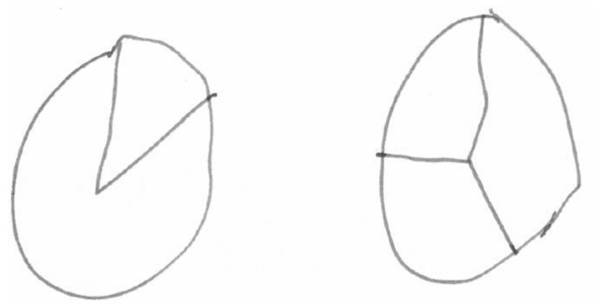
Oft wird an dieser Stelle das „Pizzamodell“ verwendet, welches im Heft in Form einer Kreisfläche modelliert wird, die – als Ganzes gesehen – unterschiedlich geteilt, und deren Anteile wiederum zusammengesetzt werden, um als Anteile mit dem entsprechenden Bruch bezeichnet zu werden, den sie handelnd erzeugen. Über das Zusammensetzen und Voneinander-Wegnehmen solcher Anteile werden die Rechenarten der Addition und Subtraktion eingeführt. Eine dabei oft ohne weitere kognitiven Assoziationen vorgenommene Übertragung erklärt dann die Bruchdarstellungen zu Bruchzahlen. Aber eine Zahl im bisher gekannten Verständnis ist doch kein Operator! Und folglich kann doch ein Operator auch noch keine Zahl sein!

Dazu ein erläuterndes Beispiel:

Gerald Wittmann hat in einem Beitrag zur Bruchrechnung einen Erfahrungsbericht veröffentlicht, dessen Kernfrage lautet: „Können leistungsschwache Schüler Aufgaben lösen, die die Entwicklung von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen fördern?

Eine Aufgabe [228] (vgl. Abbildung 3. 39) und Davids Bearbeitung (Hauptschule, Klasse 8) sollen Anlass sein, die Funktion einer Aufgabe in einem Begriffsbildungsprozess zu charakterisieren und kritisch zu behandeln.

Wie viele Bruchzahlen liegen zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$?



Bearbeitung von David

Abbildung 3.39: Eine Aufgabe für David (vgl. Fußnote 228)

Die Aufgabe nimmt Bezug auf die Dichteeigenschaft der Bruchzahlen. [229] David verwendet eine Kreisdarstellung zur Veranschaulichung von Brüchen, also den Anteilsaspekt, und eine handlungsorientierte Grundvorstellung des Aufteilens, die im Zusammenhang mit der Frage denkbar ungeeignet ist. Mit seinem Verständnis von Bruchzahlen hat David <u>eine</u> richtige

[228] Vgl. Wittmann, 2006, S. 64.
[229] Die Dichteeigenschaft der Bruchzahlen bedeutet: Zwischen zwei Bruchzahlen liegen beliebig viele Bruchzahlen, der Bereich ist kontinuierlich „ausgefüllt“.

Lösung gezeichnet, denn im rechts liegenden Kreis sind Drittel gebildet; dagegen hat er im links liegenden Kreis eine Aufteilung vorgenommen, bei der der größere Anteil optisch mehr ist als zwei Drittel. Aber ob er das so hätte erklären können, ist aus der Abbildung nicht zu erhellen. Die Frage nach der Anzahl solcher Brüche ist jedoch nicht beantwortet, es sind ja die berühmten „unendlich Vielen".

Das Beispiel zeigt, dass die Begriffsbildung der Bruchzahlen mit handlungsorientierten Vorgängen nicht abgeschlossen ist. Das eigentliche Ziel, in Klasse 6 die Bildung eines erweiterten Zahlbegriffs zu fördern, ist nur zu erreichen, wenn die neuen Zahlen mit den bisherigen so verknüpft werden, dass sie sich als Teil im Verständnis des Bekannten wiederfinden und auch so mit ihnen gerechnet werden kann, dass sich keine Widersprüche zum Bisherigen ergeben.

In Kapitel 4 wird eine Unterrichtseinheit vorgestellt, bei der sich die Begriffsbildung der Bruchzahlen über den Operatoraspekt entwickelt, indem die *Brüche* als Anteile der Einheitsstrecke bzw. der Zahl 1 den Zahlenstrahl der natürlichen Zahlen bevölkern und als Punkte entsprechende Wohnorte erhalten und derart zur *Zahl* werden. [230] Dabei erfahren die Schüler auch, dass Bruchzahlen mehr sein können als real vorstellbare Handlungen des Teilens und Vervielfachens, indem sie etwa größer sind als das Ganze (die Eins). Außerdem besitzen sie die Eigenschaft, ihre syntaktische Form zu ändern, ohne ihren zahlenmäßigen Wert zu verlieren: Auf dem Zahlenstrahl erzeugt der Bruch $\frac{3}{4}$ denselben Punkt wie der Bruch $\frac{6}{8}$. Deshalb haben die Bruchzahlen $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$ den gleichen Wert und man schreibt $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Recheneigenschaften für Bruchzahlen über Grundvorstellungen entwickeln

Die Bruchzahlen (als mathematische Objekte) wurden zunächst ikonisch und symbolisch unter Verwendung des Zahlenstrahls erzeugt, indem der zugehörige Bruch als Operator bzw. anteilsbildende Handlung auf die Zahl 1 bzw. die Einheit des Zahlenstrahls angewendet wurde. Für die Entwicklung der Rechenarten in der neuen Zahlenmenge ist es deshalb sowohl aus logischer als auch aus erfahrungsbedingter Sicht der Lernenden wichtig, dass sich diese neuen Rechenoperationen aus Vorstellungen zu Anteilen (alias Brüchen) begründen lassen. Dabei kann einsichtig werden, dass eine (noch zu vereinbarende) Addition von Bruchzahlen nützlich sein kann, welche dem Zusammenführen von Anteilen (eines Ganzen) entspricht. [231]

Nimmt man zum Beispiel von einer Pizza ein Fünftel und ein Drittel, entspricht dies der Rechnung $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{3+5}{15} = \frac{8}{15}$. Dementsprechend wird für Bruchzahlen eine Rechenart

230 Siehe auch Kapitel 4, Abschnitt 4.3.3

[231] Die Farben Grün (Alltagswelt) und Blau (Welt der Mathematik) sind entsprechend Folie 3.4 gewählt.

vereinbart, welche *Addition* genannt wird, deren Ausführung intuitiv einsichtig ist und nicht regelbasiert gelernt werden muss. [232] Der Vorteil, mit Bruchzahlen zu arbeiten, kann exemplarisch auch über eine Aufgabe verdeutlicht werden, deren handlungsorientierte Ausführung nicht sinnvoll wäre: *Bei ihrer Geburtstagsfeier hat Marlene eine Pizza in 5 Teile und eine andere Pizza in 6 Teile aufgeteilt. Max nimmt sich von jeder Sorte ein Stück. Welchen Anteil vom Ganzen hat sich Max genommen?*

Für eine Lösung der Aufgabe können die jeweiligen Anteile von jeweils einer Pizza als Brüche in der Form $\frac{1}{5}$ bzw. $\frac{1}{6}$ geschrieben werden. Anstatt nun gedanklich oder konkret handelnd die Pizzen zu unterteilen, sollte es gelingen, den Lernenden den Vorteil des Umgangs mit den Bruchzahlen zu vermitteln, indem man argumentiert: den beiden Anteilen von jeweils einer Pizza entsprechen die Bruchzahlen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$. Indem man diese in $\frac{6}{30}$ und $\frac{5}{30}$ umformt, erkennt man, dass sie zusammengenommen 11 Anteile von insgesamt 60 solcher Teile von beiden Pizzen ergeben. Dies entspricht $\frac{11}{60}$ von beiden Pizzen. Und diesen Anteil hat sich Max genommen.

Ein bewusster Wechsel zwischen Bruch und Bruchzahl kann als Verstehens-Brücke eingesetzt werden.

Nachfolgend wird das Multiplizieren von Bruchzahlen über die Grundvorstellung der enaktiven Anteilsbildung an einem Rechteck und einer analogen rechnerischen Behandlung am Zahlenstrahl vereinbart. Zur besseren Einordnung der Tätigkeiten wurde wie vorab die Farbe Grün für Handlungen bzw. deren Vorstellungen im Alltag und die Farbe Blau für den assoziierten Umgang mit mathematischen Objekten gewählt (siehe Abbildung 3.40).

Die Erkenntnis dieses *Vorgehens in parallelen Welten* ist**:** Wenn man einen Anteil von einem Anteil von einem Ganzen bildet, kann man das Ergebnis auch als einen neuen Anteil dieses Ganzen sehen. Diesen Anteil kann man in der Welt der Bruchzahlen bestimmen, indem man die Zähler und die Nenner jeweils einzeln multipliziert. Man kann deshalb für Bruchzahlen eine eigene Multiplikation einführen, die für unser Beispiel so geschrieben wird: $\mathbf{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \overset{\text{def}}{=} \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}}$. [233]

Die Division kann nun als Umkehrung der Multiplikation verstanden werden:

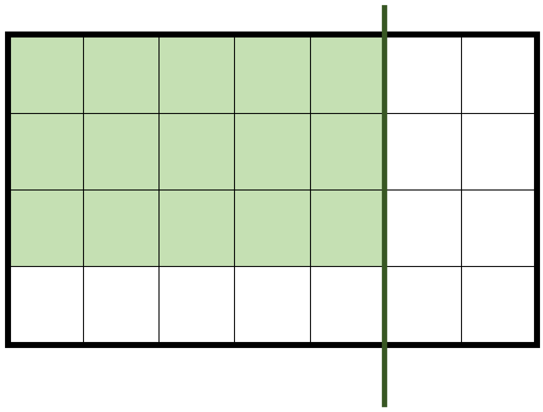
Da $\mathbf{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}}$ ist, muss $\frac{15}{28} : \frac{5}{7} = \mathbf{\frac{3}{4}}$ sein. Diese Zahl ergibt sich jedoch für $\mathbf{\frac{15}{28} : \frac{5}{7} \overset{\text{def}}{=} \frac{15}{28} \cdot \frac{7}{5}}$!

---

[232] Eine allgemeine Beschreibung der Addition (als Definition) sollte erst nach ausreichend vielen Beispielen vorgenommen werden (vgl. Abbildung 3.43).
[233] Das Symbol „$\overset{\text{def}}{=}$“ wird verwendet, um zu verdeutlichen, dass hier eine Vereinbarung gemacht wird, die definitorisch ist. Auch die Lernenden sollten verstehen können, dass die Multiplikation und Division bei Bruchzahlen auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen zurückgeführt werden. Danach kann wieder „=“ geschrieben werden.

Welt der Brüche	Welt der **Bruchzahlen**
Anteil von Anteil von [Objekt]	Anteil (von Anteil von **1**)

Beispiel: $\frac{3}{4}$ von ($\frac{5}{7}$ von einem Rechteck)



Durchführen der Anteilsbildungen und Auszählen (oder Rechnen) liefert:
$\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{7}$ vom Rechteck entspricht $\frac{15}{28}$ des Rechtecks.

$$\frac{3}{4} \text{ von } \left(\frac{5}{7} \text{ von } 1\right)$$
$$= \frac{3}{4} \text{ von } \frac{5}{7} = \left(\frac{5}{7} : 4\right) \cdot 3$$
$$= \left(\frac{20}{28} : 4\right) \cdot 3 = \frac{5}{28} \cdot 3$$
$$= \frac{15}{28}$$

Das kann man aber auch so rechnen:

$$= \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$$

Wichtig ist, dass hierbei erkannt wird, nur mit natürlichen Zahlen gerechnet zu haben!

Abbildung 3.40: Brüche werden zu Bruchzahlen

Nach ausreichend vielen Beispielen können abschließend Merksätze formuliert werden. Abbildung 3.41 zeigt in zwei Tabellen eine Übersicht des Wissens der Lernenden über Bruchzahlen, getrennt nach Begriffen und Operationen. Dabei werden, altersgemäß, nur umgangssprachliche Formulierungen benutzt.

Begriffe	Vorstellungen	Form / Verfahren
Bruchzahl bzw. Bruch	Bruchzahl und Bruch sind gleiche Begriffe [234]	Schreibform: $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ Zähler aus N_0, Nenner aus N
Erweitern und Kürzen von Bruchzahlen	Erweitern und Kürzen ändert nicht den Wert einer Bruchzahl	**Erweitern**: Zähler und Nenner werden mit der gleichen natürlichen Zahl multipliziert **Kürzen**: Zähler und Nenner werden durch die gleiche natürliche Zahl dividiert
Gleichnamige Bruchzahlen	Bruchzahlen mit gleichen Nennern heißen gleichnamig	Erweitern oder Kürzen kann Bruchzahlen gleichnamig machen
Kehrbruch	Es wird der *Kehrwert* einer Bruchzahl gebildet	Zähler und Nenner werden vertauscht

[234] In verschiedenen Kontexten. In diesem Sinn wird die blaue Welt in die grüne integriert.

Operationen	Strategien	Form / Verfahren
Addieren / Subtrahieren	Gleichnamig machen	Bei gleichnamigen Bruchzahlen werden die Zähler addiert / subtrahiert. Der Nenner bleibt
Multiplizieren	Multiplizieren ist *Dividieren durch den Nenner* und *Multiplizieren mit dem Zähler*	Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner
Dividieren	Dividieren ist *Umkehren des Multiplizierens*	Multiplizieren mit Kehrbruch

Abbildung 3.41: Wissensdokumentation zu Bruchzahlen in Klasse 6, erstellt mit Lernenden nach der Behandlung der Bruchrechnung, die als Argumentationsbasis für das Bruchrechnen dienen kann.

Das *neue Wissen* kann nun im Zusammenhang mit dem bisherigen und weiterhin abrufbaren nun argumentativ genutzt werden. Diesbezüglich übend sollten Zahlterme interpretiert und berechnet werden. Für das Verständnis des *Permanenzprinzips* bei der Einführung des Rechnens mit Bruchzahlen ist es entscheidend, die Integration der bisher bekannten Zahlen in den erweiterten Zahlbereich handelnd zu vollziehen. Zum Beispiel ist die Zahl 1 nun auch eine Bruchzahl, was mit der Schreibweise $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \cdots$ ausgedrückt werden kann. Außerdem sind die bisherigen Recheneigenschaften von natürlichen Zahlen verträglich mit den neuen. Was bisher galt, gilt weiterhin. Deshalb können die bisherigen und die neuen Rechenzeichen als gleich angesehen und geschrieben werden.

Auch einige bisher im Zahlverständnis der natürlichen Zahlen nicht vorstellbare Erfahrungen, zum Beispiel dass *Multiplizieren mit einer Bruchzahl als Dividieren durch ihren Kehrwert* und *Dividieren als Multiplizieren mit einem Kehrwert* aufgefasst werden kann, kann nun exemplarisch vermittelt und begriffserweiternd wirken. Beim Multiplizieren kann nun auch ein Produkt kleiner sein als die Faktoren und entsprechend kann beim Dividieren der Quotient größer sein als ein Divisor.

Die vereinbarten Recheneigenschaften sollten abschließend als *Problemlösetechniken* vermittelt werden, die in der Lerngruppe *eigenständig* entwickelt und als allgemein anwendbar erkannt sind. In solchen Situationen sollte die Lehrperson nicht versäumen, dies motivierend für die Haltung zur fachlichen Sache zu nutzen. „Seht, ihr habt jetzt selbst eine neue Zahlart und zugehörige Rechenoperationen erfunden, die bei vielen Aufgaben nützlich sind, die sich uns in der *grünen Welt* stellen“, könnte eine abschließende Bemerkung lauten.

Aber noch wesentlicher für die Würdigung des Neuen und die Nachhaltigkeit des Erinnerns ist seine Wirksamkeit im Alltag. Die von Heinrich Winter formulierte erste Grunderfahrung der nützlichen Anwendbarkeit von Mathematik [235] ist unerlässlich für die gefühlsmäßig stets stattfindende Bewertung des unterrichtlich Angebotenen. Diese Kopplung ist ein wesentliches Erkennungszeichen eines ästhetisch verfassten Unterrichts: Neues fachliches Wissen wird individuell wahrgenommen und positiv als Bereicherung der persönlichen Performanz empfunden. Und insbesondere über solche positiven Bewertungen seitens der Lernenden können sich eine individuelle Akzeptanz des Fachlichen und eine wollende Haltung entwickeln.

Im Gegensatz zu den Bruchzahlen, die bei einer Erweiterung des Zahlbegriffs Grundvorstellungen des Alltags entsprechen, gibt es bei den negativen Zahlen keine derartig erfahrbaren Situationen, welche das Bedürfnis für einen eigenständigen Zahlbegriff wecken könnten.

Anwendungen für negative Zahlen in gängigen Lehrwerken für den Mathematikunterricht, wie zum Beispiel bei Thermometern, Fahrstuhlbeschriftungen, Wasserständen bei Flüssen oder Meerestiefen, können leicht ohne sie auskommen. Sie sind sicherlich nicht der Anlass für die Erfindung der ganzen Zahlen. Auch historisch gesehen waren negative Zahlen lange nicht akzeptiert. Ihre Verwendung in der Mathematik war ursprünglich speziellen Anwendungen vorbehalten, insbesondere auch bei der Entwicklung von Lösungsverfahren bei algebraischen Gleichungen.

3.4.3.3 Ganze Zahlen [236]

Dies legt es nahe, auch im Unterricht die Einführung der vorzeichenbehafteten Zahlen als eine innermathematische Angelegenheit zu sehen, deren Ziel es ist, Unzulänglichkeiten beim Rechnen mit Zahlen in den bekannten Bereichen auszuschließen.

Kinder im Alter von 10 Jahren haben ein propädeutisches Wissen über die Minuszahlen. Auf die an eine fünfte Klasse gerichtete Frage des Autors, „Habt ihr schon mal etwas von Minuszahlen gehört?“, kam prompt die Antwort eines „wissenden“ Schülers: „Ja, Herr Reimer, die gibt es. Fünf minus sieben ist minus zwei. Aber so dürfen wir in der Schule nicht rechnen!“ Solche Äußerungen können unterrichtlich dazu verwendet werden, dem Permanenzprinzip entsprechend, die *ganzen Zahlen* und das Rechnen mit ihnen von den Schülern erfinden zu lassen. Unter dem Vorbehalt, dass es diese Zahlen und das Rechnen mit ihnen ja schon gibt, und dass die Schüler das ja zum Teil auch zu wissen glauben, müsste man hier eigentlich das Verb

---

[235] Vgl. Abschnitt 2.3

[236] Dieser Abschnitt korrespondiert mit dem in Kapitel 4, Abschnitt 4.3.4 dargestellten Unterrichtsgang zur Einführung der Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen. Beide Abschnitte sollten ggf. parallel gelesen werden, um die Verknüpfung von Didaktik und Praxis zu erkennen. Andererseits wurden aber auch Zugeständnisse an redundante inhaltliche Formulierungen gemacht, welche es ermöglichen, den praktischen Teil eigenständig für eine unterrichtliche Durchführung nutzen zu können.

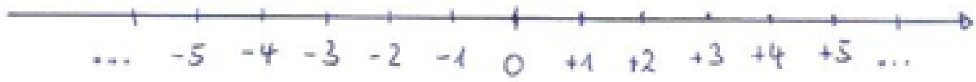
nacherfinden verwenden. Der Autor tut dies deshalb nicht, weil es nach seinen Erfahrungen möglich ist, den Unterrichtsgang so vorzubereiten und moderiert zu lenken, dass die Lernenden aktiv am Prozess des Erfindens beteiligt sind.

Es ist dieses methodische Konzept, welches, wenn es unterrichtlich gelingend umgesetzt werden kann, ein zentraler Aspekt eines ästhetisch verfassten Unterrichtsprozesses ist, bei dem entdeckend und erfindend gelernt und fachlich Neues behalten wird. Im vierten Kapitel ist eine Unterrichtseinheit zur Einführung der ganzen Zahlen mit einer eigenständigen Erfindung der Addition und Subtraktion in der Lerngruppe beschrieben. Im Verlauf ihrer Durchführung sollte eine Information über Begriffe zu ganzen Zahlen entsprechend Abbildung 3.42 erfolgen.[237]

Die hierbei neu eingeführten Bezeichner und Sprechweisen verbessern die Verständigung.

Die Ganzen Zahlen

Der Zahlenstrahl wird erweitert zur Zahlengerade.
Die ganzen Zahlen erhalten Wohnorte auf der Zahlengeraden



Jede natürliche Zahl erhält einen Symmetriepartner. Beispiele: +1 und -1; +2 und -2 …

Jede natürliche Zahl ist auch eine positive ganze Zahl. Beispiel: 1 = +1; 2 = +2 …

Die Null ist die „Mitte“ (das Spiegelzentrum).

negative Zahlen: … -5, -4, -3, -2, -1 positive Zahlen: +1, +2, +3, +4, +5 …

Symmetriepartner heißen auch *Zahl* und *Gegenzahl*
Die Null ist eine ganze Zahl ohne Vorzeichen!

Beispiele: -3 ist die Gegenzahl zu +3
+5 ist die Gegenzahl zu -5

Abbildung 3.42: Übersicht über Bezeichnungen im Zusammenhang mit ganzen Zahlen

Im Verlauf eines solchen Lernprozesses entwickeln die Schülerinnen und Schüler eine visuell enaktive“ Vorstellung der Addition und Subtraktion an der Zahlengerade. Die zum Text passende Skizze in Abbildung 3.43 zeigt, dass die ikonische Darstellung des Vorgangs für das Verstehen überzeugender ist als die textliche Formulierung.[238]

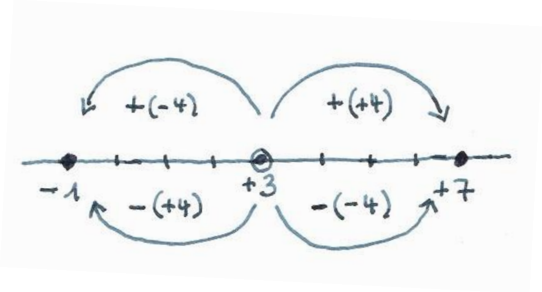
[237] Für die Unterrichtseinheit wurde eine vollständige Schreibweise der ganzen Zahlen verwendet, also auch positive Zahlen wurden mit Vorzeichen geschrieben. Die Klasse sollte visuell und kognitiv assoziiert verstehen, dass es sich hier um neue Zahlen handelt und die bisher bekannten natürlichen Zahlen mit ihnen über den Wohnort identifizieren können, also +3 = 3 gilt, während -3 eine neue *Zahl* ist.

[238] Bemerkenswert war die Beobachtung, dass anfangs viele Lernende den Pfeil des Zahlenstrahls auch symmetrisch auf der anderen Seite zeichneten. Sie hatten auch den Zahlenstrahl, als geometrisches Objekt, gespiegelt an der Null. Dies gab der Lehrperson die Gelegenheit, den Pfeil im Sinne der Ordnung der neuen Zahlen zu sehen.

Addieren und Subtrahieren von ganzen Zahlen

Die erste Zahl zeigt, wo wir sind. Beispiel: (+3) +/– (+/-4) = …

Von dort aus *gehen* wir:



- beim Addieren einer positiven Zahl nach rechts,
- beim Subtrahieren einer positiven Zahl nach links,
- beim Subtrahieren einer negativen Zahl nach rechts,
- beim Addieren einer negativen Zahl nach links.

Das *Maß für das Gehen* ist durch die zweite Zahl (*ohne Vorzeichen*) bestimmt. [239]

Nach einer Durchführung der Unterrichtseinheit und entsprechenden Übungsphasen kann mit der Klasse das *Produkt des Prozesses* in drei Merksätzen formuliert werden (vgl. Abbildung 3.44).

Ganze Zahlen – Eigenschaften der Addition und Subtraktion

1. Beim Rechnen mit ganzen Zahlen gibt es beim Addieren und beim Subtrahieren immer ein Ergebnis.
2. Das Addieren einer ganzen Zahl kann ersetzt werden durch das Subtrahieren ihrer Gegenzahl. Beispiel: (+3) + (-4) = (+3) – (+4)
3. Das Subtrahieren einer ganzen Zahl kann ersetzt werden durch das Addieren ihrer Gegenzahl. Beispiel: (+3) – (-4) = (+3) + (+4)

Abbildung 3.44: Merksätze zur Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

Im vorab beschriebenen Prozess des *Erfindens des Rechnens mit ganzen Zahlen* steht zunächst keine algebraische Propädeutik im Vordergrund. Die Recheneigenschaften werden aus dem bisher verfügbaren Wissen und der Problematik des Umgangs mit den neuen Zahlen von den Lernenden vorgeschlagen unter der Vereinbarung: *Was bisher galt, soll weiterhin gelten, und das Neue soll sich als eine Erweiterung des Bisherigen erweisen.*

[239] D. h. durch ihren Betrag.

Unter diesen Vorgaben dürfen die Lernenden frei erfinderisch tätig werden, wobei die Lehrperson sicher sein kann, dass das Ergebnis der regulären fachlichen Gegebenheit entsprechen wird. Aber diese Ergebnisse sind selbst erfundene Vereinbarungen, die von den Lernenden gemeinsam konstruiert werden. Die von ihnen entwickelten Verfahren sind bei der Addition fachlich noch nicht symmetrisch im Sinne der algebraischen Kommutativität, da das mentale Operieren den ersten Operanden als *Ort* auf dem Zahlenstrahl sieht, von dem aus gehandelt wird, und den zweiten Operanden als *Weglänge* auf dem Zahlenstrahl, deren *Richtung* in Abhängigkeit vom Operator „+" oder „–" und dem Vorzeichen des zweiten Operanden bestimmt ist.

Der Vorgang erinnert eher an Verfahren der linearen Algebra und schulischen Vorstellungen von Vektoren. [240] Hierbei werden die Addition und die Subtraktion für ganze Zahlen zunächst konkret am Zahlenstrahl handelnd, aber dann auch nur mental vorgestellt ausgeführt. In dieser Form stellt ihre Vermittlung eine Idealform eines ästhetisch fundierten – und für Lernende transparent nachvollziehbaren – Lernvorgangs dar, der auf dem Wissen der Lernenden aufbaut, mit Wahrnehmung beginnt und den kognitiv verankerten Wissenszuwachs wiederum in wahrnehmbaren Konstruktionen kommunizierbar macht.

Bei einer derart gestalteten inhaltlichen Vorgehensweise ist die Verwendung des Begriffs *Betrag einer Zahl* nicht förderlich, da der Vorgang des Rechnens ohne ihn auskommt. Zum Vergleich mit früheren Formulierungen ist eine Definition der Addition ganzer Zahlen in Klasse 7 aus einem Unterrichtswerk der 70er Jahre über eine Fallunterscheidung gegeben:

> *„Man addiert rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen, indem man (I) das gemeinsame Vorzeichen notiert, (II) anschließend ihre Beträge addiert und das Ergebnis hinter das Vorzeichen schreibt."*
>
> *„Rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden so addiert: (I) Man stellt zunächst fest, welche Zahl überwiegt, d.h. welche den größeren Betrag hat. (II) Diese Zahl bestimmt das Vorzeichen der Summe. Man notiert dieses. (III) Man subtrahiert von dem größeren Betrag den kleineren und schreibt das Ergebnis hinter das Vorzeichen."* [241]

Es ist leicht zu erkennen, dass diese Definition nicht mehr ikonisch unterstützt ist. Sie ist nur über das Rechnen mit Zahlen definiert. Das Unterrichtswerk ist exemplarisch für die Art der algebraisch verorteten Fachlichkeit, die in den 70er und 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts

[240] Die allerdings in der Klassenstufe 5/6 noch nicht verfügbar sind.
[241] Cucrowicz et al., MatheWelt, 2004, S. 149 f. (Erwähnenswert ist noch, dass hierbei ein Pfeilmodell verwendet wurde und die Unterrichtseinheit sich über 17 Seiten erstreckte. Ebd. S. 140 – 157).

über eine strukturbetonende und propädeutisch axiomatisch-formal begründete Schulmathematik an Gymnasien vorherrschend war.

Entscheidend für den erweiterten Wissensstand und die Selbstwahrnehmung der Performanzsteigerung der Lernenden sind die neuen Strategien im Umgang mit ganzen Zahlen, die übend gefestigt werden sollten: Beim Rechnen mit ganzen Zahlen ist neu, dass jede Subtraktion ein Ergebnis hat, und dass jede Addition ergebnisgleich in eine Subtraktion und jede Addition in eine Subtraktion verwandelt werden kann.

Schon bei Bruchzahlen wurde etwas Ähnliches erkannt: es ist möglich, jede Multiplikation in eine Division und jede Division als Multiplikation zu schreiben. Es liegt nun nahe, die drei Zahlarten natürliche Zahlen, Bruchzahlen und ganze Zahlen so zu vereinigen, dass sie einen Zahlbereich ergeben, in dem jede Grundrechenart ein Ergebnis hat. Das Ergebnis sind die r*ationalen Zahlen*. [242]

3.4.3.4 Rationale Zahlen

Der Bildungsplan für Gymnasien in Baden-Württemberg sieht als Lernziel des Mathematikunterrichts in den Klassen 5/6 die Erarbeitung der *rationalen Zahlen* vor. Der inhaltliche Aufbau folgt in der Regel der in diesem Abschnitt verwendeten Gliederung in natürliche Zahlen, ganze Zahlen und Bruchzahlen, wobei die beiden letztgenannten Zahlarten zunächst als isolierte Zahlbereichserweiterungen gelernt werden und dann abschließend eine Vereinigung dieser drei Bereiche zu einem Rechenbereich erfolgt, dessen besondere Eigenschaft die Abgeschlossenheit hinsichtlich der vier Grundrechenarten ist.

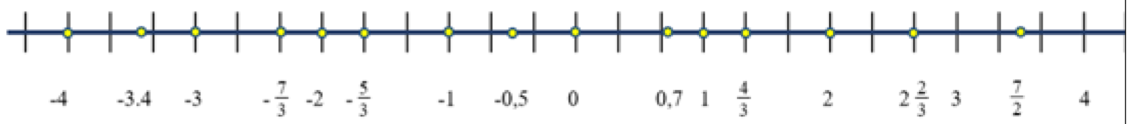
Aber damit ist die Aufgabe eines begriffsbildenden Unterrichts gegenüber dieses neuen Zahlbereichs nicht beendet, da nach der Vereinigung dieser speziellen Erweiterungen eine Vielzahl an integrativen Eigenschaften und erweiterten Begrifflichkeiten dieses Zusammenführen begleiten und unterrichtlich thematisiert werden müssen.

Die Schüler müssen über Anwendungen erfahren, dass alle Eigenschaften und Verarbeitungsregeln, die für die natürlichen Zahlen, Bruchzahlen und die ganzen Zahlen *erinnerbar* sind, nun ganzheitlich auf die rationalen Zahlen übertragbar sind und dafür neue Darstellungsformen und bisher noch nicht verwendete Zahlen, wie etwa *negative Bruch-* und *Dezimalzahlen* vorkommen, die entsprechend der bisherigen Vorstellung auch auf der Zahlengerade einen Ort erhalten, der sie als Zahl ausweist. Abbildung 3.45 gibt einen Überblick.

---

[242] Der Begriff *rational* (im Sinne der rechnerischen Abgeschlossenheit) sollte nicht im Sinne der Alltagsbedeutung „vernünftig“ in Verbindung gebracht werden.

Rationale Zahlen und Dezimalsystem



Bezeichnung	Schreibweise	Rechenarten
Natürliche Zahlen	0, 1, 2, 3, 4, 5 …	+, -, ·, : plus, minus, mal, dividiert Summe Differenz Produkt Quotient
Ganze Zahlen	… -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5 …	
Bruchzahlen (positiv und negativ)	$\dots -\frac{7}{3}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{5} \dots \frac{3}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{4} \dots$	
Dezimalzahlen (positiv und negativ)	… -3,4; -0,5; -0,3; 0; 0,7; 1,25; 4,2; 10,0 …	
Potenzen: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	Stellenwerte und Ziffern oder $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$	

Abbildung 3.45: Darstellungsarten bei rationalen Zahlen

Unter der Vielfalt an zusätzlichen Inhalten im Zusammenhang mit rationalen Zahlen, die über vorab erworbene Vorstellungen zu Zahlen hinausgehen, muss die Entwicklung des Zahlbegriffs als ein schulisch nicht endender Prozess gesehen werden, der insbesondere in der Sekundarstufe 1 seine Nachhaltigkeit nur über die Wiederaufnahme und Vertiefung von verortetem Wissen erreicht werden kann. Bei dieser Erweiterung ist es wichtig, dass die Lernenden die Erweiterungen der Rechenarten hinsichtlich ihrer Bedeutung als auf Zahlen übertragene Eigenschaft einer Grundvorstellung oder als Vereinbarung im Sinne einer Definition erkennen und dabei auch ihre Rolle als Erfinder wahrnehmen, die von der Lehrperson motivierend gewürdigt wird. Nur so können sie die Vorgehensweise nach dem Permanenzprinzip verstehen und die unterschiedliche Bedeutung von „Regeln“ inhaltlich, nach übertragenen Grundvorstellungen, oder als Vereinbarung (Definition) unter bestimmten Annahmen einstufen. [243]

Abbildung 3.46 fasst Eigenschaften und Anwendungen von rationalen Zahlen zusammen. Das *Rechnen* mit *Zahltermen* ist nun ein Vorgang, bei dem das individuell vorhandene Zahlwissen mit Hilfe von *Rechenstrategien* genutzt wird, um den *Wert eines Zahlterms* (also den *Termwert*) zu ermitteln.

[243] Zum Beispiel sind bei dieser Entwicklung die „Regeln“ der Addition und Subtraktion von natürlichen Zahlen Eigenschaften strukturierter Anordnungen und Zerlegungen beim Zählen (Zählprinzipien), die „Regeln“ der Addition und Subtraktion bei Bruchzahlen entsprechen der Anteilsbildung (Grundvorstellung) und die Rechenregeln für ganze Zahlen sind definitorische Vereinbarungen entsprechend des Permanenzprinzips.

Umgang mit rationalen Zahlen	
Eigenschaften	**Anwendungen**
Die rationalen Zahlen sind ein **Rechenbereich.**	Jeder Rechenausdruck (Rechenterm) mit rationalen Zahlen hat als Ergebnis eine rationale Zahl.
Die rationalen Zahlen liegen **dicht.** Vorstellung der kontinuierlich bzw. lückenlos besiedelten Zahlengerade	Die Mitte zwischen zwei Zahlen (auf dem Zahlenstrahl) gehört zu einer rationalen Zahl, dem **Mittelwert** der beiden Zahlen. Zwischen rationalen Zahlen gibt es beliebig viele weitere rationale Zahlen.
Jede rationale Zahl kann als gekürzte Bruchzahl oder als abbrechende oder periodische Dezimalzahl geschrieben werden.	Jede Bruchzahl kann auch als Division geschrieben werden. Beispiel: $\frac{5}{6} = 5:6$ Umwandlung einer Bruchzahl in eine Dezimalzahl Spezialfall: Dezimalbrüche, z. B. $\frac{56}{100} = 0{,}56$
Natürliche Zahlen, ganze Zahlen, Bruchzahlen und Dezimalzahlen sind spezielle rationale Zahlen	Auswählen einer geeigneten Darstellungsform je nach Sachsituation Rechenterme zielgerichtet umformen und berechnen

Abbildung 3.46: Eigenschaften rationaler Zahlen und ihre Verwendung

Die folgende Zusammenstellung in Abbildung 3.47 zeigt, dass Termumformungen unter heuristischen Aspekten eine motivierende Bereicherung eines sonst oft sehr mechanisch und stereotyp empfundenen Übens nach festen Rechenregeln sein können, wenn die Aufgaben entsprechend gestellt sind und die Handlungen begründet werden sollen.

Übersicht von Strategien und Vereinbarungen zur Berechnung von Termwerten

Strategien (im Unterricht erarbeitet):

● Kommutativeigenschaft (vertauschen):

→ Bei Summen bzw. Produkten darf man die Summanden bzw. Faktoren vertauschen.

● Distributiveigenschaft (ausmultiplizieren oder ausklammern):

→ bei Produkten mit Summen <u>kann</u> ein Faktor auf die Summanden verteilt werden,
→ in einer Summe <u>kann</u> ein gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden.

● Gegenzahl verwenden:

→ Addieren einer Zahl <u>ist</u> Subtrahieren ihrer Gegenzahl,

→ Subtrahieren einer Zahl <u>ist</u> Addieren ihrer Gegenzahl.

● Gegenzahl berechnen (der Faktor -1): → die Gegenzahl zu *Zahl* ist *(-1) · Zahl*

● Kehrwert bestimmen: → der Kehrwert einer *Zahl* ist *1: Zahl* oder $\frac{1}{Zahl}$

● Kehrwert verwenden:

→ Multiplizieren mit einem Faktor ist Dividieren durch den Kehrwert des Faktors,

→ Dividieren ist Multiplizieren mit dem Kehrwert des Divisors.

● Verbinden gleicher Rechenarten: → 40+7+23 = 40+(7+23)

Besondere Schreibweisen (Beispiele)

● Dezimalbrüche: → $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; 0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}; 0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8};$ ...

● Gemischte Schreibweisen: → $\frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = (3{:}\,4)$ ...

Vereinbarungen (Regeln)

● Von rechts nach links

● Punktrechnung vor Strichrechnung

● Klammer(n) zuerst

Abbildung 3.47: Übersicht von Strategien zur Bestimmung von Termwerten

Wichtig hierbei ist, dass nicht schon die ersten Beispiele des Unterrichts diese Eigenschaften aufzeigen, sondern dass nach erfolgter Wissensvermittlung und Einübung ein exemplarisch konkretes Beispiel die Ganzheitlichkeit der Methode vermitteln kann. Das Beispiel ist dann ein Repräsentant des Begriffs bzw. der Methode, die kognitiv verinnerlicht und erinnerbar ist.

Die rationalen Zahlen und elementare Kenntnisse über geometrische Figuren bilden nach der sechsten Klasse die Grundlage für den weiteren begrifflichen und fachmethodischen Ausbau der Mathematik der Klassenstufen 7 bis 10. Diese beiden Wissensgebiete werden von Lernenden bei entsprechend behutsamer Begriffsbildung von sich aus als nützlich erkannt, und es besteht ein grundlegendes Interesse, sie zu nutzen.

3.5 Fachdidaktik und ästhetische Verfasstheit von Lernprozessen

Um eine Offenheit der Schülerinnen und Schüler gegenüber weiteren mathematischen Vertiefungen zu finden, wird Heinrich Winters erstgenannte Grunderfahrung der Anwendbarkeit von Mathematik im Alltag herangezogen und als einleitendes Zitat verwendet (vgl. Abschnitt 2.3):

„In (1) ist die Mathematik als nützliche, brauchbare Disziplin angesprochen und

tatsächlich ist sie in dieser Hinsicht von schier universeller Reichweite. Dies allein impliziert noch nicht eine Bedeutung für Allgemeinbildung; den Gebrauch von Mathematik, der über Alltagsrechnen hinausgeht, könnte man ja der Berufsausbildung zuweisen. Interessant und wirklich unentbehrlich für Allgemeinbildung sind Anwendungen der Mathematik erst, wenn in Beispielen aus dem gelebten Leben erfahren wird, wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von Aufklärung durch sie zustande kommen kann, und Aufklärung ist Bürgerrecht und Bürgerpflicht (und wird durchaus nicht in den Schoß geworfen).“ [244]

Die gesellschaftliche Verpflichtung des Faches hinsichtlich seiner allgemeinbildenden Bedeutung und Aufgabe wird von ihm auf ein Bewusstsein hinsichtlich eines gesellschaftlich verpflichtenden demokratischen Wertesystems akzentuiert:

„…angesichts der tiefgreifenden Wandlungsprozesse in unserer Gesellschaft (Wertepluralismus, Verwissenschaftlichung des beruflichen und öffentlichen Lebens, Überflutung mit unterschiedlichsten Medienprodukten, zunehmende Spezialisierung in den Wissenschaften und in der Berufswelt, Wandel durch technische Innovationen,....) und angesichts der großen ungelösten weltweiten Probleme (Friedenssicherung, Befreiung von Hunger, Erhaltung der Umwelt, sozialer Ausgleich, Emanzipation der Frauen) wird es einerseits immer schwieriger, Allgemeinbildung zu definieren, andererseits aber auch immer wichtiger, dass möglichst viele Menschen eine möglichst gediegene Allgemeinbildung erwerben können. Eine funktionierende Demokratie ist ohne aufgeklärte, also selbständig denkende Bürger nicht vorstellbar. Da sich Schulunterricht – ungeachtet der berechtigten Forderung nach interdisziplinären Aktivitäten – als Fachunterricht versteht, muss jedes Fach der allgemeinbildenden Schulen öffentlich aufweisen und begründen, inwieweit es für Allgemeinbildung unentbehrlich ist. Das kann nur als eine permanente Aufgabe verstanden werden.“ [245]

Winters Ausführungen sind 1986 veröffentlicht. Der Verfasser dieser Arbeit sieht sie auch nach 32 Jahren als so aktuell an, dass sie unkommentiert als Beschreibung einer heutigen Ausgangslage dienen können. Mathematische Modellierung führt jedoch in der Regel zu sehr komplexen Modellen, die den Erwerb von Kenntnissen und Fertigkeiten aus Arithmetik, Geometrie, Al-

[244] Winter, 1996, S. 2.
[245] Ebd. S. 1.

gebra, Stochastik, Analysis usw. erfordern. Die Mathematikdidaktik muss sich deshalb der Aufgabe stellen, über die Vermittlung von Grundvorstellungen über elementare Funktionen und das Beherrschen zugehöriger Prozeduren einen Beitrag zur Allgemeinbildung zu leisten, über den die Wertschätzung der Lernenden erhalten bleibt.

3.5.1 Mathematisches Modellieren – Motivation für Fachliches

Kann die Schulmathematik den Modellierungscharakter der Mathematik betonen, diesen einerseits durchgängig für den fachlichen Aufbau nutzen und dabei aber auch langfristig die Bereitschaft der Lernenden erhalten, dieses Angebot zu wollen? Der Autor versucht in diesem Abschnitt diese Frage mit einer Sicht auf ihre *ästhetische Verfasstheit* zu beantworten.

Zunächst müsste sich für die Gestaltung der Schulmathematik ein Selbstverständnis der Lehrenden entwickeln, dass nicht das fachlich geordnete Gerüst zum entsprechend geordneten und zu vermittelnden Inhalt des Unterrichts Verwendung findet – und nach dessen Vermittlung Anwendungen sich als nachrangige Übungen erweisen.

Für ein Zusammenwirken von Fachlichkeit und emotional positiver Bewertung sollte der Mathematikunterricht unter dem Aspekt des Modellierens so gestaltet werden, dass sich der Wunsch nach fachlicher Entwicklung aus dem Bedürfnis nach erweiterter Handlungs- und Problemlösefähigkeit gegenüber einer bereits erworbenen Wissensbasis ergibt, die noch nicht ausreichend entwickelt ist für die Lösung eines gerade aktuellen Problems. [246] Eine solche Sicht kann als eine didaktisch-ästhetische Wende des Mathematikunterrichts angesehen werden, bei der sich das Fachliche, oder präziser, *die Bereitschaft der Lernenden, fachlich Neues zu wollen*, implizit über Anwendungen entwickelt, für deren Lösungen die Lernenden eine eigene Verantwortung übernehmen können und sollen und welche von der Lehrperson auch gewürdigt wird.

Bei einer derartigen Orientierung für schüleraktivierende Szenarien sind auch einige tradierte fachdidaktische Begriffsbildungen nicht mehr hilfreich. Sowohl die Unterscheidung in eine reine versus angewandte Mathematik als auch eine Trennung in innermathematisches und außermathematisches Denken oder Handeln wäre obsolet, da diese Teile unterrichtlich integrativ vereint und kognitiv hochgradig vernetzt unterrichtet werden müssen.

Reales versus schulisches Modellieren

[246] Eine solche Methode unterscheidet sich deshalb genuin von universitären bzw. technischen Ausbildungen oder gar einem Fachstudium Mathematik.

Wenn die Schule eine Vorbereitung auf das Leben in der nichtschulischen Welt anstrebt, muss sie sich der Aufgabe stellen, eine für die Lernenden wahrnehmbare Brücke zwischen diesen beiden Welten zu schaffen. Dazu müssen reale Problemstellungen und fachliche Handlungen entsprechend ihres Zusammenwirkens der Anlass sein, mathematisches Wissen zu erweitern, indem der Altersstufe entsprechend *authentische Problemstellungen des Alltags* über mathematische Handlungen lösbar sind. [247] Timo Leuders sieht die Bedeutung der Authentizität von Aufgaben, im Sinne von glaubwürdig bzw. realen Erfahrungen entsprechend, in Verbindung mit Bedeutsamkeit und Relevanz:

> *„Eine authentische Aufgabe spiegelt die Gegebenheiten unserer (natürlichen und sozialen) Umwelt realistisch und für Schüler glaubwürdig wider.“* [248]

Aber zur Authentizität des Unterrichts gehört dann auch, dass *das Modellieren* selbst zum konkreten Gegenstand des Unterrichts gemacht wird und den Lernenden die Funktion des Modellierungskreislaufs im Sinne eines Werkzeugs zum Problemlösen bewusst ist, über das sich Fachlichkeit entwickelt.

Mathematisches Modellieren verwendet das Wissen über Zahlen und geometrische Formen um die Alltagswelt zu verstehen und zu gestalten. Über den unterrichtlich visualisierten (elementaren) Modellierungskreislauf werden Beziehungen in der grünen Welt in Beziehungen in der blauen Welt überführt. [249] Man kann zum Beispiel einen Anteil berechnen, ohne diesen *wirklich* zu bilden; oder man kann die Anzahl der Bodenplatten, die für das Belegen eines Marktplatzes notwendig sind, vorab bestimmen, indem man etwa die Form des Platzes maßstabsgetreu zeichnet und rechnet oder zählt.

Um zu zeigen, dass eine für Lernende transparent zu vermittelnde unterrichtliche Integration des Modellierungsaspekts schon in frühen Klassenstufen gelingen kann, soll ein alltäglicher Vorgang dienen: Max, Schüler in Klasse 6, will beim Bäcker sechs Brötchen für das Frühstück holen. Er weiß, dass ein Brötchen 85 ct kostet. Er möchte wissen, was er zahlen muss. Dazu rechnet er (hoffentlich im Kopf) $85 \cdot 6 = 80 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = ((8 \cdot 6) \cdot 10) + 30 = 480 + 30 = 510$. [250]

---

[247] Die Verwendung des Adjektivs *authentisch* im Zusammenhang mit schulischen Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht wird in der didaktischen Literatur teilweise sehr kritisch gesehen, da viele Aufgaben in Lehrwerken als nur einem mathematischen Teilgebiet verpflichtet *aufgesetzt* sind und zu rein formalen Handlungen führen. Zum Beispiel Aufgaben wie diese (vgl. Meyerhöfer, 2004): Ein Marktplatz soll gepflastert werden. 3 Arbeiter benötigen dazu 6 Arbeitstage. Jeder Arbeiter verlegt gleichviel. Die Firma hat aber nur zwei Arbeiter zur Verfügung. Wie viele Arbeitstage brauchen diese beiden, um den Marktplatz zu pflastern?

[248] Leuders, 2001, S. 100.

[249] Vgl. Abschnitt 3.2.1; insbesondere Folie 3.4.

[250] Die Aufgabe will auch exemplarisch vermitteln, dass Übungsaufgaben mehr den Lösungsweg einfordern sollten und nicht nur das Ergebnis.

Max muss deshalb mindestens 5 Euro und 10 Cent mitnehmen.

Über dieses Zusammenwirken der beiden Welten beim Modellieren, dem assoziierten und analogen Handeln in der grünen und blauen Welt und dem Wahrnehmen der Nützlichkeit der blauen in der grünen Welt, besteht die Hoffnung, dass sich das Fachliche auch als akzeptierter Teil der grünen Welt verortet. Ein von den Lernenden wahrgenommenes und akzeptiertes Gelingen dieser didaktisch pädagogischen Aufgabe wäre das, was der Autor unter dem Begriff *ästhetisch verfasster Mathematikunterricht* verstehen möchte. Die in Abschnitt 2 dieses Kapitels aufgeführten Elemente können dabei eine Grundlage für die Konstruktion von unterrichtlichen Szenarien sein, über die diese Wirksamkeit erreicht werden kann.

3.5.2 Fachinhaltliche Gliederung für die Klassen 5 bis 10

Vernetzter Aufbau der Wissensbasis

Zur Entwicklung der Fachlichkeit gehören aber neben den Grundvorstellungen über elementare Zuordnungen und Beziehungen auch komplexere Begriffe und funktionale Sichtweisen, wie zum Beispiel Sinus, Potenz, Exponent und Logarithmus. Entscheidend für ein motiviertes Akzeptieren dieser mathematischen Objekte ist es, ihre Nützlichkeit beim Modellieren zu erfahren und ihre Begrifflichkeit aus dem bisherigen Wissen heraus zu entwickeln. Ebenso entscheidend für das Wollen der Lernenden ist hier, dass das Fachwissen als vernetzt verortet darstellt wird und nicht als isoliertes fachliches Konstrukt im Unterricht zentral behandelt wird. Dazu gehören auch Themen wie zum Bespiel das *Lösen von Gleichungen eines bestimmten Typs*.

Nachfolgend wird in Abbildung 3.48 zunächst in einer linear geordneten Übersicht ein Aufbau zentraler fachlicher Themen, Begriffe und Objekte zu den Klassenstufen 5 bis 10 an Gymnasien gegeben. Danach werden noch einige Aspekte der fachlichen Entwicklung angesprochen, welche der Verfasser entsprechend seiner eigenen praktischen Erfahrungen besonders herausstellen und mit exemplarisch ausgearbeiteten Unterrichtsmaterialien in Kapitel 4 verknüpfen möchte.

Übersicht zur fachinhaltlichen Entwicklung in den Klassen 5 bis 10		
Klassen-stufe	Themen / Begriffe / Objekte	Wissensbasierte Konstruktionen (intuitiv, begrifflich, begründet, algorithmisch) über kognitiv-basale Qualia und heuristische Strategien --- Darstellen, Beschreiben, Begründen, Ausführen
5/6	- Mathematische Formen in Ebene und Raum	- Zahlbereiche N, Z, B und Q: Zahldarstellung, Darstellungswechsel, Recheneigenschaften,

	- Qualitatives und quantitatives Beschreiben und Darstellen: Zahlarten, Größen, Tabellen, Graphen, Koordinaten - Geometrische und algebraische Äquivalenzen (→ Symmetrie) - Funktionaler Zusammenhang: Zuordnungen, Beziehungen - Elementare logische Hilfsmittel	Strategien, Rechenverfahren - Geometrische Begriffe: Körper, Figuren, Winkel, Flächen, Strecken und Beziehungen - Symmetrie erzeugen und begründen - Messen: Einheit, Maßzahl, Umrechnung - Dreisatz und Proportionalität - Äquivalentes Umformen von Zahltermen, Wert-Invarianz - Elementares Modellieren: Zahlterme, Term- und Mittelwerte bestimmen - Objektvariablen verwenden - Zuordnungen mit Formeln darstellen - Beispiel und allgemeiner Fall, Fallunterscheidung
7	- Begriffe der Prozentrechnung - Proportionalität und Linearität - Logisch-argumentativ begründete Erweiterung der geometrischen Wissensbasis - Statisches und dynamisches Beschreiben von Prozessen - Begriffsbildung Wahrscheinlichkeit	- Elementarfiguren Strecke, Gerade, Strahl, … - Mathematisches Begründen: Argumentationsbasis, logisch Argumentieren, Umkehren - Sätze der Elementargeometrie propädeutisch axiomatisch begründend herleiten - Lineare Terme und Zuordnungen, Spezialfall Proportionalität - Zuordnungs- und Beziehungsgleichungen - Einsetzungsaspekt von Variablen, äquivalentes umformen von Gleichungen - Statische Zuordnung - dynamische Variation - Handlungsformen Graph – Tabelle – Term - Rechenstrategien bei rationalen Zahlen - Geraden haben Gleichungen - Lösungsstrategien für lineare Gleichungen - Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff
8	- Kongruenz, Eindeutigkeit geometrischer Konstruktionen - Quadratische Zuordnungen - Funktionsbegriff - Zuordnungen umkehren - Wurzeln als reelle Zahlen - Wurzelfunktionen - Wahrscheinlichkeitsexperimente	- Konstruktionen logisch begründen - Darstellungen quadratischer Funktionen: Linearfaktoren, Scheitelform, allgemeine Form - Funktionsklassen, Koeffizientenvergleich - Quadratwurzeln, Wurzelfunktion, Irrationalität - Lineare und quadratische Gleichungen, - Quadratische Gleichungen aufstellen und lösen - Strukturierte Beschreibung von Zufallsexperimenten: Baumdiagramme, Ereignisse, Gegenereignisse, - Und/Oder-Verknüpfungen - Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten.
9	- Ähnlichkeit und zentrische Streckung - Ähnlichkeitssätze bei Dreiecken - Satzgruppe des Pythagoras - Wahrscheinlichkeitsexperimente vertiefen	- Ähnlichkeit begreifen, erzeugen, verwenden, - Verallgemeinerung der Kongruenz, - Rechenstrategien, Strahlensätze Sinus und Kosinus als Invarianten bei rechtwinkligen Dreiecken - Dreiecke und Figuren „berechnen“, - Grundprinzipien der Flächen und

	- Mathematische Körper - Diskrete Wachstumsformen rekursiv und implizit - Folgen als spezielle Funktionen, Potenz- und Exponentialfunktionen	Volumenbestimmung, - Diskrete und kontinuierliche Beschreibung, - Gleichungen aufstellen und lösen, - Höhere Wurzeln und Logarithmen - Kombinatorik, Auswahlprinzipien, Erwartungswert
10	- Geometrische Objekte in Ebene und Raum, - Zahlentupel als Modell für Punkte und Vektoren - Modellieren mit Funktionen - Ganzrationale Funktionen - Funktionsbaukasten - Änderungsraten und Ableitungsbegriff	- Parameterdarstellungen in der Ebene - Lineare Gleichungssysteme - Funktionsterme aufstellen - Algebra der Funktionsterme

Abbildung 3.48: Inhaltsübersicht Mathematik, Klasse 7 bis 10

Die genannten Inhalte sind für die Klassenstufen 5 bis 10 bildungsplan-konform, aber auch mit dem Blick auf kognitiv basal unterstützte Gestaltungsprinzipien zusammengestellt. Eine solche Übersicht wurde zum Beispiel für die Gestaltung der Lerneinheiten beim Sindelfinger Projekt „Einsatz von Computersoftware in Klasse 7 bis 10“ verwendet (vgl. Kapitel 4, Abschnitt 4.2). Mit ihr lassen sich auch die praktischen Unterrichtsangebote in Kapitel 4 in einen inhaltlichen Gesamtkontext verorten. Hinsichtlich ihrer unterrichtlichen Umsetzung darf diese Übersicht jedoch nicht linear „gelesen“ werden, da die Inhalte hochgradig vernetzt sind und aufbauend unterrichten werden müssen.

3.5.3 Logisches Denken und mathematisches Argumentieren

Mathematisches Argumentieren verpflichtet sich der zweiwertigen Logik, nach der sich eine mathematische Aussage für alle Beteiligten entweder als wahr oder falsch erweisen muss. Damit Lernende diese (gegenüber den alltagslogischen Erfahrungen ungewohnt strenge) Vorgehensweise anerkennen, muss ihnen vermittelt werden, dass diese *Technik des Denkens* nicht nur einer *Logik des Argumentierens* folgt. Sie müssen auch begreifen, dass hierzu vorab gemachte Vereinbarungen klarstellen, *mit welchem anfänglichen Wissen* argumentiert werden darf.

Argumente benötigen eine Basis

Man kann diese Situation didaktisch auch als propädeutisch-axiomatisches Argumentieren und Begründen auffassen, wobei die Vereinbarung der Wissensbasis für das Verständnis des Begründungsprozesses nach den schulischen Erfahrungen des Autors ebenso wichtig ist wie die Vermittlung logischer Schlussregeln, deren intuitive Verwendung allerdings in der Regel mit alltäglichen Erfahrungen einhergeht.

Dies lässt sich gut mit einem Beispiel zur Begründung eines Sachverhaltes in unterschiedlichen Klassenstufen verdeutlichen. In Abschnitt 3.2.8.5 wurde passend zum Unterricht der Klassenstufe 6 der Innenwinkelsatz für ebene Dreiecke anschaulich begründet und danach verwendet.

Der Geometrieunterricht in Klassenstufe 7 sieht eine erneute propädeutisch-axiomatische Begründung dieses Satzes unter Verwendung einer Basis von geometrischen Elementar-sätzen vor. Wenn es der Lehrkraft nicht gelingt, die unterschiedliche Vorgehensweise zu vermitteln, ist das Vorgehen in der siebten Klasse für die Lernenden nicht einsichtig: „Warum beweisen Sie etwas, das wir doch alle schon wissen?“, ist die in solchen Situationen an den Lehrenden gestellte Frage. Wenn die variierte Vorgehensweise nicht transparent vermittelt ist, sind die Bemühungen der Lehrerin bzw. des Lehrers ein Anlass, diese Form des Aufbaus der Geometrie abzulehnen, da man schon Bekanntes nicht nochmals begründen will.

3.5.4 Lokales Ordnen als Basis für mathematisches Begründen

Hans Freudenthal hat eine Methode des „lokalen Ordnens“ entwickelt, bei der eine rein axiomatisch basierte Vorgehensweise [251] vermieden werden kann und dennoch ein Verständnis der gegenseitigen Abhängigkeit von Begriffen und Sätzen möglich ist. Er schlägt vor, dafür die inhaltlichen Abhängigkeiten von Sätzen innerhalb eines überschaubaren Gebietes vorzunehmen: *„Es blieb* [den Mathematikern der Antike, Erg. d. A.] *eben nichts anders übrig, als die Wirklichkeit zu ordnen, Beziehungsgefüge herzustellen und sie bis zu einem Horizont der Evidenz zu führen, der nicht genau festgelegt und recht variabel war. Ich habe diese Tätigkeit die des lokalen Ordnens genannt.“* [252]

Die in Abschnitt 4.8 skizzierte Unterrichtseinheit „Argumentieren lernen mit Geometrie“ verwendet dieses Prinzip im Unterricht der Klasse 7, verschärft jedoch die Regeln des Begründens. Diese Unterrichtseinheit wurde am Seminar in Karlsruhe für die Referendarausbildung entworfen, um zu vermitteln, dass das fachliche Kompendium zentraler geometrischer Sätze eine Möglichkeit bietet, mit einer propädeutisch axiomatisch angenommenen Basis das geometrische Begründen und Argumentieren zu schulen und den Lernenden zu ermöglichen, selbstständig Sätze zu begründen. Hierbei wird über eine primär-neuronal wahrgenommene Symmetrie bei einfachen Figuren eine nicht hinterfragte Wissensbasis aus wenigen mathematischen Sachverhalten gebildet. Alle weitern Sätze sind dann Behauptungen, die allein mit dieser Basis

[251] Ein streng axiomatisch basierter Aufbau der Geometrie ist im Unterricht auch nicht anstrebenswert, da Mathematik entdeckt werden soll.
[252] Freudenthal, 1963, S.6.

begründet werden müssen. Dabei müssen auch schon vorab in vorherigen Klassen als richtig erkannte Sachverhalte erneut begründet werden, indem zunächst nur Argumente der (unhinterfragt anerkannten) Wissensbasis verwendet werden dürfen, um neue Sätze zu begründen, welche dann wiederum die Wissensbasis erweitern. Hierbei wird den Lernenden verdeutlicht, dass es in der Geometrie der Mittelstufe nicht allein um deren Sätze geht, sondern um die spezielle Vorgehensweise, mit der sie „bewiesen" werden, und um die unterrichtliche Führung, die die Lernenden an dieser Argumentation teilhaben lässt.

Solche Rahmenbedingungen für ein *Problemlösen mit einem eingeschränkten Werkzeug* zeigen sich zum Beispiel auch beim *Konstruieren von Figuren nur mit Zirkel und Lineal*. Unter diesem Aspekt kann auch das Bestimmen von Termwerten bzw. das Umformen von Termen mit Variablen gesehen werden, bei denen vorab begründete Eigenschaften der Zahlen oder definierte Regeln als Grundlagen des Argumentierens verwendet werden.

3.5.5 Strategien des logischen Begründens

Das Argumentieren mit einer *direkt* geführten Begründungskette in der Mathematik kann mit alltäglichen Erfahrungen assoziiert werden. Wenn ein *Satz A* wahr ist und ein *Satz B* wahr ist, ist zunächst auch der *Satz A und B* wahr. Wenn es nun möglich ist, über die Richtigkeit der beiden Sätze eine logisch und sachlich begründete *Folgerung C* zu ziehen, ist auch der *Satz C* richtig, also auch wahr. „Wer richtig schließt", begründet „wahre Sätze". [253]

Hinsichtlich der Form des Argumentierens gibt es neben der direkten Argumentationskette noch ein anderes Prinzip, das intuitiv mit dem alltäglichen Wunsch nach Sicherheit korrespondiert. Wer im Alltag von einem *Ort A* zu einem *Ort B* geht, vergewissert sich dabei meist unbewusst, dass man auf diesem Weg auch von B nach A kommen kann. Bei mathematischen Sätzen bietet dieses unbewusste Schließen keine Sicherheit. Der Weg von B nach A muss gesondert begründet werden.

Das Umkehrprinzip – logischer und sachlicher Aspekt

Beim Rechnen und im Umgang mit Termen ist dieses Umkehr-Prinzip in den meisten Fällen nicht nur intuitiv erfüllt, da Rechenoperationen in der Regel umkehrbar sind. Und bei elementaren Zuordnungen tritt diese Problematik erst beim Umkehren quadratischer Zuordnungen auf.

---

[253] Der Mathematikunterricht der Mittelstufe sollte nicht die vielschichtige Problematik von „wahr" und „richtig" thematisieren, da Mathematik in dieser Altersstufe nicht formal aufgebaut ist, aber vor allem nicht so gesehen werden darf. Auch eine formalisierte Logik sollte sich hier dem Prinzip des Exemplarischen unterwerfen. Demnach ist die Verwendung von Satzvariablen wie A, B und C nicht geeignet für den Unterricht in diesen Altersstufen (eine spätere Behandlung würde dann jedoch auch vorab erfolgte Instruktionen in formaler Logik voraussetzen).

Bei geometrischen Sachverhalten bieten sich solche Gelegenheiten früher an. Zum Beispiel „hat ein Quadrat (als Viereck) Seiten, die gleich lang sind. Ist dann ein Viereck, das vier gleich lange Seiten hat, auch ein Quadrat?“ Das Umkehren einer Argumentationskette, eines Weges, korrespondiert stets mit Fachlichem.

Das Beispiel „Satz von Thales“ in Abbildung 3.49 soll dies deutlich machen. Die Voraussetzungen (grün) und Behauptungen (rot) wurden im Bild farblich unterschieden.

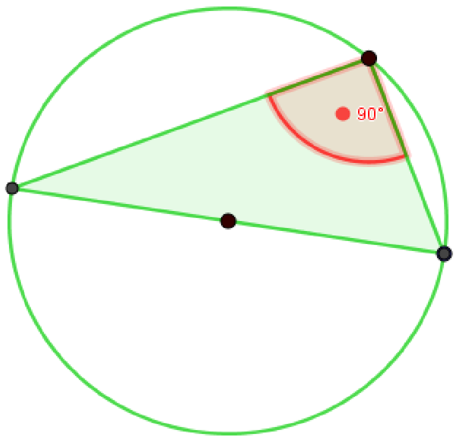
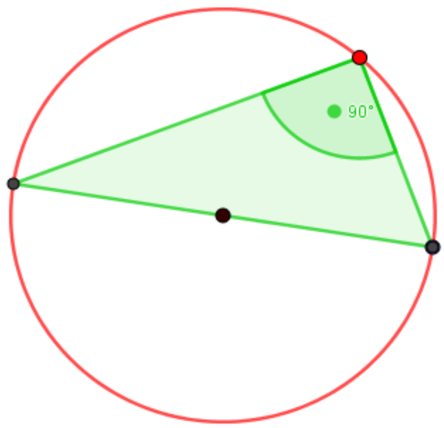
 	
Satz des Thales Wenn ein Dreieck und sein Umkreis so liegen, dass eine Seite des Dreiecks ein Durchmesser ist, dann ist der Winkel der gegenüberliegenden Ecke ein rechter.	**Umkehrung des „Satz des Thales“** Wenn ein Dreieck einen rechten Winkel hat, dann liegt der zugehörige Eckpunkt auf dem Umkreis der Gegenseite, der somit auch der Umkreis des Dreiecks ist.

Abbildung 3.49: Der „Satz des Thales“ und seine Umkehrung

Ohne es auszuführen, sei angemerkt, dass in diesem Beispiel der Satz und seine Umkehrung intuitiv naheliegend als richtig erkannt werden, aber der zugehörige Weg nicht *einfach nur ein Rückwärtsgehen des ersteren ist*. Die Begründung dafür wird in der Klassenstufe 7 in der Regel über eine indirekte Begründung geführt, während der Satz selbst für die Lernenden einfach zu beweisen ist, wenn man die Figur erweitert. [254]

Auf die Begründungen der beiden Sätze wurde an dieser Stelle bewusst verzichtet, um fachlich nicht geschulten Lesern nicht die Freude am eigenen mathematischen Argumentieren zu neh-

[254] Bei einer direkten Begründung (einem direkten Beweis) wird eine begründende Argumentationskette vom Gegebenen (den Voraussetzungen) zum Gesuchten (der Behauptung) aufgebaut. Eine indirekte Begründung (Beweis durch Widerspruch) wird geführt, indem zusätzlich zu den Voraussetzungen auch die Verneinung der Behauptung angenommen wird und damit ein Widerspruch zu den Voraussetzungen begründet wird.

men. Nach dem Nachvollziehen der Unterrichtseinheit in Abschnitt 4.8 ist eine Basis geschaffen, mit der eigene Argumentationen möglich sind und nach erfolgreichen Begründungen sich (Dopamin-Ausschüttungen geschuldete) gefühlsmäßige Beteiligungen einstellen, die insbesondere Schülerinnen und Schüler emotional bewegt, wenn sie stolz darauf sind, ihren ersten mathematischen Beweis selbst geführt zu haben und ihnen dies vom Lehrenden bestätigt wird.

Das Umkehren von Sachverhalten, Sätzen und Argumentationsketten kann man auch im Sinne von „Symmetrie herstellen wollen" sehen [255], zu der auch Darstellungswechsel und Zusammenhänge zwischen ikonischer und symbolischer Darstellung gehören, die auch emotional positiv wirksam als Befriedigung natürlicher Neugier genutzt werden, um zum Beispiel auch Sachverhalte sowohl geometrisch als auch algebraisch darzustellen. [256] Leider werden solche Symmetrien nicht durchgängig in Lehrplänen berücksichtigt. Zum Beispiel sieht der Bildungsplan Mathematik in Baden-Württemberg derzeit im Pflichtbereich für das Gymnasium nicht mehr vor, in der Sekundarstufe I den Kreis als geometrisches Objekt mit Hilfe des Satzes von Pythagoras mit einer Kreisgleichung zu verknüpfen. Immer seltener wird zum Beispiel bei Funktionstypen die Problematik des Umkehrens als naheliegende Fragestellung behandelt. Solche Vernachlässigungen führen auch zu fachlichen Irritationen bei Begriffsbildungen, die sich insbesondere auch beim Verständnis komplexerer Begriffe, wie zum Beispiel höheren Wurzeln oder Logarithmus-Funktionen, auswirken.

3.5.6 Vernetzung von Begriffen des Alltags und Begriffen der Mathematik

Es gibt zahlreiche Begriffe des Alltags, wie zum Beispiel Gleichheit, Proportion, Symmetrie, Ähnlichkeit usw., die mit mathematischen Begriffen konnotiert sind. Aber wichtiger für einen ästhetisch verfassten Unterricht ist eine Umkehrung, um die fachliche Bedeutung des jeweils korrespondierenden mathematischen Begriffs alltäglich zu konnotieren und diesen Zusammenhang für eine emotional positive Einstellung zur Fachlichkeit zu nutzen.

3.5.6.1 Gleichheit

Der Begriff „Gleichheit" und die Verwendung von „ist gleich" beziehungsweise „=" oder „ist äquivalent zu" wechseln entsprechend der Anwendungen zwar ihre jeweilige syntaktische Form und Bedeutung, besitzen jedoch in Teilgebieten eine durchgängige Invarianz: Bei Zahlen ist es die *Gleichheit des Zahl-Wertes*, den eine Zahldarstellung vermittelt: Zum Beispiel ist 1,5 $= \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \ldots$ Bei äquivalenten Zahltermen ist es der Termwert, der bei Variationen der Form

[255] Vgl. Abschnitt 3.1.3.
[256] „Rechnen können, was man sieht" war ein Motto im Sindelfinger Schulprojekt (vgl. Abschnitt 4.2).

gleich bleibt: Zum Beispiel ist $6 \cdot (5 + 4) = 6 \cdot 9$.

Bei Gleichungen ist es die lösungsinvariante äquivalente Umformung; zum Beispiel ist die Gleichung $6{\cdot}x - 5 = 13$ äquivalent zur Gleichung $6{\cdot}x = 18$.

Bei Funktionen ist es zum Beispiel der Graph, der für unterschiedliche Termformen gleich ist, d. h. identisch bezüglich der Darstellung in einem Koordinatensystem.

Bei geometrischen Formen ist es die *Kongruenz* oder *Deckungsgleichheit* von Figuren, bei deren Existenz alle Seiten und Winkel paarweise gleich einander zugewiesen werden können. Hier kann der Kongruenzbegriff verknüpft werden mit dem Problem der Eindeutigkeit von

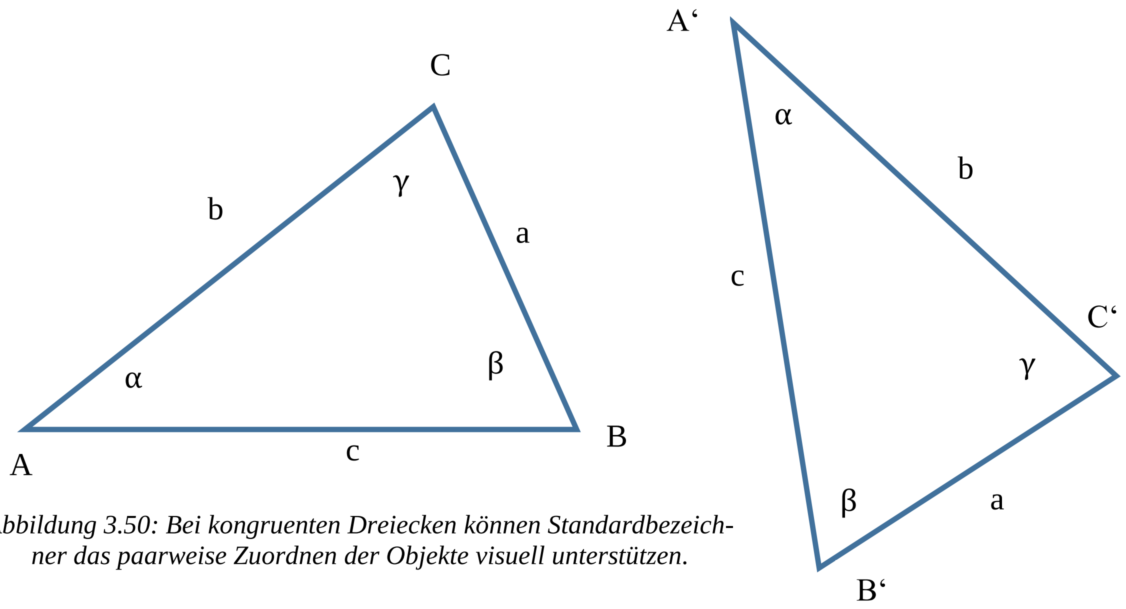


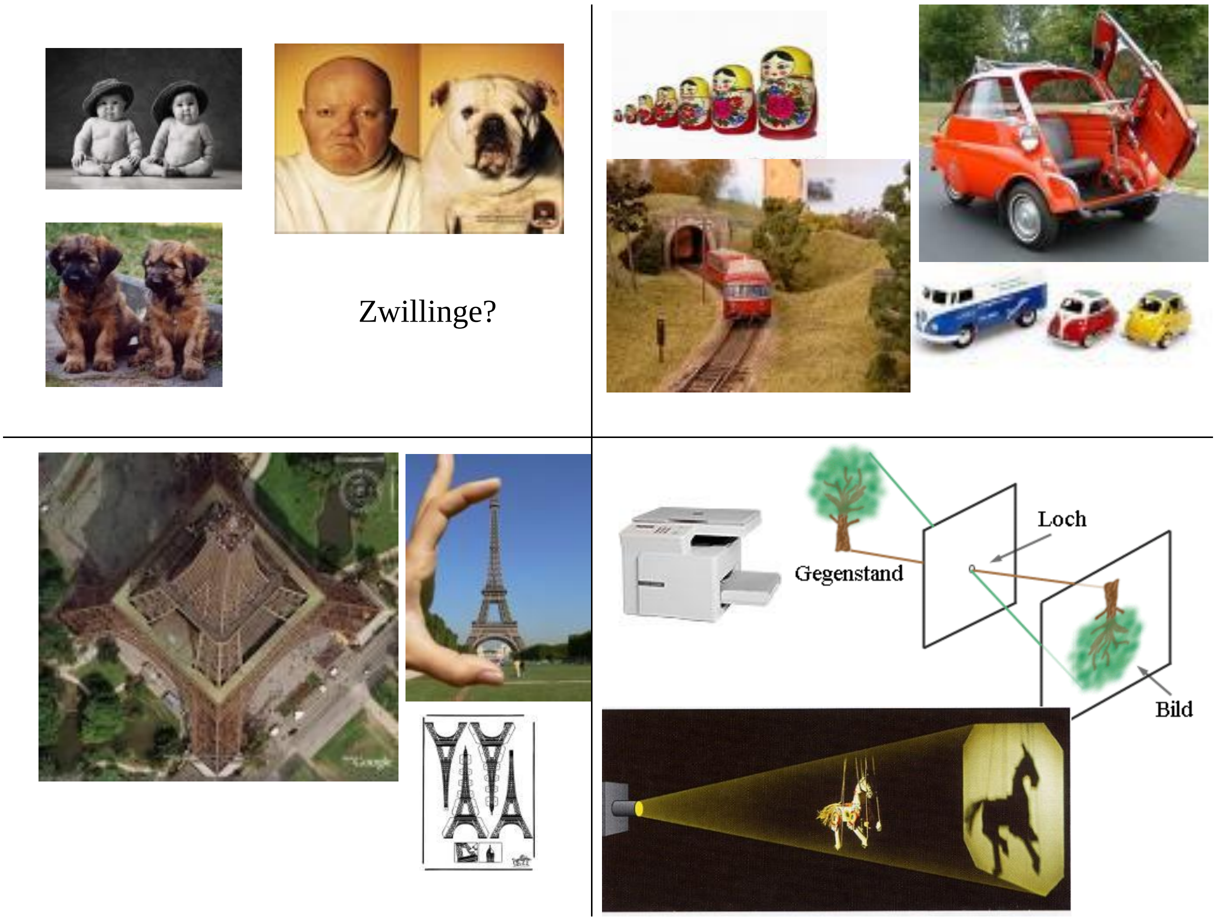
Abbildung 3.50: Bei kongruenten Dreiecken können Standardbezeichner das paarweise Zuordnen der Objekte visuell unterstützen.

Konstruktionen. In Abschnitt 4.8 ist dazu eine Unterrichtsskizze zur Behandlung der Kongruenzsätze für Dreiecke angegeben. Jede dieser Bedeutungen von Gleichheit ist mental induktiv verortet. In der Praxis nehmen die Lernenden exemplarische Darstellungen als Repräsentanten einer begrifflichen Klasse wahr.

3.5.6.2 Proportionalität, Linearität und Ähnlichkeit

Ein Lernender der Klasse 6 erfährt, dass der Dreisatz ein Verfahren ist, über dessen mehrfache Anwendung proportionale Tabellenwerte bestimmt werden können. In der siebten Klasse soll er lernen, dass die Gleichheit der Quotienten (k) der Zahlenpaare $(x \mid y)$ der Tabelle zu einer Proportionalität $y = k{\cdot}x$ führt, über die in einem Koordinatensystem wiederum eine Gerade bestimmt ist. Eine lineare Zuordnung unterscheidet sich dadurch, dass nun die relativen Veränderungen quotientengleich sind. Über ihre grafische Veranschaulichung definiert sich die Steigung einer Geraden über ein Steigungsdreieck zwischen zwei Punkten. Einen Übergang zum Ähnlichkeitsbegriff und seiner Vernetzung mit Alltagserfahrungen vermittelt Abbildung 3.51.

Ähnlichkeit sieht man täglich



Ähnlichkeit kann man konstruieren und rechnen

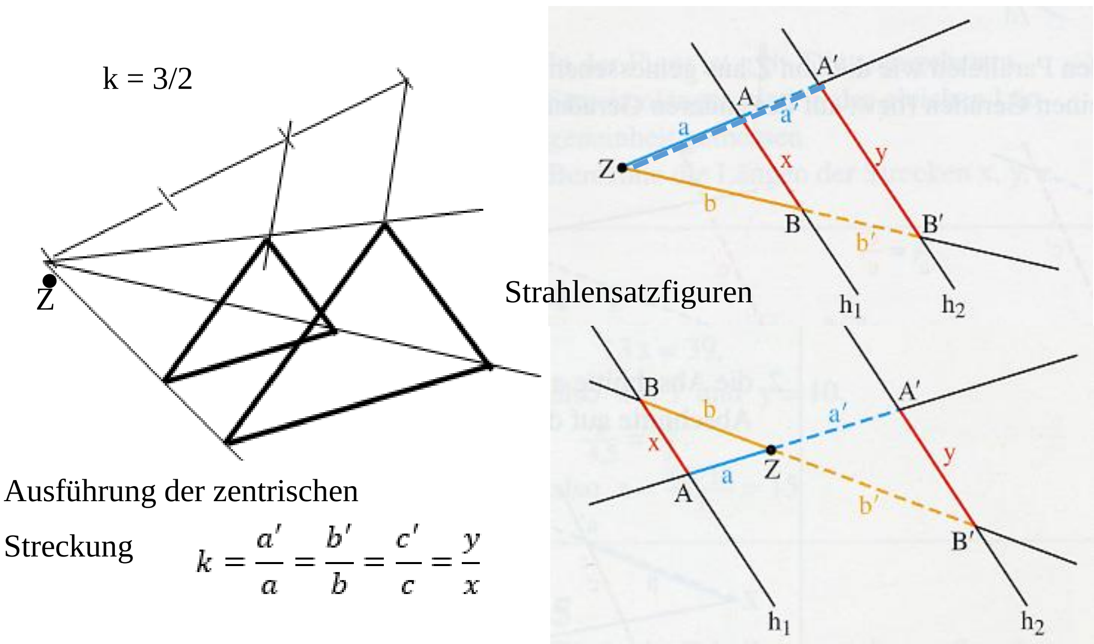


Abbildung 3.51: Der Begriff Ähnlichkeit, assoziiert mit Alltagsvorstellungen, dem Konstruktionsprinzip der zentrischen Streckung und den korrespondierenden Strahlensätzen. Ein begriffsbildender Mathematikunterricht sollte diese beiden Ausprägungen unbedingt integrativ thematisieren.

Der Gesamteindruck der Darstellung sollte auch ohne weitere Kommentare davon überzeugen, dass die Einzelbilder im oberen Teil dieser Abbildung den Alltagsbegriff Ähnlichkeit mit dem mathematischen Ähnlichkeitsbegriff assoziativ verknüpfen. Außerdem wird deutlich, dass vermittels der zentrischen Streckung die Strahlensätze als geometrische Sätze ausgewiesen sind, über deren visuelle Erkennung oder über deren „Existenz in einem Kontext“ gerechnet werden kann. Die Strahlensatzfiguren können als *Dreisätze der Geometrie* bezeichnet werden, da aus drei geometrischen Größen eine vierte berechnet werden kann.

3.5.6.3 Ähnlichkeit und Dreieck – rechnen was man konstruieren kann

Steigungsdreiecke bei Geraden ermöglichen den erinner- und verallgemeinerbaren Übergang zur Trigonometrie. Bis zur Klasse 9 sind Winkel und Strecken Grundgrößen, die rechnerisch unabhängig voneinander existierten, wenn nicht über Symmetrieeigenschaften Beziehungen hergestellt sind. Steigungsdreiecke sind rechtwinklige Dreiecke. Visuell sind sie bei den Schülerinnen und Schülern nach der Klassenstufe 7 wie in Abbildung 3.52 (Figur links) erinnerbar: Alle Steigungsdreiecke einer Geraden gehören zu einer Proportionalität. Sie haben den gleichen Quotienten m. Er ist die Steigung der Geraden.

Das Ähnlichkeitsprinzip bei Dreiecken besagt: Wenn Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, sind sie ähnlich. Deshalb sind in einem rechtwinkligen Dreieck die Streckenverhältnisse charakteristische Kenngrößen für Winkelweiten (vgl. Abbildung 3.52, Figur rechts).

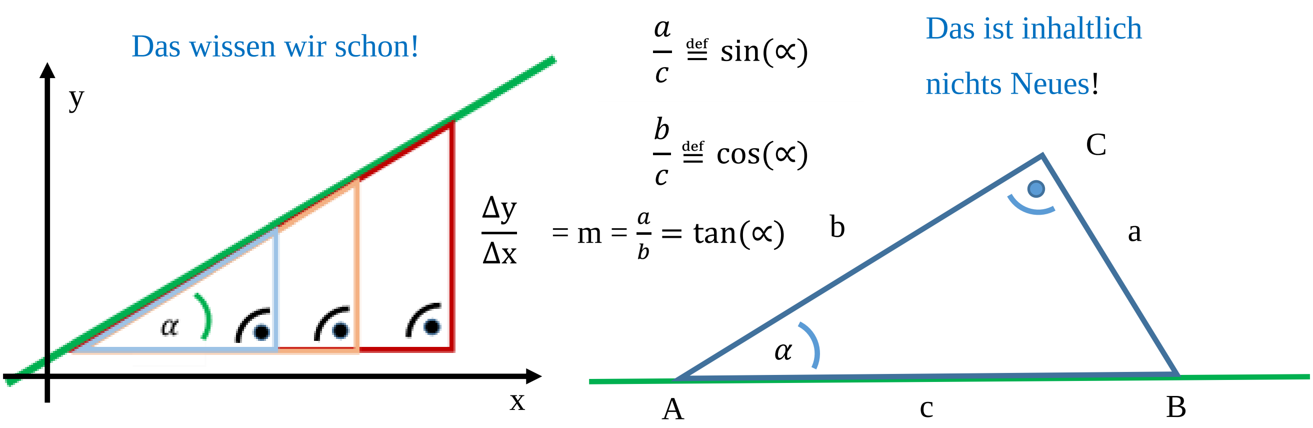


Abbildung 3.52: Von Steigungsdreiecken zum Sinus und Cosinus beim rechtwinkligen Dreieck

Der Sinus und der Kosinus sind bei rechtwinkligen Dreiecken somit nur andere Schreibweisen für feste Streckenverhältnisse, die ihren Winkelweiten zwischen 0° und 90° zugeordnet werden können. Die Kurzschreibweisen „sin α“ und „cos α“ sind Symbole, also Worte, die zusammengehören. Aber die neuen Worte müssen sich als nützlich erweisen. Ihre Qualität erweist sich dadurch, dass man nun in der Geometrie bei Vielecken alles rechnen kann, was man konstruktiv erzeugen kann. Die Begründung dafür liefert das Zerlegungsprinzip: Jedes Vieleck kann in Dreiecke zerlegt werden und jedes Dreieck besitzt mindestens eine Höhe, die im Inneren liegt. Zeichnet man diese, wird es in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt (vgl. Abbildung 3.53).

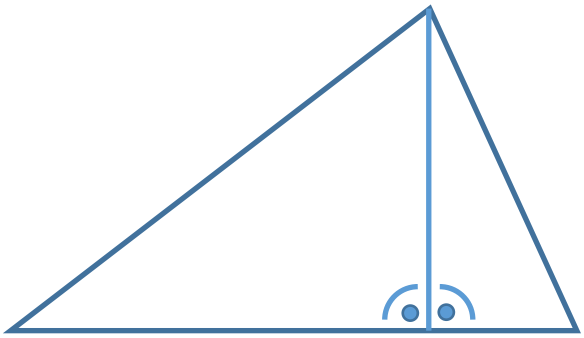


Abbildung 3.53: Zerlegung eines beliebigen Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke

Jetzt kann man in der Geometrie alles rechnen, was konstruiert werden kann!

Mit dieser „Erkenntnis" haben Lernende ein Problemlöse-Werkzeug, mit dem jede Dreiecksberechnung eine situationsangemessene Lösungsstrategie bietet. Die Entwicklung von Formeln für allgemeine Berechnungen bei Dreiecken wie z. B. *Sinus*- oder *Kosinus-Sätze* wird nicht angestrebt, weil derartige Anwendungen in reine Einsetzungsvorgänge in Formeln ausarten, die Problemlösefähigkeiten nicht fördern.

Andererseits kann aber auch vermittelt werden, dass erst allgemeine Formeln eine computerbasierte Algorithmisierung ermöglichen.

Speziell im Fall der Dreiecksberechnung kann zum Beispiel exemplarisch gezeigt werden, dass der elementarste Fall, die Konstruktion eines Dreiecks aus drei Seiten, die komplexeste Berechnung aller denkbaren Fälle erfordert.

3.5.6.4 Prinzipien des Messens bei geometrischen Figuren und Körpern

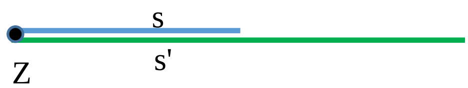
Messungen im Anschauungsraum und in der Ebene beziehen sich auf das Messen von Strecken, Flächen und Volumina. Das Grundprinzip dieses Messens in allen drei Fällen ist, feststellen (bzw. im einfachsten Fall zählen), wie oft eine Maß-Einheit in einer Vielfachheit vorkommt. Eine Erweiterung dieses Prinzips ist, Messen durch Rechnen zu ersetzen, welches über Verallgemeinerungen Formeln liefert.

Die erfolgreichsten heuristischen Strategien zum Aufstellen von *Formeln zum Messen* sind das „Prinzip des Zerlegens und Zusammensetzens" und die intuitive (d. h. nicht formelhaft, sondern inhaltlich begründete) Verwendung von Ähnlichkeitsbeziehungen.

In diesem Abschnitt wird skizziert, dass mit diesen beiden Denk- und Konstruktionsprinzipien ein einheitliches strategisches Konzept für eindimensionale, ebene und räumliche Formen entwickelt werden kann.

Die Ähnlichkeit liefert Proportionalitäten beim Messen von Längen, Flächen und Volumen.

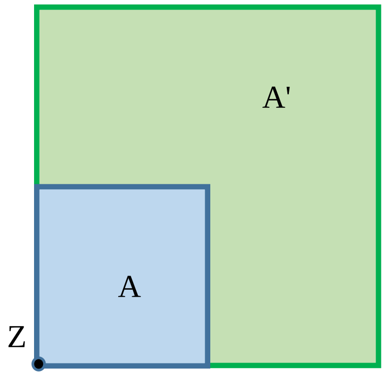
- Die „Verdoppelung“ einer Strecke kann als zentrische Streckung der Strecke mit dem Faktor k = 2 aufgefasst werden:



Ergebnis: Die Streckenlänge wird verdoppelt.

Allgemein gilt: $s' = k \cdot s$ (Proportionalitätsfaktor: **k**)

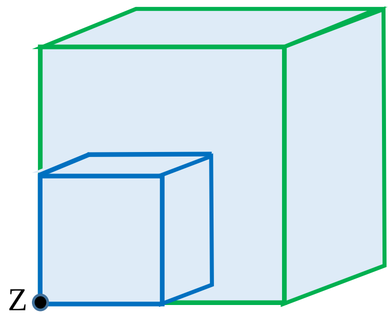
- Die „Verdoppelung“ der Kanten eines Quadrates kann als zentrische Streckung des Quadrats mit dem Faktor k = 2 aufgefasst werden:



Ergebnis: Der Flächeninhalt wird vervierfacht.

Allgemein gilt: $A' = k^2 \cdot A$ (Proportionalitätsfaktor: $\mathbf{k^2}$)

- Die „Verdoppelung“ der Kanten eines Würfels kann als zentrische Streckung des Würfels mit dem Faktor k = 2 aufgefasst werden:

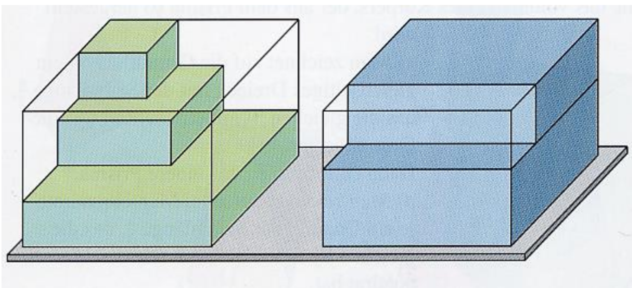


Ergebnis: Das Volumen wird verachtfacht.

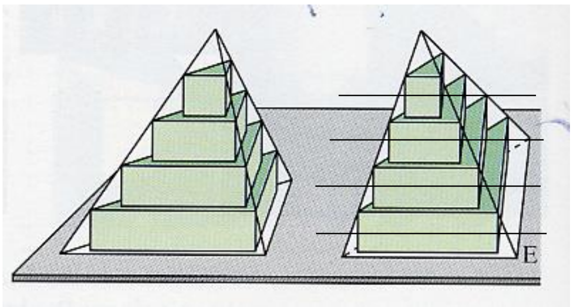
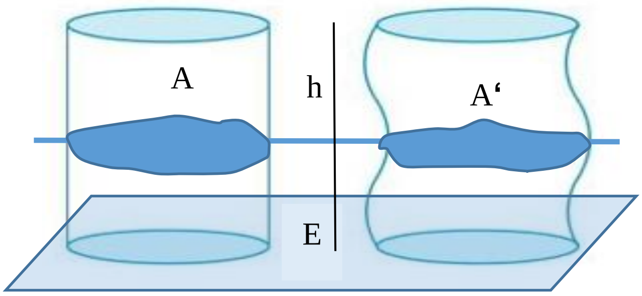
Allgemein gilt: $V' = k^3 \cdot V$ (Proportionalitätsfaktor: $\mathbf{k^3}$)

3.5.6.5 Bauprinzipien für Körper und Herleitung von Volumenformeln

In den nachfolgend tabellarisch gestalteten Übersichten werden Konstruktions- und Darstellungsarten für geometrische Körper mit Prinzipien der Volumenmessung zusammengeführt und Formeln für Volumenbestimmungen von Körpern entwickelt.[257] Hierbei sollen vorab gemachte enaktive Handlungen mit Körpern mit mentalen Vorstellungen assoziiert werden.

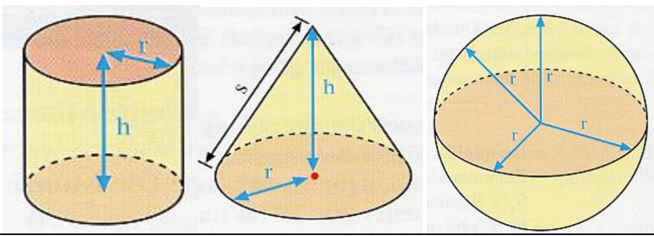
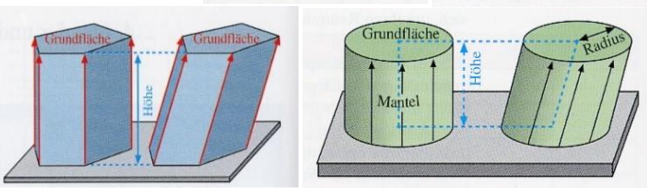
Zusammengesetzte Körper Ein Körper kann aus anderen Körpern zusammengesetzt werden. Aus einem Körper können andere Körper weggenommen oder angefügt werden. Die Volumina V dieser Körper ergeben sich als Summen bzw. Differenzen der Volumina der Teilkörper.	 Bekannt: **V_{Quader} = Länge · Breite · Höhe**

[257] Die Abbildungen in diesem Abschnitt sind aus dem Lehrwerk Lambacher Schweizer 5, Klasse 10, Baden-Württemberg entnommen und an einigen Stellen dem Text entsprechend erweitert. Sie sind nicht einzeln beschriftet, damit der inhaltliche Kontext zum Text der Tabelle nicht unterbrochen wird.

Das „Exhaustionsprinzip“ (nach Eudoxos von Kidos, 408-355 v. Chr, lat. exhaurire, „herausnehmen“, „erschöpfen“, „vollenden“; auch Ausschöpfungsmethode genannt) Das Volumen eines Körpers wird näherungsweise bestimmt über systematisches Ein- (oder Umbeschreiben) mit Körpern eines Typs, deren Volumen berechenbar ist. Die Methode kann beliebig verfeinert werden. Hierbei wird ein Grenzwert-Denken propädeutisch unterstützt. Das Prinzip ist rechts am Beispiel einer dreieckigen Pyramide dargestellt.	 Das Volumen der Pyramide ist durch die einbeschriebenen Prismen näherungsweise bestimmt. Die Summe der Volumina der Prismen liefert einen Näherungswert für das Volumen der Pyramide. Man kann die Höhen der Prismen halbieren und dafür doppelt so viele Prismen nehmen usw. Damit kann der Näherungswert so oft wie gewünscht verbessert werden.
Das „Prinzip von Cavalieri“ (Francesco Cavalieri, 1598 - 1647) Wenn zwei Körper mit gleicher Höhe h auf einer Ebene E so angeordnet werden können, dass die jeweiligen Schnittflächen mit allen Ebenen parallel zu E jeweils inhaltsgleich sind, dann haben die beiden Körper das gleiche Volumen. [258]	

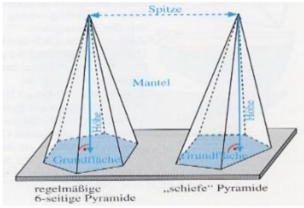
Aus dem Prinzip von Cavalieri ergibt sich eine allgemeine Folgerung für Körper:
Schiefe Körper haben das gleiche Volumen wie die zugehörigen senkrechten Körper.

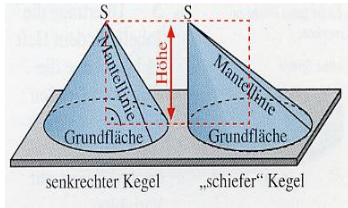
Körper dynamisch erzeugen

Rotationssymmetrische Figuren Zum Beispiel entstehen Zylinder, Kegel, und Kugeln durch eine vorgestellte Rotation eines Rechtecks, eines gleichschenkligen Dreiecks oder eines Kreises um eine Symmetrieachse. [259]	
Prismen und Zylinder entstehen durch ein *vorgestelltes räumliches Parallelverschieben* eines Vielecks oder eines Kreises (aus der Grundfläche G). Ihr Volumen ist nach dem Prinzip von Cavalieri bestimmt.	 $\mathbf{V_{Prisma} = V_{Zylinder} = G \cdot h}$

[258] Das Prinzip ist intuitiv überzeugend bei Prismen, Pyramiden, Zylindern und Kegeln, da hier Kongruenz- bzw. Ähnlichkeits-Transformationen gesehen werden können. Da man dieses Prinzip mit einem Stapel von Bierdeckeln anschaulich demonstrieren kann, spricht man hier umgangssprachlich auch von der „Bierdeckel“-Methode.
[259] Hierzu gibt es auch Drahtmodelle, die beim Rotieren den räumlichen Eindruck erzeugen.

Pyramiden und Kegel entstehen durch ein gedachtes Verbinden aller Punkte eines Vielecks oder eines Kreises in einer Grundfläche mit einem Punkt oberhalb davon (der Spitze S).

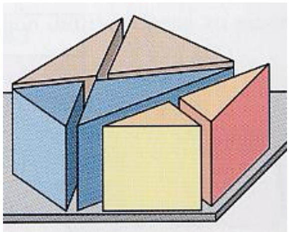


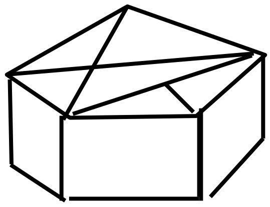


Prinzipien des Zerlegens, Zusammensetzens, Wegnehmens, Anfügens

Zerlegung von Prismen in dreieckige Prismen
Alle Prismen, deren Grundflächen Vielecke sind, können in Prismen mit dreieckiger Grundfläche zerlegt werden:

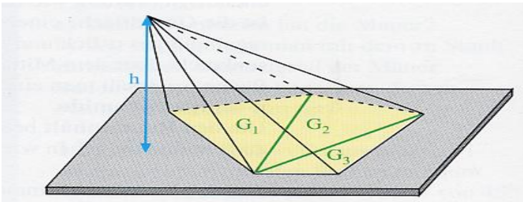
Das Volumen eines Prismas ist dann die Summe der Volumina der dreieckigen Primen.



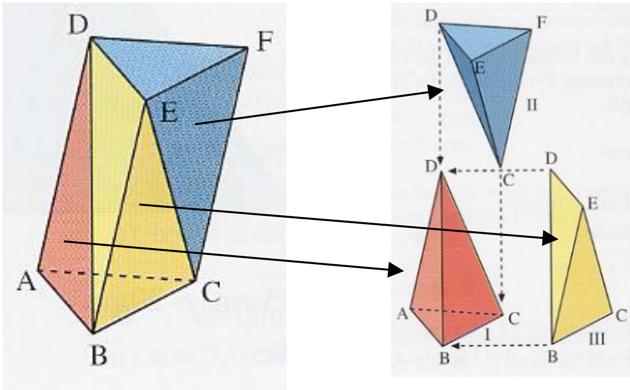


Speziell: $\mathbf{V_{dreieckiges\ Prisma}} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{V_{Quader}}$

Jedes dreieckige Prisma (siehe rechts) kann in drei volumengleiche Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche zerlegt werden.



Jede Pyramide kann in Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen zerlegt werden (siehe oben).[260]



$$\mathbf{V_{Dreieckspyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \mathbf{V_{dreieckigesPrisma}}$$

$$\mathbf{V_{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}$$

Zusammenhang zwischen Ähnlichkeit und Formeln

Voraussetzung: Ein Körper K‘ entsteht aus einem Körper K durch eine zentrische Streckung mit dem Faktor k > 0.
Dann gelten für jeweils eindeutig zugeordnete Zusammenfassungen von Streckenlängen s und s‘ oder Flächen O und O‘ auf K und K‘ und die Volumen V und V‘ der Körper K und K‘ die Beziehungen:

$$u' = k \cdot u,\ \ O' = k^2 \cdot O \text{ und } V' = k^3 \cdot V.$$

Wer Ähnlichkeit und den Streckungsfaktor erkennt, muss kaum noch rechnen!

[260] In solchen Situationen ist es für die Verknüpfung von algebraischen Formen mit geometrischen Interpretationen wichtig, dass eine algebraisch äquivalente Umformung nicht den Bezug zur geometrischen Deutung verliert. Andernfalls tritt das ein, was zum reinen Formel-Rechnen entartet.

3.5.6.6 Begriffsbildung Wahrscheinlichkeit

Im Alltag beginnen Sätze über Vermutungen oft mit dem Adjektiv „wahrscheinlich“. „Wahrscheinlich hört mir gerade mal wieder niemand mehr zu“, äußert sich eine Lehrperson, welche den Eindruck hat, dass eine wiederholte Erklärung auch diesmal wieder nicht von denen aufgenommen wird, für die sie gedacht war. „Wahrscheinlich habe ich diesmal in Mathe eine zwei“, ist der hoffnungsvolle Wunsch eines Schülers oder einer Schülerin, der oder die ihren Erfolg bei der gerade geschriebenen Mathematikarbeit einschätzt.

Grundvorstellungen

In einem Beitrag der Zeitschrift „mathematik lehren“ hat Günther Malle vier Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff beschrieben. Einen Überblick hierzu gibt die Tabelle in Abbildung 3.54. Eine Klasse von Wahrscheinlichkeitsexperimenten bezieht sich auf die Voraussetzung, dass die Wiederholung eines *Zufallsexperiments* prinzipiell unabhängig von den vorangegangenen Versuchen ist. Eine derart geforderte *Unabhängigkeit* ist in der Regel bei vielen zufälligen Ereignissen des Alltags nicht gegeben. Damit wird deutlich, dass Wahrscheinlichkeits-Prozesse in der Mathematik einen sehr starken Modellcharakter haben und in der Regel strukturell eingeschränkt sind.

<table>
<tr><td>Ein Ereignis (E) eines Zufallsexperimentes wird als Zusammenfassung (Teilmenge) von Ergebnissen, den Elementen einer Ergebnismenge aufgefasst.</td></tr>
<tr><td>Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeit nach Günther Malle [261]</td></tr>
<tr><td>1. Empirische Wahrscheinlichkeit (experimentell bestimmte „bestmögliche“ Näherung)
Bedingung: Es gibt keine weiteren Informationen über den Vorgang.
Handlung: Ausführung eines Experiments mit hinreichend vielen Wiederholungen
Ergebnis: Wahrscheinlichkeit p(E) als relative Häufigkeit
$$\mathbf{p(E)} = \frac{\textbf{Anzahl des Eintretens von E}}{\textbf{Gesamtzahl der Versuche}}$$</td></tr>
<tr><td>2. Laplace-Wahrscheinlichkeit (logisch-kombinatorische Begründungen)
Annahme: Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse
Verfahren: kombinatorische und logische Überlegungen sowie Operationen auf Mengen
Ergebnis: Wahrscheinlichkeit als erwarteter relativer Anteil
$$\mathbf{p(E)} = \frac{\textbf{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\textbf{Gesamtzahl der Ergebnisse}}$$</td></tr>
<tr><td>3. Subjektive Wahrscheinlichkeit
Bedingung: Individuell persönliche Sicht, beruhend auf Erfahrungen und Vorstellungen
Handlung: Subjektive Einschätzung, subjektives Vertrauen, häufig auch Fehlvorstellungen
Verfahren: Meist ausgedrückt in Prozent oder als Chance: „Eins zu ...“</td></tr>
</table>

[261] Malle, 2003, S. 52 ff. Der Autor hat die genannten Grundvorstellungen für die Übersicht hinsichtlich ihrer Voraussetzungen, Handlungen und Ergebnisse kurz charakterisiert.

4. **Prognostische Wahrscheinlichkeit** (Theoriebildung)
Handlung: Anwendung eines Verfahrens (stochastisch, statistisch …)
Ergebnis: ein *Maß für eine Erwartung* als Zahl zwischen 0 und 1 (oder in %)
Die Wahrscheinlichkeit p(E) gibt an, wie oft mit dem Auftreten von E gerechnet werden kann, wenn das Experiment ausreichend oft wiederholt wurde.

Abbildung 3.54: Grundvorstellungen zum Begriff Wahrscheinlichkeit

Für eine fachlich-objektive Begriffsbildung eignet sich die subjektive Wahrscheinlichkeit nicht. Sie ist aber bei den Lernenden latent vorhanden und muss im Unterricht beachtet und als nicht begriffsförderlich erkannt werden. Dabei wird auch eine zu frühe Verwendung struktureller Vorgaben vermieden, indem eine **intuitive Beschreibung** von Situationen genutzt wird. Anstatt zum Beispiel bei einem Würfelversuch, der eine Sechs liefern soll, zunächst die Augenzahlen 1 bis 6 als „Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit" aufzufassen und danach mit Laplace-Begründungen zu arbeiten, wird der Vorgang nur mit den Ergebnissen „6" oder „nicht 6" beschrieben. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{6}$ bzw. $\frac{5}{6}$ ergeben sich dann entsprechend der Chance „1 zu 5" für eine von sechs Augenzahlen, die erwartet wird. Der prognostische Wahrscheinlichkeitsbegriff sollte sich unterrichtlich über intuitive Handlungen entwickeln, bei denen die Empirische und die Laplace-Wahrscheinlichkeit als Objektivierung subjektiver Vorstellungen erfahrbar gemacht und verallgemeinert werden. Im Abschnitt 4.10 ist eine begriffsbildende Unterrichtseinheit angegeben, bei der die Lösung einer zunächst intuitiv aufgefassten Anfangssituation über experimentelles Vorgehen stufenweise objektiviert wird.

3.5.7 Begriffsbildung Variable(n)

In einem inhaltlich aufbauenden Mathematikunterricht ist es sinnvoll, statische, d. h. auf Zahlobjekte bezogene Handlungen mit funktionalen Aspekten zu verknüpfen, weil algebraische Strukturierungen und die Entwicklung des funktionalen Denkens parallel zueinander verlaufen. Variablen sind ständige Begleiter des Mathematikunterrichts. Aber was eine Variable ist, wird selten vermittelt. Nach Günther Malle sind Variablen als *Wortvariablen* auch Bestandteil der Umgangssprache, etwa bei Worten wie *Ding*, *Sache*, *Menschen* u. ä. [262]

Beim Übergang von Zahltermen zu *Termen mit Variablen* erhalten Buchstabensymbole nicht nur eine kontextsensitive Bedeutung hinsichtlich eines Alltagsproblems. Sie werden zu mathematischen Symbolen mit vielseitigen Interpretationen hinsichtlich des mathematischen Kontextes.

[262] Malle, 1993, S. 44.

3.5.7.1 Aspekte von mathematischen Variablen

In seinem Buch „Didaktische Probleme der elementaren Algebra“ nennt Malle drei unterscheidbare inhaltliche Aspekte des Variablenbegriffs, auf die in der Schule nicht verzichtet werden könne. Er unterscheidet

- *den **Gegenstandsaspekt***, bei dem eine Variable “*eine nicht näher bestimmte Zahl*“ bzw. allgemeiner „*einen nicht näher bestimmten Denkgegenstand*“ bezeichnet,
- *den **Einsetzungsaspekt***, bei dem eine Variable *„als Platzhalter für Zahlen bzw. Leerstelle“* aufgefasst wird, *„für die man Zahlen (genauer Zahlsymbole) einsetzen darf“*,
- *den **Kalkülaspekt** (Rechenaspekt)*, bei dem eine Variable *„als bedeutungsloses Zeichen“* gesehen wird, *„mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf.“* [263]

Beispielsweise erscheint unter dem *Gegenstandsaspekt* der Term a·b als eine nicht näher bestimmte *Zahl*, die in eine konkrete Zahl übergeht, wenn für a und b Zahlen stehen, deren Produkt gebildet wird.

Unter dem *Einsetzungsaspekt* erscheint der Term a·b als *Zahlform*, von der man nur weiß, dass sie das Produkt zweier ebenfalls nicht näher bestimmter Zahlen ist.

Unter dem *Kalkülaspekt* erscheint der Term a·b als reine Zeichenfolge, mit der nach vereinbarten Regeln operiert werden darf und deren Bedeutung man während des Vorgehens vergessen kann.

Verwendet man Variablen als Objekte beim Modellieren von Alltagsproblemen im Unterricht der Klassenstufen 5 und 6, wird bei den Lernenden fast ausschließlich der Gegenstandsaspekt einer Variablen in der Bedeutung als Zahl, Anzahl oder Maßzahl einer Größe angesprochen. Er wird deshalb auch ***Objektaspekt*** genannt.

Der Objektaspekt wird auch deutlich beispielsweise bei der Formel $A = a^2$, die als eine Zuordnung gesehen wird, welche zu einer nicht näher bezeichneten Zahl a eine Rechenvorschrift zeigt, die ausgeführt eine Zahl liefert, die wiederum als Maßzahl eines Flächeninhalts interpretiert wird. Aber eine Form wie $A = a^2$ stellt zum Beispiel auch eine Gleichung dar. [264] Mit diesem Beispiel wird noch zusätzlich eine doppelte Interpretationsmöglichkeit eines Terms aufgezeigt, im Sinne einer ***Handlung*** (hier einer Rechnung) und ihrer ***Beziehung*** im Kontext einer geometrischen Interpretation. [265]

---

[263] Ebd. S. 45
[264] Zum Beispiel eine Zuordnung, wenn zu a = 2 der Wert A = 4 berechnet wird, oder eine Gleichung, wenn ein Zahl a gesucht ist, mit $10 = a^2$.
[265] Vgl. Malle, 1993, S. 144

3.5.7.2 Variablen bei Rechenregeln

Rechenregeln sind Handlungsanweisungen für Terme, die äquivalente Umformungen ermöglichen und bei Zahltermen auch die Termwerte bestimmen können. Wenn solche Regeln, wie zum Beispiel das *Kommutativgesetz* in der Form a·b = b·a oder das *Distributivgesetz* in der Form a·(b + c) = a·b + a·c mit Hilfe von Variablen formuliert sind, kann bei noch nicht ausgebildeter Aspektvorstellung ein Konflikt zwischen Handlungs- und Beziehungsaspekt entstehen, der Fehlinterpretationen bewirken und zu Rechenschwierigkeiten führen kann. Ein Schüler oder eine Schülerin in den Klassen 5 und 6 kann einen explizit gegebenen Zahlterm, zum Beispiel den Ausdruck $(\frac{2}{3} + 4) \cdot \frac{1}{2}$, nur dann (formal) nach einer Regel umstellen, wenn die allgemeine Form in seinem bzw. ihrem erinnernden Gedächtnis mit der konkreten Darstellung so in Einklang gebracht wird, dass ihre Verwendung erkannt wird. Das Beispiel zeigt, dass in diesem rechnerisch eigentlich einfachen Fall von Multiplikation einer Summe mit einer Zahl die explizite Form syntaktisch mit keiner der beiden allgemeinen Variablen-Formen assoziiert werden kann. Hier kann das Beispiel nur umgeformt werden, indem zuerst die erste Regel und dann die zweite verwendet wird. Viel einfacher ist es für die Übenden in unteren Klassenstufen, wenn sie Recheneigenschaften in umgangssprachlicher Form erinnern können, da diese besser den Beziehungsaspekt betonen, wie etwa: *Beim Rechnen darf man beim Multiplizieren die Faktoren vertauschen und beim Produkt einer Summe mit einer Zahl darf man die Zahl als Faktor auf die Summanden verteilen.*

Hier sind auch die Eigenschaften der Kommutativität und Distributivität umgangssprachlich implizit vereint. Eine analoge syntaktisch-formale Darstellung mit Variablen würde drei getrennte Formen benötigen, um diesen umgangssprachlich formulierten Satz zu repräsentieren. Hätten diese die Form: a · b = b · a; a · (b + c) = a · b + a · c und (a + b) · c = a · c + b · c, würden sie hinsichtlich ihres Beziehungsaspekts einen umgangssprachlichen Satz verkürzen und hinsichtlich des Handlungsaspekts formale Äquivalenzumformungen von Termen vermitteln und Rechenhandlungen beinhalten. In dieser gegenüberstellenden Betrachtung wird auch deutlich, welche Konstruktions-Probleme ein Lernender haben muss, der sich mental noch in einer Phase des *Gegenstandsaspekts* befindet und eine symbolische Notation in ein operationalisiertes Handeln übersetzen muss. [266]

[266] Formale Notationen können jedoch wertvoll und im Unterricht höherer Klassenstufen verständnisfördernd sein, wenn erweiterte Vorstellungen zu Termen und ihre Verwendung und unterschiedliche Aspekte von Variablen in Kontexten von den Lernenden wahrgenommen und konstruktiv verwendet werden können.

In einem ästhetisch verfassten Mathematikunterricht werden formal regelbasierte Termbehandlung und anwendungsbezogene Assoziation nicht getrennt, sondern begrifflich an Termen entwickelt, die einen Bezug zur grünen und blauen Welt alias Alltags- und Mathematikwelt haben. Nach einer entsprechenden kognitiven Verknüpfung können inhaltliche und strukturelle Gemeinsamkeiten extrahiert und in abstrakter Form notiert werden. Dies wird nachfolgend an einem Beispiel deutlich gemacht, bei dem eine algebraische Form über die Klassenstufen 5 bis 7 zunächst über geometrisch assoziierte Handlungen entwickelt und darüber verallgemeinert wird.

3.5.7.3 Geometrisch-algebraische Assoziationen und Analogien

In der Abbildung 3.55 (siehe nächste Seite) ist die Entwicklung der sogenannten e*rsten Binomischen Formel* über die Schuljahre 5 bis 8 mit den entsprechenden Veränderungen des Variablenaspektes dargestellt. Dabei wird auch der Übergang vom diskreten Denken im Bereich der natürlichen Zahlen zu einer kontinuierlichen Auffassung des Zahlverständnisses im Bereich der rationalen Zahlen deutlich.

Die Ausführung zeigt, wie eine Termform über entsprechende Verknüpfungen altersgemäß und in den jeweiligen Klassenstufen stets rückbezüglich erinnerbar entwickelt und mental nachhaltig verortet werden kann. Exemplarisch wird dabei auch deutlich, wie eine algebraische Form zunächst mit geometrisch assoziierten Vorstellungen verknüpft, entwickelt und darüber verallgemeinert wird.

Fehlvorstellungen und Abneigungen von Lernenden können sich dann ausbilden, wenn sie ausschließlich auf den Kalkülaspekt zurückgreifen müssen, da die Verarbeitungsregeln für sie nicht bedeutungsmäßig assoziiert sind mit anderen Objekten und Handlungen und die Umformungen von Termen deshalb nur mechanisch-formal ausgeführt werden. In diesem Fall kann sich auch keine kognitive Kopplung der Formen mit den Zahlobjekten ausbilden. Ähnliches kann sich nicht mit Ähnlichem vernetzen, weil diese Verknüpfungen nicht erinnerbar sind.

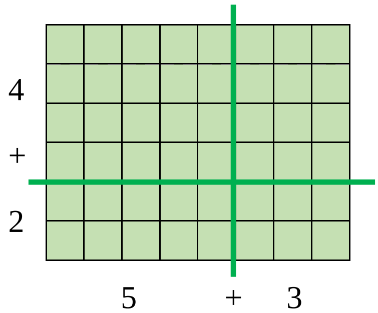
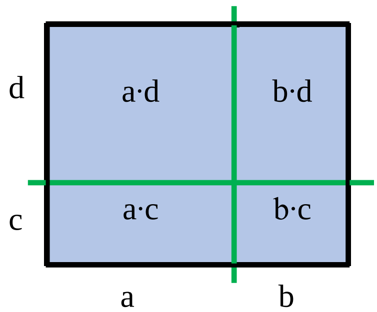
<table>
<tr><th colspan="3">Diskret geometrisch-algebraische Verortung einer Formel in den Klassen 5 und 6</th></tr>
<tr><th>Visualisierung</th><th>Bedeutung / Handlung</th><th>Variablenaspekte</th></tr>
<tr><td>
</td>
<td>6 mal 8-Rechteck im Gitternetz
Zählprinzip mit assoziierter Recheneigenschaft und der Strategie
Zerlegen und Zusammensetzen (mal entspricht „·“):
8 mal $6 = 8 \cdot 6 =$
$(5+3)$ mal $(2+4) = \ldots$
$= 5 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4$
Kognitiv unterstützte Verallgemeinerung
$5 = a$, $3 = b$, $4 = c$, $2 = d$
Rechenschema (kognitiv, diskret):
$(a + b)\cdot(c + d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$
Rechnen ist strukturiertes Zählen</td>
<td><u>Gegenstandsaspekt</u>
diskret
Zahlbereich N</td></tr>
<tr><th colspan="3">„Kontinuierliche“ Interpretation mit Variablen und algebraischen Formen</th></tr>
<tr><td>
</td>
<td>Rechteck (geometrisch)
Seitenlängen mit positiven Maßzahlen a, b, c, d
Flächeninhaltsformel $A = a\cdot b$
(zerlegen und zusammensetzen)
Rechenschema (Form):
$(a + b)\cdot(c + d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$
Rechnen nach vereinbarten oder begründeten Eigenschaften (Regeln)</td>
<td><u>Objektaspekt oder Einsetzungsaspekt</u>
diskret
Zahlbereiche
N, B, Q^+</td></tr>
<tr><td colspan="2">Begründetes Rechnen nach eingeführten Regeln
a, b, c, d sind beliebige Zahlen aus Q
Für negative Zahlen a, b, c und d gibt es keine geometrische Veranschaulichung. Hier muss eine Form wie z. B.
$(a + b)\cdot(c + d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$
mit Rechenregeln begründet werden.</td>
<td><u>Objektaspekt oder</u>
<u>Einsetzungsaspekt</u>
Zahlbereiche Z, Q</td></tr>
</table>

Abbildung 3.55: Entwicklung der ersten „Binomischen Formel“ und Änderungen der Variablenaspekte in den Klassen 5 bis 8

3.5.7.4 Mentale Entlastungen mit Termformen

Bei a*lgebraischen Termen* werden Variablen zunächst im Sinne des Objekt- oder Einsetzungsaspektes gedeutet. Sie repräsentieren beliebige, aber fest gewählte Zahlen aus einem Zahlbereich. Mit ihnen können Recheneigenschaften und Rechenvereinbarungen (im Sinne von Definitionen) prägnant gefasst und kurz formuliert geschrieben und gesprochen werden.

Die Form „a + b = b + a“ (lies „a plus b ist gleich b plus a“) ist zum Beispiel eine kurze Formulierung, mit der die Kommutativität der Addition rationaler Zahlen ausgedrückt werden kann. Diese Verkürzung sollte jedoch erst dann verwendet werden, wenn sie als E*igenschaft einer Rechenoperation* verstanden ist, die in den vier Denkformen grafisch, numerisch, symbolisch und verbal-textlich dargestellt und über mentale Konstruktionen auch begründet werden kann (vgl. die Abbildungen 3.6, S. 85 und 3.7, S. 87). Fehlen derartige kognitiven Verknüpfungen, werden mathematische Handlungen mit diesen Formen als pseudo-axiomatische Tätigkeiten empfunden, die in der Regel keine emotional positiven Bewertungen erfahren. Nach Meinung des Verfassers dieser Studie sind anhaltend wiederkehrende persönliche Empfindungen dieser Art ein hauptsächlicher (fachlich zu verantwortender) Grund, dem Fach Mathematik eine Absage zu erteilen.

Die in „mathematischer Kurzschrift“ ausgedrückten Rechenoperationen (die oft nicht der inhaltlichen Situation entsprechend „Rechenregeln“ genannt werden), wie zum Beispiel a·b = b·a, oder a·(b + c) = a·b + a·c, sind einfache Beispiele, welche solche Störungen noch nicht entscheidend prägen. Schwieriger ist es, das Verständnis für komplexere Formen zu erlangen.

In der Übersicht in Abbildung 3.56 wird am Beispiel der Potenzschreibweise a^b (lies: „a hoch b“) versucht, eine für Lernende oft nicht verstandene Form inhaltlich zu verorten, indem eine Verknüpfung mit dem jeweiligen Wissensstand hergestellt wird. Dazu wird eine inhaltliche Entwicklung der Form entsprechend der verwendeten Zahlbereiche und einer statischen Sicht auf den Term a^b, d. h. unter dem Objekt- bzw. Einsetzungsaspekt der Variablen a und b, hergestellt. Es wurde darauf geachtet, den Inhaltsaspekt entsprechend des jeweiligen Wissensstandes der Lernenden zu betonen. An Stellen, an denen bei dieser Wissenserweiterung definitorisch gehandelt wird, ist anstelle des Zeichens „=“ das Zeichen „$\stackrel{\text{def}}{=}$“ geschrieben.

Die Darstellung dieser fachlichen Entwicklung zeigt ihre hohe Komplexität hinsichtlich kognitiver Verortung und der Fähigkeit der Interpretation bekannter Symbole in neuen inhaltlichen Beziehungen und Verallgemeinerungen. Sie zeigt aber auch, dass sich Mathematikwissen nur über die Verwendung von verkürzenden und einen verstandenen Sachverhalt symbolisch prägnant darstellenden algebraischen Notationen entwickeln kann. Eine rein umgangssprachliche

Formulierung wäre schwieriger zu interpretieren. Was bei dieser konzentrierten Darstellung nicht deutlich werden kann, ist die umfangreiche Variationsbreite der Anwendungen in Übungen und die häufig vorgenommenen Definitionen, die von Lernenden ohne deutliche Hinweise des Lehrenden nicht als solche wahrgenommen werden. In solchen Fällen mutiert die Regel zur formalen Handlungsanweisung, die rein schematisch und kontextfrei verwendet wird.

Aufbauende Begriffsbildung: ***Rechnen mit Potenzen*** **in Klasse 7 bis 10**		
Form: a^b (lies „a hoch b")	Handlungen Vereinbarungen	Bedeutung, Verwendung, Vorteile, Regeln (exemplarisch)
Klasse 5 a aus N, Z, B, Q *b* aus **N**	$a^b \overset{def}{=} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ „b mal Faktor a" $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ „4 mal Faktor 3" Speziell: $a^1 \overset{def}{=} a$	Abkürzung der Multiplikation mit gleichen Faktoren Stellenwerte als Potenzen: 10, 10^2, 10^3, … Faktorzerlegung: $36 = 2^3 \cdot 3^2$ Potenzrechnen: $a^3 \cdot a^4 = a^7$
	Regel (1): $\mathbf{a^b \cdot a^c = a^{b+c}}$ a ist *Grundzahl;* b und c sind *Hochzahlen*	
Klasse 8 a aus **Z** b aus $\mathbf{N}^-$	$a^{-1} \overset{def}{=} \frac{1}{a}$ $3^{-1} = \frac{1}{3}$	Kehrwertbildung Divisor als Faktor / Faktor als Divisor schreiben $\frac{9 \cdot 15}{3 \cdot 25} = 3^3 \cdot 5^1 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-2} = 3^{3-1} \cdot 5^{1-2} = 3^2 \cdot 5^{-1} = \frac{9}{5}$
a aus **Q** b, c aus **Z**	**Regel** (2): $\mathbf{a^b : a^c = a^{b-c}}$ Quotient in Produkt umformen / Produkt als Quotient schreiben	
Klasse 9 a aus $\mathbf{Q}^+$ b = $\frac{1}{n}$; n aus N	$a^{\frac{1}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a}$ Speziell: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = 3$	Wurzeln (definiert über die Umkehrung von Potenzgleichungen der Form a = x^n) in Potenzschreibweise schreiben Potenzen der Form $\frac{1}{n}$ als Wurzeln interpretieren $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}\,;\; a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ Wurzelrechnen in Potenzrechnen umformen $a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \overset{def}{=} a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \overset{def}{=} a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1$
a aus $\mathbf{Q}^+$ b = $\frac{z}{n}$ aus **Q**	$a^{\frac{z}{n}} \overset{def}{=} (\sqrt[n]{a})^z$ $(4)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4}^3 = 8$	Jeder algebraische Ausdruck a^b mit rationaler *Hochzahl* und *positiver Grundzahl* kann als reelle Zahl interpretiert werden.
Klasse 10 a, b, c aus **Q**	$(a^b)^c \overset{def}{=} a^{b \cdot c}$	Potenzen von Potenzen sind definiert. **Potenzregel:** (3) $\mathbf{(a^b)^c = a^{b \cdot c}}$

Abbildung 3.56: Variationen des Rechnens mit Potenzen in den Klassen 5 bis 10. Die Darstellung behandelt nicht die Problematik der Interpretation von Termen hinsichtlich der Konsistenz von Rechenoperationen.

Ein Beispiel soll zeigen, dass auch bei Studierenden des Lehramts Erinnerungen an eigene schulische Erfahrungen solche Argumente bestätigen: In einer Vorlesung des Verfassers zur Fachdidaktik Mathematik am KIT im Sommersemester 2016 äußerte sich eine Lehramtsstudentin in Zusammenhang mit der Potenzschreibweise bei Wurzeln: *„Das mit den Wurzeln habe ich in der Schule erst verstanden, als der Lehrer sagte, dass Wurzel zwei gleich 2 hoch ein halb ist."* Es war für den Dozenten nicht einfach, klarzustellen, dass sie (im Sinne des Begriffsverständnisses) als Schülerin auch damals über Wurzeln nicht mehr wusste als vorher.

3.6 Beziehungen und Zuordnungen – Gleichungen und Funktionen

Im Zusammenhang mit der Entwicklung des funktionalen Denkens und Handelns gibt es weitere Aspekte von Variablen, welche die Interpretation bei Zuordnungen charakterisieren.

3.6.1 Aspekte: statisch, dynamisch, diskret, kontinuierlich

Die Variable x in einem Term wie etwa $3 \cdot x + 8$ kann (unter anderem): [267]

- in der Form $3 \cdot x + 8 = 29$ im Kontext eines Zahlenrätsels stehen, wobei x eine noch unbekannte, aber gesuchte natürliche Zahl ist (*Objektaspekt*, Klasse 5/6);
- in der Form $y = 3 \cdot x + 8$ als *Gleichung* einer Geraden aufgefasst werden, die in einem Koordinatensystem grafisch dargestellt werden kann, wobei x und y als (unabhängige) Zahlen gesehen werden können, welche die Gleichung lösen und als Koordinaten eines Punktes aufgefasst werden (*Einsetzungsaspekt*, Klasse 6/7);
- in der Form $f(x) = 3 \cdot x + 8$ eine Vorschrift darstellen, die etwa den Preis zu einem Produkt bestimmt, von dem x Stück gekauft werden (Aspekt: *diskret*, *statisch*); sie kann aber auch eine Vorschrift sein, welche für alle Zahlen aus einem zugehörigen Bereich einen Funktionswert f(x) zuordnet (Aspekt: *kontinuierlich, dynamisch*); oder sie kann zu den Zahlen x = 3; 4; 6 und 7 die zugehörigen Werte f(3); f(4); f(6) und f(7) bestimmen (Aspekt: *diskretisiert*).

In Entsprechung zu den genannten Beispielen zeigt Abbildung 3.57 unterschiedliche Darstellungen und Variablenaspekte im Zusammenhang mit *Flächeninhalten bei Quadraten* und zugehörigen funktionalen Darstellungen. Mit Blick auf den Abschnitt 3.3.7 sind hierbei alle bisher genannten Aspekte von Variablen erkennbar. [268] An diesem Beispiel wird auch deutlich, dass quantitatives Modellieren ein *Modellieren mit Zahlen* ist. Die üblichen mathematischen

[267] Der Term $3 \cdot x + 8$ steht hier exemplarisch für beliebige Terme mit einer Variablen x. Die Variable x wurde hier verwendet, da sie in der Mathematik ein Konstrukt für all das ist, was gerade gesucht oder nicht bestimmbar ist oder sein soll.
[268] Die genannten Aspekte dürfen nicht trennscharf gesehen werden, da sie sich häufig inhaltlich überlagern.

Schreibweisen für Funktionen y = f(x) (lies: „y ist gleich f von x“ und „f(x) = Term(x)“ (lies: „f von x ist gleich ein Term mit einer Variablen x“) stellen *Beziehungen zwischen Zahlen bzw. Zahlbereichen* her. Das mathematische Modellieren mit Zahlen steht im Gegensatz zu naturwissenschaftlichen Modellen, wo Beziehungen zwischen Größen untersucht werden. Hier entstehen Fehlvorstellungen, wenn Lernende keine qualitativen Vorstellungen entwickelt haben, nur auf einen algebraischen Kalkülaspekt zurückgreifen und die Umformungen von Termen und Gleichungen nicht fachlich interpretieren und begrifflich einordnen können.

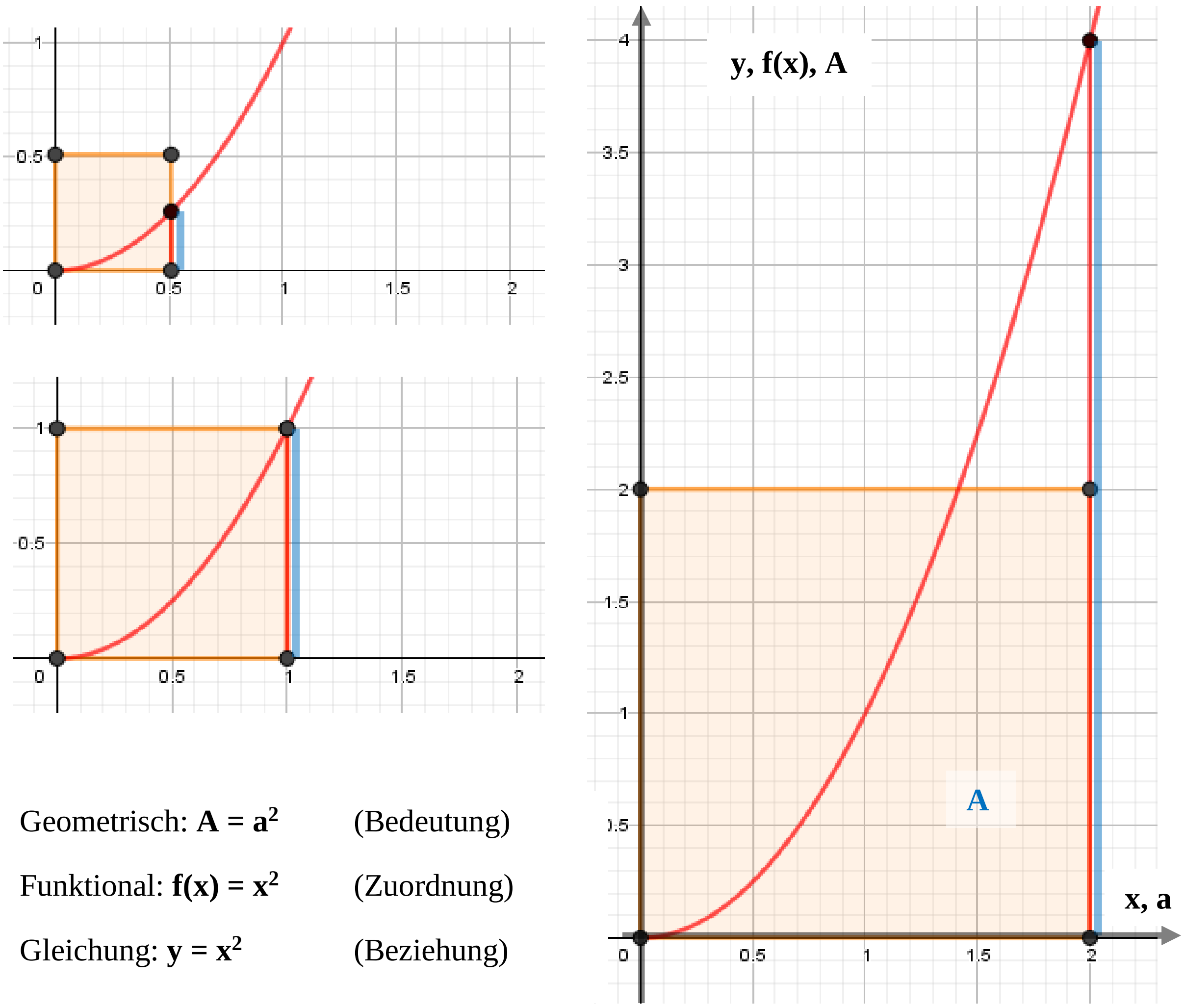


Abbildung 3.57: Unterschiedliche Variablenaspekte am Beispiel Flächeninhalt beim Quadrat. Auf Achsenbeschriftungen wurde verzichtet, da nur Bildschirmkopien verwendet wurden.

Die elementare Zuordnung $y = x^2$ wird in Klasse 8 systematisch zur Funktionsklasse der quadratischen Zuordnungen erweitert. Abbildung 3.57 zeigt eine Übersicht zum *Wissen über quadratische Funktionen*, nach der Klasse 8. Diese Übersicht dient auch als Beispiel für eine reflektierende Rückschau und Wissensdokumentation nach einer begriffsbildenden Unterrichtseinheit, bei der abschließend ein konkretes Beispiel in drei unterschiedlichen inhaltlichen Aspekten und zugehörigen Darstellungsformen mit der jeweils zugehörigen *allgemeinen Form* assoziiert wird (vgl. Abbildung 3.6). Die grafische Darstellung der zum Beispiel gehörigen Parabel im Koordinatensystem ist hierbei invariant. Bei den in Abbildung 3.58 verwendeten algebraischen Darstellungen charakterisieren die Variablen a, b, c sowie x_S und y_S bzw. x_0 und y_0 spezielle Eigenschaften von *quadratischen Funktionen*. Wenn diese in einer konkreten Form wiedererkannt werden und dabei die entsprechende Eigenschaft erinnert wird, kann aus gegebenen Informationen ohne Rechenaufwand direkt die zugehörige konkrete Funktionsgleichung aufgestellt bzw. zu einer gegebenen Gleichung das Schaubild gezeichnet werden.

Parabeln und quadratische Funktionen

Beispiel: ***Eine Normalparabel hat die Nullstellen -1 und 3 und den Scheitel S(1|-4).***

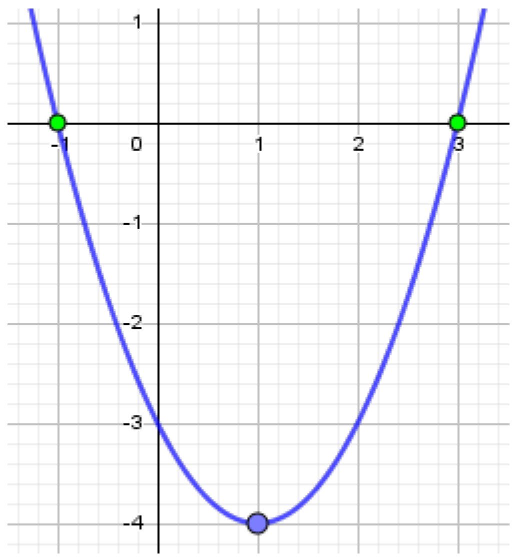
Produktform

$\mathbf{y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$

x_1 und x_2 sind ***Nullstellen*** der Funktion und Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse

$\mathbf{y = (x - (-1)) \cdot (x - 3)}$

$\mathbf{y = (x + 1) \cdot (x - 3)}$



Normalform

$\mathbf{y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$

a, b und c sind ***Parameter*** der Funktion

$\mathbf{y = x^2 - 2 \cdot x - 3}$

Sonderfälle:

a = 1: **Normalparabel**

a > 0: nach oben geöffnet

a < 0: nach untern geöffnet

Scheitelform

$\mathbf{y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s}$

Punkt $S(x_s|y_s)$ ist ***Scheitel*** der Parabel

$\mathbf{y = (x - 1)^2 - 4}$ **mit S(1|-4)**

Definition:

Die Graphen quadratischer Funktionen sind Parabeln.

Tabelle: symmetrisch vom Scheitel aus entwickelt für **a = 1; k aus N**

x_s +/- k	…	- 3	- 2	- 1	$\mathbf{x_s}$	+ 1	+ 2	+ 3	…	**+/- k**
$y_s + k^2$	…	+ 9	+4	+1	$\mathbf{y_s}$	+ 1	+ 4	+ 9	…	$\mathbf{+ a \cdot k^2}$

Abbildung 3.58: Allgemeine und konkrete Formen bei quadratischen Funktionen (siehe gelbe Markierungen)

Für die primäre Begriffsbildung sind die oben genannten Variablen nicht wesentlich. Dafür sind ausreichend viele Beispiele und Variationen zuständig. Aber abschließend wird ihre übergeordnete Funktion als *Variablen einer Form* bedeutsam (deshalb werden sie auch *Formvariablen* genannt). In der Fachsprache ist der Name *Funktionsparameter* üblich.[269] Die zugehörigen mentalen Handlungen, die gegenseitige Zuweisung der Parameter zu den konkreten Werten, wird auch *Koeffizientenvergleich* genannt. Wenn diese Verknüpfung erworben und verstanden ist, sind diese allgemeinen Formen wertvolle und mental entlastende Werkzeuge des Modellierens. Sie ermöglichen es, zu gegebenen Informationen Funktionen aufzustellen, ohne zu rechnen, stellen ihrerseits aber auch Formen dar, über die man zu Gleichungen kommt, aus denen sich die Parameter rechnerisch bestimmen lassen.[270]

3.6.2 Lokale und globale Aspekte bei qualitativen Funktionsdarstellungen

In Abbildung 3.59 sind Variablen im Zusammenhang mit einer allgemeinen (qualitativen) grafischen Darstellung einer Funktion ohne Bindung an einen Term verwendet. Es wird deutlich, dass es für Lernende nicht einfach ist, die jeweiligen Bedeutungen der Zeichen zu erkennen und syntaktisch gleiche Symbole zu unterscheiden. Zum Beispiel steht die blau gekennzeichnete Variable x für eine beliebig, aber ***lokal*** ausgewählte Stelle ***x*** (*eine beliebig, aber fest gewählte Zahl auf der x-Achse*), deren Funktionswert f(x) als blaue Strecke einen zugehörigen Punkt des Graphen von f bestimmt.

Die Variablen x und y bezeichnen einerseits die Koordinatenachsen, stehen aber auch *global* für Zahlen, welche über f(x) Funktionswerte erhalten und deshalb auch *unabhängige* bzw. *abhängige* Variable x bzw. y genannt werden.

Die Form y = f(x) bezeichnet eine Funktionsgleichung mit einem allgemeinen Term f(x). Die Bezeichnung f(x) an der y-Achse zeigt, dass die Funktionswerte als y-Werte im Koordinatensystem gedeutet werden. Für sich allein steht f auch noch als Bezeichner der Funktion.

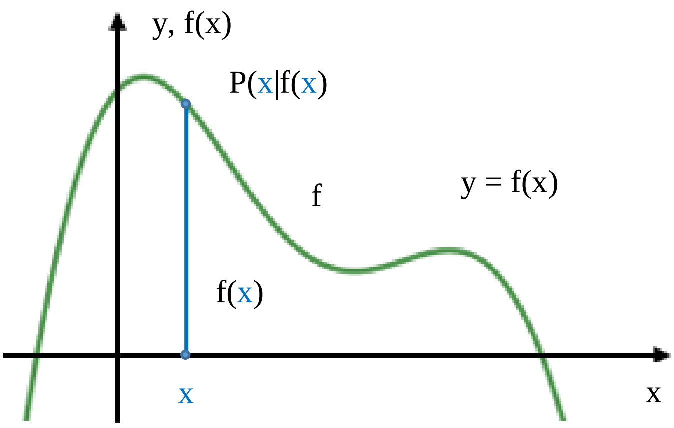


Abbildung 3.59: Variablen bei qualitativen Funktionsdarstellungen

[269] Die Bezeichnung *Parameter* betont zusätzlich den dynamischen Aspekt einer Variablen.

[270] Mit dem Wissen des fachdidaktisch geschulten Pädagogen, dass es heute Computersoftware gibt, welche in solchen Fällen eine hervorragende begriffsbildende Funktion erfüllen, sollte es selbstverständlich sein, solche Möglichkeiten schon ab frühen Klassenstufen zu nutzen.

3.6.3 Der Funktionsbaukasten und die Algebra der Terme

Die bisherigen Ausführungen zeigen, wie vielseitig der Anwendungsbereich für Variablen in der Algebra ist. Entsprechend vielseitig ist die Verwendung von Termen bei mathematischen Funktionen. In diesem Abschnitt wird zunächst nur der fachinhaltliche Aspekt angesprochen. Die Verknüpfung mit Anwendungen wird im Abschnitt 3.7 einbezogen. Der Funktionsbegriff der Schulmathematik hat sich in der eigenen gymnasialen Schulzeit und in der Zeit des pädagogischen Wirkens des Autors als Fachlehrer und Ausbilder von Mathematiklehrenden in den Jahren 1960 bis heute immer mehr auf frühere Altersstufen ausgewirkt. Die Gleichungen der Algebra wurden damals als Aussageformen behandelt, die statisch-algorithmisch gelöst wurden. Heute werden Terme in der Regel funktional dynamisch interpretiert. Dies kann aus mehreren Gründen vorteilhaft sein:

- Bei einer Unterstützung des Unterrichts mit dynamischen Darstellungsmöglichkeiten erhalten Lernende ein Verständnis für unterschiedliche Repräsentationen eines Terms als Schaubild, Tabelle und Funktionszuordnung, die ein rein algebraisches Verständnis assoziativ erweitert. Zum Beispiel können Terme wie a · b oder a^b dynamisch interpretiert werden, indem die Variable a bzw. b durch die Variable x ersetzt wird.
- Funktionen im Sinne von Zuordnungen werden als eigenständige Objekte erfahrbar, die selbst miteinander verknüpft werden können. Sie stellen gegenüber einer Term-Algebra der Gleichungen eine Objektmenge von Funktionen mit eigenen Operationen dar.
- Algebraische Gleichungen und Termumformungen können mit Fragestellungen an Funktionen verknüpft werden, die ihre Bedeutung hervorheben und Löseverfahren für Gleichungen eine weitere Sinnhaftigkeit geben.

Funktionen erhalten eigene Bezeichner, die entweder an ihre Bedeutung in der Alltagwelt erinnern (im Sinne einer Modellierung) oder indem entsprechend einer standardisierten Notation die Buchstaben f, g, h usw. verwendet werden. Der Funktionsbezeichner hat eine doppelte Bedeutung als allgemeines Objekt und als Variable, die in Verbindung mit einem Term eine konkrete Funktion generiert.

Zum Beispiel wird der Term „x + 3" zu einer Funktion f, deren Zuordnung f(x) = x + 3 geschrieben wird (lies: „die Funktion f mit der Gleichung f von x ist gleich x plus 3"). Entsprechendes gilt für die Funktion g mit g(x) = x – 4.

Mit diesen beiden Funktionen f und g kann nun exemplarisch verdeutlicht werden, wie man Grundrechenoperationen bei Zahlen auf die Funktionsterme überträgt und diese als Operationen mit Funktionen versteht.

Für die Funktionen f und g, mit f(x) = x + 8 und g(x) = 10 – x, kann man

die Summenfunktion f+g bilden mit (f+g)(x) $\stackrel{\text{def}}{=}$ f(x) + g(x) (lies: „f plus g von x“),

die Differenzfunktion f-g bilden mit (f-g)(x) $\stackrel{\text{def}}{=}$ f(x) – g(x) (lies: „f minus g von x“),

die Produktfunktion f·g bilden mit (f·g)(x) $\stackrel{\text{def}}{=}$ f(x) ·g(x) (lies: „f mal g von x“),

die Quotientenfunktion f:g bilden mit (f:g)(x) $\stackrel{\text{def}}{=}$ f(x):g(x) (lies: „f dividiert durch g von x“).

Die mnemotechnische Namensgebung der entsprechenden Funktionen betont die Rechenoperation, die auf die zugehörigen Funktionsterme angewendet wird. Für ein konkretes Beispiel wurden in Abbildung 3.60 die vier Verknüpfungen f+g, f-g, f·g und f/g zu zwei gegebenen Funktionen f und g mit f(x) = x und g(x) = 4 – x grafisch dargestellt, um zu demonstrieren, wie wertvoll für die Begriffsbildung bei solchen Konstruktionen die visuelle Darstellung ist.

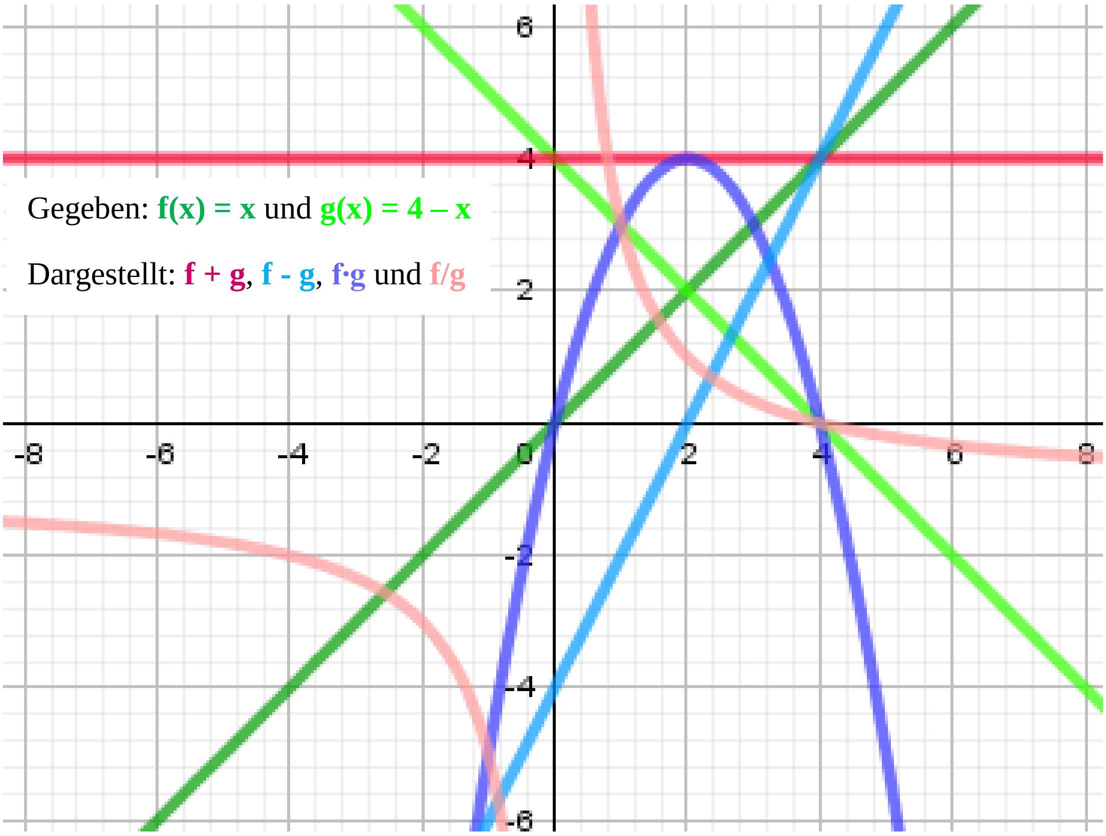


Abbildung 3.60: Darstellung von Funktionen und Verknüpfungen mit GeoGebra

Über ikonische Darstellungen können algebraische Argumentationen sinnstiftend assoziiert werden: „Wie kann man am Funktionsterm erkennen, an welcher Stelle der Graph einer Funktion die x-Achse schneidet?“ „In welchem Punkt schneiden sich die Graphen zweier Funktionen?“ Den Lernenden kann hierbei eindrucksvoll vermittelt werden, dass Rechnen und algebraisches Beschreiben insbesondere dann hilfreich sind, wenn visuell-numerisch Gesehenes exaktifiziert werden soll.

Die neue Art des Konstruierens von Funktionen aus bekannten Funktionen ermöglicht eine systematische Vorgehensweise, um aus einfachen Funktionen komplexere Funktionen zu generieren. In Analogie zum Baukasten der Würfel in Klasse 1 bis 5 kann man hier von einem **Funktionsbaukasten** sprechen. Aber umgekehrt kann eine komplexere Funktion auch als eine aus einfacheren Funktionen zusammengesetzte gesehen werden.

Unter der Voraussetzung, dass das Rechnen mit Zahlen und Termen gefestigt ist, ist das Konstruktionsprinzip elementar und analog zur Bauweise von Zahl- und Variablentermen vermittelbar. Zugehörige Visualisierungsprogramme sollten im Unterricht früh eingesetzt werden, weil Lernende bei der Ausbildung des funktionalen Denkens und bei Darstellungswechseln begriffsbildend besser unterstützt werden, wenn sie von Anfang an mathematische Darstellungs-Software verwenden können und die Techniken des Eingebens bei einer Applikation gewohnt sind. Im Sinne einer Erziehung zu eigenverantwortlichem Lernen muss jedoch ein lernendes Individuum selbst entscheiden können, in welchen Situationen er diese Unterstützung verwenden möchte – und die Lehrperson kann im Prozess des Lernens erkennen, ab wann sie nicht mehr benötigt wird, und daraus schließen, dass die kognitiv entwickelte begriffliche Vorstellungskraft des Lernenden der äußeren Unterstützung nicht mehr bedarf.

Im Unterricht zeigt sich dieses Vermögen zum Beispiel darin, dass Schülerinnen und Schüler einer Klasse 7 als Schaubild zu einem linearen Term ohne zu zögern ein Gerade skizzieren und entsprechend in Klasse 8 zum Schaubild einer Parabel den zugehörigen Funktionsterm angeben und in beiden Fällen auch die umgekehrten Transformationen beherrschen. [271]

Ein didaktisches Argument für die Betonung funktionaler Sichtweisen ist die Einbindung algebraischer Tätigkeiten in ein übergeordnetes Modellierungskonzept. Die Algebra entwickelt sich im Einklang zu den Funktionstypen und verliert für die Lernenden den Charakter eines fachlich isolierten Konzeptes: Algebra erweist sich als nützlich. Ein ästhetisch verfasster Mathematikunterricht isoliert nicht die mathematischen Vokabeln und Satzglieder, er vermittelt sie über die sprachliche Kommunikation. Fragen an Funktionen führen zu Gleichungen und Termen und Probleme des Alltags werden mit Funktionen modelliert. Dabei entsteht ein bewusst wahrnehmbarer Zugewinn an Handlungsfähigkeit, aber vor allem eine Gelegenheit, Wissen vielseitiger und damit vernetzter zu verorten und zu behalten.

[271] Der Autor erinnert sich: In den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts haben seine Schülerinnen und Schüler der Klasse 9 ihr erstes Schaubild einer Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ ohne Taschenrechner über eine ganzzahlige Wertetabelle erschlossen, die zugeordneten Punkte in ein Koordinatensystem übertragen und sie mit einem Streckenzug verbunden. Solche Fehlvorstellungen hat er im „Zeitalter des grafikfähigen Taschenrechners in der Sekundarstufe I“ nicht mehr erlebt.

3.6.4 Modellierung dynamischer Vorgänge – neue Aspekte von Funktionen

„Functions modelling change“ [272] ist der Titel eines amerikanischen Highscool-Lehrbuches über *Funktionen mit einer Variablen x,* welche auch als mathematische Modelle realer Prozesse aufgefasst werden. Das Buch entwickelt den Stoff in Bezug zu praktischen Anwendungen, ohne den Blick auf den mathematischen Wissensaufbau zu verlieren. Dabei entwickelt sich der Funktionsbaukasten als ein Modellierungswerkzeug und nicht wegen seiner Fachlichkeit als solcher. Die Symbole f, g, h usw. erhalten Bedeutungen in der grünen Welt. Mit einer Sicht auf reale Vorgänge erhalten Funktionen und Variablen weitere Bedeutungen.

3.6.4.1 Dynamische Interpretation algebraischer Terme

Am Beispiel der zunächst algebraisch-statisch interpretierten Termstruktur a^b, welche nach Abbildung 3.56 interpretiert wird, kann exemplarisch der Übergang zu einer funktionalen Sichtweise vorgenommen werden. Dabei entstehen Funktionen, indem entweder die Variable a oder b dynamisch interpretiert wird und entsprechende Funktionsterme x^b bzw. a^x generiert werden. Entsprechend des Termverständnisses in Klasse 8 oder 9 werden zunächst nur rationale Zahlen betrachtet. Damit sind die Werte der beiden Terme inhaltlich interpretierbar [273] und mit einem Taschenrechner numerisch näherungsweise zu bestimmen oder in einfachen Fällen exakt anzugeben.

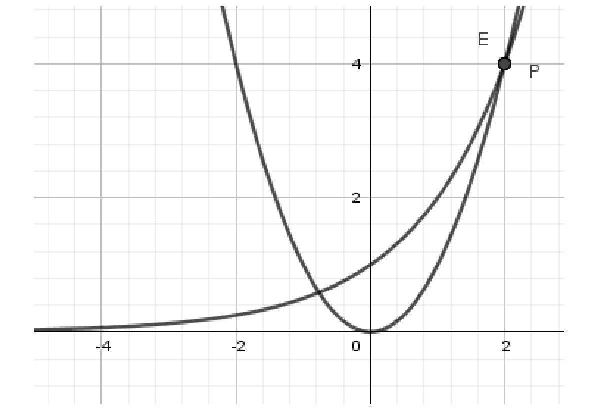
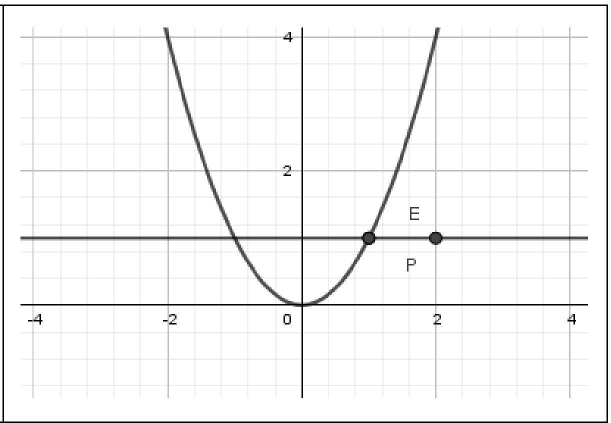
Die Darstellung der zugehörigen Schaubilder übernimmt eine grafikfähige Computersoftware, da Schülerinnen und Schüler dieser Altersstufe keine Erfahrungen mit der dynamischen Interpretation vorab statisch gesehener Variablen haben. Nachfolgend sind in Abbildung 3.61 einige Beispiele mit GeoGebra erstellt. Eine derartige Entwicklung der Begrifflichkeiten zu Potenz- und Exponentialfunktionen ist ohne Darstellungssoftware und experimentell gestaltete Lernprozesse in der Eigenverantwortung der Lernenden nicht zielführend.

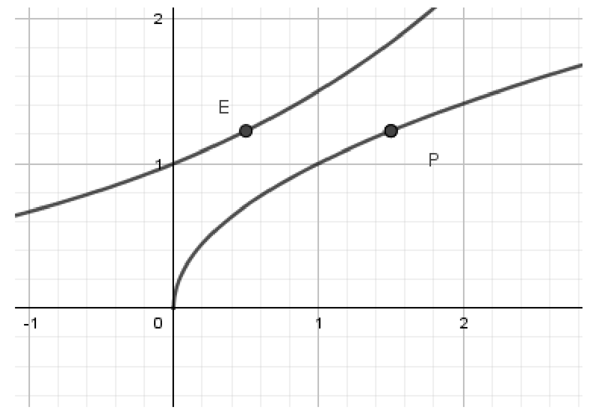
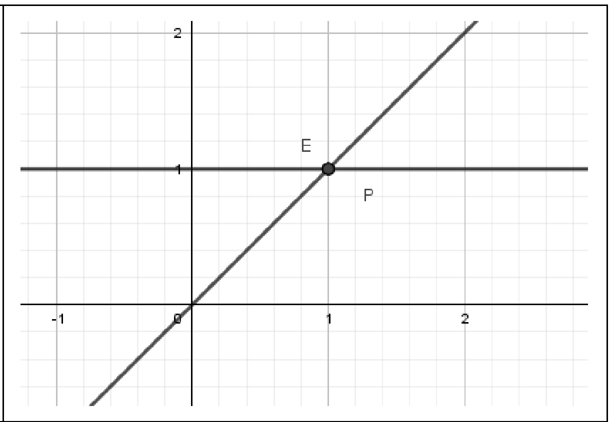
Dabei treten Probleme der Interpretation von Termen auf, die nicht mit rationalen Zahlen darstellbar sind. Hierzu sollte im Unterricht eine geeignete Begriffsbildung der irrationalen Zahlen und ihrer Zusammenführung mit den rationalen zu den reellen Zahlen erfolgen.

Ein Beispiel für eine altersgemäße unterrichtliche Behandlung irrationaler Zahlen in Klasse 8 oder 9 wird in Abschnitt 4.11 gegeben. [274]

---

[272] Vgl. Connally, et al., 2015.
[273] Vgl. Abbildung 3.56. Das Verständnis für die unterschiedlichen Interpretationen der Terme a^b muss für die funktionale Sicht erinnerbar sein. In einfachen Fällen ist auch schon eine dynamische Sicht entwickelt.
[274] Vgl. Abbildung 4.11-5.

	
a = 2; b = 2 liefert $y_e = x^2$; $y_p = 2^x$	a = 1; b = 2 liefert $y_e = x^2$; $y_p = 1^x$;

	
a = 1,5; b = 0,5 liefert $y_p = x^{0,5}$; $y_e = 1{,}5^x$	a = 1; b = 1 liefert $y_p = x^1$; $y_e = 1^x$

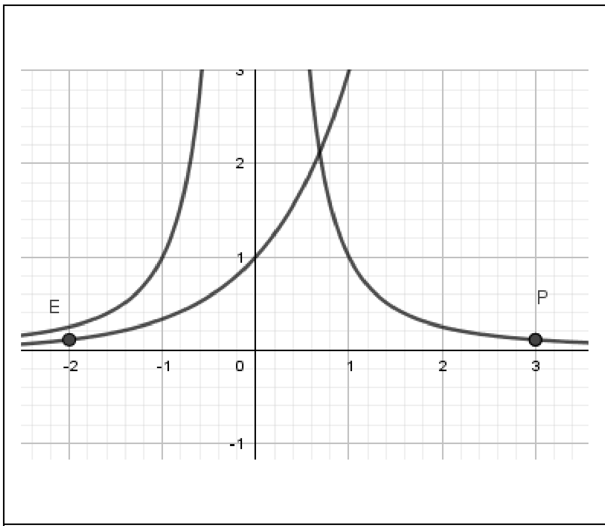
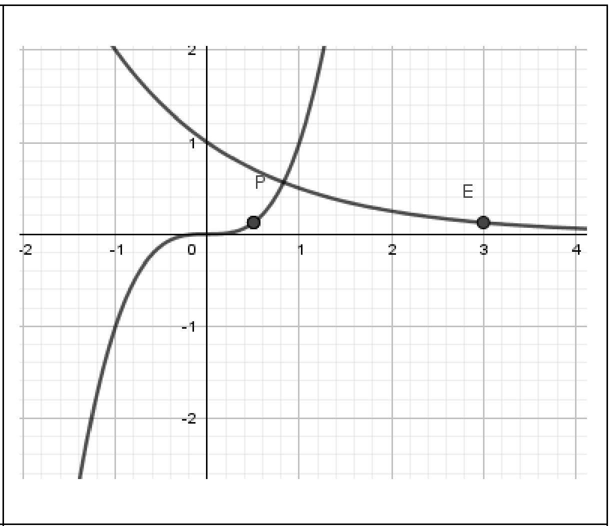
	
a = 3; b = -2 liefert $y_p = x^{-2}$; $y_e = 3^x$	a = 0,5; b = 3 liefert $y_p = x^3$; $y_e = 0{,}5^x$

Abbildung 3.61: Schaubilder von Funktionen mit Gleichungen der Form $y = x^b$ bzw. $y = a^x$

Die korrespondierenden Funktionsklassen werden entsprechend der Verwendung der unabhängigen Variablen x als Basis bzw. Exponent *Potenz*- bzw. *Exponentialfunktionen* genannt.

3.6.4.2 Das Umkehr-Prinzip bei Funktionen

„Logarithmus“ und „Exponential-Funktionen oder -Gleichungen“ gelten bei vielen Schülerinnen und Schülern (und auch bei ihren Eltern) als „rotes Tuch“, vor dem man „besser flieht als dass man angreift“. Wenn Lernende daran gewohnt wären, bei allen Folgerungen und Konstruktionen prinzipiell die Problematik des Umkehrens hinzuzuziehen, könnten zumindest darüber Brücken geschlagen werden. In einer knappen Darstellung wird der inhaltliche Bezug in diesen beiden Fällen über entsprechende algebraische Beziehungen hergestellt.

1. Die Funktionsgleichung einer allgemeinen *Potenzfunktion* hat die Form $y = x^p$, wobei p eine beliebige fest gewählte rationale Zahl ist. [275]

Beim Umkehren soll zu einem y-Wert der x-Wert bestimmt werden. Das ist das Problem, die oben geschriebene Gleichung nach x aufzulösen. Dies gelingt mit den Regeln über das Rechnen mit Potenzen [276] ganzheitlich, indem wir beide Seiten der Gleichung mit dem Kehrwert $\frac{1}{p}$ von p potenzieren. Das liefert die Gleichung $y^{\frac{1}{p}} = (x^p)^{\frac{1}{p}}$, welche äquivalent ist zu $x = y^{\frac{1}{p}}$.

Ein Übergang zur funktionalen Sicht, bei der die abhängige Variable mit y und die unabhängige mit x bezeichnet wird, ergibt:

Die Funktion f mit $f(x) = x^p$ hat die Umkehrfunktion g mit $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$. [277]

2. Die Funktionsgleichung einer *Exponentialfunktion* hat die Form $y = a^x$ wobei a eine rationale Zahl ist. Beim Umkehren muss zu einem y-Wert der x-Wert bestimmt werden. Das ist das Problem, die oben geschriebene Gleichung nach x aufzulösen. Diese Auflösung gelingt in diesem Fall jedoch nicht geschlossen wie im Fall der Potenzfunktionen. Andererseits wissen wir jedoch, dass entsprechend der Beispiele in Abbildung 3.61 ein Punkt $E(x\,|\,a^x)$ für einen geeigneten Wert p mit dem Punkt $P(x\,|\,x^p)$ übereinstimmt. Die zu y gehörende Stelle x kann also mit Hilfe von Potenzfunktionen „stellenweise“ und für jeden gewählten Wert von x gesondert berechnet werden. In solchen Fällen erfinden die Mathematiker für die dadurch festgelegte Umkehrfunktion einen neuen Namen: Wenn $y = a^x$ ist, ist $x = \log_a (y)$ (lies: „x ist gleich Logarithmus von y zur Basis a“). Ein Übergang zur funktionalen Sicht, bei der die abhängige Variable mit y und die unabhängige mit x bezeichnet wird, ergibt:

---

[275] Ab hier wird davon ausgegangen, dass im Unterricht die Problematik der Rationalität bzw. Irrationalität von Termwerten behandelt ist. Die unabhängige Variable x und der zugeordnete Funktionswert y = f(x) sind (wenn nicht speziell eingeschränkt) als reelle Zahlen anzusehen.

[276] Vgl. Abbildung 3.56. Es wird angenommen, dass solche Umformungen verstanden und geübt sind.

[277] Die Umkehrung wurde hier nur formal durchgeführt. Inhaltliche Überlegungen erfordern noch Anpassungen der Definitionsbereiche.

Die Funktion f mit $f(x) = a^x$ hat die Umkehrfunktion g mit $g(x) = \log_a(x)$. [278]

Auf eine grafische Darstellung des Umkehrens von Funktionen und ein Erinnern an den Begriff *Umkehrfunktion* wurde hier verzichtet. Im Unterricht sollten diese Bezüge selbstverständlich hergestellt werden. Die Inhalte dieses Abschnitts sind nach der Meinung und den unterrichtlichen Erfahrungen des Autors ohne visuelle Unterstützung nicht zufriedenstellend vermittelbar.

3.6.4.3 Beschreibungsformen dynamischer Vorgänge

Eine funktionale Modellierung verwendet mehrere Aspekte, die jeweils passende Ausprägungen und fließende Übergänge haben können. Dazu gehören zum Beispiel ein qualitatives oder quantitatives Beschreiben bzw. eine diskrete oder kontinuierliche oder diskretisierte Betrachtung eines dynamisch verlaufenden Vorgangs.

Diskrete oder diskretisierte Beschreibung

Im Zusammenhang mit diskreten Vorgängen kann der Vorteil einer funktionalen Darstellung am Beispiel einer Zahlenfolge gezeigt werden:

Zum Beispiel wird die *Folge der Vielfachen von 3* anfangs sequentiell geschrieben: 3, 6, 9, 12, 15, …

Mit der funktionalen Darstellung $a(n) = 3 \cdot n$, mit n = 1, 2, 3, 4, 5, … ist es möglich, das Bildungsprinzip als proportionale Zuordnung darzustellen. [279] Die kürzeste und mathematisch prägnanteste Darstellung dieser Folge verwendet das Zeichen N für die Menge der natürlichen Zahlen: $a(n) = 3 \cdot n$, mit n aus N. [280]

Darstellungsprinzip diskreter Bestandsentwicklungen

Abbildung 3.62 zeigt eine Beschreibungsform für zeitlich verlaufende Vorgänge, bei denen die Diskretisierung in gleichen Zeitschritten Δt erfolgt. In solchen Fällen kann der Vorgang mathematisch mit Hilfe von Zahlenfolgen modelliert werden.

[278] vgl. Fußnote 277. Es wird deutlich, dass die an sich gleiche Idee des Umkehrens in unterschiedlichen Situationen zu sehr unterschiedlichen Lösungswegen führen kann. Die Assoziation beider Situationen mit der statischen Potenzschreibweise (Abb. 3.56) spricht dafür, die Umkehrungen der Potenz- und Exponentialfunktionen möglichst parallel und in Kombination mit den Regeln über das Rechnen mit Potenzen zu verknüpfen.

[279] Z. B. muss bei der Darstellung 3, 6, 9, … die allgemeine Eigenschaft der Folge aus der syntaktischen Darstellung *rekonstruiert* werden, während in der Form $3 \cdot n$ der Proportionalitätsfaktor 3 und das multiplikative Konstruktionsprinzip direkt ersichtlich ist.

[280] Andererseits verdeutlicht diese Ausführung auch, dass für Lernende die kontext-sensitive Bedeutung von „…“ situativ unterschiedlich interpretiert werden muss.

Beginnend mit einem Zeitpunkt t_0 werden jeweils gleiche Zeitschritte Δt vereinbart. Die Änderung einer Größe B (der Bestand) bezogen auf einen Zeitschritt Δt wird geschrieben in der Form:

$$\mathbf{B_{neu} = B_{alt} + \text{Änderung}(\Delta t)}$$

Werden, beginnend mit dem Anfangsbestand B(0), die Bestände B(t) zu den aufeinanderfolgenden gleichlangen Zeitschritten Δt fortlaufend nummeriert, erhält man eine Zahlenfolge B(0), B(1), B(2), B(3), ... der Bestände.

Die Form $B_{neu} = B_{alt}$ + Änderung(Δt) kann dann geschrieben werden als:

B(n + 1) = B(n) + Änderung (im Zeitschritt n+1) ; n = 0, 1, 2, ...

Der Quotient $\frac{B(n+1) - B(n)}{\Delta t}$ (die relative Änderung) heißt **Änderungsrate** im Zeitschritt von n auf n+1. Zwischen der absoluten Änderung pro Zeitschritt und der Änderungsrate gilt der Zusammenhang: **Absolute Änderung = Änderungsrate · Δt**

Speziell für $\Delta t = 1$ sind die ***Maßzahlen*** von absoluter und relativer Änderungsrate pro Zeitschritt gleich.

Abbildung 3.62: Modellierung diskreter Wachstumsformen als Zahlenfolgen

Mit diesem Modellierungswerkzeug können spezielle dynamische Formen als diskrete Wachstumsformen herausgestellt werden, indem die charakteristischen Bildungsgesetze in impliziter oder rekursiver Form angegeben werden und eine Bezeichnung gewählt wird, die der inhaltlichen Interpretation entspricht. Die allgemeine Verwendung der Bezeichnung B ist eine Abkürzung für das Wort „Bestand“. „B“ kann als Bedeutungsvariable aufgefasst werden, die je nach realem Vorgang durch einen sachangemessenen Bezeichner ersetzt wird. Zum Beispiel durch A oder u, wenn es um eine Fläche oder um den Umfang einer geometrischen Figur geht.

Die folgende Übersicht in Abbildung 3.63 stellt exemplarisch die diskreten Wachstumsformen des linearen und des exponentiellen Wachstums im Zusammenhang mit den Lernenden bekannten kontinuierlichen Formen dar.

Beschreibung	Darstellung		
	rekursiv	**explizit**	
	diskret		**kontinuierlich**
Lineares Wachstum Lineare Funktionen	$B(0) = B_0$ $B(n+1) – B(n) = k$; $n = 0, 1, 2 \ldots$	$B(n) = B_0 + n \cdot k$ $n = 0, 1, 2 \ldots$	$f(x) = m \cdot x + c$ $m = k$; $c = B(0)$
Exponentielles Wachstum Exponential-funktionen	$B(0) = B_0$ $B(n+1) – B(n) = k \cdot B(n)$; k ist der Proportionali-tätsfaktor	$B(n) = B_0 \cdot (1+k)^n$ $n = 0, 1, 2 \ldots$ k ist die Wachstums-konstante pro Zeitschritt	$f(x) = a \cdot b^x$ $f(0) = a = B_0$; $b = 1 + k$
Quadratisches und kubisches Wachstum, Potenzfunktionen		Tabellarische Darstellungen	$f(x) = a \cdot x^2$ $f(x) = a \cdot x^3$ … $f(x) = a \cdot x^k$ $k = 1, 2, 3 \ldots$

Abbildung 3.63: Diskrete rekursive oder explizite und kontinuierliche Beschreibung von Wachstumsformen in Klasse 9

Wenn bei der unterrichtlichen Behandlung diskreter Wachstumsformen computerunterstützte Darstellungssoftware verwendet wird, ist es möglich, die Diskretisierung zu verfeinern und vergleichend darzustellen. Hierbei muss die Begrifflichkeit der mittleren Änderungsrate nicht nur problemangemessen, sondern auch mathematisch differenzierter betrachtet werden. Die Anzahl der Stellen nimmt zu, die Änderungsraten beziehen sich auf immer kleiner werdende Schrittweiten. In diesen beiden Ausprägungen stellen diskrete Wachstumsformen eine begriffsbildend sinnvolle Zwischenstufe zum Übergang einer Analysis der stetig differenzierbaren Funktionen ab der Klassenstufe 10 her. Sie bilden Grundlagen aus, die das Verständnis von lokalen Grenzwerten von Differenzenquotienten und für das Prinzip des Integrierens unterstützen.

3.6.4.4 Modellierung kontinuierlich verlaufender Vorgänge

Funktionen mit einer Veränderlichen x sind das Standardwerkzeug zur Modellierung realer Vorgänge, bei denen sich eine Bestandsgröße B in Abhängigkeit von einer anderen Größe ändert. Häufig ist diese Variable die Zeit t, aber sie kann auch bei technischen Prozessen oder wirtschaftlichen Modellierungen zum Beispiel die Stückzahl einer Produktionseinheit oder bei mathematischen Vorgängen der Radius eines Kreises oder einer Kugel sein. Auch die Formeln der Geometrie können damit dynamisch interpretiert als Funktionen aufgefasst werden. Zum Beispiel erhält die Flächeninhaltsformel für den Kreis $A = \pi \cdot r^2$ einen funktionalen Charakter, wenn die Variable r dynamisch aufgefasst wird, was sich in der Schreibweise $A(r) = \pi \cdot r^2$ zeigt. Wenn es unterrichtlich gelingt, den mathematischen Funktionsbaukasten (mit den Funktionen in der Form f, g, h usw. und den entsprechenden Konstruktionsprinzipien) als passendes

Werkzeug für die Modellierung realer oder mathematischer dynamischer Prozesse zu vermitteln, kann die Bereitschaft der Lernenden erhöht werden, diesem Werkzeug eine außermathematisch sinnstiftende Bedeutung zuzumessen und es zu akzeptieren. Der fachliche Aufbau dieses Funktionskonzeptes (und seine nicht ausschließlich mathematische Bedeutung) muss sich dann jedoch über alle Schuljahre erstrecken. Dabei kann das Prinzip der auftragsgesteuerten Prozessführung bewirken, dass die Lernenden in einem Lernprozess daran beteiligt werden, über einen Problemlöseprozess (z. B. eine Lernaufgabe, vgl. Abschnitt 3.2.8) eine Erweiterung des mathematischen Werkzeugkastens bei der Anwendung als nützlich zu erkennen und darüber die Bereitschaft entwickeln, mathematische Konzepte zu erweitern. Dabei muss darauf geachtet werden, dass trotz der gesuchten Balance zwischen Anwendung und fachlicher Entwicklung die exemplarisch gewählte anwendungsbezogene Problemstellung nicht zum hauptsächlichen Bedeutungsträger erklärt und das Fachliche verdeckt wird. [281]

Begriffsbildungen Ableitung und Integral

Ab der Klassenstufe 10 wird der Funktionsbaukasten erweitert um das Ableiten und Integrieren von Funktionen als mathematische Modelle der lokalen oder momentanen Änderungsrate bei realen Prozessen und deren Umkehrung. Die Übersichten in Abbildung 3.64 und 3.65 zeigen inhaltliche Vernetzungen mit dem in Klasse 5 bis 10 erworbenen Fachwissen und empfehlen eine inhaltliche Schrittfolge für einen ästhetisch geführten Lernprozess zur Integration von neuem Wissen in den **Mathematik-Werkzeugkasten**.

Algebraisch-funktionales Vorwissen zur Begriffsbildung „Ableitung“ und „Integral“	
Klassen-stufe(n) **5 - 7**	**Dreisatz und Proportionalität**: Wenn die absolute Änderung der veränderlichen Größe bezogen auf die Einheit der unabhängigen Größe bekannt ist, kann jede Vielfachheit bestimmt werden. Der Dreisatz wird zum Generator für Proportionalität.
7	**Lineare Zuordnungen** besitzen eine relative Proportionalität: Die Änderungsrate ist eine konstante Größe, die sich als Ähnlichkeitsfaktor der Verhältnisse von Steigungsdreiecken zeigt. Geraden erhalten lineare Zuordnungsgleichungen im Koordinatensystem.
8	**Quadratische Funktionen** sind elementarste nichtlineare Funktionen mit unterschiedlichen allgemeinen Klassifizierungsformen (vgl. Abb. 3.38).
9	**Diskrete und kontinuierliche Wachstumsformen**: Mittlere Änderungsraten pro Zeitschritt liefern eine einheitliche Beschreibung von Wachstumstypen: linear, quadratisch, exponentiell ... (vgl. Abb. 3.62 f).

[281] Vgl. Leuders, 2001, S. 100 ff. Erwähnt werden sollte in diesem Zusammenhang auch, dass das nachträgliche Üben sich nicht allein auf das fachlich Neue, sondern auch auf die erweiterte Modellierungsfähigkeit der Lernenden beziehen muss, um als bedeutsam erkannt zu werden, und dass dieses Angebot nicht nur für die „guten“ Schülerinnen und Schüler deutlich werden sollte.

10 – 12	**Modellierung von Bestandsfunktionen (B) mit kontinuierlichen Funktionsanpassungen (f)**: Diskret gemessene Daten werden mit reellen Funktionen kontinuierlich modelliert. Eine numerische und algebraische Verfeinerung (Grenzwert) führt auf **lokale bzw. momentane Änderungsraten** bzw. eine punktweise definierte **Ableitungsfunktion**. Das **Integral** dient der Rekonstruktion einer nicht bekannten Funktion (modellierte Bestandsfunktion) über die gegebene Ableitungsfunktion.

Abbildung 3.64: Fachliches Vorwissen zur Differential- und Integralrechnung und deren Vernetzung

Von der lokalen Änderungsrate zur globalen Änderungsratenfunktion

Abbildung 3.65 verwendet die Variablen B und t auf der Anwendungsseite und die Variablen f und x für die mathematische Modellierung.

Begriffsbildung „Ableitung" – lokal diskretisiert oder global kontinuierlich	
Konkrete Anwendung	**Mathematische Modellierung**
Bestand B (Größe): Zuordnung t $\rightarrow$ B(t) Diskrete Daten (in der Regel Messungen in Form einer Tabelle), die grafisch als Punktdiagramm darstellbar sind	**Reelle Funktion f: x $\rightarrow$ f(x)** Kontinuierliches Modellieren der Daten mit Hilfe einer Funktion f, deren Funktionsgleichung (problemangepasst) bestimmt wird
Mittlere **Änderungsraten** von B modellieren mit **Differenzenquotienten** von f	
Mittlere Änderungsraten von B in Intervallen $[t_1, t_2]$ **bestimmen**: $\frac{B(t_2)-B(t_1)}{t_2-t_1}$ oder $\frac{B(t+h)-B(t)}{h}$	**Differenzenquotienten** von f in beliebigen Intervallen [x, x + h] **berechnen**: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ oder $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = Df_h(x)$
Alternative 1: Ableitung als **lokaler Grenzwert** von Differenzenquotienten	
Die Funktion $Df_h(x)$ *lokal* interpretieren als angenäherte momentane Änderungsrate des Bestandes B(t) an der Stelle t alias x	Numerisches Annähern des lokalen Grenzwerts des Differenzenquotienten für h gegen null ($h \rightarrow 0$) $Df_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (|h| ist klein!) deuten als **Näherungswert** der Ableitung von f an der Stelle x
Alternative 2: Ableitung als **globaler Grenzwert** von Differenzenquotientenfunktionen	
Die Funktion $Df_h(x)$ *global* interpretieren als angenäherte momentane Änderungsratenfunktion des Bestandes B(t) in *Abhängigkeit von t alias x*	Bilden einer globalen Differenzenquotientenfunktion aufgefasst als **Näherungsfunktion** der Ableitung f '(x) von f in einem Intervall
Weiterführung: Lokale (momentane Änderungsraten) für B(t) werden zunächst näherungsweise berechnet mit $df_h(x)$. Dazu werden algebraische Verfahren zur Bestimmung von Ableitungen unter Verwendung von Grenzwerten entwickelt. **Ziel**: Es werden Ableitungskonzepte für den Mathematik-Werkzeugkasten entwickelt, in der **grünen Welt der Anwendungen** genutzt und in der **blauen Welt** der Mathematik erweitert.	

Abbildung 3.65: Ableitungskonzept für reelle Funktionen einer Veränderlichen als Modellierungswerkzeug für Anwendungen

Die fachliche Hinführung zur Ableitung f‘ einer Funktion f verwendet entsprechend eines klassischen Weges einen lokalen Grenzwertübergang des Differenzenquotienten etwa in der Form $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für h gegen null (vgl. Abb. 3.65, Alternative 1). Alternativ dazu kann bei der Verwendung eines Visualisierungsprogramms für Funktionen eine funktional-ganzheitlich und kontinuierlich visualisierte Begriffsbildung der Ableitung als Grenzwertfunktion von Differenzenquotienten-Funktionen vorgenommen werden (vgl. Abb. 3.65, Alternative 2). [282]

Dies sollte unterrichtlich flexibel behandelt werden, da bei praktischen und mathematischen Anwendungen sehr oft tradierte Variablenbezeichner verwendet werden, die semantisch konnotiert sind. Die Tabelle in Abbildung 3.66 gibt einen exemplarisch gewählten Einblick in diese Thematik. Außer bei einigen geometrischen Formen ist nur eine qualitative Beschreibung angegeben.

Anwendungsbezogene Verwendung von Variablen in unterschiedlichen Kontexten				
Kontextsensitive Variablenbezeichner und Interpretation der Ableitung				
x	f	Interpretation		
Zeit	Weg	t, s(t)	Momentan-geschwindigkeit.	v(t)
Zeit	Geschwindig-keit	t, v(t)	Beschleunigung	a(t)
Zeit	Energie	t, E(t)	Leistung	L(t)
Zeit	Elektrische Ladung	t, Q	Elektrische Stromstärke	I(t)
Höhe	Temperatur / Luftdruck		lokales Temperatur- / Druckgefälle	
Zeit	Chemische Konzentration	t, K	Reaktionsgeschwindig-keit	R
Zeit	Quantität einer Population	t, B	Wachstums-geschwindigkeit	B‘(t)
Zeit	Anzahl infizierter Personen	I(t)	Ausbreitungsgeschwin-digkeit einer Epidemie	I‘(t)
Einkommen	Einkommen-steuer		Lokaler Steuersatz: „Steuererhebung in € für den nächsten hinzuver-dienten Euro“	
Zeit	Geldwert	t, W	Inflationsrate	W‘(t) in %
Radius	Kreisfläche	$\pi \cdot r^2$	Kreisumfang	$2\pi \cdot r$

[282] Siehe dazu auch Kirsch, 1996, S. 55-59; Blum und Kirsch, 1996, S. 60-64 und die Unterrichtsskizzen in 4.14.

Radius	Kugelvolumen	$\frac{4}{3}\pi r^3$	Kugeloberfläche	$4\pi r^2$
Höhe h	Kegelvolumen	$\frac{1}{3}\pi r^2 h;\ r = m \cdot h;$	Kreisfläche bei h	$\pi m^2 h^2 = \pi r^2$
Höhe h	Zylinder-volumen	$\pi r^2 h$	Grundfläche	πr^2
Grundkreis-radius	Zylinder-volumen	$\pi r^2 h$	Mantelfläche	$2\pi r h$

Abbildung 3.66: Interpretation der Ableitung in unterschiedlichen Kontexten (vgl. Blum u. Kirsch, 1996, S. 60)

Im Sinne der Umkehrung einer funktionalen Bedeutung, wie zum Beispiel beim Quadrieren und Wurzelziehen oder beim Exponieren und Logarithmieren, kann der Begriff des mathematischen Integrierens entwickelt werden. Das Integrieren löst das Problem, zu einer Ableitungsfunktion f ‘ einer aktuell nicht bekannten Funktion f die Veränderung der Funktionswerte von f (bezogen auf einen zusammenhängenden kontinuierlichen Wirkungsbereich der Funktion f ‘) zu rekonstruieren. Anwendungsbezogen interpretiert löst Integrieren das Problem, aus dem bekannten lokalen Änderungsverhalten in einem Bereich auf die zugehörige Entwicklung des Bestandes zu schließen. Mit einer visualisierenden Computerapplikation können sowohl das Ableiten als auch das Integrieren sehr anschaulich dargestellt werden, indem Differenzenquotienten und Integralfunktionen kontinuierlich numerisch angenähert berechnet und visualisiert dargestellt werden. [283]

3.6.4.5 Vektorielle Modellierung des Anschauungsraumes

Ein Zusammenhang zwischen der Geometrie und der Algebra wird zunächst über das kartesische Koordinatensystem hergestellt, über das Punkte Koordinaten erhalten, mit denen gerechnet werden kann. Beim Übergang zu räumlichen Betrachtungen werden Punkte durch Koordinatentripel beschrieben.

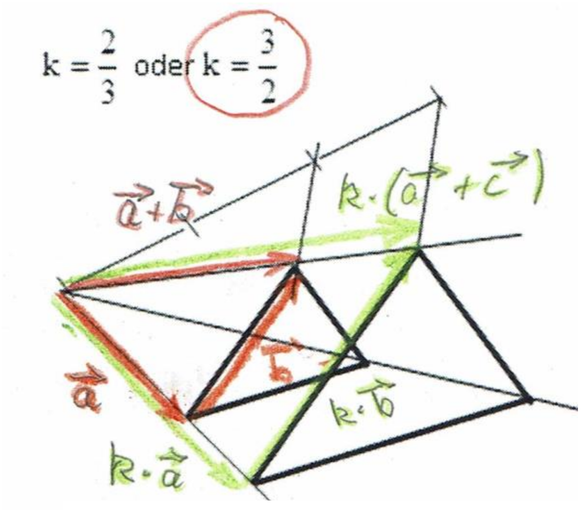


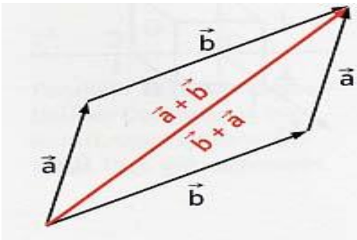
Abbildung 3.67: Das Ähnlichkeitsprinzip wird übertragen auf das Vektorkonzept im Anschauungsraum.

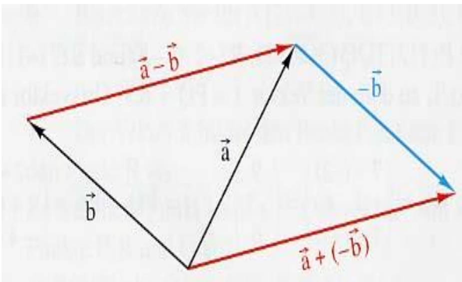
Fasst man solche Tripel vektoriell als Pfeile (gerichtete Strecken) im *Anschauungsraum*

[283] Für unterrichtliche Implementierungen vgl. Abschnitt 4.14

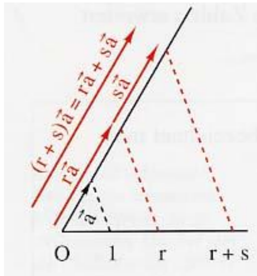
auf und interpretiert sie als *Ortsvektoren*, legen diese einen Punkt fest. Interpretiert als *Richtungsvektoren*, welche lokale Veränderungen beschreiben, können damit geometrische Objekte wie Geraden, Ebenen und Kugeln vektoriell beschrieben werden, indem Konzepte des Rechnens mit Vektoren gebildet werden. Dieses vektorielle Konzept kann sehr anschaulich aus dem bisher im Geometrieunterricht erworbenen Wissen über Kongruenz und Ähnlichkeiten entwickelt werden, indem Pfeilfiguren mit Ähnlichkeitsfiguren assoziiert werden und Verknüpfungen (also Rechenoperationen mit Vektoren) darüber definiert sind. Abbildung 3.67 ergänzt „vektoriell" die Ähnlichkeits-Figur in Abbildung 3.51 und Abbildung 3.68 gibt einen Überblick zum Rechnen mit Vektoren und zur vektoriellen Darstellung von Ebenen.

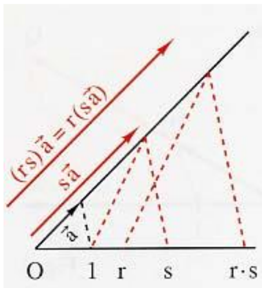
Addition und Subtraktion über das Vektorparallelogramm





Skalare Multiplikation über Ähnlichkeit bzw. Streckung





Rechengesetze

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ einer Ebene oder des Raumes und alle reelle Zahlen r, s gelten:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (**Kommutativgesetz**)

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (**Assoziativgesetz**)

$r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$ (**Assoziativgesetz**)

$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$; $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$ (**Distributivgesetze**)

Rechnen mit Vektoren ist geometrisch interpretiertes Operieren mit Pfeilen als Repräsentanten von Vektoren

Abbildung 3.68: Vektorkonzept und Rechnen mit Vektoren im Anschauungsraum

3.6.5 Aufbau, Wirksamkeit und Nachhaltigkeit der Fachlichkeit

Ein ästhetisch fundierter Mathematikunterricht entwickelt die innere Fachlichkeit über die individuelle Wahrnehmung und Wertschätzung der äußeren Anwendbarkeit des Fachlichen bei den Lernenden. Abbildung 3.69 zeigt eine Übersicht.

<table>
<tr><th colspan="5">Welt – Mensch – Sprache [284]</th></tr>
<tr><th colspan="5">Kognition</th></tr>
<tr><th colspan="2">Entdeckung</th><th>Erfindung</th><th>Logik / Denken
Heuristik</th><th>Verfahren
Operieren</th></tr>
<tr><td>Wahrnehmung
Kommunikation</td><td>Konstruktion
Destruktion</td><td>Repräsentant
Klasse</td><td>Induktion
Deduktion</td><td>Handeln
Darstellen</td></tr>
<tr><td>Natur-Welt
(Eigentlichkeit)</td><td colspan="4">Mathematik-Welt – Fachlichkeit</td></tr>
<tr><td>Prinzipien
Ganzes
Elemente
Vermessung
Gleichheit
Äquivalenz
Symmetrie
Kongruenz
Proportion
Ähnlichkeit
Beziehung
Auswahl
Variation
Ordnung
Zufall
Differenzierung
Integration
…</td><td>Geometrie
Formen
Körper
Figuren
Strecken,
Winkel
Punkte
Geraden
Abbildungen
Spiegelungen
Transfor-
mationen
Formeln
Größen
Maße
Koordinaten
Formeln
Vektoren
…</td><td>Algebra
Zahlen
Operationen
Variablen
Terme
Funktionen
Gleichungen
Mengen
Klassen
Strukturen
Grenzwerte
Wahrschein-
lichkeiten
Kombinatorik
Ableitungen
Integrale
…</td><td>Aussagen
Eigenschaften
Definitionen
Sätze
Beweise
Prinzipien
Wissensbasen
Argumente
Verallgemeinerung
Verfeinerung
Spezialisierung
Zerlegung
Zusammen-
führung
Ausschöpfung
…</td><td>Mechanisch
Algorithmen
Definitorisch
Axiome
Regeln
Inhaltlich
Messen
Berechnen
Definieren
Begründen
Variieren
Kovariieren
Annähern
Exaktifizieren
Optimieren
Differenzieren
Integrieren
…</td></tr>
<tr><th colspan="5">Wahrnehmungsprinzipien – Sichtweisen – Perspektiven – Denkweisen</th></tr>
<tr><td colspan="5">numerisch – symbolisch – ikonisch – verbal/textlich</td></tr>
<tr><td colspan="2">konkret – allgemein
absolut – relativ
exakt – genähert</td><td colspan="3">diskret – kontinuierlich – diskretisiert
statisch – dynamisch
lokal – global</td></tr>
</table>

Abbildung 3.69: Vernetzte Wissensdarstellung zwischen Alltagswelt, Fachlichkeit und kognitiven Wahrnehmungs- und Verarbeitungsweisen

[284] Vergleiche hierzu auch die bildungsphilosophisch bzw. kognitiv bzw. aisthetisch orientierten Übersichten „Bildung und Ästhetik“ (Abbildung 1.2), „Mensch und Welt“ (Abbildung 1.4) und „Bildung und Ästhetik“ (Abbildung 3.1).

Sie ergänzt die Stoffübersicht (siehe Abbildung 3.48) und die basalen Wahrnehmungs- und Gestaltungsprinzipien (siehe Abschnitt 2.3.2). Diese ermöglichen zwar einen Überblick der zu vermittelnden Inhalte und grundlegenden mathematischen Denkweisen, geben jedoch keine Anregungen, wie diese Vermittlung gelingen kann. Dafür ist das primäre Lernziel nicht das Abbilden dieses Wissens, sondern seine von den Lernenden persönlich wahrgenommene überfachliche Wirksamkeit, seine innerfachliche Vernetzung und seine konstruktiv nutzbare mentale Verortung, die ein Bewusstsein für Symmetrien zwischen Praxis und Fachlichkeit beim Zusammenführen der *grünen* mit der *blauen* Welt schafft. Als Ergänzung zur klassenstufenbezogenen Übersicht der fachlichen Inhalte werden diese in der Abbildung 3.69 inhaltlich vernetzter zusammengefasst und im Rahmen kognitiv-ästhetischer Wahrnehmungsprinzipien dargestellt. Wissenserweiterungen sollten sich im Unterricht auch als Verbesserung der von den Lernenden persönlich empfundenen eigenen Handlungsfähigkeit erweisen. Über diese individuell positiv bewerteten Wahrnehmungen entwickelt sich eine anhaltende Akzeptanz und ein Wollen für das Fachliche.

Hierbei ist es nicht primär entscheidend, WAS behandelt wird, sondern WIE es erfahrbar gemacht wird. Dieses WIE ist eine pädagogische Aufgabe der Integration von Fachlichkeit mit Persönlichkeit. Ein ästhetisch verfasster Mathematikunterricht entwickelt beides über das Vorwissen der Lernenden und deren aktiven Beteiligung am Lernprozess.

Außerdem sollte erwähnt werden, dass mathematische Begriffe oft schon umgangssprachlich gebräuchlich und inhaltlich affin zur fachlichen Verwendung sind. Ein Erinnern an diese Verbindung kann helfen, Lernenden eine Wissenstransparenz zu vermitteln, über die sie den Wissenszuwachs in vorhandenes Wissen einordnen und ihn darüber kumulativ wirksam erleben. Dabei ist der Kern einer fachlichen Entwicklung nicht allein deren Erweiterung, sondern die dabei stattfindende Aneignung zentraler fachlicher Denk- und Handlungsweisen.

Einbettung von Begriffsbildungen in individuelle Handlungen

Die Konzeption von Unterrichtseinheiten, bei deren Umsetzung die Lernenden möglichst vielseitig eingebunden werden können, erfordert eine grundlegende Strukturierung der methodischen und inhaltlichen Ausführung sowie der Aktivierung der Lernenden. Dazu gehören geeignete Vorbereitungen und Inszenierungen seitens der Lehrenden, bei denen ihnen Aufgaben zukommen, die, analog zu Aufgaben in künstlerischen Fächern, die Lernenden an „Aufführungen im Fach Mathematik“ beteiligt. Solche Aktivitäten können der Sparte „Lehrstück“ im dramaturgischen Repertoire schauspielerischer Aktivitäten eines Theaters zugeordnet werden. Das Lehrstück im Mathematikunterricht bildet jedoch nicht die Zuschauer, sondern die mitbeteiligte

Lerngruppe über ein inszeniertes gemeinsames „Spielen“ auf der „Bühne“ Klassenzimmer des „Theaters“ Schule (in der „Sparte“ Mathematik?!).

Die Erweiterung von Fachwissen als theaterähnliche Aufführung zu erleben, wäre eine hohe Stufe ästhetisch orientierter Pädagogik des Mathematikunterrichts. Dabei dürfte allerdings der Begriff des Spiels nicht in Schillers Sinn der freien Entfaltung der Persönlichkeit gesehen werden und schon gar nicht im Sinne eines Spiels an sich. Mathematikunterricht ist zielorientiert. Das Spielen allein bildet nicht. Zum Beispiel werden Kinder der Grundschule auch durch häufiges Hantieren mit Zwergwürfeln oder Dienes-Materialien nicht ohne Lenkung die Zahlen erfinden oder den Wunsch des Zählens entwickeln. Sie bauen damit eher möglichst hohe Türme oder legen phantasievolle Figuren.

Ein ästhetisch fundierter Mathematikunterricht wird auch darüber ästhetisch, indem er die Wünsche oder Bedürfnisse der Akteure hinsichtlich einer fachlichen Progression erfüllt. Dabei entscheidet die Dramaturgie, die Inszenierung und das Wollen der „Schauspieler“ als deren eigenen „Zuschauer“, ob das Spiel seine bildende Funktion erfüllt. Damit wird erneut deutlich, dass mechanisches Lernen nur dann eine bildende Wirkung entfalten kann, wenn der Vorgang, der in der Mathematik häufig einem algorithmischen Konzept entspricht, auch inhaltlich verstanden wurde und häufig Verwendung findet. Deshalb sollte sich ein ästhetisch fundierter Mathematikunterricht nicht an ein fachlich linear strukturiertes Curriculum halten, da hierbei ein wesentliches Kriterium verloren ginge: Intuition und Phantasie.

Wann ist Üben sinnvoll?

Mathematik muss geübt werden. Darüber sind sich sowohl Fachleute als auch Lernende einig. Mathematikunterricht muss jedoch in erster Linie nachhaltig hinsichtlich des Wissensaufbaus sein. Aber die Nachhaltigkeit von Mathematikwissen ereignet sich nur selten über die immer wieder gepredigte Form „Üben, Üben, Üben …!“ [285]

Und diese Form des „Übens“ bringt oft, und gerade bei denen, wo es wirken sollte, nicht das was es soll. Insbesondere dann nicht, wenn es vorwiegend mechanisch oder formal ausgeführt wird und nicht verstandesmäßig unterstützt ist.

Übungen in Lernsituationen haben zudem eine andere Funktion als in Phasen des Anwendens, Wachrufens oder Vertiefens. Das Üben in Lernsituationen besteht aus ausreichend vielen Beispielen zu einem Sachverhalt, aus dem sich dieser inhaltlich festigt und einem Anlass, in dem

[285] Vgl. dazu die Anmerkungen in Abschnitt 3.2.2.

sich das Wissen im Lernprozess als nützlich erwiesen hat.[286]

Wenn eine Kopplung zwischen Beispielen und Begrifflichkeit mental derart abgeschlossen ist, kann das Wissen in ähnlichen Situationen individuell abgerufen und konstruktiv genutzt werden. Es muss zwar ebenfalls wachgehalten werden, aber dies gelingt nachhaltiger, wenn es bei sich anschließenden Wissenserweiterungen beteiligt und darüber erinnert wird. [287]

Im Gegensatz zu Lernphasen benötigen eigenständige wissensfestigende Übungen eine grundlegend andere Methodik, die emotional akzeptiert wird, wenn sie differenzierend ist und die individuellen Interessen, Neigungen und gegebenenfalls auch Defizite der Lernenden berücksichtigt.

[286] Siehe dazu die Übungen zur Prozentrechnung in Abbildung 4.2-4.
[287] Vgl. hierzu das Horizontal- und Vertikalkriterium in Abschnitt 2.5.3 sowie die Übungen zur Prozentrechnung in Abbildung 4.2-2.

4 Unterrichtspraxis

Die in diesem Kapitel ausgewählten Beispiele für konkrete unterrichtliche Prozessführungen sind zusammengestellt aus Materialien, die im Unterricht des Verfassers selbst oder im Rahmen von Projekten mit Kolleginnen und Kollegen an Schulen getestet oder als Angebote bei Lehrerfortbildungen präsentiert wurden. Diesen Beispielen ist gemeinsam, dass sie nach dem in Kapitel 3 beschriebenen Modell als „ästhetisch fundiert“ angesehen werden können.

Die Materialien sind auch unterschieden hinsichtlich der methodischen Verfeinerung sowie ihrer Verwendung in Bezug auf die inhaltliche Zielsetzung und die Adressaten:

Es gibt Beiträge, die als Leitlinie für Lehrende gedacht sind, wenn zum Beispiel überblicksartig ein Thema für Lehrende skizziert oder ein Überblick für eine inhaltliche Entwicklung unter dem Aspekt der Stoffvernetzung dargestellt wird. Andere Beiträge stellen eine Unterrichtseinheit sehr detailliert ausgearbeitet für die unterrichtliche Behandlung dar. Sie verstehen sich als ausführliches, didaktisch dramaturgisch aufbereitetes Unterrichtsskript mit konkreten Aufträgen an die Lernenden. Entsprechend der jeweils vorgesehenen Verwendung ist auch die sprachliche Form der jeweiligen Situation angepasst und wirkt in der Abfolge stilistisch gegebenenfalls zunächst ungewohnt wechselnd. Diese Variationsbreite wurde in Kauf genommen, um die Passung an den jeweiligen Einsatz nicht zu verfälschen.

Die Beiträge sind auch nicht streng nach Klassenstufen geordnet. Insbesondere Abschnitt 4.2 berichtet beispielsweise über ein vierjähriges Unterrichtsprojekt „Einsatz von Mathematiksoftware in der Sekundarstufe 1 an Gymnasien“ in den Klassenstufen 7 bis 10. [288] Abschnitt 4.3 gibt Beispiele zu ausgewählten Unterrichtseinheiten im Zusammenhang mit der Entwicklung des Zahlbegriffs über die Schuljahre 1 bis 6. [289]

In Analogie zu Lernprozessen und ihrer Dokumentation ist es jedoch noch ein arbeitsintensiver Weg von der schriftlich verfassten Form des Unterrichtsskripts zur unterrichtswirksamen Ausführung, der nicht beschrieben, sondern nur gelebt werden kann.

Hier zeigt sich wiederum deutlich, dass die in der Unterrichtspraxis vernetzte Anwendbarkeit des Wissens und eine sich dabei entwickelnde Erweiterung der Fachlichkeit ein Schlüsselkonzept ästhetisch verfasster Lernprozesse darstellt.

---

[288] Wie schon in der Einleitung erwähnt, war dieses Projekt ein wesentlicher Anlass für die Wahl des Themas dieser Arbeit.

[289] Da teilweise auch an anderen Stellen unterrichtsnahe Beispiele aufgeführt sind, gibt es im Anhang eine Übersicht praxisnaher Beiträge zur gesamten Arbeit.

4.1 Einstimmendes Beispiel, Bemerkungen und Überblick

Die Ausführungen in Kapitel 2 und 3 machen deutlich, dass es zwischen der Vermittlung von Mathematik als wissenschaftlicher Disziplin und dem „Lernen von Mathematik in der Schule“ sowohl hinsichtlich der Methodik als auch des Aufbaus des Wissens Unterschiede gibt, welche bei der Prozessführung im Fach Mathematik beachtet werden sollten, damit die Akzeptanz des Stoffes seitens der Lernenden gewährleistet ist.

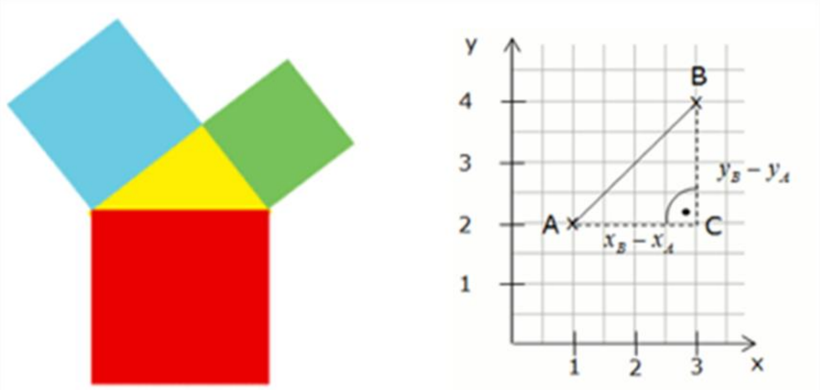
Der Satz des Pythagoras

Als einstimmendes Beispiel wird der *Satz von Pythagoras* gewählt, weil dieser für den Autor typisch ist für sehr gegensätzliche Erinnerungen von Erwachsenen, die sich zwischen unverstandener Rezitation und einem über Verstehen begründeten Umgang mit Wissen bewegen.

Mathematiker und Geometer empfinden eine ästhetische Qualität des Sachverhalts unter anderem über die doppelte Bedeutung als „Flächensatz der Geometrie“ und „Rechensatz der Trigonometrie“. [290]

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.



$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad |AB| = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

Abbildung 4.1-1: Der Satz des Pythagoras: sprachlich und in unterschiedlichen Darstellungen bzw. Anwendungsmöglichkeiten formuliert

[290] Seine innermathematische Bedeutung (und innerfachlich-ästhetische Wirkung auf Mathe-Experten) hinsichtlich einer axiomatischen Fundierung der Euklidischen Geometrie wird hier (auf schulische Relevanz verweisend) nicht erwähnt.

Abbildung 4.1-1 stellt diesbezüglich den Satz in fünf Variationen dar: Sprachlich-textlich, bildlich-geometrisch, algebraisch sowie numerisch als Bild mit Formel bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems, geeignet zur rechnerischen Bestimmung von Streckenlängen. Die unterschiedlichen Darstellungen des Sachverhalts ermöglichen den Aufbau einer inhaltlichen Vernetzung zwischen rein syntaktischen Formen und zugehörigen Interpretationen des Satzes.

Darüber hinaus stellt der Satz aber auch einen Sachverhalt dar, den man durch genaues Zeichnen und Messen weder exemplarisch noch intuitiv hinreichend begründen kann. Er ist eines jener zahlreichen Beispiele der Mathematik, die eine allgemeine Begründung erfordern.

Dazu Hans Freudental:

> *„Wer kennt nicht den sogenannten Pythagoräischen Lehrsatz? Aber der war in Babylon schon zwei Jahrtausende eher bekannt. Soll Pythagoras ihn als erster bewiesen haben? Nein, auch das nicht, denn etwas wie den Pythagoräischen Lehrsatz, das man nicht mit bloßem Auge sieht, kann man nur entdecken, indem man es beweist; so etwas kann man nicht finden, indem man die Seiten nachmißt.“* [291]

Einen Übergang zur Begründungswürdigkeit für den Satz des Pythagoras lässt sich herstellen, indem man für den Unterricht eine dynamische Darstellung des Sachverhaltes vorbereitet. Abbildung 4.1-2 auf der folgenden Seite zeigt Einzelbilder einer solchen Animation.

Für spezielle Lagen von Dreiecken ist eine Begründung des Satzes augenscheinlich über einfache geometrische Beziehungen möglich. Über die dynamische Sicht einer Animation stellt sich die Frage nach einer Allgemeingültigkeit des Sachverhalts.

Die Ambivalenz zwischen Anwendbarkeit und Begründungsnotwendigkeit in der Mathematik, als Werkzeug und hinsichtlich einer begründet fortschreitenden Entwicklung der Fachlichkeit, muss den Lernenden transparent gemacht werden. Wesentlich hierfür ist es, den Lernenden die Prinzipien des unterrichtlichen Handelns parallel zum curricular organisierten Unterrichtsgang mitzuteilen. Denn nur über eine Vermittlung der Beweggründe für die Planung und Durchführung der Handlungen entsteht eine Transparenz zwischen Lehrenden und Lernenden, die wesentlich dazu beiträgt, dem Prozess der stofflichen Vermittlung einen zusätzlichen Sinn zu geben, der sich positiv auf die Akzeptanz des Stoffes auswirkt.

[291] Freudenthal, 1977, S. 13.

Der „Satz des Pythagoras“ im Thaleskreis

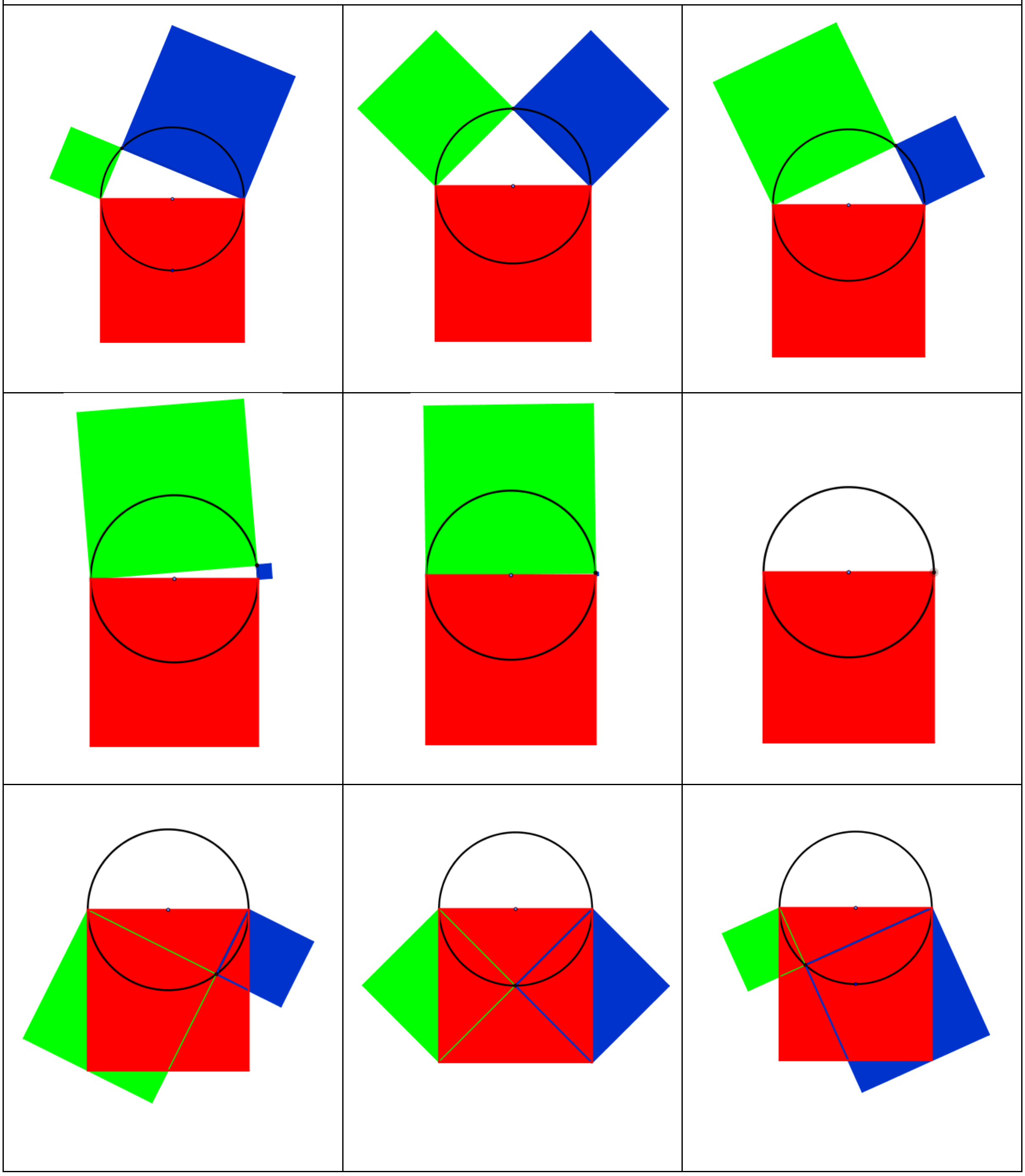


Abbildung 4.1-2: Einzelbilder einer grafischen Animation zum „Satz von Pythagoras“ in einem Vollkreis mit dem Programm GeoGebra [292]. Die Bilder zeigen Sonderfälle und spezielle Lagen des an sich variablen Punktes auf dem gemeinsamen Umkreis der Dreiecke. Die sich überschneidenden Lagen der Quadrate der unteren Reihe ist eine Folge der Orientierung der Figuren bei deren Konstruktion mit GeoGebra.

[292] GeoGebra ist ein für nichtkommerzielle Nutzung kostenloses Programm, das eine dynamische Geometrie-Software mit algebraisch-symbolischen Darstellungen verbindet. Entwickler: Markus Hohenwarter et al.

4.2 Das Projekt „Einsatz eines CAS/GTR in der Sekundarstufe I“ am Gymnasium

Am Gymnasium in den Pfarrwiesen in Sindelfingen wurde ab dem Schuljahr 2010/11 das Unterrichtsprojekt „Einsatz eines Computer-Algebra-Systems (CAS) im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I“ begonnen, bei dem ein Computer-Algebra-System (CAS) im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I an einem allgemeinbildenden Gymnasium ab der Klasse 7 eingesetzt wurde. Das Projekt war abgestimmt mit den damaligen Fachreferenten der Regierungspräsidien in Karlsruhe und Stuttgart. Als Bereichsleiter für das Fach Mathematik am Staatlichen Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) Karlsruhe hat der Verfasser dieser Arbeit für dieses Projekt die didaktische Beratung übernommen. Eine dabei beruflich nicht sehr oft erfahrene Besonderheit dieser Tätigkeit war, dass die Initiative für dieses Projekt vom Fachkollegium des Gymnasiums ausging. Gemeinsam und auf Wunsch der Fachlehrer[293] der Klassenstufe 7 wurde ein Jahrescurriculum entwickelt und detailliert ausgearbeitete Stundenentwürfe mit inhaltlichen und methodischen Vorschlägen erstellt und dokumentiert.[294]

In einem ersten Durchgang von 2010 bis 2014, von Klassenstufe 7 bis 10, wurden die entwickelten Materialien jahrgangsweise getestet und überarbeitet. Ab dem Schuljahr 2011/12 wurden diese Unterrichtseinheiten auch an weiteren Gymnasien in Baden-Württemberg eingesetzt und reflektiert weiterentwickelt. Das Projekt wurde in den Jahren 2012 bis 2016 in Sindelfingen und am Schickhardt-Gymnasium in Herrenberg bis zur Klasse 10 weitergeführt. In den Jahrgangsstufen 11 und 12 wurden in Sindelfingen und Herrenberg weitere Treffen bis zum Abitur des Jahrgangs 2016 vereinbart. Für das fachliche Curriculum wurden auch für die Lehrerausbildung entwickelte und erprobte Materialien des Seminars Karlsruhe inhaltlich und formal an die von der Gruppe aufgestellten Rahmenbedingungen des Schulprojektes angepasst.[295]

Die folgenden Abschnitte orientieren sich am ersten Bericht über das Projekt in Klasse 7 nach dem ersten Schuljahr. Dieser beschreibt die strukturellen und methodischen Überlegungen und die unterrichtliche Prozessführung. Dieser Bericht wird nachfolgend nur unwesentlich verän-

[293] Die Lehrpersonen der siebten Klassen im Jahr 2010 am Gymnasium in den Pfarrwiesen waren Simon Zolg, Uta Plath und Michaela Ewald.

[294] An der Projektschule wurden „TI-NSpire-CAS-Handhelds“ der Firma Texas Instruments eingesetzt. Neben der ständigen Verfügbarkeit für die Schüler, einer einfachen Bedieneroberfläche, einer verlässlichen CAS-Software und der Integration einer dynamischen Geometrie-Software waren insbesondere jene Funktionalitäten dieser Geräte ausschlaggebend, welche den Wechsel mathematischer Darstellungsformen unterstützen. In der Klassenstufe 7 ist der Vorteil eines CAS-Werkzeugs gegenüber einem grafisch-numerischen Werkzeug, wie z.B. einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) gering. Die entwickelten Unterrichtsmaterialien können deshalb ganzheitlich auch bei dem Einsatz eines GTR verwendet werden.

[295] An entsprechenden Stellen sind Verweise auf diese Quellen angegeben.

dert wiedergegeben, um, soweit dies bei einer schriftlichen Darstellung eines spannenden Entwicklungs-Prozesses überhaupt gelingen kann, einen möglichst authentischen Einblick in die Produkte des ersten Projektjahres zu geben. Deshalb ist auch der ursprüngliche Wortlaut beibehalten.

Die im ersten Schuljahr entwickelten Strukturen, inhaltlichen Ausführungen und Aufgabenformate wurden in den folgenden Schuljahren beibehalten und nur der fachlichen, kognitiven, sozialen und emotionalen Entwicklung der Lernenden angepasst.

4.2.1 Rahmenbedingungen und Zielsetzungen

In knapper Form nennt dieser Abschnitt die Bedingungen und Absprachen, die in der Projektgruppe anfänglich vereinbart wurden.

Projektbeschreibung – Was wollen wir?

Am Gymnasium in den Pfarrwiesen in Sindelfingen wird ein Schulcurriculum entwickelt, bei dem der Bildungsplan 2004 unter Verwendung einer „integrierten Mathematiksoftware“ mit CAS-Funktionalität beginnend ab Klassenstufe 7 umgesetzt wird.

Was soll berücksichtigt werden? – Vermittlung von Grunderfahrungen

Entsprechend der Rahmenbedingungen des Bildungsplans wird der Allgemeinbildungsauftrag des gymnasialen Mathematikunterrichts berücksichtigt, bei dem Grunderfahrungen in drei Bereichen vermittelt werden sollen (vgl. Heinrich Winter [296]). Die folgende Formulierung wurde mit Blick auf eine für die Lernenden verständliche Wortwahl erstellt:

Mathematikunterricht ist anwendungsorientiert und somit nützlich im täglichen Leben, entwickelt eine fachliche Basis mit eigener Sprache und Schrift, vermittelt eine überfachliche allgemeine Problemlösefähigkeit.

Modellierungscharakter des Faches als Motivationsmittel

Mathematik stellt Werkzeuge bereit, die bei „alltäglichen“ Entscheidungen und Problemstellungen hilfreich sind. Durch die Betonung des Werkzeug- und Modellierungscharakters des Faches soll die die Bereitschaft der Lernenden erhöht werden, Fachinhalte als nützlich anzusehen und dadurch für Erweiterungen des mathematischen Wissens offen zu sein.

---

[296] Siehe Abschnitt 2.3

Kompetenzentwicklung – Leitfragen und Transparenz

Kompetenzentwicklung zeigt sich im Verhalten einer Person in drei wesentlichen Dimensionen: Im fachlichen und überfachlichen Wissen (den Kenntnissen), in der Art mit dem Wissen umzugehen (den Fähigkeiten) und in der grundsätzlichen Einstellung zum Fach (den Haltungen). Zielsetzungen zur Kompetenzentwicklung werden über zwei *Leitfragen* entwickelt:

Was sollen die Lernenden in einer Stunde tun? Was sollen die Lernenden können, wenn eine Unterrichtsstunde, eine Unterrichtseinheit bzw. das Schuljahr absolviert ist?

Bei der Durchführung von Unterricht und der Kontrolle des Leistungsvermögens wird auf eine für die Lernenden transparent formulierte durchgängig einheitliche Beschreibungsform geachtet: *Das haben wir euch angeboten. Das solltet ihr jetzt können. Das müsst ihr gegebenenfalls noch üben.*

4.2.2 Fachinhaltliches Curriculum

Zur Gestaltung des fachinhaltlichen Curriculums wird eine Orientierung an den Leitideen des Bildungsplans mit hoher Vernetzung der Teilgebiete zugrunde gelegt, die sich an einer zentralen Frage für eine Schuljahresplanung orientiert: *Was sind die wesentlichen zu erwerbenden Kompetenzen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts in diesem Schuljahr, unter Berücksichtigung der stufenspezifischen kognitiven Fähigkeiten der Lernenden?*

Zur Gliederung des Stoffes einer Unterrichtseinheit wird darauf Wert gelegt, die neuen Inhalte aus dem Vorwissen der Lernenden heraus zu entwickeln, dieses Vorwissen jeweils wachzurufen und mit dem Erlernen des neuen Stoffes zu verknüpfen. Zu erwerbende mathematische Begriffe werden über Grunderfahrungen ausgebildet und mathematische Verfahren exemplarisch über geeignete Aufgaben entwickelt. Bewusst wird auf eine frühe Formalisierung und verallgemeinerte Beschreibung von Sachverhalten verzichtet. Algebraische Formen und Umformungen ordnen sich inhaltlichen Kontexten unter. Sie werden als Werkzeuge jeweils bei Bedarf entwickelt und eingeübt.

4.2.3 Organisation von Lernprozessen – Erziehung zur Eigenverantwortung

Der für die Planung von Lernprozessen wichtige Satz *„Mathematikunterricht muss auch überfachlich sinnstiftend sein“* ist nicht an einem inhaltlich vorstrukturierten Unterrichtsgang eines didaktisch aufbereiteten Curriculums orientiert, das systematisch gegliedert unterrichtlich abgehandelt und abgebildet wird. Die Sinngebung soll sich auf eine Gestaltung des Unterrichts beziehen, bei der sich das Neue aus dem angewendeten Wissens-Fundus der Lernenden ergibt. Wenn der Prozess so geführt ist, dass das sich ein Bewusstsein der Mitgestaltungs-Fähigkeit bei den Lernenden einstellt und das Neue die Gestaltungsfähigkeit der Lernenden erweitert, besteht kein Grund, an einer Akzeptanz des Stofflichen zu zweifeln. Sinn aber muss die Sache für die Lernenden machen.[297] Trifft dies zu, kann auch Mitgestaltung selbst für die Lernenden Sinn machen und den Gestaltungswillen im Fachlichen positiv beeinflussen.

Der Unterricht wird bezüglich des Vorwissens der Lernenden und der Komplexität des Stoffes gestaltet - im Wechsel zwischen Instruktion (Lehrer als Stoffvermittler) und Konstruktion (in Verantwortung der Lernenden) - nicht nur in Übungs- und Anwendungsphasen, sondern auch bei der Erarbeitung neuer Inhalte. Als Elementarmethode für Lernprozesse wird hierbei durchgängig eine auftragsgesteuerte Unterrichtsführung eingehalten.[298]

Bezüglich der inhaltlichen Gestaltung wird auf eine klare und für die Lernenden transparent vermittelte Gliederung nach drei Gesichtspunkten geachtet:

- Bei der Erarbeitung von neuem Stoff werden die Inhalte möglichst mit dem Vorwissen verknüpft, gegebenenfalls wird dieses Vorwissen im Zusammenhang mit dem Lerngegenstand wiederholt.
- Der neue Inhalt wird an geeigneten außer- oder innermathematischen Kontexten möglichst unter Mitbeteiligung der Lernenden erarbeitet und mit Übungen gefestigt. Es liegt in der Verantwortung des Lehrers, ob hierbei lehrerseitig instruiert, schülerseitig konstruiert oder Mischformen bevorzugt werden.
- Nach einer Unterrichtseinheit wird das Gelernte in vielfältigen auch inhaltlich vertiefenden und vernetzenden Aufgaben geübt. Dabei liegt die Verantwortlichkeit für die Lösungen weitestgehend bei den Lernenden. Insbesondere können hierbei binnendifferenzierende Maßnahmen eingeplant und diagnostische Unterstützung angeboten werden.

4.2.4 Die Rolle des CAS / GTR – Der persönliche Experte

Die Rolle eines im Unterricht verwendeten CAS als Hilfsmittel ist in der fachdidaktischen Literatur hinreichend untersucht und sollte für das Projekt nicht explizit konkretisiert werden. Wichtiger erschien es, Computerwerkzeuge zur Unterstützung der mathematischen Begriffsbildung einzusetzen. Dazu gehören insbesondere Funktionen, welche den Wechsel von Darstellungsformen ohne großen programmiertechnischen Aufwand unterstützen. Den Lernenden sollte auch vermittelt werden, dass sie mit dem CAS (GTR) einen persönlichen mathematischen

[297] Hierbei ist stets die Möglichkeit des Scheiterns von Unterricht einzubeziehen und bei einer solchen Wahrnehmung mit den Lernenden zu besprechen.
[298] Vgl. Abschnitt 3.2.8.

Experten befragen können, der sie vom „Lehrerexperten" unabhängiger macht. Das Hilfsmittel sollten Lernende dazu verwenden, möglichst unabhängig und eigenständig den Rechner bei der Lösung von Problemen oder in Übungsphasen einzusetzen. Dabei sollte die Nutzung des Hilfsmittels nach und nach in die Verantwortung des lernenden Individuums gegeben werden, das selbst entscheidet, ob und in welcher Funktion der (bzw. sein) Experte eingesetzt wird: zum Beispiel zur Selbstkontrolle von Ergebnissen, zur Erzeugung geeigneter Darstellungsformen, um einen Überblick über einen Sachverhalt zu gewinnen, oder zum Erstellen geeigneter Beispiele zu einem Sachverhalt.

4.2.5 Dokumentation des Wissens – Werkzeugkarten

Neben der Dokumentation des Unterrichts mit geeigneter Heftführung und Lernkontrollen zu Übungsphasen wird der Kompetenzzuwachs bezüglich der verschiedenen Dimensionen so dokumentiert, dass er auch in nachfolgenden Klassenstufen zur Verfügung steht. Dazu werden nach abgeschlossenen Phasen des Wissenserwerbs *Werkzeugkarten* erstellt, auf denen das Wissen, ein Verfahren, eine Strategie usw. festgehalten werden. Diese Karten können gegebenenfalls auch für technische Hinweise zur Bedienung des CAS (GTR) verwendet werden.

4.2.6 Strukturierung und Dokumentation von Unterrichtseinheiten

Für die Entwicklung und Dokumentation der Unterrichtseinheiten wird eine einheitliche Struktur vereinbart. Ausgehend von einem Gesamtüberblick der Jahrgangsthemen wird für jedes Themengebiet neben einer fachdidaktischen Einordnung eine detaillierte Beschreibung der Stundenplanung bis hin zu Einzelaufträgen ausgearbeitet, damit der Unterrichtsverlauf möglichst effizient entsprechend des gemeinsam intendierten Verlaufs nachvollzogen und für die eigene Unterrichtstätigkeit genutzt werden kann. [299]

Durchgängig wird die folgende Struktur verwendet:

- Es wird eine Auflistung der vorgesehenen Unterrichtseinheiten im Schuljahr erstellt.
- Zu den Unterrichtseinheiten wird ein inhaltlicher Überblick mit einem Zeitrahmen und Hinweisen zur Verwendung des CAS gegeben.
- Zu jeder Einheit werden ein didaktischer Kommentar und eine Stoffverteilung mit Teilthemen erstellt.
- Der zu einem Teilthema geplante Unterrichtsverlauf wird ausführlich beschrieben und

[299] Hierbei war auch daran gedacht, dass die Materialien zukünftig auch von weiteren Lehrenden effizient nutzbar sind.

entsprechend der nachfolgend angegebenen Gliederung strukturiert:

Thema	Teilthema der Unterrichtseinheit
Stunde(n)	Vorgeschlagene Stundenzahl
Unterrichtsziele	
	Was können die Schülerinnen und Schüler nach dieser Stunde? Was tun die Schülerinnen und Schüler in dieser Stunde?
Beschreibung	
	Kurzbeschreibung des Verlaufs, didaktische Schwerpunkte, Rolle des Werkzeugs
Unterrichtsphasen	
	Beschreibung des Ablaufs nach Lern- und Übungsphasen, Beschreibung der Methode, Kommentare, Hinweise für Lehrpersonen
Material	
	Angabe der Materialien
Hinweise zum Werkzeug	
	Technische Hinweise, verwendete Funktionalität
Sonstiges	
	Hausaufgaben, Verweise auf Lehrbuch …

4.2.7 Stoffüberblick zum Schuljahr

Nachfolgend sind die Einheiten mit einem inhaltlichen Überblick, der vorgesehenen Stundenzahl und einem Hinweis auf die Funktion des Computerwerkzeugs aufgeführt.

Anzahl der Stunden	Unterrichtseinheit / Thema	Funktion des CAS
17	1. Anteile und Prozente Wiederholung Zahlbegriff aus Klasse 5/6, Begriffsbildung „Prozente“, Anteile und Prozente, Prozente als Vergleichsgrößen	Taschenrechner (TR) Tabellendarstellung
13	2. Begriffsbildung Wahrscheinlichkeit Absolute Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit, Baumdarstellung von Zufallsexperimenten, Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten	TR
25	3. Zuordnungen Wiederholung Zuordnungen darstellen, Darstellungsformen mit den CAS erzeugen, Formeln als Zuordnungen, Termdarstellungen, vom „Dreisatz“ zum „Vielsatz“, Begriffsbildung Proportionalität und Linearität, Lineare Zuordnungen, Antiproportionalität, Anwendungen, Geraden im Koordinatensystem, Geradengleichungen, Übungen und Anwendungen	TR Spaltenfunktionen der Tabellenkalkulation Darstellungsformen von Zuordnungen

12	4. Argumentieren lernen mit Geometrie Schwerpunkt dieser Unterrichtseinheit ist der Erwerb von Grundkompetenzen für mathematisches Argumentieren als Vorstufe des Beweisens. Ausgehend von evident einsichtigen Eigenschaften elementarer symmetrischer Figuren (Vorwissen aus Klasse 5 und 6) wird eine Argumentationsbasis erstellt und erweitert. Der Winkelsummensatz, die Eigenschaften besonderer Dreiecke und der Satz des Thales werden begründet.	TR gegebenenfalls auch dynamische Geometrie-Software

4.2.8 Ausarbeitung eines Themas – Unterrichtsskript „Anteile und Prozente“

Die unterrichtspraktische Erstellung eines *Unterrichtsskripts*, d. h. die Ausarbeitung eines Themas in konkrete szenisch aufbereitete Handlungsanweisungen für die Lehrenden zur Aufführung mit den Lernenden in Unterrichtsstunden, wird, exemplarisch für alle weiteren Themen in den Schuljahren 7 bis 10, am Beispiel der ersten Unterrichtseinheit *Anteile und Prozente* in der Klasse 7 deutlich, die ohne wesentliche Kürzungen nachfolgend dokumentiert ist.

Durchgängig wurde eine Gliederung verwendet mit den Punkten:

- Didaktischer Kommentar
- Stoffverteilung
- Kompetenzentwicklung
- Verfeinerung der Stoffverteilung zu Stundenthemen
- Stundenskripts zu Themen
- Unterrichtsmaterial, Folienvorlagen und Übungen
- Rückschau und Reflektion

Zu jedem Gliederungspunkt wird nachfolgend ein Beispiel des Themas gegeben.

Didaktischer Kommentar

In der Klassenstufe 5-6 wurden bisher mit dem Prozentbegriff vorwiegend die beiden Grundvorstellungen „neue Schreibweise für eine Bruchzahl mit Nenner 100“ und „Angabe eines (konkreten) Anteils bei Größen in Prozent“ entwickelt. In Klasse 7 soll die Bedeutung der Prozentrechnung als nützliches Werkzeug beim Vergleich thematisch gleicher Datenerhebungen mit verschiedenen Grundgesamtheiten entwickelt werden. Beim Vergleich mit Prozentangaben werden zunächst die jeweiligen konkreten Daten auf eine gleiche „gedachte bzw. vorgestellte“ Größe mit der Maßzahl 100 gebracht. Mathematisches Werkzeug dabei ist das Erweitern einer Bruchzahl (eines Bruchterms) auf den Nenner 100 bzw. das Dividieren des Zählers durch den

Nenner und das Interpretieren der zugehörigen Dezimalzahl. Inhaltlich wird berücksichtigt, dass die Lernenden noch stark mit konkreten Vorstellungen arbeiten und der abstrakte Aspekt des „relativen Anteils ohne Bezug zum Grundwert“ behutsam erfolgen soll.

Die zentralen Begriffe Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz mit den jeweils zugehörigen Grundaufgaben im Bereich von Anteilen in Prozentschreibweise sind für die Lernenden voneinander unabhängige Problemstellungen, die einzeln gelöst werden. Deshalb wird auf die Verwendung formelhafter Berechnungsvorschriften (eine Form für alle Fälle mit entsprechender formaler Umstellung) bewusst verzichtet. Die Formen zu den drei Grundaufgaben sind jeweils eigenständige Formulierungen, die in jeweils konkretem Kontext inhaltlich verankert und verstanden sind. Sie sind abkürzende Darstellungen eines Sachverhalts und berücksichtigen den „Objektaspekt“ bei Variablen. Diese sind Platzhalter für Zahlen bzw. Größen. Eine Formel ist demnach eine Berechnungsvorschrift für die links aufgeführte Größe und ist eine Zuordnung.

Außerdem soll in der Begriffsbildungsphase ausreichend Zeit und Raum für eigene Konstruktionen und Präsentationen der Lernenden gegeben werden. Neben dem Dreisatz sind auch weitere Lösungsansätze akzeptiert. Individuelle Lösungswege der Lernenden werden angehört.

Stoffverteilung

Prozente wiederholen, erweitern, vertiefen

Üben und Anwenden

Stunden	ca. 17
1 und 2	Anteile und Prozente
3 und 4	Rechnen mit Anteilen - der Dreisatz
5	Übungen zum Dreisatz
6	Vergleichen mit Prozenten
7	Begriffe der Prozentrechnung
8 und 9	Grundaufgaben der Prozentrechnung
	--
10	Übungen zu den Grundaufgaben
11	Übungen zu den Grundaufgaben mit dem CAS
12	Zinsen
13	Begriffe in verschiedenen Gebieten
14-16	Anwendungen und Vertiefungen
17	Klassenarbeit

als Taschenrechner bei Bedarf

Die Stoffverteilung verdeutlicht, dass die Unterrichtseinheit eine klare dreigliedrige Trennung in eine aus dem Vorwissen der Schüler (Stunden 1 bis 5) entwickelte Begriffsbildungsphase, den neuen Stoff (Stunden 7 bis 9) und eine sich anschließende Übungs- und Vertiefungs-Phase (Stunden 14 bis 16) aufweist, die inhaltlich und methodisch für die Lernenden transparent und mit unterschiedlicher Verantwortung durchgeführt werden können: Aufgaben bearbeiten mit Vorwissen, dabei neue Inhalte erarbeiten (über auftragsgesteuerte Unterrichtsführung oder Instruktion), neue Inhalte auf bekannte Aufgabenformate anwenden, Transfer zu neuen Aufgabenstellungen vornehmen.

Kompetenzentwicklung

- Prozente als Zahl und Vergleichsgröße sehen, Darstellungsformen
- Entwickeln von Strategien: Aufgaben gleichen Typs erkennen, einen Lösungsansatz entwickeln und die erarbeitete Lösungsstrategie auf andere Aufgaben anwenden
- Entwickeln von Fachwissen: Durch die gleichzeitige Bearbeitung der drei Grundaufgaben erkennen die Lernenden die verschiedenen Lösungsschemata zu den Aufgaben.
- Anwenden in Sachzusammenhängen: Bei unterschiedlichen Anwendungen soll herausgearbeitet werden, dass im Alltag die drei Grundgrößen der Prozentrechnung in einigen Anwendungsgebieten eigene Namen haben.

  Begriffe: brutto, netto, Rabatt, Skonto, Zinsen, Kapital

  Hier noch ohne Zinseszinsen; ein Bankprojekt am Schuljahresende ist geplant.
- Anwendung des Fachwissens bei der Bearbeitung von Textaufgaben (elementares Modellieren).
- Werkzeugcharakter: Das Erweitern/Kürzen auf eine gleiche „gedachte bzw. vorgestellte“ Größe, auf 100, wird als Werkzeug für die Prozentrechnung erkannt.

Verfeinerung der Stoffverteilung zu Stundenthemen

Std.	Thema, Kurzbeschreibung, spezielle Rolle des CAS
1 u. 2	1 Anteile und Prozente Verschiedene Zahldarstellungen und Umwandlungen werden wiederholt und geübt. Dezimaldarstellung, Bruchdarstellung, Darstellung am Zahlenstrahl, Anteile als Prozente in verschiedenen Darstellungen
1	2 Der Dreisatz Die Stunde dient der Wiederholung des Dreisatzes. Die Eingabe von Daten in eine Tabelle des CAS wird vorgestellt. Dabei wird die Quotientengleichheit erkannt und mit Hilfe des CAS überprüft.

1	3 Mit Anteilen rechnen – Dreisatz Es werden Übungsaufgaben zu Anteilen gestellt. Der Dreisatz wird als „Standardverfahren“ mit (einheitlich) strukturiertem Aufschrieb eingeführt.
1	4 Übungen zum Dreisatz Bei der Besprechung der Lösungen der Aufgaben wird die Quotientengleichheit zugehöriger Zahlenpaare herausgearbeitet.
1	5 Vergleichen mit Prozenten Nach der Wiederholung von Prozenten werden Prozentwerte in Anwendungssituationen bestimmt. Der Vorteil von Prozenten beim Vergleichen wird erfahrbar. Der Prozentbegriff wird erweitert: Der Bezug zum „absoluten“ Grundwert wird dabei relativiert.
1	6 Begriffe der Prozentrechnung An verschiedenen Beispielen soll erkannt werden, dass es in der Prozentrechnung drei verschiedene Größen (ein Ganzes, einen Teil und einen Anteil) gibt. Die SuS [300] sollen am Beispiel erkennen, was gegeben und was gesucht ist, und die fehlende Größe berechnen. Die Begriffe Prozentwert und Prozentsatz werden eingeführt.
2	7 Grundaufgaben Die SuS erarbeiten Lösungsstrategien für die drei Aufgabentypen. Die Lösungsstrategien werden nachträglich auf Wissenskarten festgehalten.
1	8 Übungen zu den Grundaufgaben Die Stunde dient zur Einübung der „Lösungsstrategien“ zu den drei unterschiedlichen Aufgabentypen der Prozentrechnung. Die Schüler sollen selbständig erkennen, um welchen Typ es sich handelt, und eine geeignete Lösungsstrategie anwenden.
1	9 Übungen zu den Grundaufgaben mit CAS Die SuS lernen, Tabellen mit dem CAS zu erstellen und situationsgerecht auszuwerten.
1	10 Zinsen SuS erarbeiten sich anhand vorgegebener Aufgaben und dem Lehrbuch die „Vokabeln“ aus dem Bankwesen. Dabei werden nur Jahreszinsen berechnet (unterjährige Zinsen werden in einem Projekt zum Bankwesen am Schuljahresende bearbeitet).
1	11 Prozente in verschiedenen Gebieten Die Begriffe „Rabatt, Skonto, Netto, Brutto, Steuer“ werden eingeführt. Es wird erarbeitet, dass es sich im Wesentlichen um *neue* Vokabeln für bekannte Begriffe handelt.
3	12 Anwendungen und Vertiefungen Die SuS üben anhand von 6 Stationen die Anwendung der erworbenen Lösungsstrategien zur Prozentrechnung.
1	13 Klassenarbeit

[300] „SuS“ wird als Abkürzung für „Schülerinnen und Schüler“ verwendet und „L“ für „Lehrerin bzw. Lehrer“.

17	Summe

Stundenskript zum Thema 6: Begriffe der Prozentrechnung

Stunden	1
Unterrichtsziele	
	Was können die SuS nach dieser Stunde? Sie sollen die Begriffe Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz kennen. Sie sollen bei Textaufgaben erkennen, welche dieser drei Angaben gegeben sind und welche man sucht. Was machen die SuS in dieser Stunde? Sie kennzeichnen in Textaufgaben die drei Angaben Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz.
Beschreibung	
	Die SuS sollen an verschiedenen Beispielen erkennen, dass es in der Prozentrechnung drei verschiedene Grundbegriffe gibt. Sie sollen erkennen, was gegeben und was gesucht ist, und die fehlende Größe berechnen. Anschließend werden durch Instruktion der Lehrperson die drei Begriffe Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz eingeführt.
Unterrichtsphasen	
Phase 1	L bezieht sich auf die vorangegangene Stunde. Was kann man mit einer Prozentangabe anfangen? L legt die Folie (siehe Abbildung 4.2-3) auf mit Beispielen und weiteren Aufgaben. Zunächst ist nur das erste Beispiel sichtbar. Auftrag 1.1: Schreibt die Aufgabe ab (verwende die gleichen Farben) und berechnet die fehlende Größe. […] L deckt das zweite Beispiel auf. L-Frage: Gibt es einen Unterschied zur ersten Aufgabe? […] Auftrag 1.2: Schreibt die Aufgabe ab und berechnet die fehlende Größe. […] **Auftrag 1.3**: Versucht die entsprechenden Textstellen der zweiten Aufgabe mit den gleichen Farben zu markieren wie in Beispiel 1. […] Lehrer deckt Beispiel 3 auf. **Auftrag 1.4**: Geht nun entsprechend wie in Aufgabe 1 und 2 vor. […]
Phase 2	Ergebnissicherung: Wir haben erkannt, dass es beim Rechnen mit Prozenten drei verschiedene Aufgabentypen gibt, bei denen man aus zwei Größen eine dritte berechnen muss. Diese Größen haben eigene Bezeichnungen: Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz. Die Folienvorlage wird entsprechen ergänzt und ins Heft übertragen.
Phase 3	L teilt Arbeitsblatt aus (siehe Abbildung 4.2-4). Die SuS bearbeiten die Aufgaben.

Hinweise zum Werkzeug	
	Das CAS wird bei Bedarf als Taschenrechner verwendet.
Sonstige Bemerkungen	
HA	Restliche Aufgaben des Arbeitsblattes; LS S. 14 / Nr.8, 9, 11, 12

Unterrichtsmaterial zum Skript zu Thema 2, Phase 2

Die nachfolgend gezeigte Folienvorlage zu Phase 2 des Stundenskripts für die Erarbeitung der Grundbegriffe zur Prozentrechnung (vergleiche Abbildung 4.3) und ein zugehöriges Übungsblatt vermitteln exemplarisch den Übergang vom Skript zum Prozess.

Folienvorlage zu Phase 2 mit Übungen

Grundbegriffe und Grundaufgaben zur Prozentrechnung

Beispiel 1: Von **32 Schülern** der Klasse 7b sind **8 Schüler** im Schüleraustausch.
Das sind ______ % der Klasse.

Beispiel 2: Max hat sich vorgenommen, im Schwimmbad 36 Bahnen zu schwimmen.
Davon hat er schon 25% geschafft. Das sind _____ Bahnen.

Beispiel 3: 40% der Pfarrwiesenschüler kommen im Mittel mit dem Fahrrad.
Das Pfarrwiesenschulzentrum hat 1500 Schüler.
In den Fahrradständern stehen täglich etwa ______ Fahrräder.

Grundbegriffe bei Prozenten

Das Ganze	Ein Anteil vom Grundwert	Das Verhältnis von **P** zu **G** in %
Grundwert G	**Prozentwert P**	Prozentsatz p%

Abbildung 4.2-1: Folie für die exemplarische Erarbeitung der Grundbegriffe Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz beim Prozentrechnen über Grundaufgaben

Methodische Hinweise für die Lehrperson:

Die Beispiele 1 bis 3 werden zuerst gemeinsam besprochen. Dabei werden die neuen Begriffe mit schon Bekanntem verknüpft. Danach werden die Übungen ausgegeben: Teil 1 ist zur selbstständigen Bearbeitung und für die Präsentation in der Stunde vorgesehen. Teil 2 ist als Hausaufgabe oder Zusatz in der Stunde gedacht, falls jemand mit dem Soll fertig ist.

Übungen zur Prozentrechnung

Abbildung 4.2-2 zeigt zwei inhaltlich-methodische Vorgehensweisen, die für begriffsbegleitende Übungsphasen häufig verwendet wurden. Nach einer initiierten *exemplarischen Begriffsverortung* (die Beispiele der Folie) mussten die Lernenden zuerst analog gestaltete Aufgaben lesen, begrifflich fallunterscheidend zuordnen, lösen und präsentieren. Dabei wurde stets über mehr als nur das Ergebnis der Aufgabe gesprochen. Danach wurden weitere Aufgaben in einem alltagsbezogenen, inhaltlich ganzheitlichen Kontext (hier das Schulzentrum) gestellt, der an das Thema erinnerte (hier das Grundwert-Schulzentrum in Prozenthausen) und motivierte.

Aufgabenblatt zur Prozentrechnung

Teil 1: Grundaufgaben (Beispiele)

Lies den Aufgabentext. Kennzeichne durch Unterstreichen G rot, P blau und p% grün!
Berechne die fehlende Größe, *verwende bei Bedarf den Rechner* .

1. In den Umkleideräumen des Schwimmbades sind 192 Schränke belegt. Das entspricht 75% aller Schränke.
2. Frau Hansen verdient monatlich 1750 €. Davon zahlt sie 250 € auf ein Sparkonto.
3. Das Münchener Olympiastadion war zu 90% besetzt. 60000 Zuschauer fasst das Stadion.
4. Von den 124 Grundschülern kommen 85 zu Fuß in die Schule.
5. 70% der Schüler der Schillerschule tragen einen Rucksack, das sind 294 Schüler.
6. Bei der Bundestagswahl 2005 wurden 47287988 gültige Stimmen abgegeben. Davon entfielen 35,2% auf die CDU.
7. An diesem Montag erhält Frau Piontek 4% mehr Lohn. Das macht 150 € aus.
8. Uli ärgert sich über die Werbung bei Sportsendungen im Fernsehen. Während eines Fußballspiels mit Verlängerung (Dauer 125 min) wird 28 min Werbung gezeigt.

Teil 2: Informationen über das „Grundwert-Schulzentrum in Prozenthausen"

1. 8 Schüler der Klasse 6 mit 32 Schülern besuchen den Förderunterricht.
2. 20% der Schüler einer Klasse mit 30 Jungen und Mädchen kommen mit dem Bus zur Schule.
3. 33 Schüler der Klassen 7a und 7b kommen mit dem Fahrrad zur Schule. Das sind 60% aller Schüler.
4. 15% der 20 evangelischen Schüler der 10a nehmen nicht am Religionsunterricht teil.
5. 8 Schüler der 4a, das sind 25% der Klasse, wollen ins Gymnasium.
6. Nach der 4. Klasse gehen 4 Schüler von 28 in eine weiterführende Schule.
7. 80% aller Hauptschüler in Beerenhausen erhalten eine Siegerurkunde bei den Bundesjugendspielen. In die Schule gehen 85 Jungen und 95 Mädchen.

Abbildung 4.2-2: Aufgabenblatt zu Grundbegriffen der Prozentrechnung, Klasse 7

4.2.9 Rückschau und Erfahrungen

Auch wenn dieses Projekt mit Kolleginnen und Kollegen im Gymnasium in den Pfarrwiesen und im Schickhardt-Gymnasium in Herrenberg schon mehrfach in dieser Studie erwähnt wurde, ist es für den Autor sowohl aus fachlicher Sicht als auch hinsichtlich persönlicher Empfindungen eines, welches am eindrucksvollsten in Erinnerung geblieben ist,

- weil die Initiative für dieses Projekt von den Kolleginnen und Kollegen einer Schule ausging, bei der Simon Zolg, zunächst Lehrer am Gymnasium in den Pfarrwiesen in Sindelfingen und später Lehrer am Schickhardt-Gymnasium in Herrenberg als der Urheber hervorgehoben werden muss (ein Überblick aller beteiligten Personen erfolgt in Kapitel 5),
- weil die Kolleginnen und Kollegen bereit waren, neben ihren unterrichtlichen und schulischen Verpflichtungen über vier Jahre die Zeit aufzubringen, sich drei bis viermal pro Schuljahr zu treffen, um gemeinsam die Konzeptionen für die Themen des Schuljahres zu entwickeln, um danach in zusätzlichen Stunden heimischer Arbeit arbeitsteilig die Detailausarbeitungen zu erstellen und über E-Mail und Telefon-Kontakte gemeinsam abzustimmen,
- da dem Autor im Verlauf dieses Projektes über die praktische Beteiligung bewusst geworden ist, dass sich emotionale Empfindungen, Wahrnehmungen und Einstellungen zum Fachlichen über diese Zusammenarbeit für jeden Teilnehmer persönlichkeitsstärkend auswirkten
- und weil die Sicherheit im Vertreten einer gemeinsam verfassten Sache individuelle Sicherheit gegenüber den Lernenden und ihren Eltern gab.

Das dokumentierte Produkt dieser Arbeit (in Poppers *Welt 3*) sind vier in den Jahren 2010 bis 2014 nach Schuljahren geordnete didaktisch fundierte und unterrichtspraktisch detailliert ausgearbeitete Materialien für die Klassenstufen 7 bis 10 im Gesamtumfang von geschätzt einigen 1000 Seiten, die in den beiden Gymnasien das Schulcurriculum unterstützen und interessierten Fachkolleginnen und Kollegen auch anderer Schulen bei Bedarf zur Verfügung stehen. [301]

Ein für den Verfasser persönlich emotional sehr positiv empfundener Moment nach einem halben Jahr war die Schilderung einer Mutter, die dem Fachlehrer Simon Zolg anlässlich eines Elternabends berichtete: „*Stellen sie sich mal vor, gestern beim Abendessen in unserer Familie sagt unser Sohn spontan und ohne Bezug zu Gesprächen davor:* ***Mama, ich glaube, Mathematik kann man wirklich gebrauchen.*** *“*

Für einen Lehrenden ist dies ein wohltuendes Kompliment für seine unterrichtlichen Bemühungen.

[301] Für eine fachinhaltliche Orientierung siehe Abschnitt 3.5.2, Abbildung 3.48.

4.3 Entwicklung des Zahlbegriffs in den Klassenstufen 1 bis 6

Die Entwicklung des Zahlbegriffs in der Grundschule und in weiterführenden Schulen bis zur Klassenstufe 6 wird an geeigneten ausgewählten Unterrichtseinheiten dargestellt. Der Schwerpunkt liegt auf der Begriffsentwicklung und nicht auf den dabei sich entwickelnden Rechenfertigkeiten, die, was die formalen Fertigkeiten betrifft, nach Meinung des Verfassers unabhängig von der Begriffsbildung erfolgen sollte. Nicht thematisiert werden hier solche Unterrichtsstunden, in denen konkrete algorithmisch-formale Fertigkeiten trainiert werden, wie etwa schriftliche Rechenoperationen im Umgang mit Dezimalzahlen. Das nachfolgend dargestellte jahrgangsstufen-übergreifende Konzept zeichnet sich dadurch aus, dass für begriffsbildungsförderliche Handlungen zur Entwicklung des Zahlverstehens in der Grundschule anfangs stets wieder mit dem gleichen Material – Bauwürfeln mit einer Kantenlänge von 2 cm – gearbeitet wird, bevor andere konkrete Handlungen und abstraktere Verortungen folgen. [302]

Lernende der ersten Klasse einer Grundschule besitzen Vorerfahrungen zum Zählen. Sie können kleine Anzahlen im „Zahlraum von 1 bis 20“ [303] über ein rein visuelles Vermögen direkt benennen und verwenden darüber hinaus ein „Zählen mit den Fingern“. Das Konzept für den Übergang zu einem abstrakt-begrifflich verorteten Zahlverständnis orientiert sich am Umgang mit Zahlen von 1 bis 20 bzw. 1 bis 100. [304]

Die praktische Durchführung wurde in Abstimmung mit der Fach- bzw. Klassenlehrerin Ingrid König ab 2016 in der ersten Klasse zunächst für als „rechenschwach“ eingestufte Schülerinnen und Schüler angewendet und in der zweiten Klasse weitergeführt. [305] Im März 2018 wurde eine Unterrichtseinheit zur Einführung des „Kleinen Einmaleins“ für die ganzen Klasse durchgeführt. Die dem Unterricht vorausgehenden Planungen sind dieselben wie in den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 beschrieben.

4.3.1 Von der „Zählsprache“ zur „Zahlsprache“, Grundschule Klasse 1 [306]

Inhaltliche Voraussetzungen

In der ersten Klasse verfügen die Lernenden über ein propädeutisches Wissen von Zahlen aus alltäglichen Erfahrungen. Sie bestimmen zunächst mit Hilfe der Finger-Zählung „Anzahlen“ und verwenden dabei eine „Zählsprache“ mit den Worten eins, zwei, drei …, bei der das

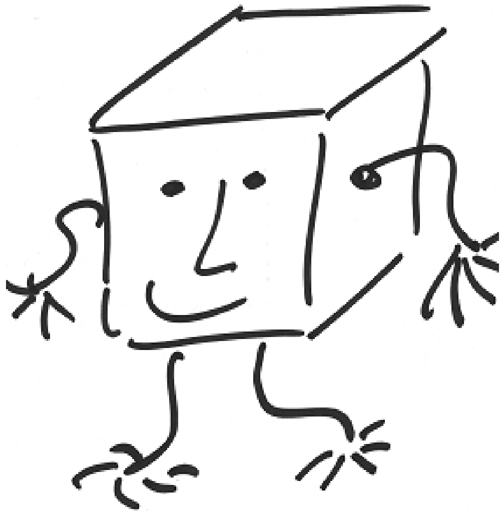
---

[302] Vgl. Abbildung 4.2.1
[303] Der Bildungsplan sieht für die Klasse 1 der Grundschule den Zahlbereich von 1 bis 20 vor.
[304] Nach den Vorgaben des Bildungsplans in Baden-Württemberg für die Klassenstufen 1 und 2 an Grundschulen.
[305] Ingrid König ist Grundschullehrerin mit den Schwerpunktfächern Mathematik und Musik an der Thiebauth-Schule in Ettlingen.
[306] Vgl. Abschnitt 3.2

jeweils nächste Objekt, auf das der Finger zeigt, den Namen erhält, der mit der Anzahl der bisher gezeigten Objekte übereinstimmt. [307] In einfachen Fällen werden Anzahlen ganzheitlich auch rein visuell erfasst und entsprechend mit dem „Zahlnamen“ verknüpft.

Primär konkretes Handeln

Für den Unterrichtsgang wird als begleitendes Motiv die „Welt der Würfelzwerge“ verwendet. Über spielerisch-phantasievolles Gestalten und Analysieren im Zusammenwirken mit konkreten Handlungen und kognitiver Verortung werden über den Wunsch, „zählen zu können“, Vorstellungen zum Zahlbegriff entwickelt und eine propädeutische Rechensprache ausgebildet.



Motivierender Einstieg - Baumeister werden im Land der Würfelzwerge

Im Land der „Würfelzwerge“ werden die Gebäude aus „Zwergwürfeln“ gebaut. Von diesen gibt es genügend viele, da es einen großen Zwergwürfelberg gibt und von dort immer wieder Lieferungen bestellt werden können. Abbildung 4.3-1 zeigt einen „Würfelzwerg“ und eine „Lieferung von „Zwergwürfeln“. Die Lerngruppe wird darauf vorbereitet, dass sie in diesem Land eine „Baumeisterlehre“ machen sollen, da ein berühmter Baumeister bald in Pension gehen wird und nochmals eine Meisterklasse ausbilden möchte.

Abbildung 4.3-1: Eine Zwergwürfel-Lieferung im Land der Würfelzwerge

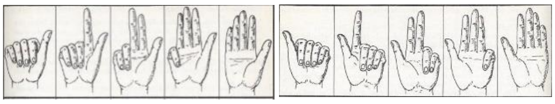
Stufe 1: Zählen von Eins bis Zehn mit Fingern und Zählworten

Eine Zwergwürfel-Lieferung soll „gezählt“ werden. Das Vorgehen ist individuell, soll aber sprachlich beschrieben werden. Für die am häufigsten genutzte Zehn-Finger-Methode wird eine Assoziation zwischen visueller Darstellung und sprachlich strukturierter Beschreibung hergestellt und mit der alltäglich gewohnten Zählsprache verknüpft.

---

[307] Hier ist es nicht angebracht, schon von Zahlworten zu sprechen, da ein kognitiv erfasstes Zahlwort, das für die Gesamtzahl der Objekte steht, einen kardinalen Aspekt hat.

1.1 Zwergwürfel: Lieferungen zählen, Anzahlen aussprechen und schreiben

Beschreibung	Aktionen
Zwergwürfel-Lieferungen werden mit der Fin-  germethode gezählt. Dabei wird (laut) gesprochen. *Zählworte*: eins, zwei, drei … zehn	Lernende erhalten Zwergwürfel-Lieferungen und sollen deren Anzahl in Partnerarbeit bestimmen. Ein Partner zählt mit den Fingern. Beide sprechen dazu laut die Zahlworte. Ein Umschichten der Lieferung erleichtert das Zählen. [308]

Anregungen für Aufgabenformate [309]

- Eine Lieferung von Zwergwürfeln liegt vor. Es soll die Anzahl der Würfel bestimmt werden, indem ein Reihenbau gelegt wird. Die zugehörige Anzahl wird bestimmt.

- Ein Partner nimmt eine (noch unbestimmte) Anzahl von Zwergwürfeln, die vom anderen mit der Hand-Methode gezählt wird; der Partner spricht das zugehörige Zahlwort aus.

- Ein Partner zeigt zwei Hände, bei denen einige Finger gestreckt und andere gekrümmt sind. Der andere bestimmt die Anzahl der gestreckten und gekrümmten Finger mit einer persönlichen Zähl-Technik und spricht das Ergebnis: „Das sind … Würfel.“

1.2 Reihenbauten herstellen und für die Zählung variieren

Allmählich wird auf die Finger-Darstellung verzichtet, die Fingerzählung wird rein sprachlich verwendet. Es werden spezielle Gebäudeformen gelegt, sprachlich beschrieben und die benötigte Würfelanzahl bestimmt. Verkürzte Sprechweisen werden als Vorstufen einer Rechensprache eingeführt.	Mit einer Zwergwürfel-Lieferung wird ein Reihenbau hergestellt. Die Anzahl der verwendeten Zwergwürfel (ZW) wird ermittelt. Beispiel: Ausgangssituation 8 ZW in einer Reihe werden aufgeteilt in einen 3er und einen 5er Reihenbau. Die Situation wird sprachlich beschrieben: „Ein Dreier- und ein Fünfer-Bau benötigt acht ZW. Kurz: Drei und fünf ist acht, zehn ist fünf und fünf.

[308] Hinsichtlich der mentalen Verortung sollte hier der Lehrperson bewusst sein, dass es um eine Zerlegung in erste Hand (von 1 bis 5) und eine ab 5 hinzukommende zweite Hand geht, während die alltagsgewohnte Zählsprache durchgängig gesprochen wird.

[309] Die Aufgabenstellungen sollten durchgängig für Partner- oder Gruppenarbeit geeignet sein, da der sprachliche Anteil entscheidend zur Begriffsbildung beiträgt und eine Kommunikation unter den Lernenden stattfinden soll.

Anregungen für Aufgabenformate:

- Eine ungeordnete einschichtige Zwergwürfel-Lieferung wird ohne weitere Aktionen gezählt.

- Eine (ungezählte) Lieferung von Zwergwürfeln liegt vor. Damit wird ein Reihenbau gelegt und dabei die Anzahl der Zwergwürfel bestimmt und gesprochen.

- Reihenbauten werden beschrieben. Eine Würfelbestellung wird aufgegeben zum Nachbauen der Objekte.

- Ein Foto zeigt einen Reihenbau. Die Anzahl der Würfel soll bestimmt werden.

- Ein vorliegender Reihenbau wird aufgelockert durch Auftrennung. Der Partner bestimmt die Gesamtzahl der Würfel durch entsprechendes sprachliches Beschreiben.

- Es werden Turmbauten gezeigt. Die Lernenden sollen erkennen, dass die Zählmethode die gleiche ist wie beim Reihenbau.

1.3 Variieren von Gebäuden und sprachlich-strukturierendes Zählen

Übergang zu einer Beschreibung von Flachbauten mit einer formentsprechenden sprachlichen Beschreibung im Sinne einer propädeutischen Rechensprache, bei der bei gleicher Anzahl von Würfeln variierend gebaut wird.	Mit ZW-Lieferungen Flachbauten bzw. Würfelzwerg-Hallen herstellen und beschreiben. Zum Beispiel ist ein „Zwei-mal-vier-Flachbau“ auch ein „Vier-mal-zwei-Bau“. Man benötigt dafür acht Zwergwürfel.

Anregungen für Aufgabenformate:

- Es wird eine neue Bauform verwendet: Rechteck-Flachbauten. Ein Flachbau liegt vor. Seine Form wird strukturiert beschrieben und die Anzahl der Zwergwürfel ausgesprochen.

- Mit einer Zwergwürfel-Lieferung wird ein Flachbau gebildet; seine Bauform wird beschrieben und die Anzahl der ZW bestimmt. Dann sollen möglichst viele Variationen von Rechteck-Flachbauten mit gleicher Anzahl von Zwergwürfeln gebaut werden.

1.4 Objekte analysieren und mit Würfelbestellungen nachbauen

Beim Übergang von der Zählsprache zur Zahlschreibweise wird abkürzend die übliche Ziffernschreibweise eingeführt. Geschrieben wird 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, gesprochen wird wie bisher. Verknüpfungsworte *und, weniger, mal* … werden ausgeschrieben.

Vorgegebene komplexere Würfel-Bauten als dreidimensionale Körper werden gedanklich oder handlungsorientiert zerlegt. Die Zerlegung wird sprachlich beschrieben und für die Bestimmung der Anzahl der verwendeten Würfel verwendet.	Üben an Beispielen Beispiel: Ein gebauter Turm liegt vor. Er ist fünf Zwergwürfel hoch und hat zusätzlich einen Reihen-Anbau aus 3 Würfeln.

Stufe 2: Erweiterung des Zahlbereichs auf 1 bis 20

Diese Stufe wird inhaltlich entsprechend Stufe 1 gestaltet. Die gebauten Objekte werden zunehmend komplexer. Zusätzlich wird ein Bauplan nach dem Prinzip eines Grundrisses zum Bau von Würfelgebäuden verwendet, der Transferaufgaben vom 2D-Plan zum 3D-Bau und umgekehrt ermöglicht: Zu Würfelbauten können Pläne geschrieben und es kann nachgebaut werden. Abbildung 4.3-2 erläutert dies ohne weitere Worte.

			2			**2**			
1	**1**	**1**	**2**			**2**	**1**	**1**	**1**
			2			**2**			

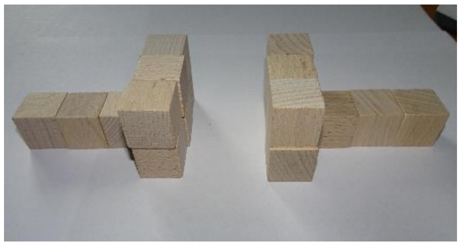


Abbildung 4.3-2: Plan eines Würfelobjektes und Foto einer Realisierung

Entscheidend für die Ausbildung des Zahlbegriffs sind in dieser Phase das „Sprechen zum Schreiben“ und die Kommunikation, angeregt über Partner- und Gruppenarbeit. Über das geordnete Bauen wird eine beschreibende *Zählsprache* entwickelt. Werden zum Beispiel zwei mal vier Zwergwürfel in ebener Rechteckform (als Würfelhalle) gelegt, wird die Bestellung der Würfel für das Bauwerk mit dem *Zählsatz* „Zwei mal vier ist acht“ bzw. „Vier mal zwei ist acht“ beschrieben (je nach jeweiliger Sichtweise des Betrachters). Auch zusammengesetzte Bauten (vgl. Abb. 4.3-2) können gedanklich oder ggf. handelnd aufgeteilt oder gebaut und entsprechend dieser Zerlegung in Zählsprache übersetzt und damit als strukturiertes Zählen (als propädeutische Vorstufen des Rechnens) angesehen werden.

Diese Zählsprache soll das sequentielle Zählen mit den Fingern nach und nach durch kognitive Konstruktionen ersetzen, über die auch größere Anzahlen des Zahlraums ganzheitlich „erfasst“ sind.

Beobachtungen und Erfahrungen

Teile der bisher beschriebenen Vorgehensweise wurden als Förderunterricht für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler einer ersten Klasse in Gruppen zu zwei bis vier Personen im Schuljahr 2016/17 angeboten. Für eine evaluationsgeeignete Durchführung mit der gesamten Klasse war der Unterricht schon zu weit fortgeschritten.

Die zunächst vorherrschende Zählmethode war das Fingerzählen. Insbesondere dann, wenn mit Bauplänen gearbeitet wurde, entstand eine Asymmetrie beim Feststellen der Anzahl der jeweils verwendeten Würfel. Die meisten Lernenden waren nicht in der Lage, die Gesamtzahl der Würfel aus dem Plan zu bestimmen. Über das realisierte Würfel-Gebäude selbst gelang dies in der Regel fast immer – ein Hinweis auf die Grundproblematik des Verstehens von Mathematik bei zu früher Abstraktion bei Darstellungen.

Unabhängig von Schwierigkeiten beim Umgang mit Zählmethoden waren alle Beteiligten in der Lage, symmetrische Anordnungen wahrzunehmen und heuristisch zu nutzen: „Das ist ja auf beiden Seiten gleich, da muss ich ja nur die eine Seite zählen“, waren Antworten in Situationen wie zum Beispiel in Abbildung 4.3-2, die selbst schon im Plan (ohne gebaut zu haben) erkannt wurden als symmetrisches Zahlenmuster. Insbesondere sprechen die gemachten Erfahrungen beim Autor für die These, dass der Übergang von der linearen Finger-Zählsprache in strukturierte Zahlvorstellungen in der ersten Klasse behutsam erfolgen muss. Erstklässlern - und nicht nur diesen - muss das Fingerzählen so lange erlaubt sein, bis sie es selbst als nicht mehr notwendig ansehen, selbst in dem scheinbar so begrenzten Zahlbereich von 1 bis 20.

4.3.2 Zahldarstellungen und elementares Rechnen in Klasse 2 [310]

Entsprechend der Vorgaben des Lehrplans wird in der Klassenstufe 2 der Grundschule der Umgang mit Zahlen erweitert auf den Zahlbereich von 1 bis 100. Dabei sollen folgende Erfahrungen und Grundtechniken im Umgang mit Zahlen vermittelt werden:

- die Zerlegung von Zahlen in „Einer“ und „Zehner“ und deren Zusammensetzung,
- Sprechweisen der Zahlen und Schreibweisen mit dem Zerlegungsprinzip verknüpfen,
- elementare Rechentechniken entwickeln mit Hilfe des Zerlegungsprinzips.

Eine handlungsorientierte Erarbeitung dieser Lernziele lässt sich über Aktivitäten in der „Welt der Würfelzwerge“ assoziativ kognitiv verorten und dabei abstraktere Zahlvorstellungen

[310] Diese Unterrichtseinheit wurde in Teilen in der Klasse 2 der Thiebauth-Schule in Ettlingen zusammen mit der Klassenlehrerin Ingrid König getestet und außerdem mit rechenschwachen Schülerinnen und Schülern in Kleingruppen angewendet.

entwickeln. Neue konkrete Problemstellungen, die mit dem bisherigen Wissen nicht oder nur sehr umständlich zu lösen sind, lassen sich über didaktisch aufbereitete Materialien in szenische Situationen einbetten, welche bisher erworbene Kenntnisse verknüpfen und hinsichtlich des Zahlbereiches erweitern.

Im Folgenden werden dazu nur zentral begriffsfördernde Handlungen beschrieben und dabei exemplarisch eine unterrichtliche Umsetzung skizziert. Als motivierender Einstieg und Erinnerung an das letzte Schuljahr kann die Klasse zur Baumeisterklasse für das Land der Würfelzwerge deklariert werden, die z. B. vom berühmten Baumeister Franz Siedler ausgebildet wird.

Stufe 1: Umgang mit größeren Anzahlen von Würfeln - von der sequentiellen zur dezimal strukturierten Zahldarstellung

Im Land der Würfelzwerge werden immer größere Bauten hergestellt. Es müssen deshalb bessere Methoden für das Bestellen von Würfeln und das Zählen von Würfelbergen gefunden werden. Abbildung 4.3-3 zeigt Beispiele solcher Bauwerke, die nach ihrer charakteristischen Anordnung Reihenbauten, Hallenbauten usw. genannt werden. Deutlich wird auch, dass ein großer Würfelberg nicht direkt gezählt werden kann.

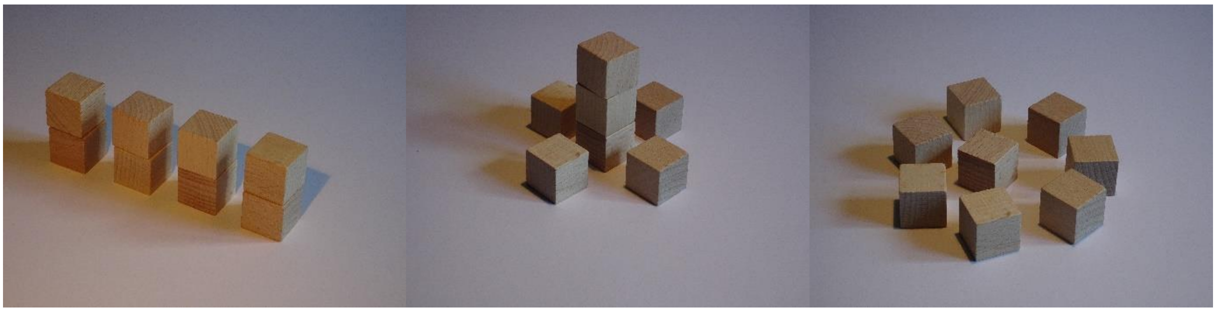


Abbildung 4.3-3: Gebäude in der Welt der Würfelzwerge

Um in solchen Situationen die Anzahl der Würfel zu bestimmen, hat Franz Siedler ein berühmt gewordenes Verfahren entwickelt, für das er ein *Zählblatt* wie in Abbildung 4.3-4 verwendet. Wenn eine große Ansammlung von Würfeln gezählt werden soll, werden die Würfel einzeln zunächst in das Einer-Feld gelegt. Wenn dort 10 Würfel liegen, werden sie aus dem Einer-Feld genommen und dafür wird in das Zehner-Feld ein sogenannter *Zehnerknopf* gelegt. Dies wird solange weitergeführt, bis der letzte Würfel auf das Zählblatt gelegt ist. Abbildung 4.3-4 zeigt einen solchen Endzustand. Diese Situation kann in die gewohnte Schreibweise von Zahlen übersetzt werden, indem die Anzahl der Zehner-Knöpfe und die Anzahl der restlichen Einer-Würfel in die Tabelle übertragen und die zugehörige Zahl aufgeschrieben wird. Werden das Zehner- und Einer-Feld geleert, kann eine weitere Würfellieferung gezählt werden.

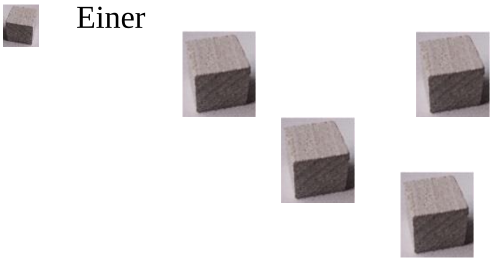
Würfel zählen mit dem Zählblatt	Zehner	Einer	Zahl
Zehner 	3	4	34
Einer 			

Abbildung 4.3-4: Das vorliegende Zählblatt erlaubt einen handlungsorientierten Übergang von der sequentiellen Zählweise in eine dezimale Zahldarstellung. [311]

Stufe 2: Dezimale Zahldarstellung und elementar-mentale Rechentechniken

Zwei Zahldarstellungen in Abbildung 4.3-5 stellen die Veränderungen des Übergangs vom sequentiellen Zählprinzip zur Darstellung im Dezimalsystem im Bereich von 1 bis 100 dar.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100									

Abbildung 4.3-5: Übergang vom sequentiellen Zählprinzip (links) zur „Verortung“ der Zählzahlen im Zehnersystem (rechts)

[311] Mit diesem Zählblatt können Übungen in beide Übersetzungsrichtungen durchgeführt werden. Eine Transformation von der Ziffernschreibweise in die entsprechenden Felder war für die Lernenden in einer Übung dadurch erschwert, weil in der damaligen Version die ikonische Unterstützung fehlte, die in der Abbildung nun hinzugefügt wurde. Diese Transformation ist für Lernende dieser Altersstufe nicht einfach, weil die Sprechweise der Zahl im Hunderterraum von der gewohnten Schreibweise von links nach rechts abweicht.

Beim Übergang zu einer Anordnung in 10er-Blöcken beginnt eine neue Zeile jeweils mit einer Zehnerzahl und wird dann entsprechend weitergeführt. Dabei entsteht im ersten Feld eine Lücke, die durch die Null ergänzt wird. An Ende der Tabelle fällt letztlich die Zahl 100 aus dem 10x10-Raster und vermittelt visuell, dass dieses Zählprinzip fortsetzbar ist. Selbst bei einer unterrichtlichen Durchführung mit einer als rechenschwach eingeschätzten Gruppe ergänzten die Lernenden ohne weitere Aufforderung die Null im ersten Feld und schrieben in die leeren Felder der letzten Zeile die Zahlen 101 bis 109. [312]

Bei diesem Übergang finden zwei mentale Veränderungen in der Wahrnehmung von Zahlen statt, die bei der unterrichtlichen Vermittlung erwähnt werden müssen. Die Null ist nun nicht mehr die Abkürzung für „Nichts“ (i. S. v. es gibt nichts zu zählen). Die Null wird hier selbst zur Zahl, indem sie einen Platz im Zahlschema erhält. Entsprechend zeigt sich die Zahl 100 als erste Zahl, für deren Schreibweise drei „Zeichen“ benutzt werden. [313] Entscheidend für die Nachhaltigkeit ist jedoch, dass das neue Darstellungs- und Denkprinzip abschließend in einer geeigneten Darstellung ausgehändigt wird. Abbildung 4.3-6 zeigt eine dazu passend gestaltete Tabelle, aus der das Zerlegungs- und Zusammensetzungsprinzip der Zahlen im Sinne der bisherigen begrifflichen Aneignung verstanden und genutzt werden kann.

		Einer									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Zehner	**0**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
	5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
	6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
	7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
	8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
	9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
	10	100									

Die Zahlen von 1 bis 100

geordnet nach

Zehnern und Einern

Abbildung 4.3-6: Übergang zum Stellenwertverständnis durch veränderte Bedeutung der Ziffern als Stellenwerte.

[312] Der Autor überlässt es dem Leser, sich seiner These anzuschließen, dass die Gruppe hier erfinderisch tätig war.

[313] In der zweiten Klasse wurde bei diesem Unterrichtsgang keine Unterscheidung zwischen Zahl und Ziffer verwendet, weil dies hinsichtlich des Zahlbereiches eine noch unnötig belastende Begriffsverwendung dargestellt hätte.

Im Unterricht sollte dieses Darstellungsprinzip nicht nur um seiner selbst willen verwendet werden. Vor der nächsten Begriffserweiterung müssen diese Zähltechniken handlungsorientiert geübt worden sein. Dabei können Würfelbauten herangezogen und geeignete Zerlegungen bzw. zerlegende Beschreibungen mit Zähltechniken bzw. Rechentechniken mit Zahlen dazu benutzt werden, Würfelanzahlen zu *berechnen*. Abbildung 4.3-7 zeigt exemplarisch dafür geeignete Würfelbauten, die entsprechend ihrer Form auch *Reihenbauten*, *Hallenbauten*, *Turmbauten* oder *Würfelsiedlung* genannt werden.

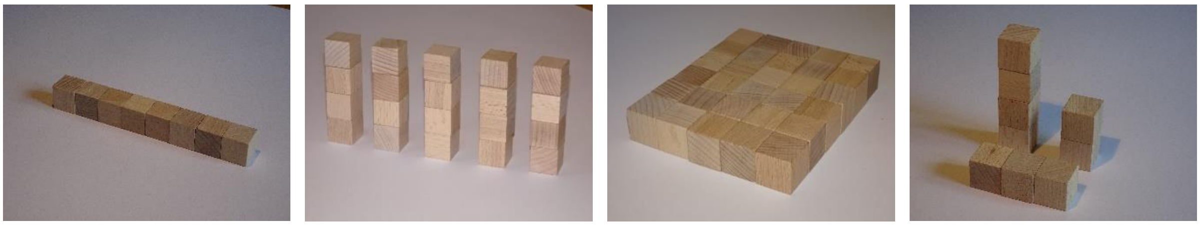


Abbildung 4.3-7: Beispiele für strukturierte Würfelbauten

Über solche praxisnahen Anwendungen wird ein mathematischer Umgang mit Additions- und Subtraktionsaufgaben zu Zahlen hergestellt. Die begriffliche Festigung kann hier anfangs durch eine farbliche Hervorhebung visuell unterstützt werden, wenn die Zahlen entsprechend ihrer Zerlegung nach Abbildung 4.3-7 variiert geschrieben oder nur derart vorgestellt sind.

Soll beispielsweise die Aufgabe 15 + 24 gelöst werden, kann die vorübergehende Darstellung oder Vorstellung

15 + 24 = 15 + 24 = (1 + 2) Zehner + (5 + 4) Einer = 3 Zehner und 9 Einer = 39 = 39
die neue Rechenstrategie unterstützen. [314]

Stufe 3: Das „kleine Einmaleins“ – eine rechnerische Analogie zu strukturiertem Zählen

Die Unterrichtseinheit hat als Ziel, über eine strukturierte Beschreibung bei Hallenbauten eine Zählmethode zu entwickeln, die zu einer tabellarischen Übersicht führt, die mit einer klassischen Einmaleins-Tabelle zahlenmäßig und in der Sprechweise übereinstimmt, aber jederzeit mit baulichen Vorstellungen in der Würfelzwerge-Welt assoziiert ist.

Nachfolgend sind die Phasen der Stunde kurz beschrieben: Die Klasse mit 20 Schülern sitzt an Bänken in Zweiergruppen. Da nicht alle Lernenden die Würfelwelt kennen, wird ein Plakat mit einem Würfelzwerg gezeigt. Franz Siedler, der erfahrene Baumeister in der Welt der

[314] Die schriftliche Darstellung soll den Denkprozess der Lernenden veranschaulichen und nicht die schriftliche Dokumentation eines Lernenden. In solchen Phasen sind Grundschüler dieser Klassenstufe sonst zu sehr mit syntaktischen Techniken beschäftigt. Sprechen und denken ist hier wichtiger als schreiben.

Würfelzwerge, hat feste Regeln aufgestellt, nach denen gebaut werden darf: Es gibt Reihenbauten und Hallenbauten.

- Als erstes Beispiel wird ein Hallenbau mit 6 Würfeln gelegt. Dazu wird an der Tafel und auf einem Schülerblatt zur Beschreibung eine „Rechnung“ aufgeschrieben. Z. B. gehört zur Halle aus 2 Reihen mit je 3 Würfeln die Rechnung $2 \cdot 3 = 6$ oder auch $3+3 = 6$.
- Vom Baumeister wird zunächst ein Reihenbau mit 12 Würfeln gelegt, den die Gruppen ebenfalls legen. Erste Aufgabe ist, aus diesen 12 Würfeln einen Hallenbau zu erstellen und die zugehörige Rechnung zu schreiben.
- Die Gruppen finden Lösungen und schreiben zugehörige Rechnungen auf.
- Die Ergebnisse werden gesammelt und vom Baumeister an die Tafel geschrieben.

Die Gruppen erhalten den Auftrag, mit 24 Würfeln [315] möglichst viele unterschiedliche Hallen zu bauen und die jeweils zugehörigen Rechnungen aufzuschreiben. Zugehörige Rechnungen werden an der Tafel gesammelt.

Hierbei wird erfahren, dass das Sehen bzw. die Vorstellung „Denken in Reihen und Anzahl der Würfel pro Reihe“ eine Symmetrie aufweist. Wegen der Invarianz der Anzahl der Würfel gilt für die Rechnungen die Kommutativität. Z. B. ist 3 mal 4 gleich 4 mal 3 usw.

Übungen mit zwei oder drei Durchgängen in Partnerarbeit (paar- bzw. bankweise)

Bankweise werden 24 Würfel ausgeteilt.

Abwechselnd baut jeweils eine Person eine Halle, die andere beschreibt die Situation, bestimmt die Anzahl der Würfel und spricht die zugehörige Rechnung aus. Die Rechnungen werden aufgeschrieben.

- Es wird ein „Rechenblatt für Hallenbauten“ ausgeteilt und sein Gebrauch erklärt (siehe Abbildung 4.3-8, nächste Seite). Dort werden exemplarisch solche Felder ausgefüllt, zu denen schon konkret gebaut wurde.
- Es werden Vorstellungen geübt: Stellt euch einen von einer Person beschriebenen Hallenbau vor und schreibt eine zugehörige Rechnung auf. Stellt euch einen Hallenbau aus ... Würfeln und gebt die zugehörige Rechnung an (das Bauen ist bei Bedarf immer noch erlaubt).

Die zahlenmäßige Repräsentation dieses Rechenblattes ist das kleine Einmaleins. Aber bei

[315] Mit 24 Würfeln können unter der Annahme einer Unterscheidung in Anzahl der Reihen und Anzahl der Würfel einer Reihe insgesamt 6 verschiedene Hallenformen gebaut werden, von denen jeweils zwei eine kommutative Darstellung besitzen. Der Spezialfall einer einreihigen Halle mit 24 Würfeln (ein Reihenbau) wurde von der Klasse nicht genannt und von der Lehrperson an dieser Stelle nicht thematisiert.

seiner Erstellung können die Lernenden hinsichtlich der Vorstellungen und Handlungen wechseln zwischen reiner Rechnung, dem Plan der Halle im Grundriss und dem Bau einer konkreten Halle. Nach ausführlichem Üben wird der Hallenbauplan ergänzt mit einer reinen Einmaleins-Tabelle.

Hallenbau nach Plan											
mal		Zwergwürfel in einer Reihe									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reihen	1										
	2										
	3										
	4										
	5						30				
	6										
	7										
	8										
	9										
	10										

Abbildung 4.3-8: Vom Hallenbau zum kleinen Einmaleins: eine „fünf mal sechs“- Halle wird mit 30 Zwergwürfeln gebaut usw.

Ausblick und Weiterführung

Dieser Unterrichtsgang ist vielseitig anschlussfähig. Da er ebene und räumliche geometrische Formen mit zahlenmäßigen Operationen verknüpft, kann er für das Messen von Strecken, Flächen und Körpern verwendet werden (vgl. Abbildung 3.25, S. 115). Auch Rechenstrategien für Aufgaben wie etwa 9·17 = 9·10 + 9·7, die das Zerlegungsprinzip des Dezimalsystems verwenden, können damit visualisiert unterstützt werden. In späteren Klassenstufen können Rechenstrategien bei Zahltermen und Termen mit Variablen ikonisch dargestellt werden. Hierbei findet allmählich auch eine Erweiterung von diskreten zu kontinuierlichen Vorstellungen bei der Verwendung von Variablen statt (vgl. Abschnitt 3. 5.7 und speziell Abb. 3.55, S. 164).

4.3.3 Einführung der Bruchzahlen über Grundvorstellungen

Die Unterrichtseinheit wird knapp skizziert als Anregung für Lehrende in Klasse 5 und 6. Die Begriffsbildung ist in fünf Stufen gegliedert, in denen vom Anteils- und Operatoraspekt ausgehend Bruchzahlen zu eigenständigen Zahlobjekten entwickelt werden, mit denen gerechnet werden kann.

Voraussetzungen

Die Stellenwert-Schreibweise für natürliche Zahlen im Zehnersystem ist bekannt. Die Schüler können mit natürlichen Zahlen schriftlich und in einfachen Fällen im Kopf rechnen. Der Zahlenstrahl ist als Darstellungsform für natürliche Zahlen eingeführt: Eine Zahl entspricht einem Punkt (ihrem Wohnort) auf dem Zahlenstrahl und ist Längenmaßzahl einer Strecke, gesehen von Null aus bis zum entsprechenden Punkt.

Ein **Lernziel** ist die Entwicklung eines Bruchzahlbegriffs aus Grundvorstellungen der Anteilsbildung im Alltag und einer operationalisierten (allgemeinen) Beschreibung der Handlungen durch *Brüche*, die, angewendet auf die Einheitsstrecke des Zahlenstrahls bzw. die Eins, Wohnorte für Bruchzahlen liefern.

Die **Begriffsentwicklung** erfolgt in vier Stufen

Stufe 1: Anteile werden durch *Brüche* dargestellt

Konkrete Handlungen werden über Sprechweisen und Schreibformen operationalisiert. Das Bilden von Anteilen eines konkret wahrnehmbaren Ganzen in alltäglichen Situationen wird mithilfe von *Brüchen* charakterisiert und sprachlich bzw. schriftlich ausgedrückt:

Ein *Bruch* beschreibt den Vorgang einer Anteils-Bildung durch Aufteilen und Vervielfachen:

Drei Fünftel (geschrieben $\frac{3}{5}$) bedeutet: Teile das Ganze in fünf Teile und nimm davon drei.

Ein Viertel (geschrieben $\frac{1}{4}$) bedeutet: Teile das Ganze in vier Teile und nimm davon einen.

Geeignete Aufgabenstellungen: Alltags-Vorgänge zu Aufteilungen konkret ausführen und beschreiben. Die neue Sprech- und Schreibweise einführen und verwenden.

Stufe 2: Anteile und *Brüche* bei geometrischen Figuren und Körpern

Es wird eine Abstraktion der Objekte vorgenommen, auf die sich die Handlung bezieht, indem *das Ganze* durch geometrische Formen repräsentiert wird. Anteile werden konkret bzw. gedanklich bei geometrischen Objekten gebildet, wie zum Beispiel bei Rechtecken und Kreisflächen und Körpern. Dazu werden jeweils geeignete Darstellungsformen verwendet mit Hilfe von Gitternetzen, zum Beispiel über aus Würfeln zusammengesetzte Körper.

Stufe 3: Aus *Brüchen* werden *Bruchzahlen*

Durch Anteilsbildungen auf die Einheitsstrecke des Zahlenstrahls wird *Brüchen* ein Punkt als Wohnort zugeordnet. Dabei werden die Anteilsbezeichner zu Zahlsymbolen mit syntaktisch gleicher Schreibweise wie der zugehörige Bruch. Die ***neuen*** Zahlen heißen Bruchzahlen (vgl. Abschnitt 3.4.3).

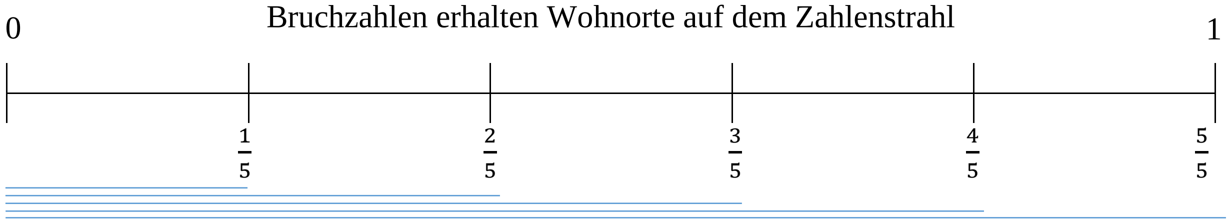


Abbildung 4.3-9: Zu jedem Bruch gibt es eine Bruchzahl (Punkt) und eine Teilstrecke (blau) der Einheitsstrecke.

Bemerkungen: Passend gewählte Aufgaben sollen insbesondere vermitteln, dass die Bezeichner für eine Bruchzahl mehrdeutig sind. Zum Beispiel *wohnt* die Bruchzahl $\frac{2}{3}$ an der gleichen Stelle wie $\frac{4}{6}$. Deshalb haben diese Bruchzahlen den gleichen *Zahlenwert*. Wir schreiben deshalb $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ und nennen zwei Bruchzahldarstellungen gleich (wertgleich), wenn sie denselben Punkt als Wohnort haben. Eine Eindeutigkeit der Darstellung bei Bruchzahlen wird dadurch erreicht, dass wir eine gekürzte Darstellung verwenden, bei der Zähler und Nenner keine gemeinsamen Teiler mehr haben. [316]

Stufe 4: Mit Anteilen umgehen und Anteile *mit Bruchzahlen rechnerisch bestimmen*

Das Rechnen mit Bruchzahlen soll als abstrakt-operationalisierte Analogie zu Anteilsbildungen eingeführt werden. Das *Zusammenfügen* oder voneinander *Wegnehmen* unterschiedlicher Anteile bezogen auf ein Ganzes kann als neuer Anteil des Ganzen gesehen werden. Derart gebildete Anteile kann man mit Hilfe von Bruchzahlen bestimmen, indem man *rechnet*. Dabei wird die ***Strategie des Erweiterns und Kürzens*** von Bruchzahlen eingesetzt und das intuitiv vorhandene Wissen genutzt, dass man bei Anteilen mit gleichem Nenner das Zusammenfügen additiv und das Wegnehmen subtraktiv ermitteln kann.

Stufe 5: Reflexion und Dokumentation des Wissenszuwachses

Eine Ausführung hierzu ist schon in Kapitel 3 erfolgt (vgl. den Abschnitt Bruchzahlen in 3.4.2). Dort wird auch die Multiplikation und Division von Bruchzahlen eingeführt und der Wissenszuwachs dokumentiert (zum Beispiel entsprechend der Übersicht in Abbildung 3.41).

---

[316] Es ist zu beachten, dass bei einer konkret oder gedanklich ausgeführten Anteilsbildung der Anteil $\frac{2}{3}$ nicht dasselbe ist wie der Anteil $\frac{4}{6}$.

4.3.4 Die Bevölkerung der Zahlengeraden

Eine spielerische Einführung der Addition und Subtraktion bei ganzen Zahlen [317]

Die Unterrichtseinheit führt über eine symmetrische Erweiterung des Zahlenstrahls der natürlichen Zahlen die ganzen Zahlen ein. Der Unterricht ist dabei so gestaltet, dass die Schülerinnen und Schüler selbstständig erfinden, wie man mit diesen Zahlen rechnet. Vorausgesetzt wird eine Behandlung der natürlichen Zahlen mit einer Visualisierung auf einem Zahlenstrahl, ihrem Wohnort, und einer möglichst sicheren Beherrschung des mündlichen Rechnens in den vier Grundrechenarten in einem der Klassenstufe angemessenen Zahlbereich. Die Unterrichtseinheit soll den Lernenden das eigenständige Formulieren der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen ermöglichen. Nachfolgend wird ein Unterrichtsgang für eine Doppelstunde in der Klasse 5/6 skizziert. [318]

Vorbereitung: Vor der Doppelstunde wird ein raumlanger, stärkerer Papierstreifen im Klassenzimmer befestigt, auf dem eine Gerade äquidistant unterteilt ist (beim Schulversuch des Autors war dieser etwa 9 m lang und enthielt 84 Teilstriche).

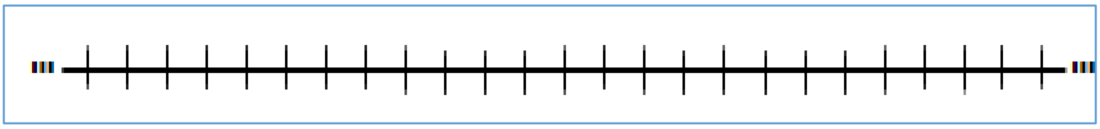


Abbildung 4.3-10: Vorbereitung eines Papierstreifens zur Darstellung der ganzen Zahlen auf einer Zahlengeraden

Der Zahlenstrahl war den Lernenden bisher schon bekannt, auch als Wohnort, auf dem die natürlichen Zahlen als Punkte wohnen.

Einstieg

Schülerinnen und Schüler in der sechsten Klasse haben in der Regel ein Vorwissen über ganze Zahlen und verfügen über rudimentäre Vorstellungen zum Rechnen mit ihnen. Ein Schüler der Klasse, in der die Unterrichtseinheit erstmals durchgeführt wurde, antwortete spontan auf die Frage: *„Wisst ihr etwas über Minuszahlen?“ „Ja, diese Zahlen gibt es. Zum Beispiel ist 5 - 7 (gleich) -2. Aber so dürfen wir nicht rechnen.“* Eine solche Antwort ist die Brücke zu einem direkten Einstieg in die Sache: *„Wir wollen jetzt diese Zahlen kennenlernen und uns überlegen, wie man damit rechnet.“*

---

[317] Didaktische Ausführungen hierzu sind im Abschnitt „Ganze Zahlen“, Seite 134, gegeben.

[318] Eine unterrichtliche Durchführung wurde vom Autor erstmals im Jahr 2004 mit einer fünften Klasse am Eichendorff-Gymnasium in Ettlingen vorgenommen. Simon Zolg hat sie 2015 am Schickhardt-Gymnasium in Herrenberg erneut durchgeführt. Ein Beitrag zu dieser Unterrichtseinheit wurde in der Zeitschrift „Mathematik in der Klassenstufe 5 bis 10“ veröffentlicht: vgl. Reimer, 2015, S. 12-15.

Der Unterrichtsgang

Der Zahlenstrahl wurde bisher zur Darstellung der natürlichen Zahlen verwendet. Zu jeder natürlichen Zahl gehört ein Punkt, der ihren Namen erhält. *„Wenn wir mit den natürlichen Zahlen arbeiten, kommt die Null möglichst weit nach links. Wo müssen wir jetzt auf unserem Papierstreifen die Null wohnen lassen, wenn wir auch für die Minuszahlen Wohnorte finden wollen?“*

Das längere Schweigen der gesamten Klasse bei erkennbarer Aktivität führte zu einer so nicht erwarteten Pause. Akribisch wurden jeweils die Striche gezählt, denn die Null sollte ja genau in der Mitte wohnen. Dieser Wunsch nach idealer geometrischer Symmetrie seitens der Schüler war von mir nicht bedacht worden. Zufälligerweise war die Anzahl der Striche gerade – eine Irritation, die mit einem kurzen Gespräch aufzulösen war und wonach eine „Mitte“ für die Null gefunden war. Intuitiv bestand auch Klarheit darüber, dass die Pluszahlen rechts und die Minuszahlen links von der Null wohnen sollen. Solche Orte wollten wir nun festlegen; wir wollten aber auch gleich mit diesen neuen Zahlen rechnen. Dazu wurde ein Spiel vorgeschlagen.

Das Spiel „Bevölkerung der Zahlengerade“

Spielverlauf: Eine Schülerin oder ein Schüler darf eine Zahl nennen, die auf dem Zahlenstrahl eingetragen und beschriftet wird. Dann darf sie/er an die Tafel gehen und eine Rechnung mit **+** oder **–** anschreiben (sie/er bleibt an der Tafel und vertritt jetzt auch den Lehrenden). Die Klasse muss rechnen. Wer fertig ist, hebt schweigend die Hand. Der Aufgabensteller darf einen Nachfolger für die Tafel aufrufen, der ihn ersetzt und sein Ergebnis anschreibt, das von der Klasse überprüft und gegebenenfalls korrigiert wird. Das richtige Ergebnis, eine Plus- oder Minuszahl, erhält einen Wohnort auf dem Zahlenstrahl.

Dann wird der Vorgang wiederholt, wobei durchgängig die folgende Regel eingehalten werden muss: Das letzte Ergebnis ist die erste Zahl der neuen Rechnung und deren Ergebnis muss eine neue Zahl auf dem Zahlenstrahl sein.

Zunächst stellten die Lernenden nur Rechnungen mit positiven Ergebnissen auf. Dabei verlangte die Lehrkraft eine vollständige Schreibweise der ganzen Zahlen mit dem jeweiligen Vorzeichen. Intuitiv handelte die Klasse bei einfachen Beispielen das Ergebnis richtig aus. Nach den ersten Versuchen wurde immer häufiger der Wunsch nach komplexeren Aufgaben geäußert. „Geh doch mal weiter nach links über die -10 hinaus“ bzw. „Mach doch mal was mit Minus-Minus“ und Ähnliches wurde vorgeschlagen. Nachfolgend sind ein Tafelanschrieb und die zugehörige Beschriftung auf der Zahlengeraden dargestellt.

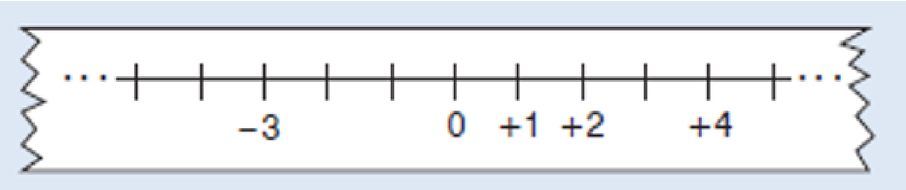


Abbildung 4.3-11: "Momentaufnahme" der Unterrichtsführung

(+4) – (+3) = +1

(+1) – (+4) = -3

(-3) + (+5) = +2

(+2) …

Um Ergebnisse prüfen zu können, schlug der Lehrer vor, dass alle Recheneigenschaften, die bisher für das Rechnen mit natürlichen Zahlen bekannt sind, weiterhin gelten müssen.

Insbesondere müssen Kontrollen über Probe-Rechnungen möglich sein. Exemplarisch wurde dies an den bisherigen Beispielen für die Addition und Subtraktion durchgeführt:

Wenn (+4) – (+3) = +1 ist, muss auch (+1) + (+3) = +4 sein.

Wenn (-3) + (+5) = +2 ist, muss auch (+2) – (+5) = -3 und (+2) – (-3) = +5 gelten.

Das Spiel wurde fortgesetzt. Die Lehrkraft, die bisher nur den Zahlenstrahl beschriftet hatte, wurde nun zum Moderator, der bei Ergebnisunsicherheiten geeignete Kontrollaufgaben stellte und die Eindeutigkeit des Resultats kontrollierte.

Nach etwa 30 Beispielen war das Spiel überflüssig. Die Klasse war sich einig, dass man nun wisse, wie das Addieren und Subtrahieren mit den Zahlen geht. Zur Übung wurden nun alle Aufgaben aus dem eingeführten Lehrwerk an der Tafel notiert, die mit der Addition bzw. Subtraktion zusammenhingen (vgl. Lambacher Schweizer, 2007: S. 162 ,164, 167).

In der nachfolgenden mehrstündigen Übungsphase mit Hausaufgaben hielt sich die Lehrperson zurück. Sie stand für individuelle Hilfen bei Bedarf zur Verfügung. Ergebnisse konnten über ein Lösungsheft verglichen werden. Für die nachträglich erfolgte Ergebnissicherung und Wissensdokumentation wurden die Ausführungen des Abschnitts über Ganze Zahlen (in Kapitel 3, S. 134) verwendet.

Erfahrungen

Eine Zunahme der Bearbeitungszeit für Aufgaben war dann zu erkennen, wenn die verwendeten Zahlen betragsmäßig größer waren als der im Klassenzimmer ausgehängte Zahlenstreifen im Bereich von -42 bis +43, aber auch dann, wenn ein Ergebnis mit Zahlen aus diesem Bereich diesen überschritt.

Abbildung 4.3-12: Erinnerung an die ganzen Zahlen. Die Klasse von Simon Zolg ist zufrieden.

4.4 Vollwinkelmesser versus Multiwerkzeug Geodreieck

Das Geodreieck enthält einen integrierten Winkelmesser, der jedoch nicht die elementare und zu einem Lineal analoge Messung von Winkeln unterstützt. Abbildung 4.4-2 zeigt, dass bei einem Geodreieck die Winkelmaße innen liegen und auf die Seiten des Dreiecks übertragen sind. Außerdem sind sie in zwei Orientierungen angegeben, die Anfänger irritieren. Ein *Vollwinkelmesser* wie in Abbildung 4.4-1 kann entsprechend des Vorwissens der Schüler analog zu einem Lineal sofort eingesetzt werden, um Winkel statisch durch anlegen und ablesen zu messen und zu zeichnen. [319] In Verbindung mit einer dynamischen Winkelscheibe kann mit geringem Zeitaufwand gelernt werden, wie man Winkel in der Geometrie misst und zeichnet.

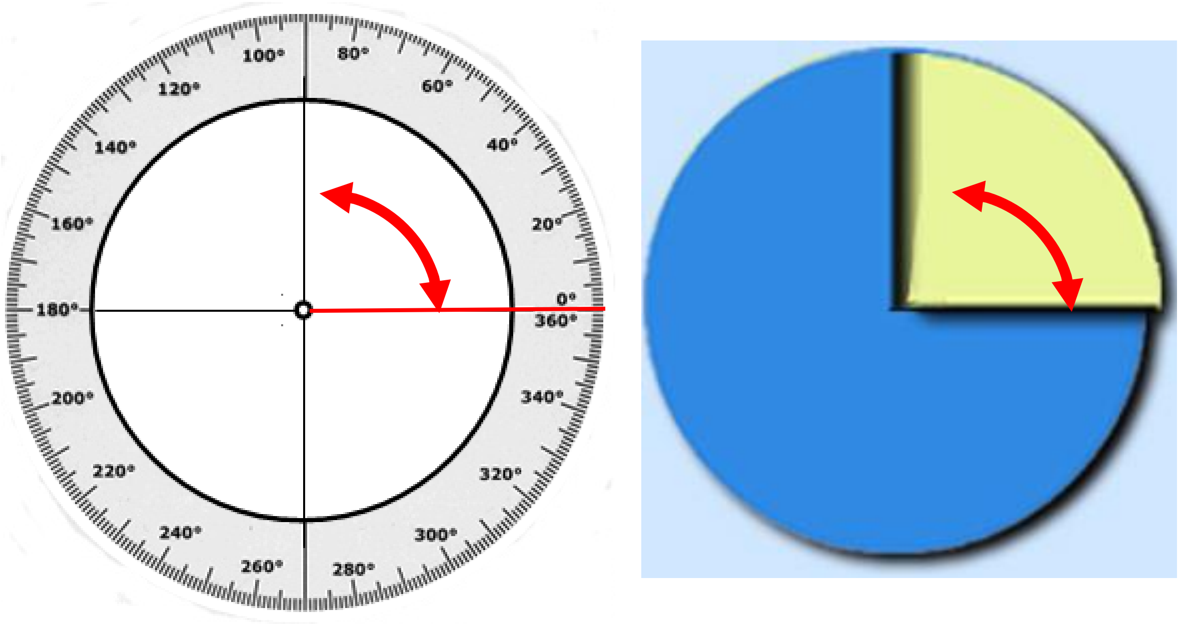


Abbildung 4.4-1: Vollwinkelmesser und Winkelscheibe verbinden statische und dynamische Vorstellungen bei Winkeln.

Die Phasen eines Unterrichtsgangs sind nachfolgend kurz beschrieben: [320]

1. Winkelscheibe basteln, Winkel einstellen, schon bekannte Winkelweiten benennen …
3. Vollkreis-Winkelmesser auf Folie gedruckt ausschneiden
4. Schätzen und überprüfen von Winkelweiten auf der Scheibe (Partnerarbeit; Schätzungen überprüfen durch Messen)
5. Winkel messen (0° - 360°) und zeichnen (0° - 360°) in der Geometrie
7. Strategien zur Winkelmessung bei geometrischen Figuren entwickeln (man muss nicht immer messen)
8. Anwendungen und Übungen zur selbständigen Bearbeitung

[319] Bei dieser Vorgehensweise nutzt man die Vorerfahrungen der Lernenden: Winkel sind aus dem Alltagsleben bekannt. Eine geometrisch analoge Verwendung bei Figuren ist elementar herzustellen.

[320] Ein Merkmal dieser Methode ist, dass nach einer ganzheitlich und zeitlich kurz gehaltenen Begriffsbildung die Lernenden die Gelegenheit erhalten, selbstständig und ganzheitlich zu üben.

Im Vergleich zum Vollwinkelmesser kann das *Geodreieck* als „Multiwerkzeug“ verwendet werden. Nachfolgend wird eine Unterrichtsskizze zur Gestaltung einer Doppelstunde oder einer kurzen Unterrichtseinheit für eine fünfte Klasse gegeben, um das bisher nur in elementarerer Funktionalität verwendete Geodreieck als vielseitiges Werkzeug, vergleichbar mit einem Multitool für Handwerker, herauszustellen und exemplarisch anzuwenden. [321]

Einstieg: Abbildung 4.4-2

Abbildung 4.4-2: Einstimmung, Funktionen eines Geodreiecks

Begleitet durch Fragen zum Geodreieck, wie zum Beispiel:

Was sieht man? ↔ Was kann man damit machen?

Was möchte ich tun? → Wie geht das?

Bei Bedarf fragend präzisieren: Wo sind rechte Winkel zu sehen? Wo sieht man Parallelen? Wie ist das Lineal beschriftet? …

Über diese Fragen können spezielle Funktionen des Geodreiecks verdeutlicht, im Heft exemplarisch durchgeführt und nachträglich zusammenfassend aufgeschrieben werden (siehe Abbildung 4.4-3).

---

[321] Zum Vergleich der Komplexität einer Winkelmessung mit dem Geodreieck gegenüber einer Vollwinkelmessung vgl. Griesel, et al., 2004, S. 104 ff.

Anregungen für eine sich anschließende Übungsphase

Motto: Wir zeigen, dass wir mit dem Geodreieck umgehen können!

Organisation: Arbeiten in Vierer- oder Dreiergruppen. Die Übersicht ist ausgeteilt:

Das alles kann man mit dem Geodreieck machen:	
Strecken	zeichnen, Längen messen, Mittelsenkrechte zeichnen
Winkel	zeichnen und messen
Geraden	zeichnen, zueinander senkrechte Geraden zeichnen, parallele Geraden zeichnen, sich schneidende Geraden zeichnen und Winkel messen
Punkte	zu zwei Punkten die Strecke oder die Gerade zeichnen, Figuren aus vorgegebenen Punkten zeichnen
Punkte und Geraden	das Lot von einem Punkt auf eine Gerade zeichnen, Abstände messen
Symmetrie	Punkte oder Figuren an einer Geraden oder einem Punkt spiegeln, zu einer symmetrischen Figur die Symmetrieachse oder den Symmetriepunkt zeichnen.

Abbildung 4.4-3: Funktionen des Geodreiecks (möglicher Tafelanschrieb und/oder Hefteintrag)

Auftrag: Jeder Teilnehmer erfindet eine Aufgabe, bei der einige in der Abbildung 4.4-3 genannten Tätigkeiten ausgeführt werden müssen. *Was gegeben ist, muss in einem Koordinatensystem einen festen Platz haben, damit die Lösungen leicht verglichen werden können.* Die Aufgabe wird auf eine Karte geschrieben und es wird dazu eine Musterlösung erstellt (getrennte Karte). Dann werden die Aufgaben in den anderen Gruppen verteilt, gelöst und verglichen.

Sammeln: Nachträglich werden die Aufgaben aller Gruppen, geordnet nach ihrem Schwierigkeitsgrad, in der Klasse vorgestellt und verglichen.

Verhalten der Lehrperson: Hält sich weitestgehend zurück, reguliert den Ablauf der Gruppenphase und das nachträgliche Sammeln und Vorstellen der Aufgaben. Ziel der Übung ist es, eine Aufgabensammlung zu erstellen, die exemplarisch die Ausführung der genannten Funktionen des Geodreiecks abdeckt. Gegebenenfalls werden Aufgaben ergänzt.

Weiterführung: In einer abschließenden Stunde erhält jeder Lernende die Gelegenheit, die eigene Sammlung im Heft zu vervollständigen.

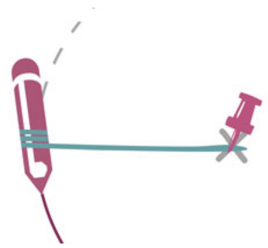
Abbildung 4.4-4 zeigt ein Beispiel für eine Zusatzaufgabe, die auch, vorab gestellt, als Anregung für die Lernenden angesehen werden kann, nicht zu einfache Aufgaben zu stellen.

Aufgabe: Gegeben ist ein Dreieck durch die Punkte A(1|1), B(6|2) und C(2|5) und der Punkt D(3|3). Bestimme die drei Abstände des Punktes zu den drei Seiten des Dreiecks. Zeichne möglichst exakt und miss auf Millimeter gerundet.

4.5 Was hat der Kreisumfang mit dem Radius zu tun?

Ein möglichst eben gepflasterter Platz im Schulbereich eignet sich sehr gut, um handlungsorientiert in einer 5. oder 6. Klassenstufe in einer Doppelstunde eine *Formel* für den Umfang von Kreisen in Abhängigkeit vom Radius zu erarbeiten. Nachfolgend ist eine Unterrichtsskizze angegeben.

Unterrichtsthema: Vom Radius zum Kreisumfang und zurück!



- Die Klasse wird aufgeteilt in Gruppen von mindestens 3 Personen.

- Jede Gruppe erhält eine längere feste Paketschnur und ein Stück Straßenkreide.

Die Lehrperson erklärt, wie man mit Schnur und Kreide einen Kreis auf dem Schulhof erzeugen kann (dies kann exemplarisch an der Tafel vorgeführt werden).

In den Gruppen wird die individuelle *Schuhlänge* <u>einer</u> Person zur Längeneinheit erklärt.

- Jede Gruppe erhält die gleiche Aufgabe:

- Sucht euch im Schulhof einen Platz für einen (nicht zu kleinen) Kreis.
- Einigt euch auf eine Schnurlänge als Radius eines Kreises, der in der Einheit des Schuhträgers mit einer Längenmaßzahl nach der *Gänsefuß-Methode* bestimmt wird. (dieser Vorgang kann im Klassenzimmer vorab gezeigt oder sogar ausgeführt werden).
- Zeichnet zuerst den Mittelpunkt und legt einen Radius fest (mit einer ganzen Zahl).
- Zeichnet dann den Kreis.
- Danach schreitet der Längenmesser die Kreislinie mit der Gänsefuß-Methode ab und zählt die Schritte (die Maßzahl der Länge des Kreisumfangs).
- Notiert die Maßzahlen des Radius und des Kreisumfangs.
- Kommt zurück ins Klassenzimmer.

An der Tafel ist eine Tabelle vorbereitet, in der die Ergebnisse gesammelt werden.

Gruppe	Radius r	Umfang u	u:r
1	7	44	6,28
2	10	63	6,3
3	15	94	6,266
4	6	37	6,16
5	12	75	6,25
…	…	…	…

Gemeinsam wird die Tabelle inspiziert, um eine gemeinsame Eigenschaft der Zahlenpaare u und r zu entdecken.

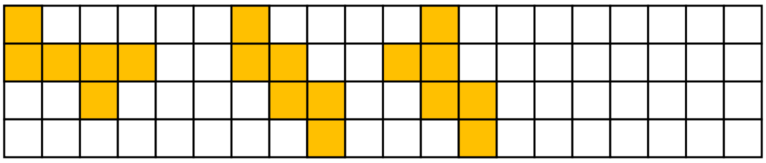
Eine Lösung ist z. B. der Quotient u : r.

Es ist zu vermuten, dass der Umfang proportional zum Radius ist. Gemeinsam wird der Mittelwert der Ergebnisse als Proportionalitätsfaktor akzeptiert. Ergebnis: $u \approx 6{,}25 \cdot r$.

Nachträglich kann die Lehrperson auf genauere Messungen und auf die Bedeutung und Verwendung der Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14$ ... eingehen. Als unterstützende Übung können nun möglichst zahlreiche Beispiele gesammelt und ausgewertet werden, wobei nun in Zentimeter und Meter gemessen und der Taschenrechner benutzt wird.

4.6 Würfelnetze, Würfelkörper und Quaderhunde (Klassenstufe 5-6)[322]

4.6.1 Würfelnetze können wir – aber wie viele gibt es? (Klasse 5-6)



…

Vorwissen aus der Grundschule: Würfelkörper und Würfelnetzen sind bekannt.

Vorbereitung: Das Vorwissen wird aufgefrischt.
Eigenschaften des Würfels (Aussagen über Ecken, Kanten, Flächen) werden gesammelt. Es wird vereinbart, was ein Würfelnetz ist.

Phasen der Stunde:

- Mit den Quadraten eines Geometrie-Baukastens (Polydron) soll in 3er-Gruppen je ein Würfelnetz gebaut und getestet werden. (Dazu hat jede Person zwei Quadrate genommen und mit zwei anderen eine Gruppe gebildet.)
- Die gefundenen Netze werden hochgehalten (der Klasse gezeigt).
  Es stellt sich heraus, dass es unterschiedliche Lösungen gibt.
- Die Gruppen erhalten den gleichen Auftrag:
  „Findet möglichst viele verschiedene Netze und zeichnet sie in eure Hefte".
- An der Tafel bzw. mit dem Visualizer werden die Lösungen zusammengetragen. Dabei diskutiert die Klasse darüber, wann zwei Netze gleich sind und wann nicht.

Ergebnis: Es wurden 11 verschiedene Netze gefunden.

Der Lehrer gibt bekannt, dass es sich nicht mehr lohnt, nach weiteren Lösungen zu suchen, weil es keine weiteren Netze mehr gibt.

- Die Klasse wird gefragt, was sie von der Mitteilung des Lehrers hält.
- Wer möchte, bekommt einen „Briefwechsel", mit dem man eine Antwort finden kann.

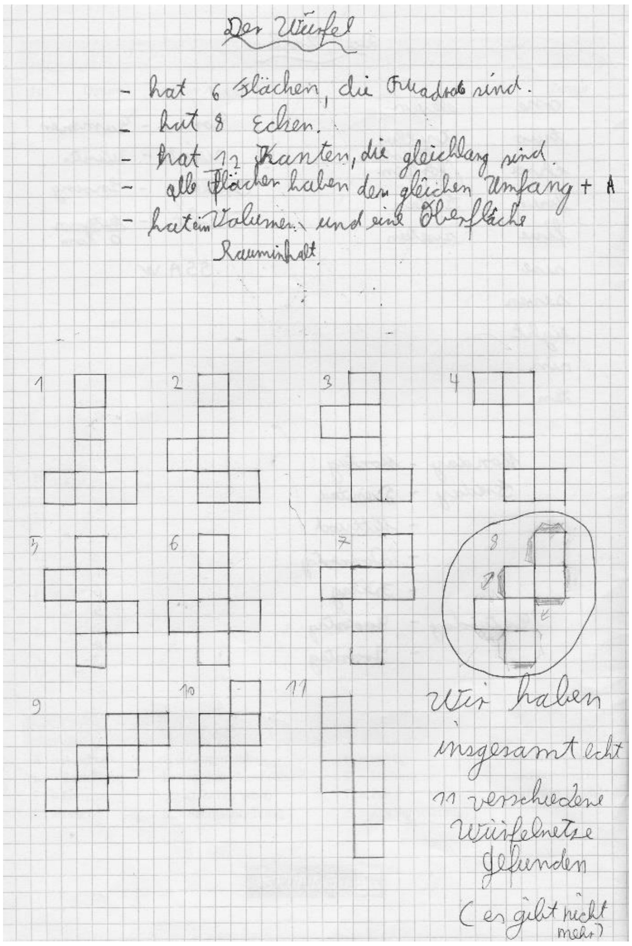
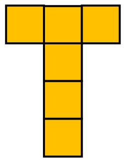


Abbildung 4.6-1: Heftaufschrieb eines Schülers

[322] Die drei Unterrichtsprojekte wurden vom Autor unter dem Thema *Anregungen für einen schülerverantwortlichen Mathematikunterricht* im Arbeitskreis *Anwendungsorientierte Mathematik* im Gymnasium Neureut vorgestellt am 21.11.2006. Der zweimal jährlich stattfindende Arbeitskreis ist ein von Wolfgang Buhmann am Regierungspräsidium Karlsruhe gegründeter regionaler Arbeitskreis, der derzeit abwechselnd in Karlsruhe und Mannheim tagt.

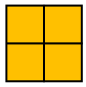
Warum gibt es nur 11 verschiedene Würfelnetze? – Ein fiktiver Briefwechsel ...

Lieber Herr Reimer,
bei der Suche nach Würfelnetzen haben wir zusammen 11 verschiedene Netze gefunden. Dann haben Sie gesagt, dass wir aufhören können, weil es keine weiteren Netze mehr gibt. Allerdings könnte es ja sein, dass Sie das auch nicht so genau wissen und vielleicht eines oder sogar mehrere Netze vergessen haben. Auf jeden Fall müssten Sie uns das besser begründen können.
Ihre Klasse 5d

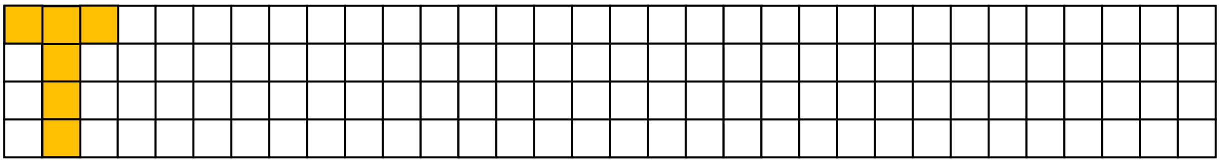


Liebe Klasse 5d,
ihr könnt das selbst tun, indem ihr aufmerksam weiterlest und die „Lücken" ausfüllt.

Zunächst schreiben wir auf, was über Würfelnetze bekannt ist:
- Jedes Würfelnetz besteht aus .... Quadraten.
- Bei einem Würfelnetz können höchstens .... Quadrate in einer Reihe liegen.
- Bei einem Würfelnetz können nicht (wie rechts gezeigt) vier Quadrate in einem Punkt zusammenkommen, da ………...



1. Der Fall „vier in einer Reihe und zwei dazu": Wir wollen zuerst alle Würfelnetze zeichnen, bei denen 4 Quadrate in einer Reihe liegen und zwei weitere dazukommen.



Ergebnis 1: Es gibt .... Würfelnetze, mit <u>einmal</u> 4 Quadraten in einer Reihe.

Nun suchen wir weitere Würfelnetze. Dabei können höchstens noch .... Quadrate in einer Reihe vorkommen.

2. Der Fall „drei in einer Reihe und drei dazu": Wir zeichnen alle Netze, bei denen .... Quadrate in einer Reihe liegen und drei weitere Quadrate hinzukommen:

Ergebnis 2: Es gibt .... Würfelnetze, mit höchstens .... Quadraten in einer Reihe.

3. Der Fall „zwei und zwei und zwei": Zuletzt müssen wir noch nach Würfelnetzen suchen, in denen höchstens .... Quadrate in einer Reihe vorkommen dürfen.

Ergebnis 3: Es gibt ....

Insgesamt gibt es also .... verschiedene Würfelnetze.

Ich wusste doch, dass ich mich auf Euch verlassen kann.
Euer Mathelehrer

Anstelle des Briefes kann auch eine Musterlösung mit der Klasse gemeinsam besprochen werden (siehe Abbildung 4.6-2).

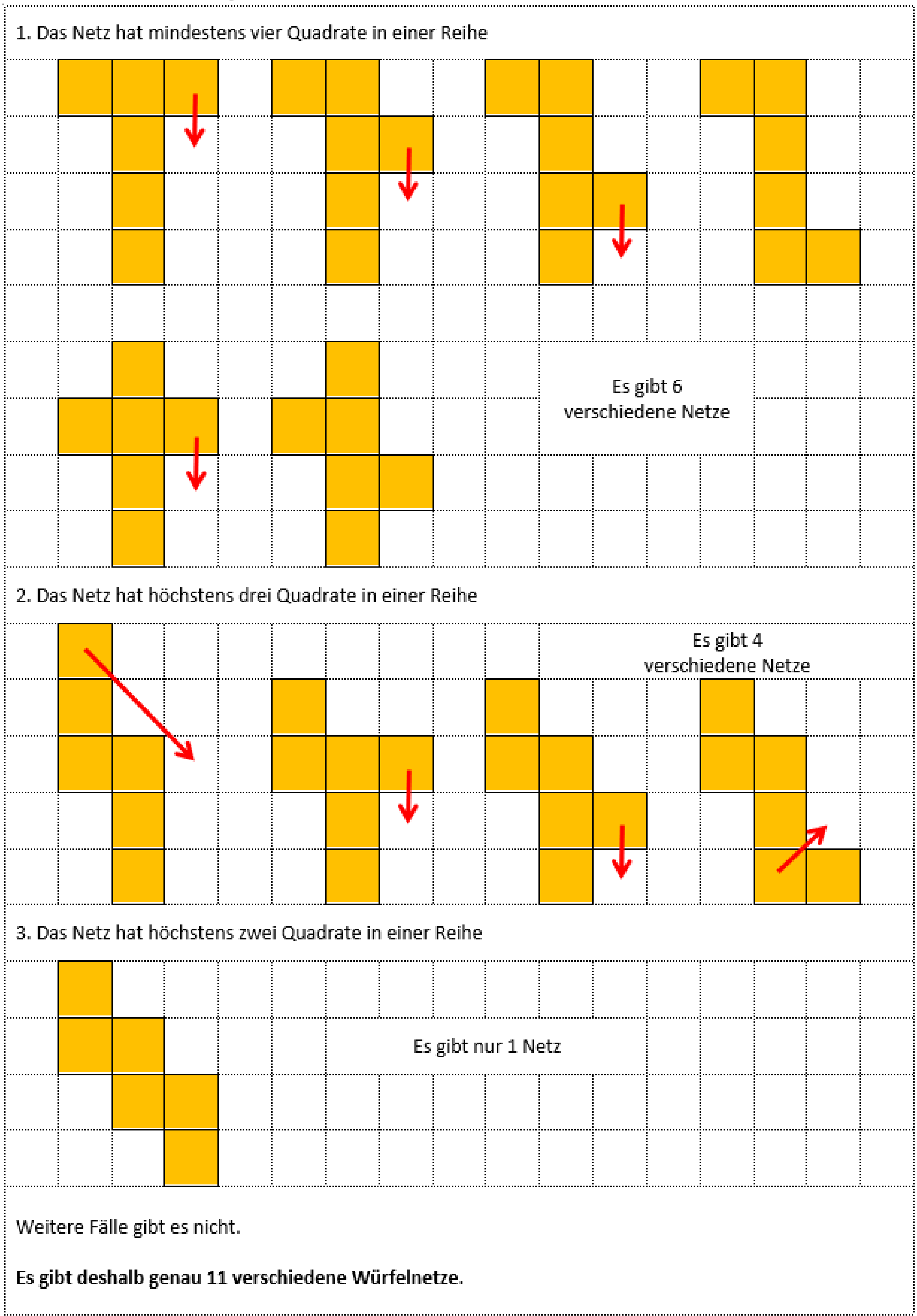


Abbildung 4.6-2: Geordnete Fallunterscheidung zu Würfelnetzen, um auszuschließen, dass es mehr als 11 Netze gibt

4.6.2 Würfelkörper [323]

Vorwissen: Die Klasse kann Schrägbilder von Körpern zeichnen.

Material: Steckwürfel aus Kunststoff in ausreichender Menge [324]

Unterrichtsform: Gruppen mit maximal 3 Personen, Kommunikation mit dem Lehrenden nach Bedarf

Durchführung (Unterrichtszeit (45 Min. u. HA)

Am Pult sind ausreichend viele Würfel vorrätig.

1. Jeder Gruppenteilnehmer nimmt zuerst zwei Würfel.
Durch Zusammenstecken soll ein Körper gebaut werden.
Wie viele verschiedene Körper gibt es?
[…] Ergebnisse sammeln

2. Weitermachen
Holt euch einen dritten Würfel.
Baut möglichst alle Körper mit drei Würfeln.
Zeichnet ihre zugehörigen Schrägbilder ins Heft.
[…] Ergebnisse sammeln und vervollständigen

3. Weitermachen
Holt euch einen vierten Würfel, einen fünften …
[…] Ergebnisse sammeln

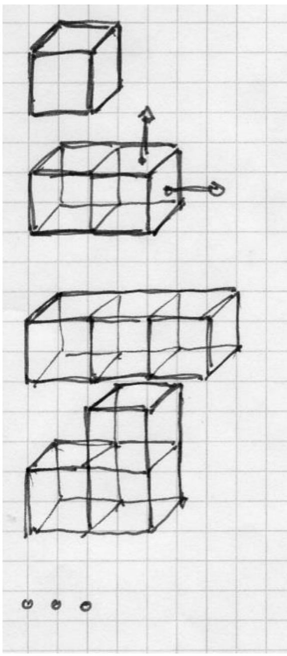
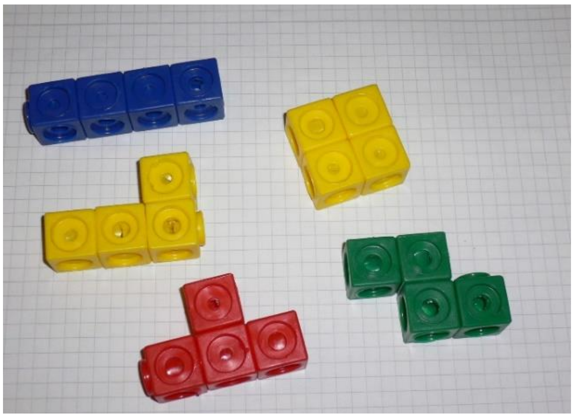


Abbildung 4.6-3: Schrägbildskizzen zu Würfelkörpern

Auf einem bereitgestellten Tisch wird jeweils ein Exemplar gesammelt.
Die Exponate bleiben für einige Zeit im Klassenzimmer ausgestellt.



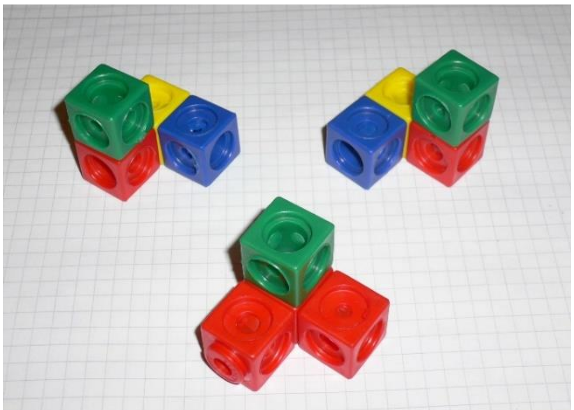


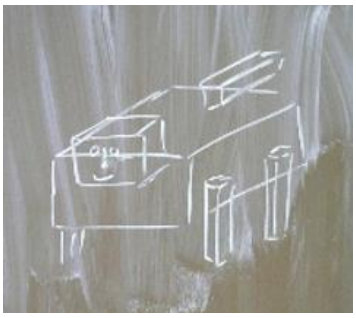
Abbildung 4.6-4: Beispiele für Würfelkörper

---

[323] Dieser Vorschlag ist eine 3-D-Variation des ebenen Pentomino-Problems, alle Figuren zu finden, die mit fünf kongruenten Quadraten zusammenhängend erzeugt werden können.

[324] Mögliche Bezugsquelle: DICK SYSTEM e.K. Kunststoffverarbeitung, Am hohen Rain 20, 57290 Neunkirchen. Es sollten etwa 10 Würfel pro Teilnehmer bereitgestellt sein, da ja auch noch Exponate ausgestellt werden. In einer Gruppe erstellt jeder Teilnehmer eigene Würfelkörper, die in der Gruppe besprochen und arbeitsteilig gebaut werden sollen. Die Lehrperson achtet darauf, dass eine Phase abgeschlossen ist, bevor ein weiterer Würfel verwendete wird.

4.6.3 Wir bauen einen „Quaderhund“



Vorwissen: Die Schülerinnen und Schüler können Netze von Quadern zeichnen. Die Technik des Klebefalzes, um aus einem Netz durch Ausschneiden und Kleben einen Quader mit vorgegebenen Maßen zu bauen, ist bekannt.

Material: Stärkeres DIN-A4 Papier, Zeichenwerkzeuge, Schere, Klebstoff, Buntstifte

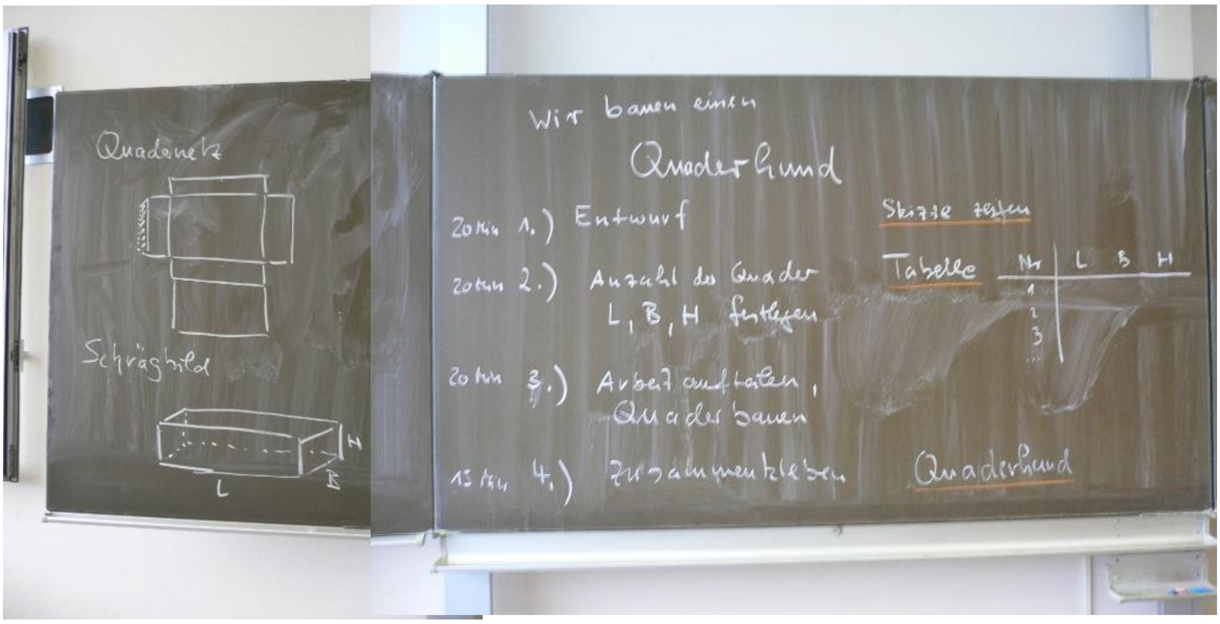


Abbildung 4.6-5: Tafelbilder zur Vereinbarung der Arbeitsaufträge und 3-D Anregung seitens des Lehrers

Die Schülerinnen und Schüler erhalten den Auftrag, arbeitsteilig einen „Hund“ aus zusammengeklebten Quadern zu bauen (Tafelanschrieb: **Wir bauen einen Quaderhund)**. Es werden Gruppen mit etwa 5 bis 6 Schülerinnen und Schülern gebildet, die vorab vereinbarte Aufträge entsprechend des Tafelbildes in Abbildung 4.6-5 ausführen.

Unterrichtsphasen (entsprechend des Tafelanschrieb)		
	Prozess	Produkt
1.	Grobentwurf zeichnen. Tipps: Rasse? Größe? Färbung?	Skizze vorzeigen
2.	Anzahl der Quader und Maße in Tabelle nach Länge, Breite, Höhe festlegen	in einer Tabelle aufschreiben
3.	<u>Arbeitsteiliges</u> Herstellen der Quader: Netze zeichnen, Klebefalze zufügen, ausschneiden, kleben	die einzelnen Quader
4.	Quader zusammenkleben, gegebenenfalls vorher oder nachher farblich gestalten	ein Quaderhund
5.	Ergebnis präsentieren	Skizze, Tabelle und Quaderhund ausstellen

Nachfolgend sind die Entwurfsskizze einer Gruppe und Fotos von Exponaten angefügt.

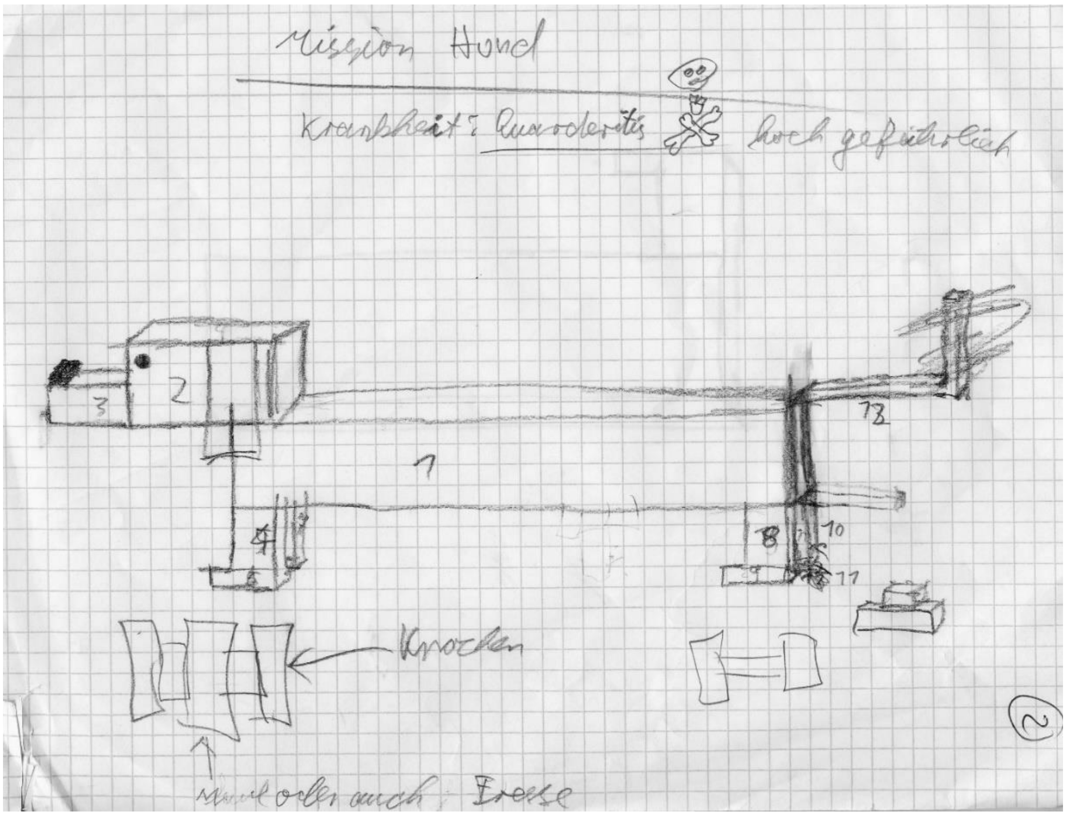


Abbildung 4.6-6: Entwurfsskizze einer Arbeitsgruppe, Klasse 5b, 2004, Lehrer Rolf Reimer

Abbildung 4.6-7: Exponate nach einer Durchführung der Unterrichtseinheit am Gymnasium Neureut, Klasse 5b, 2007, Lehrerin Brigitte Oestreich

4.7 Platonische Körper (Hector-Kurs, Klassenstufen 4 bis 6)

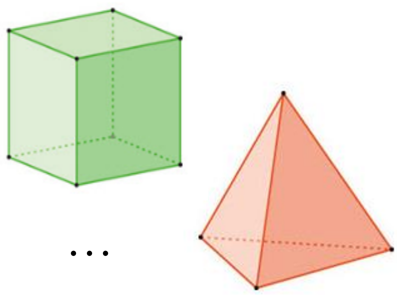
Dieser Abschnitt stellt eine Zusammenfassung einer Unterrichtseinheit vor, die als Veranstaltung der „Hector Kinderakademie Ettlingen“ Schülerinnen und Schülern der vierten Klassen an Grundschulen in Ettlingen in den Schuljahren 2015/16, 2016/17 und 2017/18 in sieben Doppelstunden angeboten wurde. Der Kurs wurde von Ingrid König, Susanne Wehrle und Rolf Reimer konzipiert, durchgeführt und überarbeitet. Das detailliert ausgearbeitete Kursskript ist seitens des Hector-Instituts für Empirische Bildungsforschung der Universität Tübingen [325] als „CoreCourse“ vorgesehen für ein überregionales Kursangebot.

Ein Überblick der behandelten Themen wurde in diese Arbeit aufgenommen, da nach Meinung des Verfassers eine derart inhaltlich geschlossene Behandlung eines Themas zur Geometrie im Anfangsunterricht der Klasse 5 eines Gymnasiums oder einer weiterführenden Schule nach Klasse 4 die Gelegenheit bietet, den Lernenden ebene und räumliche Erfahrungen zu geometrischen Figuren und Körpern zu ermöglichen. Beim Nacherfinden der Lösung eines seit der Antike gelösten Problems, die Anzahl der platonischen Körper zu bestimmen, erwerben sie enaktiv und kognitiv handelnd Grundkenntnisse im Umgang mit Figuren und Körpern, die entsprechend des Lehrplans vorgesehen sind, und schulen ihre Fähigkeiten beim Argumentieren und Begründen.

Die Ausschreibung im Kursangebot wird als Einstimmung in das Projekt aufgeführt:

Würfel, Tetraeder und so weiter … wir erkunden „Platonische Körper“ und erfinden unsere eigene platonische Sternenwelt

Was genau sind platonische Körper und wie viele gibt es? Welche Eigenschaften besitzen diese Körper? Bestehen zwischen ihnen vielleicht sogar Verwandtschaften?
Mit Hilfe von Geometrie-Baukästen, Zirkel und Winkelmesser und natürlich mit "Köpfchen" wollen wir die Geheimnisse der platonischen Körper lüften. Es gibt viel zu entdecken! Aus platonischen Körpern lassen sich übrigens tolle Sterne bauen.
Mehr dazu dann in unserem Kurs!



Für die Durchführung wurden kommerziell erwerbbare Materialien zum Bauen von Körpern und Netzen verwendet. Für Flächenmodelle wurden Polydronteile [326] und für Kantenmodelle

[325] Kontakt: http://www.wiso.uni-tuebingen.de/faecher/hector-institut-fuer-empirische-bildungsforschung/institut.html.

[326] Polydron (UK) Limited, Site E, Lakeside Business Park, Broadway Lane, South Cerney, Cirencester, Gloucestershire, GL7 5XL.

GEOMAG-Teile [327] benutzt.

Eine Themenübersicht und eine Kurzbeschreibung der Inhalte sind nachfolgend angegeben.

Thema 1: Der Würfel und seine Netze
Thema 2: Würfel und Tetraeder
Thema 3: Platonische Körper und regelmäßige Vielecke
Thema 4: Weitere Eigenschaften der platonischen Körper
Thema 5: Platonische Sterne

Thema 1 „Der Würfel und seine Netze“ verwendet das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler einer vierten Klasse an einer Grundschule. Kenntnisse über den Würfel werden zu Beginn des Kurses aufgegriffen und vertieft. Verwendungen von Würfeln in der Alltagswelt werden exemplarisch besprochen. Daraus werden geometrische Eigenschaften eines Würfels in Bezug auf seine Ecken, Kanten und Flächen zusammengetragen. Durch eine Untersuchung über die Anzahl verschiedener Würfelnetze vollziehen die Teilnehmer eine vollständige Fallunterscheidung nach und erkennen, dass es insgesamt nur 11 verschiedene Würfelnetze geben kann.

Thema 2 „Würfel und Tetraeder“ führt analog zu Thema 1 entsprechend dem nun als platonischen Körper ausgewiesenen Würfel den Tetraeder als platonischen Körper ein. Durch einen Vergleich der Eigenschaften beider Körper wird eine allgemeine Beschreibung Platonischer Körper über definierende Eigenschaften formuliert.

Thema 3 „Platonische Körper und regelmäßige Vielecke“ beschäftigt sich mit dem Bauen Platonischer Körper mit Hilfe von regelmäßigen Vielecken (als Teile ihrer Oberfläche) in Form verbindbarer Polydron-Teile und dem Herstellen von regelmäßigen Vielecken auf Papier unter Verwendung von Zirkel, Lineal und einem Vollwinkelmesser. Eine vollständige Falluntersuchung führt zur Einsicht, dass es nur fünf verschiedenen platonische Körper geben kann.

Thema 4 „Weitere Eigenschaften Platonischer Körper“ nimmt eine Untersuchung der nun bekannten Platonischen Körper vor, um Vergleiche anzustellen und Gemeinsamkeiten zu finden. Dazu werden Zusammenhänge zwischen den Ecken, Kanten und Flächen gefunden und es zeigt sich eine Verwandtschaft zwischen diesen Körpern über einen Zusammenhang zwischen den Mittelpunkten der Flächen als Ecken eines „innen“ liegenden Körpers.

Thema 5 „Platonische Sterne“ behandelt eine selbst „erfundene“ Körperform, die auf platonischen Körpern aufbaut. Beim Herstellen Platonischer Sterne mit GEOMAG-Teilen entstehen ansprechende Körperformen, die das räumliche Vorstellungsvermögen erweitern und zu Fragestellungen führen, die argumentativ begründend beantwortet werden können.
Als Abschluss des Kurses ist eine Präsentation in Form einer Ausstellung für Besucher (insbesondere Eltern, deren Bekannte und Freunde) vorgesehen, die von den Kursteilnehmern vorbereitet wird. Abschließend wird das „Expertenwissen“ zum Thema gesammelt und aufbereitet für eine Führung durch die Ausstellung und die Beantwortung von Fragen der Besucher.

Nachfolgend wird eine knappe inhaltliche Zusammenfassung des Kursskripts vorgestellt, um einen Gesamteindruck des inhaltlichen Ablaufs zu erhalten.

---

[327] GEOMAG, Geomagworld SA – Switzerland.

Thema 1: Der Würfel und seine Netze

1.1 Einstieg

Es wird das Planeten-Modell von Johannes Kepler gezeigt, der mit platonischen Körpern die gegenseitigen Lagen der Planetenbahnen erklärte.

1.2 Beispiele für Würfel im Alltag und in der Mathematik

An Beispielen von Würfeln aus dem „Alltag“ und der „Mathematik“ wird herausgearbeitet, dass ein mathematischer Würfel aus 6 gleichen Quadraten besteht, welche seine Oberfläche bilden. Jeweils 3 Quadrate haben eine gemeinsame Ecke und zwei benachbarte Quadrate haben eine gemeinsame Kante.

1.3 Bau eines Würfels

Ein mathematischer Würfel wird gebaut, indem arbeitsteilig möglichst große gleiche Quadrate aus sechs DIN-A4 Kartons hergestellt werden.

1.4 Mit Experimenten unterschiedliche Würfel-Netze finden

Mit Polydron-Quadraten werden unterschiedliche Würfelnetze gelegt, getestet und verglichen.

1.5 Würfelnetze geordnet darstellen – Anzahl bestimmen

Die gefundenen Netze werden geordnet dargestellt und gegebenenfalls ergänzt. Indem fallunterscheidend eine Ordnung erkannt wird, wird begründet, wie viele verschiedene Netze es gibt.

Thema 2: Würfel und Tetraeder

2.1 Einstieg

Ein Tetraeder aus Polydronteilen wird in einem Behälter versteckt und reihum befühlt. Die Form des Körpers soll beschrieben und aus dreiecksförmigen Polydronteilen gebaut und verglichen werden.

2.2 Beispiele für Tetraeder im Alltag und als mathematisches Objekt

Analog zu 1.2 werden Beispiele von „Tetraedern“ gezeigt. Durch vergleichendes Beschreiben der Objekte erhalten die Teilnehmer einen Eindruck davon, was einen Tetraeder auszeichnet:
Ein Tetraeder hat eine Oberfläche aus vier gleichseitigen Dreiecken und vier Ecken. An jeder Ecke kommen drei Kanten zusammen. Er wird als weiterer platonischer Körper ausgewiesen.

2.3 Tetraeder-Netze experimentell finden

Aus vier kongruenten gleichseitigen Polydron-Dreiecken sollen unterschiedliche Netze von Tetraedern erstellt werden. Es wird festgestellt, dass es nur zwei verschiedene Netze gibt.

2.4 Bau eines Tetraeders aus gleichseitigen Dreiecken

Analog zu 1.3 soll ein Tetraeder gebaut werden, indem arbeitsteilig vier möglichst große gleichseitige Dreiecke verwendet werden

2.5 Ein Tetraeder-Netz mit Zirkel und Lineal herstellen

Nach einer Übung zum Umgang mit einem Zirkel wird die Konstruktion eines Würfelnetzes mit Hilfe von drei Kreisen durchgeführt.

2.6 Räumliches Vorstellungsvermögen bei Würfel und Tetraeder

Es soll erfahren werden, dass beim Übergang zu einer 2-D-Darstellung die Vorstellung (das gedankliche Handeln) darüber entscheidet, was als sichtbar bzw. vorne liegend und was als verdeckt bzw. hinten liegend gesehen wird.

2.7 Vom Würfel und Tetraeder zu weiteren platonischen Körpern

Alle bisher gebauten Körper (auch nicht-platonische) werden mit dem Würfel und dem Tetraeder (als bisher bekannte platonische Körper) verglichen. Es wird erarbeitet, dass Würfel und Tetraeder (mathematische) *Körper* sind, die jeweils gleichseitige Dreiecke oder Quadrate (= regelmäßige Vielecke) als *Oberflächen* haben. An jeder Ecke kommen gleich viele Kanten an. Genau dies ist die (allgemeine) Eigenschaft eines platonischen Körpers.

Thema 3: Platonische Körper und regelmäßige Vieleck

3.1 Mit Polydron-Teilen weitere platonische Körper suchen und finden

Mit regelmäßigen Drei-, Vier-, Fünf- und Sechs-Ecken aus dem Polydron-Kasten werden platonische Körper gebaut und verglichen. Die hergestellten Exemplare werden auf einem Tisch gesammelt. Abschließend werden die charakterisierenden Eigenschaften geprüft.
Die Körper werden nach ihrer Flächenanzahl benannt:

Vierflach = Tetraeder	(Tetra: 4)
Sechsflach = Würfel = Hexaeder	(Hexa: 6)
Achtflach = Oktaeder	(Okta: 8)
Zwölfflach = Dodekaeder	(Dodeka: 12)
Zwanzigflach = Ikosaeder	(Ikosi: 20)

3.2 Platonische Körper selbst bauen - regelmäßige Vielecke konstruieren

Zum Bauen von platonischen Körpern ohne vorbereitete Teile müssen regelmäßige Vielecke für die Oberflächen hergestellt werden. Es soll nun gelernt werden, wie man regelmäßige Vielecke konstruieren kann. Dazu wird ein Winkelmesser als neues Werkzeug verwendet.

3.2.1 Winkelscheibe und Winkelmesser

Mit einer Winkelscheibe und einem Vollwinkelmesser wird das Prinzip des Messens von Winkeln geübt und angewendet. Am Beispiel der Winkelsumme in speziellen Dreiecken wird eine Vermutung über die Winkelsumme bei anderen Dreiecken aufgestellt und begründet.

3.2.2 Winkel beim allgemeinen Dreieck

Mit vorbereiteten Dreiecken wird die Winkelsumme bei Dreiecken begründet.

3.2.3 Regelmäßige Vielecke mit Zirkel, Winkelmesser und Lineal herstellen

Jetzt geht es darum, wie man Vielecke, welche die Oberfläche der Platonischen Körper bilden, selbst herstellen kann. Dazu wird zunächst erarbeitet, dass man Vielecke mit Hilfe eines Kreises - dem Umkreis - konstruieren kann über eine Zerlegung in gleichschenklige Teildreiecke. Dies wird zunächst für das Quadrat erarbeitet, danach auf das gleichseitige Dreieck übertragen und danach allgemein für regelmäßige Vielecke erweitert.

3.2.4 Regelmäßige Fünf- und Sechsecke konstruieren

Mit Hilfe von Umkreisen werden regelmäßige Fünf- und Sechsecke konstruiert. Dazu soll zunächst überlegt werden, wie man dabei vorgehen kann. Dazu werden die Teildreiecke herangezogen.

3.3 Warum gibt es nur fünf platonische Körper?

Bisher sind fünf platonische Körper gefunden worden. Es soll eine Begründung dafür gegeben werden, dass es nicht mehr als diese fünf Körper geben kann. Dazu wird (entsprechend unserer Überlegungen bei den Würfelnetzen in 1.5) eine handlungsorientiert nachvollziehbare Fallunterscheidung vorgenommen.

Thema 4: Weitere Eigenschaften der platonischen Körper

4.1 Platonische Körper sehen - Lagebeziehungen erkennen

Das räumliche Vorstellungsvermögen wird geschult, indem in zweidimensionalen Abbildungen platonischer Körper die räumliche Anordnung der Kanten, Ecken und Flächen erkannt wird. Was ist vorne, was ist hinten? Welche Flächen, Ecken oder Kanten sind sichtbar?

4.2 Eigenschaften platonischer Körper - ein Steckbrief

Mit Hilfe eines „Steckbriefs der Platonischen Körper“ erfolgt eine Wiederholung und Vertiefung der Eigenschaften platonischer Körper. Anhand der Einträge wird über eine geführte Erkundung entdeckt, dass es zwischen den Ecken- und Kantenzahlen Zusammenhänge gibt:
- Für das Tetraeder gilt: Die Anzahl der der Ecken ist gleich der Anzahl der Flächen.
- Für den Würfel und das Oktaeder sowie für das Dodekaeder und Ikosaeder gilt: Eckenzahl und Flächenzahl sind jeweils vertauscht.

4.3 Steckbrief weiterführen

Anhand der Ergebnisse aus 4.2 wird die „Polyedereigenschaft“ als eine speziell für alle platonischen Körper gültige *Recheneigenschaft* zwischen den Ecken-, Kanten- und Flächenzahlen erarbeitet:
Für alle platonischen Körper ist die Summe der Anzahl der Ecken und Flächen immer um 2 größer als die Anzahl der Kanten.

4.4 Weitere Verwandtschaften bei den platonischen Körpern

Die Dualität platonischer Körper wird über ein vorbereitetes Arbeitsblatt handlungsorientiert nachvollzogen über das Verbinden von Mittelpunkten der Oberflächen-Vielecke. Dabei werden weitere Eigenschaften entdeckt:
Im Sechsflach entsteht ein Achtflach und umgekehrt.
Die Flächenzahl des Würfels (6) ist gleich der Eckenzahl des Achtflachs (6).
Umgekehrt ist die Flächenzahl des Achtflachs (8) gleich der Eckenzahl des Würfels (8).
Entsprechend entsteht im Zwölfflach (Dodekaeder) ein Zwanzigflach (Ikosaeder) und im Zwanzigflach ein Zwölfflach. Also ist die Flächenzahl des Zwölfflachs (12) gleich der Eckenzahl des Zwanzigflachs und umgekehrt.

4.5 Platonische Körper - woher kommt der Name?

Mit Hilfe einer Vorlage informiert der Kursleiter über den griechischen Philosophen Platon und stellt vor, dass Platon den Elementen Feuer, Erde, Luft, Wasser und der kugelförmigen Welt als Ganzes (in der Sinnenwelt) die fünf platonischen Körper (in der Ideenwelt) zuordnet.

Thema 5: Platonische Sterne

5.1 Platonische Sterne beschreiben und bauen
Das bisherige Wissen über platonische Körper soll dazu verwendet werden, eine neue Art mathematischer Körper zu beschreiben und zu bauen. Diese Körper sollen sternförmig sein, indem das Innere (der Kern) aus einem platonischen Körper besteht, bei dem auf jeder seiner Oberflächen-Vielecke jeweils platonische Körper einer gleichen Sorte deckungsgleich als Strahlen aufgesetzt werden. Wir nennen sie deshalb auch „Platonische Sterne“:
Ein platonischer Stern ist aus platonischen Körpern zusammengesetzt. Auf einen platonischen Körper (dem Inneren) werden auf jedes Vieleck seiner Oberfläche jeweils gleiche platonische Körper (die Strahlen) deckungsgleich aufgesetzt. Mit Hilfe von GEOMAG-Teilen werden zunächst platonische Sterne gebaut, deren Strahlen Tetraeder sind.

5.2 Gibt es noch weitere platonische Sterne?

Exemplarisch wird gezeigt, dass es noch weitere platonische Sterne gibt:
Der Würfelstern: Das Innere ist ein Würfel, zusätzlich 6 Würfel als „Zacken“.
Der Dodekaeder-Stern: Das Innere ist ein Dodekaeder, zusätzlich werden 12 Dodekaeder als Strahlen benötigt.

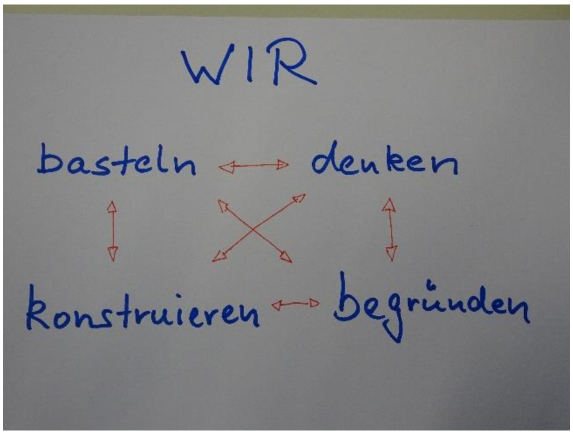
5.3 Vorbereitung der Präsentation

Idee ist, dass die Kursteilnehmer als Experten die Besucher in einem Rundgang durch die Ausstellung begleiten und ihnen Fragen beantworten, die vorab von den Teilnehmern zusammengestellt und beantwortet sind. Am Präsentationstag können Besucher Fragen aussuchen, welche die Experten anhand der ausgestellten Modelle, Schaubilder und der Materialien an der Doku-Wand beantworten. Exemplarisch werden die Fragen gestellt und abwechselnd beantwortet.

5.4 Vorbereitung für den Ikosaeder-Stern aus Tonpapier

Bei der Präsentation bauen die Kursteilnehmer gemeinsam mit den Besuchern einen großen Ikosaeder-Stern aus Papier und gestalten ihn. Das Innere (der Ikosaeder) ist vorbereitet. Die Besucher können je einen „Strahl“ in Form eines Tetraeders bauen, farblich gestalten und auf das Innere des Sterns kleben.

Ausgewählte Fotos geben einen Eindruck der vielseitigen Handlungen und Produkte.



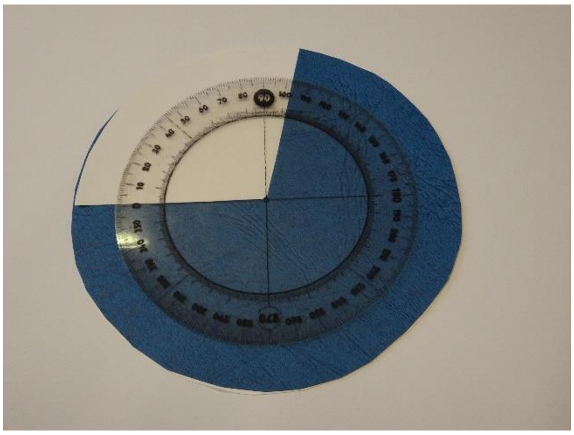


Abbildung 4.7: Bildeindrücke ohne Worte aus Kursen in den Herbstferien 2016 und 2017 an der Thiebauth-Schule Ettlingen, Kursleiter Ingrid König und Rolf Reimer [328]

[328] Die Erziehungsberechtigten von Kindern, die an einem Hector-Kurs teilnehmen, haben zugestimmt, dass Bilder für wissenschaftliche Zwecke verwendet werden dürfen.

4.8 Statt zu messen denk‘ ich nach – Argumentieren lernen mit Geometrie

Die Überschrift war der Titel eines Beitrags in der Zeitschrift „mathematiklehren“ des Friedrich Velber Verlags. [329] Ziel dieser Unterrichtseinheit ist es, den Lernenden zu ermöglichen, eine Argumentationsbasis elementarer Sätze der Geometrie aufzustellen, um damit selbständig Sätze der Geometrie der Sekundastufe I zu begründen. Mit einer solchen Vorgehensweise erfahren sie propädeutisch eine zentrale Arbeitsweise der Mathematik, ein fachliches Wissensgebäude, bestehend aus wenigen elementaren und unzweifelhaft wahren Sätzen als Wissensgrundlage, mit logischen Argumenten zu erweitern.

Als motivierender Einstieg wird das Kunstwerk „Komposition Nr. 8“ von Wassily Kandinsky verwendet, welches die Klasse gemeinsam „fälschen“ möchte, dabei jedoch einfaches Kopieren durch logisches Handeln ersetzt werden soll. [330]

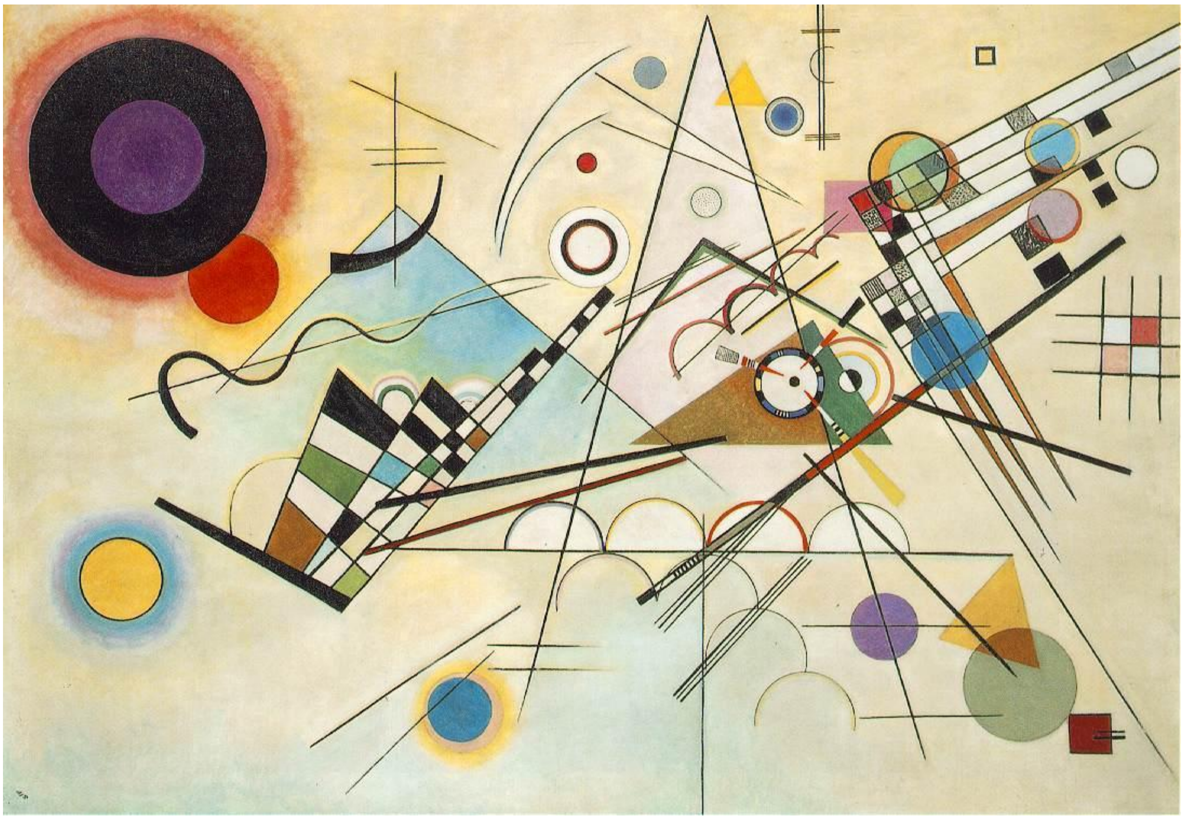


Abbildung 4.8-1: Kandinsky: „Komposition Nr. 8“

[329] Die Autoren Sonny Timm, Lars Unangst und Rolf Reimer waren 2011 kollegial verbunden als Fachdozenten für Mathematik am Staatlichen Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) in Karlsruhe. An der Konzeption der Unterrichtsmaterialien haben Hanspeter Eichhorn und Julia Knötschke am Dietrich-Bonhoeffer-Gymnasium Weinheim und Ina Bischof als Lehrerin am Helmholtz-Gymnasium Karlsruhe und Kollegin am Seminar mitgearbeitet.

[330] Diese Idee stammt von Barbara Linck, einer Referendarin des Autors im Mathematik-Kurs 2010 am Seminar Karlsruhe.

Um die Elemente des Bildes zu beschreiben, müssten wir Streckenlängen messen und Winkelweiten bestimmen. Wir wollen überlegen, wie man dabei Messen möglichst durch Denken ersetzen kann.

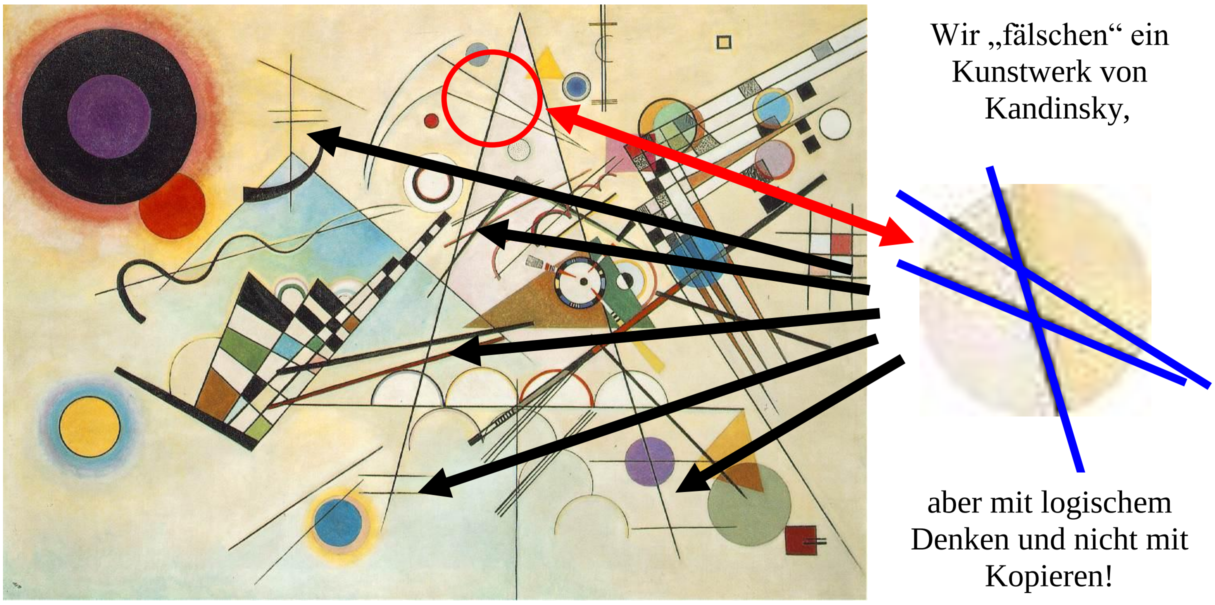


Abbildung 4.8-2: Suche nach ähnlichen Teilfiguren

Dabei suchen wir zunächst nach einfachen ähnlich aussehenden Teilfiguren und nach Symmetrieeigenschaften. Zum Beispiel ist die rot umrandete Teilfigur in Abbildung 4.8-2 (siehe roter Pfeil) mehrfach zu erkennen (siehe schwarze Pfeile). Wenn wir diese Situationen geometrisch sehen, sind drei Geraden (blau gezeichnet) beteiligt, die sich schneiden. Wenn zwei dieser Geraden parallel sind, ist die Gesamtfigur punktsymmetrisch (roter Punkt in Abbildung 4.8-3) und wir erkennen vier Winkelpaare, die Symmetriepartner sind. Damit können wir eine Argumentkarte für eine Wissensbasis herstellen (vgl. Abbildung 4.8-3).

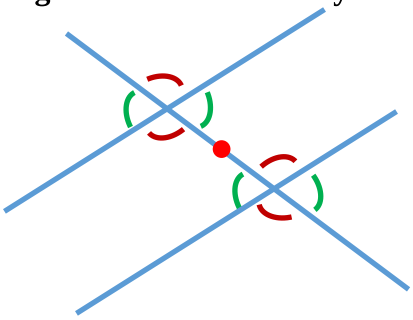
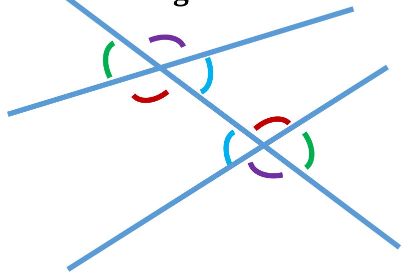
Zwei parallele Geraden werden von einer dritten geschnitten → Punktsymmetrie ●	**A1: Wechsel und Stufenwinkel**
	**Argumente** 
4 Wechselwinkelpaare und 4 Stufenwinkelpaare, sind <u>paarweise</u> gleich weit.	Wenn in einer Figur wie dieser <u>ein</u> Paar von Wechsel- oder Stufenwinkeln gleich weit ist, sind alle gleichweit.

Abbildung 4.8-3: Argumentkarte Wechsel- und Stufenwinkel

Auf analoge Weise wird eine Argumentkarte für zwei sich schneidende Geraden erstellt, die augenscheinlich punktsymmetrisch sind und eine Argumentkarte für das gleichschenklige Dreieck erarbeitet (siehe die Abbildungen 4.8-4 und 4.8-5).

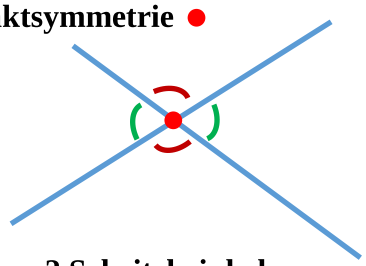
Zwei Geraden, die sich schneiden **→ Punktsymmetrie**	**A2: Scheitel- und Nebenwinkel**
 **2 Scheitelwinkelpaare** **4 Nebenwinkelpaare**	**Argumente** Scheitelwinkel sind gleich weit Nebenwinkel ergeben zusammen 180°

Abbildung 487-4: Argumentkarte Scheitel- und Nebenwinkel

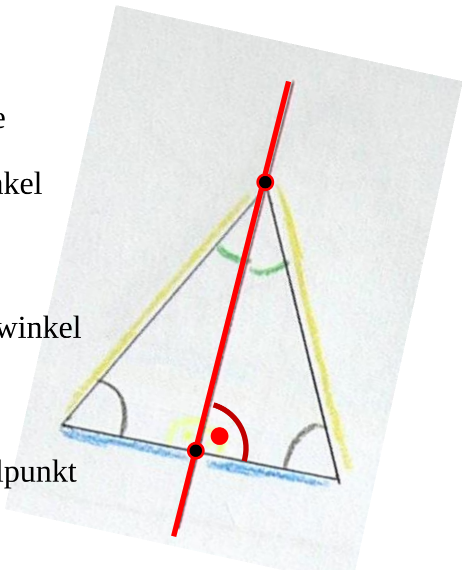
Ein Dreieck mit einer Symmetrieachse **→ Achsensymmetrie**	**A3: Gleichschenkliges Dreieck**
Spitze Schenkel Basiswinkel Basis Mittelpunkt  **Basiswinkel sind gleich weit,** **Schenkel sind gleich lang.**	**Argumente** 1. Das Dreieck hat zwei gleich lange Seiten (Schenkel). 2. Das Dreieck hat zwei gleich weite Winkel (Basiswinkel). 3. Eine Winkelhalbierende ist senkrecht zur dritten Seite (Basis). 4. Die Mittelsenkrechte einer Seite geht durch den gegenüberliegenden Eckpunkt (Spitze). 5. Eine Winkelhalbierende geht durch den Mittelpunkt der dritten Seite (Basis). Wenn man ein Dreieck hat, bei dem eines dieser Argumente zutrifft, dann ist das Dreieck gleichschenklig. Dann kann man alle anderen Argumente verwenden.

Abbildung 4.8-5: Argumentkarte Gleichschenkliges Dreieck

Die Argumentkarten A1, A2 und A3 bilden nun eine Wissensbasis, mit der nachfolgend argumentiert werden darf. [331] Zunächst werden aus den Klassen 5 und 6 bekannte Eigenschaften als Sätze formuliert, die nach den vereinbarten „Spielregeln“ begründet werden sollen. Ausgewählt

[331] Für die Unterrichtseinheit wurden bei unterschiedlichen Durchführungen die Argumentkarten zum Teil von der Lehrperson nach der Erarbeitung als Musterlösung erstellt und ausgeteilt, teilweise aber auch zusammen mit der Klasse gemeinsam erstellt und auf DIN-A6 großen Karten dokumentiert.

werden die Sätze über die Winkelsumme im Dreieck und die Winkelweiten im gleichseitigen Dreieck. Die Argumentationsführung übernimmt die Klasse gemeinsam. Die Lehrperson moderiert nur den Ablauf und gibt gelegentlich oder bei Anfragen Tipps. Dabei sind die Lernenden aufgefordert, gemeinsam über die Auswahl der Argumentkarten zu entscheiden, die geeignet erscheinen. Für das erste Beispiel wird ein Heftaufschrieb gemeinsam entwickelt und durchgeführt (siehe Abbildung 4.8-6):

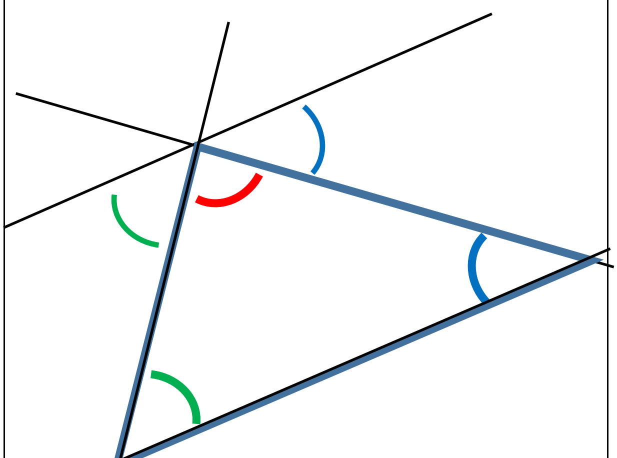
<table>
<tr><td colspan="2">Gegeben ist ein (beliebiges) Dreieck.
Behauptung: Die Summe der Winkelweiten der Innenwinkel ist 180°.</td></tr>
<tr><td>
Benutzte Argumentkarte: A1</td><td>Jeder zeichnet zuerst ein (sein) Dreieck in seinem Heft. Danach wird eines wie nebenstehend an der Tafel gezeichnet. Die Winkel werden mit drei Farben unterschieden. Die Klasse wird aufgefordert, die Argumentkarten A1 bis A3 durchzusehen und zu überlegen, ob eine der dort angegebenen Figuren in die Situation so hineingesehen werden kann, dass Übereinstimmungen entstehen und Argumente angewendet werden können. Die Lehrperson gibt den Tipp, dass man dazu das Dreieck erweitern muss und Objekte hineinsieht, die auf der passenden Argumentkarte sind.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nachdem man sich geeinigt hat, dass die Argumentkarte A1 gut geeignet ist, wird das Dreieck zuerst von einem Schüler oder einer Schülerin an der Tafel ergänzt und danach in den Heften. Damit ist ohne weitere Worte der Satz beweisen, denn die drei Winkel ergänzen sich „oben“ zu einem gestreckten Winkel mit der Weite 180°.</td></tr>
</table>

Abbildung 4.8-6: Die Begründung des Innenwinkelsatzes für Dreiecke mit einer Argumentkarte

Weitere Inspektionen in Kandiskys Komposition Nr. 8 liefern Ideen für neue Sätze und Situationen, die zu Vermutungen führen und Begründungen erfordern. [332]

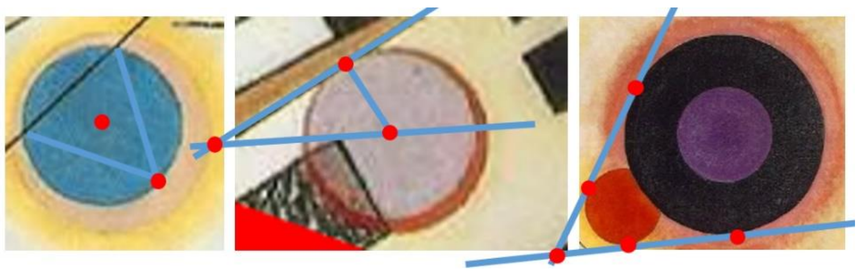


Abbildung 4.8-7: Weitere Ausschnitte – Anlässe für Vermutungen

Die Auswahl kann z. B. Anlass sein, den Satz des Thales zu verallgemeinern oder bei Kreisen Tangentenprobleme zu lösen, um Konstruktionen zu begründen. [333]

[332] Wichtig für die Motivation bei diesem „Argumentations-Spiel“ ist die Übergabe der Verantwortung an die Klasse bzw. in nahfolgenden Aufgabenstellungen an kleinere Gruppen. Argumentieren heißt nicht Beweise schreiben, sondern sich gegenseitig überzeugen. Nach der Begründung eines Satzes muss dieser für die erweiterte Wissensbasis dokumentiert werden. Das Verfahren kann für alle Sätze der Geometrie weitergeführt werden, die in den Klassen 7 bis 9 in der ebenen Geometrie im Lehrplan aufgeführt sind, und es ist binnendifferenzierend erweiterbar.
[333] Die Klasse darf dabei an Euklid erinnert werden, der vor etwa 2400 Jahren der Erfinder dieser Methode war.

Als Abschluss folgt exemplarisch eine Gegenüberstellung zweier Aufgabenformate:

A: Aufgabe (exemplarisch für Lehrwerke) [334]

2.) Bestimme die Größe der bezeichneten Winkel in Fig. 6

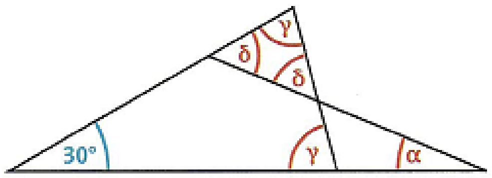


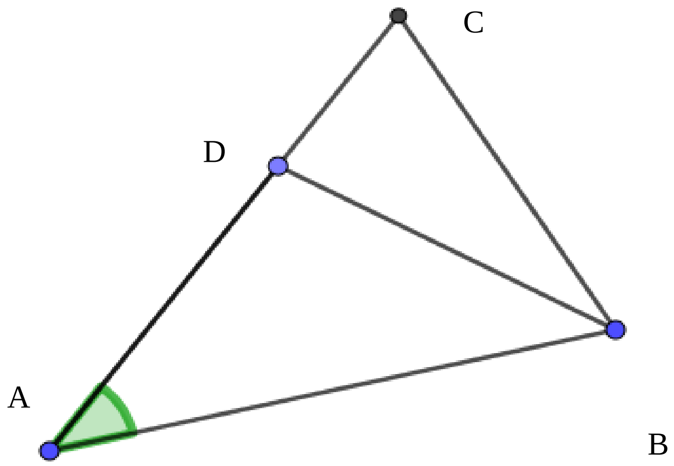
Fig. 6

Die beiden Gegenüberstellungen verdeutlichen, wie mit einer geringen Variation regulärer Aufgaben auch der Aufbau positiver gefühlsmäßiger Beziehungen zur Fachlichkeit unterstützt werden kann. [335]

B: Aufgabenvariation für eine beziehungsförderlichere unterrichtliche Einbindung

Die nachfolgend gezeichnete Figur hat folgende Eigenschaften:

Es gibt zwei gleichschenklige Dreiecke. Der grüne Winkel hat eine Weite von 40°.



Euklid hat folgendes behauptet:
I: Man kann insgesamt drei Dreiecke sehen.
I: Mit den gegebenen Informationen kann man alle Winkelweiten bestimmen, ohne zu messen.
II: Man kann den grünen Winkel so verändern, dass rechtwinklige Dreiecke entstehen.
III: Man kann den grünen Winkel so wählen, dass drei gleichschenklige Dreiecke entstehen.

a) Beweise Euklids Behauptungen. Zeichne zu jeder Lösung eine entsprechende Figur und schreibe eine Begründung auf.
b) Lars hat beim Lösen der Aufgabe noch etwas entdeckt: Wenn der grüne Winkel immer kleiner oder immer größer wird, entstehen zwei interessante Grenzfälle.
c) Und Simon überlegt sich, ob es mit einer geschickten Wahl des grünen Winkels möglich ist, beim Punkt B einen rechten Winkel zu erzeugen.

Abbildung 4.8-8: Zwei Aufgabenformate im Zusammenhang mit geometrischem Argumentieren und mechanisiertem bzw. entdeckendem Lernen unter Verwendung dynamischer Geometriesoftware

[334] Lambacher Schweizer 3 (Klasse 7)
[335] Der Vergleich zeigt aber auch, dass ein reguläres Lehrwerk diese Funktion prinzipiell nicht erfüllen kann, weil in Situationen entsprechend B spezifische Kenntnisse der Lerngruppe und situative Momente der fachlichen Entwicklung mitentscheidend sind. Die beiden Aufgabenformate schließen sich aber auch nicht aus. Das Format A kann nahtlos an B angeschlossen werden, indem z. B. im obigen Fall Fig. 6 mit der Figur aus B verglichen wird. Grundsätzlich wird auch deutlich, dass im Fall B eine dynamische Geometriesoftware die emotionale Bewertung des Löseprozesses positiv beeinflussen und im Fall A die Situation dynamisch variiert werden kann.

4.9 Wann ist ein Dreieck eindeutig bestimmt?

Die *Kongruenzsätze für Dreiecke* sind eine Satzgruppe, mit der entschieden werden kann, ob Dreiecke aus drei Grundgrößen hinsichtlich einer Kongruenz eindeutig konstruierbar sind. [336]

Die folgende Unterrichtsskizze gibt den Lernenden die Möglichkeit, experimentell handelnd Bedingungen dafür arbeitsteilig selbst zu entdecken und geordnet darzustellen.

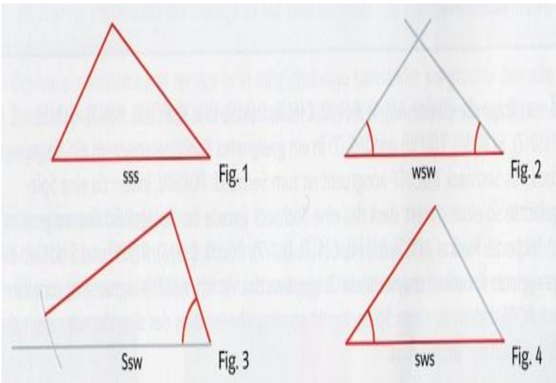
Voraussetzung: Die standardisierte Bezeichnung bei Dreiecken ist eingeführt; eine handlungsorientierte Grundvorstellung der *Deckungsgleichheit* von Figuren ist entwickelt (zwei ausgeschnittene Figuren sind *kongruent*, wenn man sie ohne Überstände aufeinanderlegen kann).

Vorbereitung: Über die Betrachtung zweier kongruenter Dreiecke wird intuitiv erkannt: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Winkel und Strecken paarweise jeweils so einander zugeordnet werden können, dass sie gleich sind (also kongruent als elementare Teilfiguren).

Problemstellung: Wenn wir Dreiecke zeichnen wollen, können wir diese über die Angabe von Grundgrößen festlegen. Wir wollen untersuchen, ob es möglich ist (ohne zu zeichnen), allein aus den Angaben zu entscheiden, ob es dabei nur eine Lösung gibt.

Die Erarbeitung der Sätze durch die Lernenden erfolgt in drei geführten Phasen:

1. Es wird erarbeitet, dass man zur Festlegung eines Dreiecks mindestens drei Grundgrößen benötigt.
2. Geht man demnach von drei Angaben eines Dreiecks aus, ergeben sich vier Fälle: 3 Seiten und kein Winkel, 2 Seiten und 1 Winkel, 1 Seite und 2 Winkel, keine Seite und 3 Winkel.
3. Diese Fälle werden zu *vier Grundaufgaben* erklärt, welche die Schülerinnen und Schüler gruppenweise an selbst gewählten Beispielen konstruktiv durchführen sollen, um dabei festzustellen, ob die Eindeutigkeit eintritt oder verletzt ist.
4. Eine abschließende Vorstellung von Ergebnissen führt zum Ergebnis, dass es genau vier Ausgangssituationen gibt, bei denen diese Eindeutigkeit gegeben ist. Diese werden auf einer Wissenskarte ikonisch dokumentiert und mit den üblichen Kurzbezeichnungen **sss, wsw**, **Ssw, sws** abgekürzt. [337]



[336] Die Kongruenzsätze sind in Baden-Württemberg ein verpflichtendes Thema in der Klassenstufe 8.
[337] Entsprechend der Vorgehensweise wäre es angebracht, von einem Kongruenzsatz zu sprechen, in dem die Bedingungen für die Eindeutigkeit als Fälle aufgeführt sind.

4.10 Der Zufall als Streitschlichter – Begriffsbildung Wahrscheinlichkeit

Eine Einführungsstunde

Das folgende Unterrichtsskript mit den Materialien für eine Doppelstunde zeigt eine Möglichkeit, Lernenden der Klassenstufe 7 einen ihnen bisher vorwiegend aus dem Alltag bekannten Begriff mit dem bisher erworbenen Wissen über Zahlen quantitativ zu erfassen und darüber zu objektivieren. Verwendet wird eine Aufgabenstellung, für die es mit dem bisher erworbenen strategisch einsetzbaren Fachwissen noch keinen Zugang gibt. Dies liefert die Motivation, zunächst experimentell eine Lösung zu finden.[338] Die in diesem Abschnitt verwendete Aufbereitung wurde für das Sindelfinger Schulprojekt erstellt (vgl. Abschnitt 4.2). Die Anweisungen zur Unterrichtsführung und die verwendeten Materialien wurden übernommen, um für diese erste Begriffsbildungsphase zum Begriff Wahrscheinlichkeit exemplarisch ein auftragsgesteuertes Lernen anhand einer Lernaufgabe darzustellen (vgl. Abschnitt 3.2.8.2 f).

Unterrichtsziele

Was können die SuS[339] nach dieser Stunde?

1. Die SuS können durch eine Versuchsreihe ein Experiment untersuchen und dann Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ausgänge treffen.
2. Die SuS können relative Häufigkeiten nutzen, um Entscheidungen zu treffen.
3. Die SuS lernen das Konzept „Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit“ kennen.

Was machen die SuS in dieser Stunde?

1. Die SuS erstellen Versuchsreihen mit absoluten und relativen Häufigkeiten.
2. Die SuS diskutieren die verschiedenen Ergebnisse.
3. Die SuS fällen Urteile, ob das vorgestellte Spiel fair ist.

Beschreibung

Die SuS erstellen Versuchsreihen mit absoluten Häufigkeiten und relativen Häufigkeiten und diskutieren die jeweiligen Ergebnisse. Sie erkennen, dass sich nach oftmaliger Wiederholung des Experiments eine Stabilisierung der Ergebnisse ergibt. Die SuS können mit der Grundvorstellung „Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit“ Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ausgänge treffen.

---

[338] Diese Unterrichtseinheit wurde vom Autor 2006 erstmals in einer Klasse 7 am Eichendorf-Gymnasium in Ettlingen eingesetzt. Sie wurde bei Vorträgen vor Fachschaften an Schulen im Rahmen schulinterner Fortbildungen mehrfach vorgestellt.
[339] SuS steht für Schülerinnen und Schüler.

Unterrichtsphasen	
Phase 1	Einstiegsgespräch zum Thema „Helfen im Haushalt“. Der Lehrer stellt das Problem „Zufall als Streitschlichter?“ anhand der Aufgabe vor (Anhang 1) und animiert die Schüler, sich zum Vorschlag zu äußern. Leitfrage ist dabei: Ist das Spiel fair? Probeweise wird das Spiel zweimal durchgeführt, damit es verstanden ist.
Phase 2	Die SuS führen das Zufallsexperiment in Partnerarbeit zwanzigmal durch und dokumentieren ihre Ergebnisse in einer Tabelle auf der Ergebnisfolie und im Heft.
Phase 3	Die unterschiedlichen Ergebnisse werden gesammelt und besprochen. Anschlussfrage: Wie kann man mehr Sicherheit für das Ergebnis finden?
Phase 4	Die Ergebnisse von je zwei Gruppen werden zusammengefasst dokumentiert und besprochen.
Phase 5	Es werden weitere Zusammenfassungen vorgenommen und die Ergebnisse gesammelt (vgl. Folie).
Ergebnis	Das Ergebnis der gesamten Versuche wird erfasst und diskutiert. Fragestellung im Anschluss: Welches Ergebnis wird erwartet, wenn man 100mal würfeln würde?
Fazit	Relative Häufigkeiten können helfen, Entscheidungen zu treffen. Aus Daten kann ich Schätzwerte für mein Verhalten ableiten.
Material	
	Würfel und Würfelbecher Aufgabe (Anhang 1) Folie für die Zusammenfassung der Versuche (über den Overhead-Projektor) und als Kopiervorlage für die Hefteinträge (Anhang 2)
Bemerkungen	
	Hausaufgabe: Was kann man tun, um zu prüfen, ob ein Würfel fair ist? Jeder wirft mindestens 50mal mit einem Würfel, der zur nächsten Stunde mit in den Unterricht gebracht wird.

Anhang 1: Problemstellung

Die Geschwister Paul und Antonia streiten sich jeden Tag, wenn es darum geht, den Tisch abzuräumen. Und gemeinsam ist es am „allerdoofsten“.

Antonia schlägt Paul vor, dass von jetzt an der Zufall darüber entscheiden soll, wer täglich abräumt.

Sie sagt: „Du darfst jeden Tag dreimal würfeln. Wenn du dabei eine Sechs würfelst, muss ich abräumen; andernfalls räumst du ab.“

Soll Paul auf den Vorschlag eingehen?

Anhang 2: Ergebnissicherung (Folie und Kopiervorlage)

Erste Versuchsreihe: 16 Bänke mit jeweils 20 Versuchen (V_1 – V_{16})

V_1	abs.	%
P	5	25
A	15	75

V_2	abs.	%
P	7	35
A	13	65

V_3	abs.	%
P	7	35
A	13	65

V_4	abs.	%
P	6	30
A	14	70

V_5	abs.	%
P	7	35
A	13	65

V_6	abs.	%
P	10	50
A	10	50

V_7	abs.	%
P	13	65
A	7	35

V_8	abs.	%
P	7	35
A	13	65

V_9	abs.	%
P	7	35
A	13	65

V_{10}	abs.	%
P	10	50
A	10	50

V_{11}	abs.	%
P	13	65
A	7	35

V_{12}	abs.	%
P	8	36,4
A	12	63,6

V_{13}	abs.	%
P	5	25
A	15	75

V_{14}	abs.	%
P	7	35
A	13	65

V_{15}	abs.	%
P	9	45
A	11	55

V_{16}	abs.	%
P	8	40
A	12	60

Zusammenfassung 1: zwei Bänke mit jeweils 40 Versuchen (E_1 – E_8)

E_1	abs.	%
P	12	30
A	28	70

E_2	abs.	%
P	13	32,5
A	27	67,5

E_3	abs.	%
P	17	42,5
A	23	57,5

E_4	abs.	%
P	20	50
A	20	50

E_5	abs.	%
P	17	67,5
A	23	32,5

E_6	abs.	%
P	21	52,5
A	19	47,5

E_7	abs.	%
P	12	30
A	28	70

E_8	abs.	%
P	17	67,5
A	23	32.5

Zusammenfassung 2: vier Bänke mit jeweils 80 Versuchen (F_1 – F_4)

F_1	abs.	%
P	25	31,2
A	55	68,8

F_2	abs.	%
P	37	46,2
A	43	53,8

F_3	abs.	%
P	39	48,7
A	41	51,3

F_4	abs.	%
P	29	36,2
A	53	63,8

Zusammenfassung 3: acht Bänke je 160 Versuchen (G_1 und G_2)

G_1	abs.	%
P	62	38,7
A	98	61,3

G_2	abs.	%
P	65	40,6
A	95	59,3

Zusammenfassung 4: eine Gruppe mit 320 Versuchen

Ges.	**abs.**	**%**
P	**127**	**39,7**
A	**193**	**60,3**

	Theorie
P	**42%**
A	**58%**

Bemerkung: Die Ergebnisse stammen aus der erstmaligen Unterrichtsdurchführung des Autors. Das über die Laplace-Annahme bestimmte Ergebnis (siehe den Eintrag unter Theorie) wurde zur Motivation genutzt, um der Klasse mitzuteilen, dass sie am Ende des Schuljahres das nötige Wissen haben würde, dieses Ergebnis nachvollziehen zu können. Wichtig war in dieser Phase, mit dem bisherigen Wissen über Zahlen empirische Grundvorstellungen zur Wahrscheinlichkeit anzusprechen und erste Erfahrungen mit dem Gesetz der großen Zahlen zu machen (vgl. Abschnitt 3.5.6.6).

4.11 Funktionales Denken – Lineare Funktionen

Entsprechend des baden-württembergischen Bildungsplans sind lineare Zuordnungen (bzw. quadratische Funktionen) Inhalte der Klassenstufen 7 (bzw. 8). Entsprechend einer vernetzt verfassten Begriffsbildung werden funktionale Betrachtungen mit den zugehörigen algebraischen Tätigkeiten und Methoden verknüpft. Danach kann man im Bereich algebraischer Tätigkeiten die Klasse 7 auch unter dem inhaltlichen Schwerpunkt „lineare Terme und Gleichungen" sehen und die Klasse 8 unter dem Aspekt „quadratischer Formen und Gleichungen".

Im folgenden Abschnitt wird eine Lernaufgabe [340] für die Klasse 7 vorgestellt, mit der nach einer erfolgten Begriffsbildung „Lineare Funktionen" allgemeine lineare Gleichungen behandelt werden.

Von linearen Zuordnungen zu linearen Gleichungen

Diese Unterrichtseinheit wurde anlässlich einer von Tina Dittrich geleiteten CAS-Maple-Tagung in Zusammenarbeit des Regierungspräsidiums Karlsruhe mit der Abteilung für Didaktik der Mathematik am KIT am 18. 2. 2014 von Ingrid Lenhardt, Simone Neher und dem Autor vorgestellt. Für die Präsentation hatte Simone Neher einen Funktionendarsteller als Maple-Applikation geschrieben, welche mit einer einfach zu bedienenden Oberfläche die Darstellung von Funktionen als Graph und Tabelle ermöglichte (vgl. Abbildung 4.11-1). [341]

Als Hinführung zur Problematik dient eine **Kerzenaufgabe**

Zu drei Kerzenarten gibt es folgende Informationen:

- Eine brennende Kerze der ersten Art war nach 2 Stunden Brenndauer noch 8 cm und nach 4 Stunden noch 4 cm lang.
- Eine Kerze der zweiten Art ist anfangs 10 cm lang. Nach 5 Stunden Brenndauer ist sie noch 6 cm lang.
- Kerzen der dritten Art sind 14 cm lang und haben nach Angaben des Herstellers eine Brenndauer von 6 Stunden.

[340] Vgl. Abschnitt 3.2.8.2.

[341] Als Vorteile eines Funktionendarstellers wurden genannt: die Visualisierung in den drei Darstellungs-, Handlungs- bzw. Denkformen *Term, Graph und Tabelle,* die Wahrnehmung des Zuordnungs- und Variationsaspekts sowohl bei statischem als auch dynamischem Verhalten, die Vernetzung zwischen algebraischem und funktionalem Denken, die Ermöglichung unterschiedlicher Lösungswege entsprechend dieser Darstellungsformen und die Motivation für rechnerische (algebraische) Lösungswege zur Exaktifizierung der Genauigkeit gegenüber grafischen und tabellarischen Ablesungen.

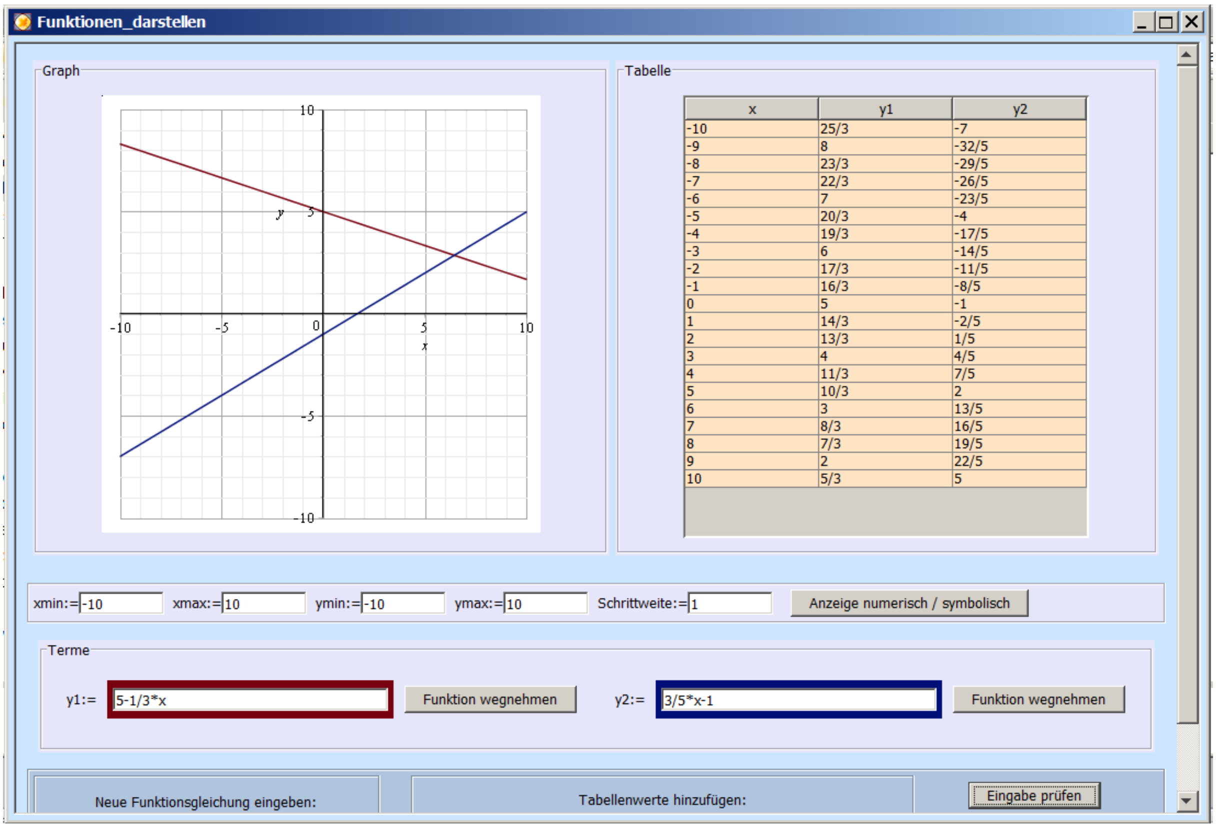


Abbildung 4.11-1: Bildschirmkopie des Funktionendarstellers von Simone Neher. Eine Besonderheit dieser Applikation ist, Tabellenwerte numerisch (als Dezimalzahl) oder symbolisch (als Bruchzahl) anzuzeigen.

Die Arbeitsaufträge an die Lernenden sind auftragsgesteuert gestaltet:

Auftrag 1: (2 Minuten)

Lies den Text. Beantworte die folgenden Fragen durch Schätzen:

1. Welche Kerze brennt am längsten?
2. Nach welcher Zeit ist eine Kerze auf die Hälfte ihrer Länge abgebrannt?
3. Sind zwei Kerzen irgendwann gleich lang? Wenn ja, nach welcher Zeit?

Die *Antworten werden auf ein gesondertes Blatt mit Namen geschrieben und eingesammelt.* […]

Auftrag 2: (2 Minuten)

Trage in der Tabelle nur das ein, was nach den Informationen bekannt ist.

Zeit (Std.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Kerze 1 (cm)														
Kerze 2 (cm)														
Kerze 3 (cm)														

[…]

L vermittelt den Übergang zur mathematischen Modellierung

Auftrag 3: (10 Minuten)

Annahme: Die Kerzen werden **gleichzeitig** angezündet und jede Kerze brennt **gleichmäßig** ab. Vervollständige unter dieser Annahme die Tabelle.
[…]

Von der diskreten zur kontinuierlichen Beschreibung
Zunächst wird der bisherige Tabelleninhalt als Liniendiagramm dargestellt. Je nach Wissensstand der Klasse werden die zugehörigen linearen Terme bestimmt (entweder über einen Auftrag, ggf. arbeitsteilig oder geführt, oder mit dem Funktionendarsteller visualisiert.
[…]

Auftrag 4: (Zeit offen)

Wir wollen nun versuchen, die Schätzaufgaben anhand der Darstellungen Graph, Term, Tabelle zu beantworten. Wie sollen wir vorgehen?
[…]

Rechnen, was man bisher erkannt, aber noch nicht genau bestimmt hat.
Variable x: Maßzahl der Zeit (Einheit: Stunden)
Variable y: Maßzahl der Länge (Einheit: cm)

Abbrennen kontinuierlich	Gleichung	
Kerze 1	k1 = 12 – 2·x	Darstellung Term, Graph, Tabelle
Kerze 2	k2 = 10 – 0,8·x	
Kerze 3	k3 = 14 – 7/3·x	

Die Lösungen sollen nun zunächst anhand der Darstellungsformen Graph und Tabelle gefunden werden.

Auftrag 5:

Überprüft mit der grafischen und tabellarischen Darstellung die Antworten zur Schätzaufgabe.
[…]

Die Lernenden sollen erkennen, dass die Darstellungsformen Graph und Tabelle oft nicht dazu geeignet sind, eine hinsichtlich der Genauigkeit zufriedenstellende Lösung anzugeben. Es sollen deshalb Möglichkeiten gefunden werden, die Lösungen auch rechnerisch zu bestimmen.

Auftrag 6:

Schreibt zu jeder Aufgabe eine passende Gleichung auf *(geht arbeitsteilig vor)*:
[…]

Die Lösungen sind in der mittleren Spalte der Tabelle eingetragen:

1. Brenndauer (Kerzenlänge = 0)	Rechnerischer Ansatz	Lösungswege
Kerze 1	0 = 12 – 2·x	[…] bekannt
Kerze 2	0 = 10 – 0,8·x	
Kerze 3	$0 = 14 - \frac{7}{3} \cdot x$	

2. Zeitdauer bis halbe Länge		Lösungsweg(e)
Kerze 1	$12 - 2 \cdot x = 6$	[…] bekannt
Kerze 2	$12 - 0{,}8 \cdot x = 5$	
Kerze 3	$14 - \frac{7}{3} \cdot x = 7$	
3. Gleiche Länge nach welcher Zeit?		
k1 = k2	$12 - 2 \cdot x = 10 - 0{,}8 \cdot x$	[…] nicht bekannt !
k1 = k3	$12 - 2 \cdot x = 14 - \frac{7}{3} \cdot x$	
k2 = k3	$10 - 0{,}8 \cdot x = 14 - \frac{7}{3} \cdot x$	
Es wird ein neues Verfahren entwickelt, das mit einer „**Termwaage**“ veranschaulicht wird.		
Termwaage  Links und rechts „liegen“ lineare Terme mit einer Variable x.	**Ausgangs-Situation** **Annahme**: Term $_{\text{links}}$ = Term $_{\text{rechts}}$ **Strategie**: Die Termwaage rechnerisch im Gleichgewicht halten!	Neue Lösungsstrategie für lineare Gleichungen entwickeln. Gleiche Rechnungen auf beiden Seiten ausführen. Ziel: **x isolieren !**

Die Abbildung 4.11-2 zeigt, dass parallel zu den Äquivalenzumformungen mit dem Funktionendarsteller die jeweiligen Terme auf den „Waagschalen“ als lineare Zuordnungen aufgefasst und die zugehörigen Geraden dargestellt wurden. Die Punkte A, B und C in Abbildung 4.11-2 sind die entsprechenden „Schnittpunkte“. Dabei erkannten die Lernenden, dass das Ziel „x“ die jeweils gleiche x-Koordinate dieser Schnittpunkte ist.

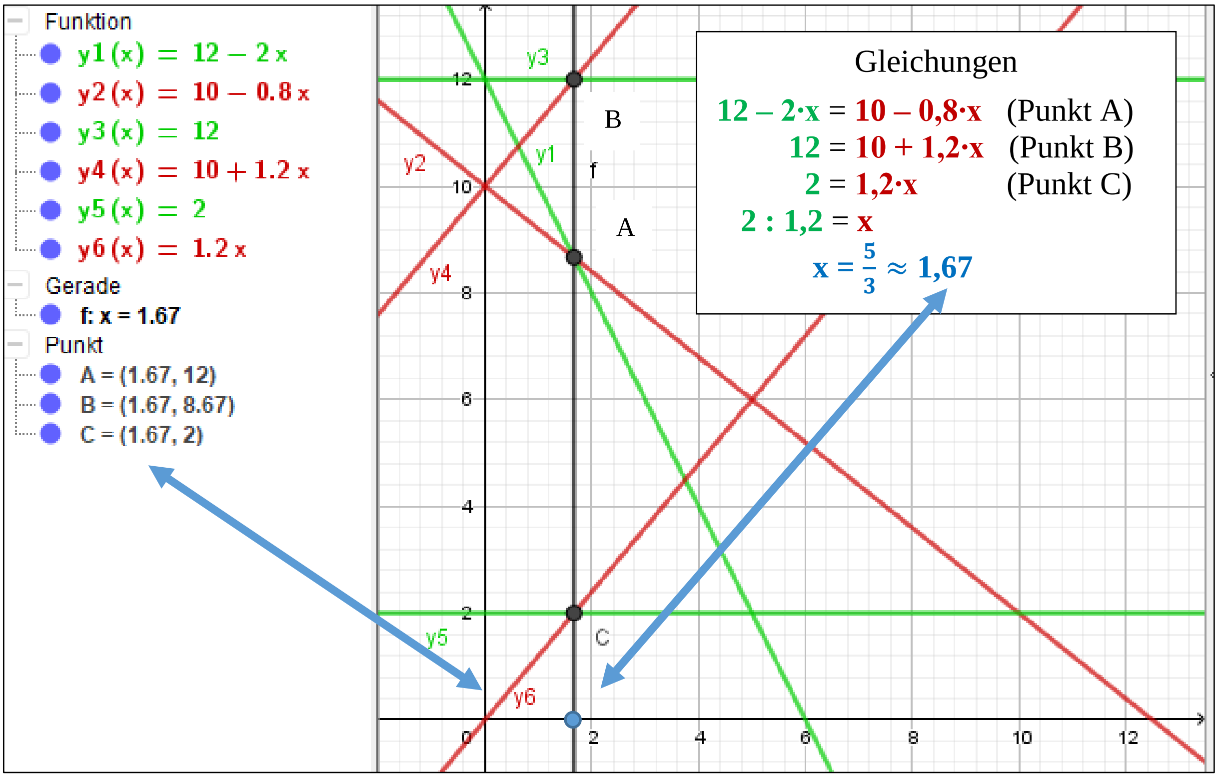


Abbildung 4.11-2: Visualisierung von Äquivalenzumformungen einer linearen Gleichung über eine Interpretation der „beidseitigen“ Terme als lineare Zuordnungen (Das Endprodukt zeigt nicht die prozesshafte Entwicklung der Umformungsschritte.)

4.12 Heron von Alexandria löst ein Geheimnis der Quadrate

Verknüpfung zweier Unterrichtsstunden in Klasse 6 und 8 [342]

Zur Person: Heron von Alexandria war ein griechischer Mathematiker und Ingenieur, der im 1. Jahrhundert nach Christus in Alexandria lebte und lehrte. Er hat das Datum einer Mondfinsternis berechnet und Maschinen erfunden, bei denen Wasserdampf Bewegungen erzeugt. Nebenstehend ist der nach ihm benannte Heronsball abgebildet. Ein mit Wasser gefüllter kugelförmiger Körper mit zwei Düsen in einer Aufhängung beginnt sich zu drehen, wenn man ihn von unten erhitzt. Nach diesem Prinzip hat Heron auch einen automatischen Öffner für eine schwere Tempeltür gebaut sowie einen automatischen Weihwasserspender entwickelt und mehrfach verkauft. [343]

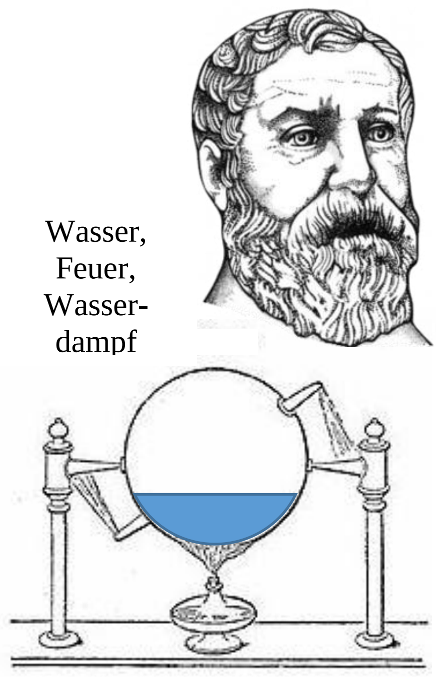


Abbildung 4.12-1: Heron und eine seiner Erfindungen

Klasse 6 (auftragsgesteuertes Lernen [344])

Hinführung: Wir wollen zusammen ein „Geheimnis der Quadrate“ lüften. Dazu machen wir erst einmal ein paar Übungen zu etwas, was Heron auch schon wusste:

Wenn man zwei Zahlen als Maßzahlen für Längen nimmt, kann man dazu ein Rechteck zeichnen, das die zugehörigen Seitenlängen hat. Zu 3 und 4 gehört das abgebildete Rechteck. Wir wissen und sehen es auch in der Figur, dass die Zahl 12 (das Produkt der Zahlen 3 und 4) die Maßzahl des Flächeninhalts ist.

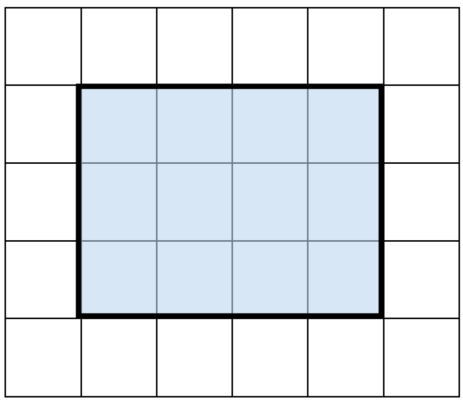


Abbildung 4.12-2: Rechteck im Gitternetz

Diese Überlegung wollen wir nun umkehren.

[342] Bruch- und Dezimaldarstellungen sind behandelt. Der Taschenrechner entlastet das halbschriftliche Rechnen.

[343] Quelle:https://www.google.de/imgres?imgurl=https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/2e/Hero_of_Alexand-
ria.png/220px-Hero_of_Alexandria.png&imgrefurl=https://de.wikipedia.org/wiki/Heron_von_Alexand-
ria&h=309&w=220&tbnid=Lx90RidR80SOTM:&tbnh=186&tbnw=132&usg=__KmyhZ8MmIfBqk7JQRV11hxHtHAs=&vet=10ahU-
KEwiv1PyL6vvTAhXF1ywKHUGmBAUQ_B0IhAEwCg..i&docid=Qr4cNnrT4enEsM&itg=1&sa=X&ved=0ahU-
KEwiv1PyL6vvTAhXF1ywKHUGmBAUQ_B0IhAEwCg&ei=rtMeWa_FFcWvswHBzJIoden

[344] Vgl. Abschnitt 3.2.8.2, *Lernaufgabe*: Beginnen mit Bekanntem, dann Problemstellung, für die es mit dem bisherigen Wissen keine allgemeine Lösung gibt, Vermittlung einer Idee über eine Näherungslösung, selbstverantwortliche Ergänzung der Tabelle im Wechsel zwischen geometrischer Darstellung und rechnerischer Transformation.

Auftrag 1: Wir sehen eine Zahl als Maßzahl für den Flächeninhalt eines Rechtecks an und wollen dazu ein Rechteck zeichnen. Wie geht das für die Zahl 20?

[…] [345]

Hinweis: Die Griechen verwendeten nur natürliche Zahlen und Verhältnisse, die wir mit Bruchzahlen ausdrücken können. Diese können wir auch als Dezimalzahlen schreiben und dürfen dazu auch bei Bedarf einen Taschenrechner einsetzen.

Auftrag 2: Bestimmt ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 20 cm^2, das eine Seite mit 4,5 cm hat, und zeichnet es im Heft.

[…]

Verallgemeinerung: Wir wissen also auch, dass man zu jeder Flächenmaßzahl und einer Seitenmaßzahl die fehlende Seitenmaßzahl für ein Rechteck berechnen kann.

Auftrag 3: Schreibt auf, wie dabei gerechnet wird.

[…]

Heron wusste, dass man bei einem Quadrat nur eine Zahl kennen muss, um den Flächeninhalt zu bestimmen. Kennt ihr die Antwort? [346]

Ergebnis (Heftaufschrieb): Zu jeder Zahl gibt es ein zugehöriges Quadrat, das diese Zahl als Maßzahl einer Seite hat. Die Maßzahl des Flächeninhalts des zugehörigen Quadrates ist die zugehörige Quadratzahl.

Beispiel: Das nebenstehende Quadrat (nur eine Skizze) soll einen Flächeninhalt von 20 (in der Einheit cm^2) haben.

Welche Zahl ist Maßzahl der Quadratseite a?

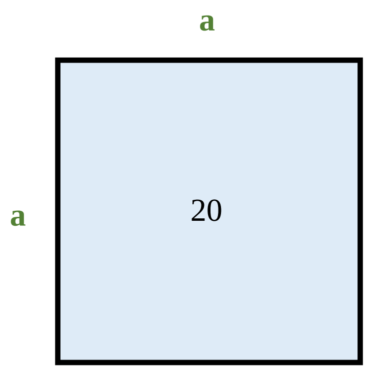


Abbildung 4.12-3: Skizze eines Quadrates mit gegebener Flächenmaßzahl 20

Auftrag 4: Überlegt, wie Heron vorgegangen sein könnte.

[…]

Je nach Verlauf des Prozesses kann die Lehrperson gegebenenfalls auch zeitnah den Tipp geben, dass Heron sein Wissen über Rechtecke verwendete und versuchte, ein an die Zahl 20 angepasstes Rechteck „quadratischer zu machen".

[345] Das Symbol […] verweist darauf, dass die Lehrperson an dieser Stelle die Verantwortung an die Lernenden übergibt und diese daran gewöhnt sind, nach einer angemessenen Zeit für eine Lösungssuche (die in der Regel auch vorgegeben ist) für die Präsentation von Lösungsvorschlägen verantwortlich zu sein.

[346] Die eher rhetorische Frage dient dem Herausarbeiten einer Verknüpfung des geometrischen Problems mit Quadratzahlen.

Ab dieser Stelle ist der weitere Unterrichtsgang abhängig von den Vorschlägen der Lerngruppe. Gegebenenfalls übernimmt die Lehrperson die Führung und beginnt mit einem Beispiel, das dann gemeinsam verbessert wird. Der weitere Weg ist idealtypisch beschrieben:

Gesucht ist ein Quadrat mit einer Flächenmaßzahl 20. Wir denken in der Einheit cm und schreiben nur die Maßzahlen. Unsere Quadratseite hat eine Seite zwischen 4 und 5, da $4^2 = 16$ ist und $5^2 = 25$, und 20 zwischen 16 und 25 liegt. [347] Wenn z. B. das flächengleiche Rechteck eine Länge 5 hat, hat die zweite Seite die Länge 4, denn $5 \cdot 4 = 20$.

Heron erkennt, dass die Mitte zwischen 4 und 5, also 4,5 oder $\frac{9}{2}$ wieder als Seite für ein neues Rechteck verwendet werden kann, das „quadratischer“ ist als das vorhergehende. Diese Idee kann man wiederholt anwenden. Sie liefert immer genauere Annäherungen an die gesuchte Quadratseite. Abbildung 4.12-4 zeigt eine zugehörige Tabelle.

Auftrag 5: Wendet das Verfahren für ein von euch gewähltes Beispiel an. Verwendet zum Aufschrieb der Ergebnisse die folgende Tabellenform.

[…] [348]

	Gesucht ist ein Quadrat mit der Flächenmaßzahl 20			
	Rechteck		neues Rechteck	
	a	b	$a_{neu} = (a+b)/2$	$b_{neu} = 20 : a_{neu}$
1	4	5	4,5	4,44444444
2	4,5	4,44444444	4,47222222	4,47204969
3	4,47222222	4,47204969	4,47213595	4,47213595
	$20 = 4{,}47213595\ldots^2$		Proben: $4{,}47213595^2 = 19{,}99999999\ldots$ $4{,}47213596^2 = 20{,}00000000\ldots$	
	Ergebnis: Die ***Wurzel aus 20*** ist auf acht Dezimalen bestimmt. [349]			

Abbildung 4.12-4: Tabelle mit Näherungswerten für die Wurzel aus 20 nach Heron

Weiterführung in Klasse 8: Die Entdeckung irrationaler Zahlen [350]

Die Lernenden erhalten ein vorbereitetes Arbeitsblatt, bei dem die Zuordnung entsprechend des gewohnten Zahlbereichs der rationalen Zahlen farblich grün hervorgehoben ist. [351]

---

[347] Die Lernenden verwenden intuitiv die Monotonie der Zuordnung „Zahl zu Quadratzahl“ bei natürlichen Zahlen.
[348] In Abbildung 4.12-4 ist das Beispiel eines Quadrates mit der Flächenmaßzahl 20 dargestellt.
[349] Durch nachträgliches Quadrieren können Proben auf die Genauigkeit gemacht werden. Nutzt man hier eine Tabellenkalkulation, kann eine Variation der Werte davon überzeugen, dass das Verfahren bei einem geeigneten Anfangswert nach wenigen Schritten die Genauigkeit eines Taschenrechners erreicht.
[350] Für Lernende naheliegender wäre hier zunächst die Überschrift „Die Entdeckung nicht rationaler *Zahlen*“.
[351] Die Quadratfunktion ist für **rationale Zahlen** behandelt und der Funktionsgraph kann von den Lernenden wie z. B. in Abbildung 4.12-5 gezeigt zusammen mit einer Funktionswertetabelle dargestellt werden.

Wer von x zu $x^2 = y$ geht, will auch von y nach x kommen! [352]

x	y
!?	0,01
0,2	0,04
!?	0.03
0,2	**0,04**
!?	0,08
0,3	0,09
!?	0,12
0,4	**0,16**
!?	0,24
0,7	0,49
!?	0,54
0,8	**0,64**
!?	0.7
0,9	0,81
!?	0,9
1	**1**
1,1	1,21
!?	1,3
!?	1,4
1,2	**1,44**
!?	1,5
1,3	1,69
!?	1,7
1,4	**1,96**
1,5	2,25
!?	2,4
!?	3
1,8	**3,24**
!?	3,3
1,9	3,61

Abbildung 4.12-5: Arbeitsblatt mit Schaubild und Tabelle der Quadratfunktion

[352] Die x-Spalte der Tabelle und das Textfeld sind anfangs leer. Mit der Information des Textfeldes können die Lernenden diejenigen x-Werte bestimmen, wo in der y-Spalte eine Quadratzahl von x steht. Zu anderen y-Werten gibt es keine rationalen x-Werte (vgl. die Einträge „!?“). Aber es gibt Punkte auf der x-Achse, die ihnen zugeordnet sind und ihnen deshalb die Eigenschaft verleihen, eine Zahl zu sein. Die Bevölkerung der Zahlengeraden kann weitergeführt werden. Rationale und „irrationale“ Zahlen werden zu den *reellen Zahlen* vereinigt.

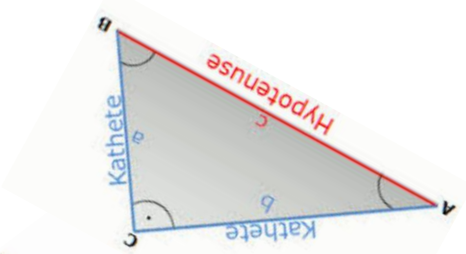
4.13 Ein Extrablatt zum Satz des Pythagoras

„Mathe-Hoch-Zwei" – Pythagoras umkehren, Klasse 9a, 7. Juni 2017

Der Satz des Pythagoras wird in der Mathematik häufig verwendet, wenn im Alltag Streckenberechnungen auftreten oder rechte Winkel gebildet werden sollen.

Im alten Ägypten wurde die ***12-Knoten-Schnur*** verwendet, um nach Überschwemmungen des Nils zerstörte Felder wieder neu zu vermessen.

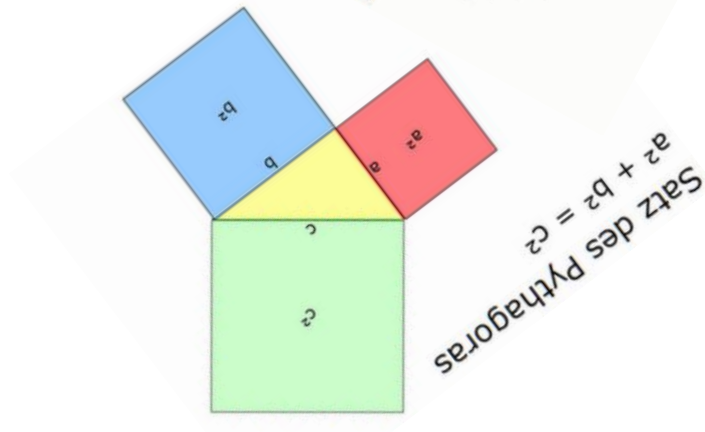
Im Bild rechts verwendet Lisa diese Schnur zur Herstellung eines rechten Winkels.



Thema 1: Man soll nur das verwenden, was bewiesen ist.

Der Satz des Pythagoras heißt:

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, gilt für die Längen a, b und c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$.



Die nebenstehenden Abbildungen verwenden spezielle Bezeichnungen für rechtwinklige Dreiecke und zeigen die *geometrische Bedeutung* des Satzes:

Die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate über den Katheten ist so groß wie der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.

um·keh·ren (Verb mit Objekt) etwas in sein Gegenteil verkehren, einen Satz, eine Begründung umkehren

Wir erkennen aber leicht, dass der Satz des Pythagoras bei der Verwendung der 12-Knoten-Schnur umgekehrt angewendet wird. Wenn die Knotenschnur wie oben abgebildet gelegt ist, liegt ein rechter Winkel vor. Das ist aber beim Satz des Pythagoras die Voraussetzung und nicht die Behauptung.

Extrablatt Aufgabe 1: Die Umkehrung des Satzes von Pythagoras

Schreibt die Umkehrung zum Satz des Pythagoras auf und überlegt euch einen Beweis.

Tipp: Wer sich an die Umkehrung des Satzes von Thales erinnert, erhält eine Beweisidee.

Thema 2: Wie findet man pythagoreische Zahlen?

Drei natürliche Zahlen a, b und c, welche die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ lösen, heißen *pythagoreische Zahlen*. Man schreibt kurz: a, b, c sind PZ.

Extrablatt Aufgabe 2: Pythagoreische Zahlen aufstellen und prüfen

Bei der 12-Knoten-Schnur werden die Zahlen 3, 4 und 5 als PZ verwendet. Begründet, warum 3, 4, 5 die einfachsten PZ sind. Beschreibt ihren Zusammenhang mit der 12-Knoten-Schnur und erfindet zwei weitere Rechte-Winkel-Schnüre. Beschreibt ihre Herstellung und begründet eure „Erfindung". Sind eure Schnüre besser als eine 12-Knoten-Schnur?

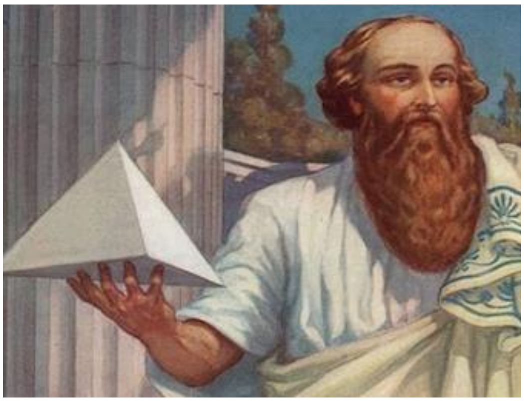


Abbildung 4.13: Pythagoras von Samos, Illustration von J. August Knapp (1853-1938).

Der griechische Mathematiker **SAROGAHTYP** soll schon 350 v. Chr. behauptet haben, dass man *pythagoreische Zahlentripel* mit zwei (einfachen!) Verfahren herstellen kann.

Erstes Verfahren: Wenn a, b und c pythagoreische Zahlen sind und k eine natürliche Zahl ist, sind auch $k \cdot a$, $k \cdot b$ und $k \cdot c$ pythagoreische Zahlen.

Zweites Verfahren: Für jede gekürzte Bruchzahl zwischen 0 und 1 mit Zähler p und Nenner q (<u>also $p < q$</u>), sind die Zahlen $a = q^2 - p^2$, $b = 2 \cdot p \cdot q$ und $c = q^2 + p^2$ pythagoreische Zahlen.

Extrablatt Aufgabe 3: Pythagoreische Zahlen erzeugen

a) Erzeugt mit beiden Verfahren zwei unterschiedliche *pythagoreische Zahlen*.

b) Beweist, dass das erste Verfahren für alle natürlichen Zahlen k richtig ist.

c) Mit dem zweiten Verfahren kann man für jede Bruchzahl zwischen 0 und 1 *pythagoreische Zahlen* bestimmen. Macht dazu einige Beispiele mit jeweiliger Probe.

Das zweite Verfahren liefert zwar pythagoreische Zahlen, aber man versteht nicht, warum das so ist. SAROGAHTYP hat vor mehr als 2300 Jahren einen Tipp gegeben: Ich stelle mir eine Zahl c in der Form $c = p^2 + q^2$ vor, setze diese in $c^2 = a^2 + b^2$ ein. Dann muss ich nur noch etwas rechnen und vergleichen, bis ich auch die Zahlen b und c mit Hilfe von p und q schreiben kann.

Extrablatt Sonderaufgabe: Stellt mit diesem Tipp die Formeln auf, mit denen zu jedem Wert p und q mit $p < q$ die Zahlen a, b, und c berechnet werden.

4.14 Ableitung und Integral – lokal und global

Arnold Kirsch und Werner Blum haben 1996 in zwei Beiträgen der Zeitschrift *mathematik lehren* für eine anschauliche Betrachtung bei Begriffsbildungen zur Integral- und Differentialrechnung plädiert.

> *„Wir wollen zeigen, wie man mit einer geeigneten Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff zu einem anschaulichen Verständnis des (ersten) Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung kommen kann.“* [353]

> *„Die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung ergeben sich in ganz natürlicher Weise durch geeignete Verbindungen der Grundvorstellungen von Ableitung und Integral. Auf formale Überlegungen wird verzichtet, so dass die inhaltliche Aussage im Vordergrund steht.“* [354]

Die folgende Unterrichtsskizze bezieht sich auf die Empfehlungen der beiden Veröffentlichungen in Verbindung mit den in Abschnitt 3.6.4 beschriebenen alternativen Zugänge zum Ableitungs- und Integralbegriff bei reellen Funktionen einer Veränderlichen mit einer Unterstützung durch Programme, die es gestatten, Grenzwertbildungen dynamisch zu visualisieren.

4.14.1 Lokale und globale dynamische Visualisierung der Ableitung einer Funktion

Eine dynamische Darstellungssoftware erlaubt eine Variation der verwendeten Parameter f, a und h, die umgehend interpretiert werden. Eine solche Präsentation ist in einem gedruckten Dokument nicht möglich. Deshalb werden exemplarisch geeignete Bildschirmausschnitte gezeigt.

Abbildung 4.14-1 zeigt zwei grafische Darstellungen zur Ableitung einer Funktion f (im Beispiel ist $f(x) = x^2$ gewählt). Im Bild oben bewegt sich der Punkt Q auf den Punkt P zu, wenn h gegen null geht und die Steigung der Strecke PQ gegen den Wert der Ableitung an der Stelle x_a strebt. Alternativ dazu ist unten zusammen mit dem Graphen von f (blau) für h = 0,1 der Graph der Differenzenquotientenfunktion (rot) gezeigt, welcher für Werte von h nahe bei null die Ableitungsfunktion von f approximiert.

Begriffsbildende Überzeugungskraft entwickeln diese Darstellungen nicht nur bei einer Variation von a und h, sondern insbesondere über die Möglichkeit, auch den Funktionsterm von f unterschiedlich zu interpretieren.

---

[353] Kirsch, 1996, S. 55.
[354] Blum und Kirsch, 1996, S. 60.

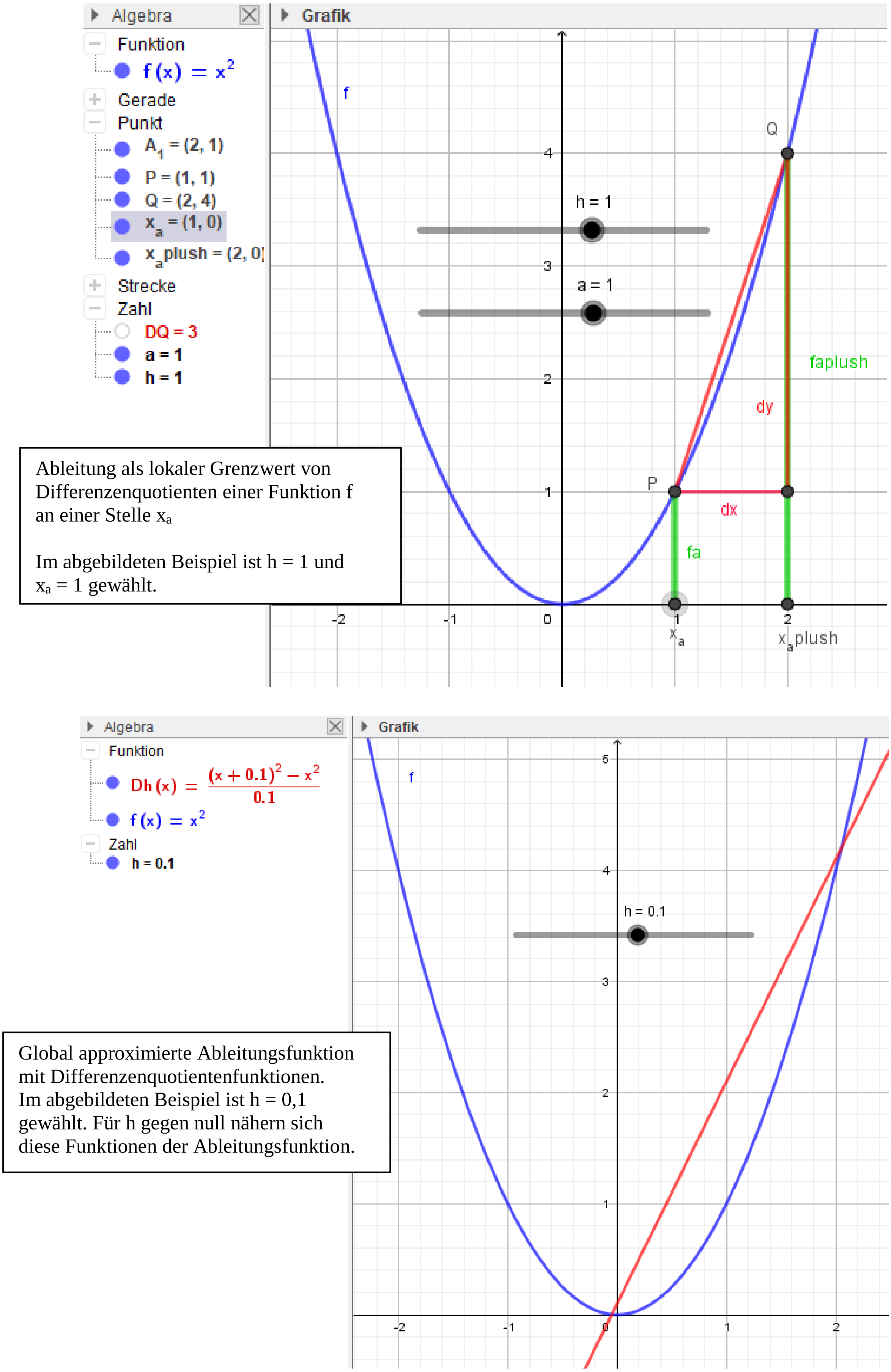


Abbildung 4.14-1: Darstellung der Ableitung als lokaler Grenzwert (oben) und als globale Approximation (unten). Die Bildschirmkopien sind mit GeoGebra erstellt.

4.14.2 Integrieren als Umkehrung des Ableitens

Das mathematische Integrieren löst das Problem, aus der Kenntnis der momentanen Änderungsraten in einem Bereich, in dem eine Funktion f‘ die Änderungsrate B‘ eines Bestandes B modelliert, die zugehörige Veränderung des Bestandes B in diesem Bereich zu rekonstruieren, indem die Veränderung von f in einem entsprechenden Intervall bestimmt wird.

Als paradigmatisches Beispiel für eine Lernaufgabe mit Praxisbezug wird eine Unterrichtssituation zur Einführung des Integralbegriffs skizziert.

Realität und Modell – Von der Äderungsrate zum Bestand

Bezüge zu alltäglichen Situationen, wie z. B. hier über eine Pressemeldung, bieten eine Möglichkeit, die mathematische Beschreibung eines Vorgangs sachlich emotional zu assoziieren und darüber die vereinfachte Problemstellung für eine Lernsituation anzunehmen. [355]

Der Anlass

> **Berliner Morgenpost,** 13.10.2015, 15:58 Uhr, Katrin Lange
>
> Neue Staumauern und ein 3,5 Tonnen schweres schaufelartiges Wehr sorgen künftig dafür, dass weniger schmutziges Wasser in die Spree fließt. Im Bereich des Abwasserpumpwerks an der Friedrichshainer Rudolfstraße haben die Berliner Wasserbetriebe durch Neu- und Umbauten einen unterirdischen Stauraum in den Abwasserkanälen für fast 5000 Kubikmeter Wasser geschaffen. Das entspricht einer Menge, die in zwei olympische Schwimmbecken passt. Mit diesem Volumen ist es der größte Rückstauspeicher in Berlin …
>
> Quelle: https://www.morgenpost.de/berlin/article206257465/Neuer-Speicher-sorgt-fuer-sauberes-Wasser-in-der-Spree.html

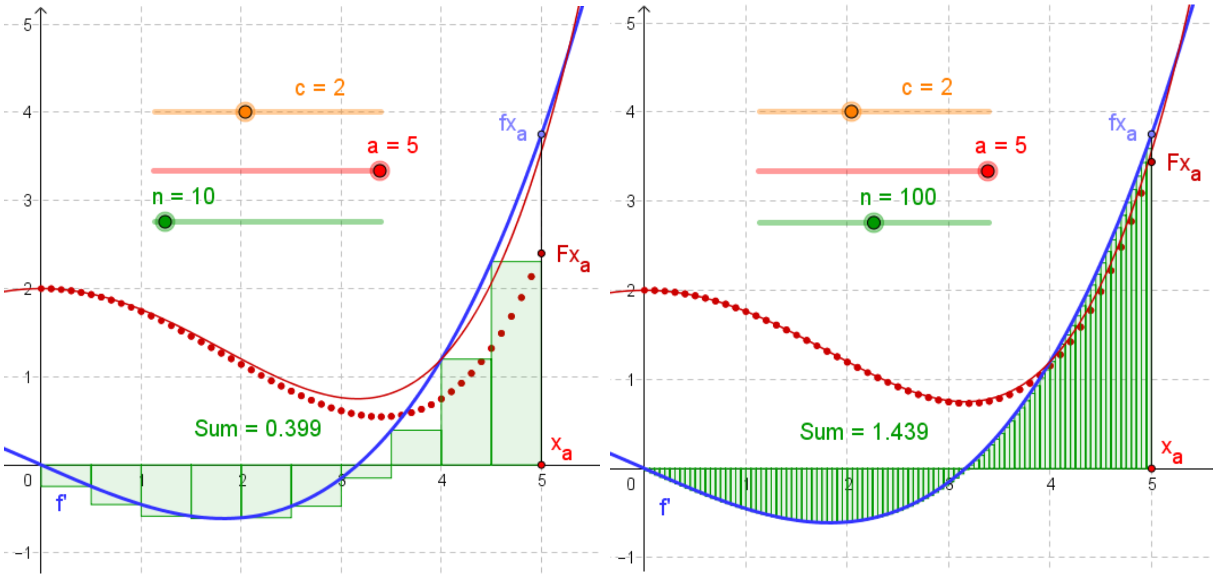
Die Aufgabe

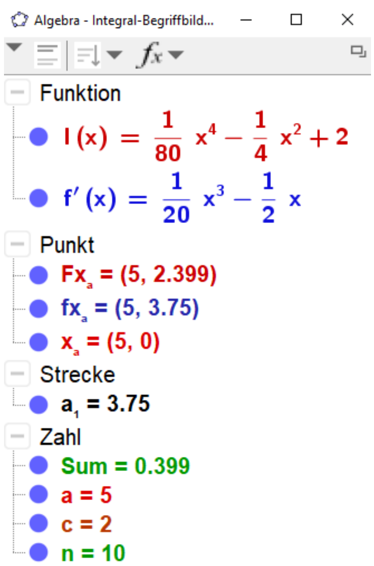
> Ein 5 m^3 fassender Auffangbehälter für Regenwasser, der als Zwischen- und Nutzspeicher für die Abwasserentsorgung eines Mehrfamilienhauses dient, besitzt eine Vorrichtung, welche kontinuierlich den Zu- oder Ablauf von Regenwasser in der Einheit Kubikmeter pro Stunde misst. Bei einem fünfstündigen Unwetter wird diese Änderungsrate beschrieben durch eine Funktion f' mit $f'(x) = \frac{1}{20}x^3 - \frac{1}{2}x$.
>
> (Beachte: negative Werte von f' bedeuten eine Abnahme, positive Werte eine Zunahme der Wassermenge im Behälter).

---

[355] Solche Zugänge bieten auch Anlässe, interessierten Schülerinnen und Schülern vertiefende Aufgaben zu stellen.

Visualisierte Darstellungen zu einer unterrichtlichen Durchführung [356]





Nr.	Name	Beschreibung	Wert
8	Zahl Sum	Untersumme(f', 0, a, n)	Sum = 0.399
9	Punkt Fx_a(5, 2.399)	(a, Untersumme(f', 0, a, n) + c)	Fx_a = (5, 2.399)

Interpretation der Variablen:
c: Anfangsvolumen des Behälters zum Zeitpunkt 0
a: bestimmt die Stelle x_a
n: Anzahl der Teilintervalle (Diskretisierungsparameter)
Intervall [0, 5] auf der x-Achse: Zeitdauer des Vorgangs
$Fx_{a,n} \stackrel{\text{def}}{=} c + \sum_{i=1}^{n}\left(f'\left(i \cdot \frac{5}{n}\right) \cdot \frac{x_a}{n}\right) = c + \sum_{i=1}^{n}\left(f'(x_i) \cdot \Delta x\right)$
$I(x) = \int_0^x f'(x)dx = \lim_{n \to \infty}(F(n))$ ist die analytisch bestimmte Integralfunktion.

Abbildung 4.14-2: Zwei Approximationen einer Integralfunktion, anwendungsbezogen interpretiert als „Füllvorgang" eines Zwischenspeichers

Computerunterstützte Darstellungsprogramme ermöglichen es, komplexere mathematische Begriffe so zu animieren, dass Bilder (genauer: die dynamische Abfolge und variierbare zeitliche Dynamik von Animationen) den Begriff bilden, ohne dass hierbei ein ständig notwendiges konkretes Rechnen dessen kognitive Wahrnehmung demotivierend stört. [357]

---

[356] Über diese Darstellung wird exemplarisch die kognitive Trennung zwischen Begriffsbildung (dem eigentlichen Verstehen) und einer nachträglichen algorithmischen Verwendung (dem Rechnen mit Intergralen) verdeutlicht.
[357] GeoGebra dokumentiert das „Programm" (die Anweisungsschritte) und zeigt diese bei Bedarf an (vgl. den Ausschnitt rechts in Abbildung 4.14-2). Damit kann die Lehrperson interessierten Schülerinnen und Schülern einen Zugang zu Programmiertätigkeiten eröffnen.

4.15 Übersicht zu Unterrichtsbeispielen in den Kapiteln 2 und 3

Ein Überblick über die in Kapitel 4 beschriebenen Unterrichtsbeispiele ist über das Inhaltsverzeichnis ersichtlich. Nachfolgend wird zusätzlich ein Überblick zu Themen in den Kapiteln 2 und 3 gegeben, welche ebenfalls unterrichtspraktische Anregungen enthalten.

Thema	Seite(n)
Elementare Werkzeuge im Mathematikunterricht	90
Darstellung einer Funktion mit GeoGebra: Term – Tabelle – Graph	94 f.
Entdeckungen am Dreieck - Winkelsummensatz	104
Figuren sehen, Symmetrie erkennen	113
Entwicklung des Zahlbegriffs - historisch	116 ff.
Zahlen in der Grundschule	124 ff.
Zahlen in den Klassenstufen 5 und 6	126 ff.
Rechnen mit Bruchzahlen	130 ff.
Addition und Subtraktion ganzer Zahlen	134 ff.
Recheneigenschaften und Strategien zur Berechnung von Termwerten	140 f.
Umkehrung des „Satz des Thales“	149f.
Begriffsbildung Ähnlichkeit	153 ff.
Körper und Formeln	156
Begriffsbildung Wahrscheinlichkeit	159
Aspekte von Variablen	160 f.
Geometrisch-algebraische Verortung von Formeln	163 f.
Begriffsbildung Potenzen: statisch und dynamisch in Klasse 7 bis 10	165 f.
Term und Funktion: Variablenaspekt am Beispiel Flächeninhalt beim Quadrat	168
Wissensüberblick: Parabeln und quadratische Funktionen	169
Der Funktionsbaukasten	170 ff.
Der Term a^b – statische und dynamische Interpretationen	174 f.
Umkehrungen: Potenz- und Exponential-, Wurzel- und Logarithmusfunktionen	175 f.
Diskrete Wachstumsformen	177 ff.
Begriffsbildung Ableitung und Integral	180

Abbildung 4.15: Verweise auf unterrichtsrelevante Beispiele in den Kapiteln 2 und 3

5 Nachbetrachtungen und Implikationen

Die bisherigen Kapitel haben inhaltlich jeweils einen eigenen Schwerpunkt erhalten. Über gelegentliche Einschübe sind sie jedoch so vernetzt, dass die integrative Absicht der Zusammenführung nicht verloren geht. Das erste Kapitel stellt den bildungstheoretischen Zusammenhang mit dem Karlsruher Forschungsprojekt „Ästhetische Bildung“ her. Das zweite Kapitel verknüpft diesen Ansatz mit allgemeinen pädagogischen Grundlagen und fachdidaktischen Aspekten des Unterrichtens. Im dritten Kapitel wird darüber ein Modell für ästhetisch fundierte Lernprozesse im Mathematikunterricht entwickelt. Das vierte Kapitel zeigt dazu exemplarisch gewählte Beispiele für den Unterricht mit konkreten praktischen Hinweisen für eine unterrichtliche Behandlung, deren ästhetisch fundierte Wirksamkeit nicht nur für die Lehrenden ersichtlich werden sollte, sondern ihnen auch Gelegenheit bietet, diese den Lernenden transparent zu vermitteln. [358]

Im fünften Kapitel dieser Studie wird die Betrachtung von Lernprozessen im Mathematikunterricht unter dem Aspekt einer ästhetisch fundierten Bildungstheorie facettenartig an einige Umgebungsparameter schulischer Tätigkeiten angeschlossen. Dies kann wegen der Vielseitigkeit der Aspekte nur exemplarisch und nach Prioritäten erfolgen, die dem Autor entsprechend seiner persönlichen Erfahrungen als besonders erwähnenswert erscheinen.

5.1 Rück- und Ausblicke

Zum Titelbild

Mit dem „Pädagogischen Prolog“ des Titelblattes wurde versucht, die Absicht der Studie kompakt darzustellen: Im Bereich pädagogischer Handlungen wollen *Bildung und Ästhetik* ein theoretisches Konzept für *Erziehung und Unterricht* sein, über das ein sich bilden wollender Mensch die Welt über *Theorie und Praxis* erschließen kann. Dabei sind dessen Haltungen und Handlungen, die über *Denken und Verstehen*, *Wissen und Gestalten*, *Planen und Handeln*, *Glauben und Hoffen* ausgebildet werden, in einen fachlichen und emotionalen Einklang zu bringen mit zentralen kognitiven Prozessen des menschlichen Gehirns, welches *Wahrnehmen*, *Verknüpfen*, *Empfinden* und *Werten* erst ermöglicht. Dies alles ist zudem verknüpft und generiert über einen ganzheitlichen und bis heute nicht vollständig entschlüsselten Zusammenhang mit

[358] Über diese Zerlegung und Zusammenführung der Kapitel musste der Autor auch damit rechnen, dass Interessenten die Arbeit entsprechend ihrem beruflichen Interesse nur partiell lesen. Deshalb wurden an einigen Stellen Informationen eingefügt, die bei einem ganzheitlichen Vorgehen als redundant empfunden werden können. Der vorab genannten Funktion entsprechend bittet der Verfasser der Studie alle Leser, die sequentiell vorgehen, dies zu berücksichtigen.

der *Natur* als solcher, die diese Wahrnehmungs- und Verstehensprozesse ermöglicht.[359]

Zum Schwerpunktthema

Die Studie versucht, vier pädagogisch relevante Handlungsfelder – eine übergeordnete allgemeine Bildungstheorie und ihre pädagogischen Implikationen sowie didaktische Grundlagen und unterrichtspraktische Umsetzungen im Fach Mathematik – so miteinander zu verknüpfen und auf unterschiedlichen Ebenen der Repräsentation Lehrenden derart wahrnehmbar zu machen, dass sie nicht mehr ohne die Wahrnehmung eines Verlustes getrennt werden sollten.

Alles was hinsichtlich dieser vier Gebiete an Fachlichem und Methodischem verwendet wurde, hat es auch schon vorab gegeben. Aber im Zusammenwirken dieser Gebiete und deren unterrichtlichen Integration erhofft sich der Autor eine überzeugende Wirksamkeit für Lernprozesse. Das wirklich und wirksam sein wollende Neue ist dabei insbesondere die Verknüpfung von Fachlichkeit mit dem neurowissenschaftlich unterstützten bildungsphilosophischen Konzept ästhetischer Bildung. Dieses Konzept verwirklicht sich nicht ausschließlich intransitiv, indem es sich allein über spielerische Zuwendung und ohne weiteren Anlass nur über die Freude am Aufsuchen ästhetischer Gelegenheiten verortet und ästhetische Zustände um ihres Wollens an sich entwickelt, sondern über eine transformativ vermittelte ästhetische Erziehung, die zielorientiert versucht, der Fachlichkeit einen überfachlichen Sinn zu geben und diesen über wahrnehmbar zu machende Sensibilisierung, Differenzierung und Intensivierung für die Lernenden performanzsteigernd bewusst und darüber akzeptierbar zu machen.

Zur mathematischen Beschreibung eines ästhetisch verfassten Unterrichts

Den Autor reizte es, in einer Studie zu einem Fach, das wie jedes andere Fach eine eigene *fachliche Ästhetik* besitzt, entsprechend der Zielsetzung, eine *pädagogische Ästhetik* im Sinne des Karlsruher Bildungskonzeptes für den Mathematikunterricht zu adaptierten, nachfolgend die Modellierungsfähigkeit der Mathematik für eine strukturell formale Zusammenfassung der Arbeit zu nutzen. Dabei wurde der Versuch unternommen, den allgemeinen Erziehungsauftrag eines ästhetisch verfassten Unterrichts nachfolgend formal-funktional mit einem mathematischen Modell zu beschreiben, bei dem **Variablen** in einem pädagogischen Kontext interpretiert werden. Die Kunst des Unterrichtens von Mathematik[360] über einen Prozess der Erziehung ***E***, der sich sowohl der Entwicklung der Fachlichkeit ***F*** als auch der Persönlichkeit ***P*** der lernenden

---

[359] Deshalb kann alles, was wir über die Welt glauben oder zu wissen glauben, als modellhaft konstruiert angesehen werden. Ein Modell, das einen Zusammenhang zwischen erkennendem Geist und wirkender Natur integrativ herstellt, ist das „Drei Welten Modell" nach Karl R. Popper (vgl. die Abschnitte 1.5 und 1.6).

[360] Dieser Abschnitt ist prinzipiell auf jedes Fach anwendbar.

Individuen verpflichtet sieht, und der darüber hinaus auch ihre Befähigung stärken soll, sich in eine gesellschaftlich verfasste Wertehaltung $\boldsymbol{W}$ einfügen zu können, muss genuin zielorientiert sein.

Die ästhetische Wirksamkeit dieser „Erziehungskunst" besteht darin, beide Bereiche so zusammenzuführen, dass die Lernenden ihre Wissenserweiterung und ihre Gestaltungsfähigkeit - und darüber insbesondere ihren Gestaltungswillen und ihre Gestaltungsbereitschaft G - mit dem entwickeln können, was ihnen persönlich und momentan bewusst als Gestaltungspotenzial zur Verfügung steht. Wenn es einer Lehrperson gelingt, in einem zeitlich verlaufenden Erziehungsprozess dieses Potenzial so zu nutzen, dass es über Aufgabenstellungen $\boldsymbol{A}$ die Differenz zwischen noch zu Lernendem und aktuell Gelerntem in einem „Zeitraum" Δt verringert, also $\boldsymbol{E}$ verbessert, und dabei die Prozessvariablen $\boldsymbol{U}$ den Unterricht, $\boldsymbol{B}$ die emotionale und fachliche Beziehungsfähigkeit zwischen Lehrenden und Lernenden, $\boldsymbol{L}$ ihre Lernbereitschaft (auch als Gruppe) und $\boldsymbol{G}$ ihren Gestaltungswillen vertreten, kann die Beschreibung eines ästhetisch orientierten Erziehungsprozesses in der von Leibniz vorgeschlagenen Integralschreibweise wie folgt dargestellt werden:

$$\boldsymbol{E(P,F,W,t)} = \int \boldsymbol{U(A,B,G(P,F,L),W)}\,\boldsymbol{dt}.$$

Erziehungsvariablen
A: Aufgaben
B: Beziehungsfähigkeit
E: Erziehungsfortschritt
F: Fachlichkeit
G: Gestaltungswille
L: Lernbereitschaft
P: Persönlichkeit
W: Wertehaltung
U: Unterricht

Diese einzeilig geschriebene und sachdienlich zunächst fremd wirkende formale Schreibweise sollte ausführlich gelesen auch dem eher bildungsphilosophisch orientierten Pädagogen geläufig sein:

„Der Erziehungserfolg (in Abhängigkeit von der Persönlichkeit der Lernenden, ihrer Fachlichkeit, Wertehaltungen und der Entwicklungszeit), ist das Intergral über den Unterricht (in Abhängigkeit von Aufgabenstellungen, der Beziehungsfähigkeit der Lerngruppe, ihrem Gestaltungswillen (in Abhängigkeit von Persönlichkeit, Fachlichkeit und Lernbereitschaft der Individuen) und deren Wertehaltungen) nach der Lernzeit." [361]

So gesehen liefert die Mathematik auch formale Methoden zur prägnanten Beschreibung von Bildungsprozessen, die im vorliegenden Beispiel aber nur dann sinnstiftend sein können, wenn diese Form qualitativ interpretiert wird. Pädagogisch ergänzt sollte dementsprechend der kursiv geschriebene Satz den Vorspann „*Die nicht quantitativ erfassbare Messbarkeit des Erziehungserfolges in Abhängigkeit von … "* erhalten.

[361] Diese hochgradig implizite Beschreibung zeigt insbesondere sehr deutlich die Vernetztheit der Parameter und ihre rekurrierende Verwendung.

Wenn entsprechend dieser Notation die Erziehungs-Variablen *B, P, F, L* und *G* qualitativ zeitlich kontinuierlich wachsend sind, kann sowohl der Prozess als auch sein Ergebnis als ästhetisch konnotiert gesehen werden. Als Gestalter ästhetisch verfasster Unterrichtsprozesse sollten die Lehrenden deshalb nicht nur die einzelnen Variablen als das sehen, was isoliert aufzubauen ist, sondern diese als ganzheitlich vernetzt und funktional voneinander abhängig erfassen und sich inhaltlich und prozessbezogen den Änderungsaspekten der genannten Variablen zuwenden, um die Differenz zwischen Soll und Ist unter Berücksichtigung der Lernzeit zu verringern.

5.2 Auswirkungen auf den Mathematikunterricht

Mathematikunterricht und Motivation

Neben der vielseitigen Anwendbarkeit der Mathematik sollte es dem Mathematikunterricht gelingen, die besondere Art des fachlichen Aufbaus und der Argumentation hervorzuheben, die sich hinsichtlich der Mittel und der Logik bewusst einschränkt, und der eine nicht zu hinterfragende, aber im schulischen Kontext als einsichtig anzuerkennende Wissensbasis als Grundlage des Wissenserwerbs verwendet, über deren Erweiterung und Verallgemeinerung ein weit reichendes und in allen Wissenschaften unverzichtbares Modellierungskonzept entstanden ist. [362]

Der Autor hofft, dass mit dem Gelingen dieser Aufgabe auch die Zuneigung der Lernenden zum Fach gewonnen werden kann. Zur Verdeutlichung der Hinführung einer Klasse als Lerngruppe zur Akzeptanz der Fachlichkeit dient ein Vergleich mit dem Besuch eines Baumarktes:

Es gibt Personen, die ohne äußeren Anlass ein solches Gebäude gerne betreten und sich lange darin aufhalten können, um neue Ideen für Gestaltungen oder Informationen zu Werkzeugen oder Baustoffen zu bekommen. Es gibt aber auch Menschen, die einen solchen Markt nur dann ungezwungen betreten, wenn sie wissen, dass sie dort für ein konkretes und aktuelles Problem Hilfe bekommen.

Wenn man einer Implikation eines ästhetisch fundierten Mathematikunterrichts folgt und wünscht, auch für die zweitgenannten Persönlichkeiten anregend sein zu wollen, gelingt dies nicht über einen fachlich vorab gegliederten und dementsprechend durchgeführten Unterrichtsgang. Ein entscheidender Unterschied im Vergleich zum Baumarkt liegt darin, dass der Fachunterricht den Lernenden zunächst auch noch jene Probleme bereiten muss, die sie ohne ihn

[362] Und dass diese Art der Konstruktion eine direkte Analogie zur Arbeitsweise der Informatik erlaubt, bei der ebenfalls mit wenigen Gestaltungsmitteln in Verbindung mit technisch möglichen Realsierungen und geeigneten interpretierenden Systemen eine umfassende Unterstützung in allen Bereichen menschlicher Tätigkeiten möglich und realisierbar ist. Aber auch dort war die Mathematik ein Geburtshelfer, da die Theorie der Automaten als Teilgebiet der Mathematik gesehen werden kann, welches allerdings ohne technologische Entwicklung auch nur eine Theorie geblieben wäre.

nicht hätten, die aber dafür sorgen, den Weg zum „Baumarkt“ Mathematik gehen zu wollen.

Hans Freudenthal hat diesbezüglich schon 1977 die Rolle der „fertigen Mathematik“ gegenüber der Mathematik als Tätigkeit kritisch betrachtet:

> *„Es ist richtig, daß man Worte wie Mathematik, Sprache, Kunst in doppelter Bedeutung verwendet. Bei der Kunst ist es ganz klar; es gibt die fertige Kunst, die der Kunsthistoriker studiert, und es gibt die Kunst, die der Künstler betreibt. […] Daß es neben der fertigen Mathematik noch Mathematik als Tätigkeit gibt, weiß jeder Mathematiker unbewußt, aber nur wenigen scheint es bewußt zu sein, und da es nur selten betont wird, wissen Nichtmathematiker es garnicht.“* [363]

Und er ergänzt diese sich auf die praktische Tätigkeit beziehende Aussage durch eine didaktische Betrachtung: [364]

> *„Die Mathematik ist bis heute nur als Fertigprodukt analysiert worden, und wenn dann auf die Analyse eine formalisierte Synthese folgt, so wird das Erzeugnis als Fertigprodukt präsentiert. […] Das einzige, was noch daran erinnert, daß Mathematik eine in der Zeit verlaufende Aktivität ist, ist die Anordnung der Sätze […]. Wohl weiß er,* (der Mathematiker; Erg. d. Verf.) *daß Mathematik geschaffen wird, aber das ist das Unreine; wenn sie einmal geschaffen ist, ist sie fertig – das Reine.“*

Hans Freudenthal erinnert mit diesen Argumenten implizit auch daran, dass Attributierungen wie etwa *reine, angewandte, praktische, numerische* oder *theoretische* Mathematik in der Schulmathematik keine Trennschärfe haben sollten. Die wichtigste Funktion der praktischen Unterrichtsführung, und neben dem fachlichen Auftrag die vorrangigste pädagogische Aufgabe eines ästhetisch verfassten Unterrichts am Ort Schule, ist, dass das, was sich in der Theorie als notwendig erwiesen hat, so vermittelt wird, dass es von den Lernenden geschätzt und deshalb angenommen wird. Ein durchgängig fachlich vorstrukturierter Weg kann hierbei nicht förderlich sein. [365]

Die Mathematik der Schule muss bei der Entwicklung der Fachlichkeit fachlich Unscharfes ertragen und die Präzisierungen über begriffsbildende Entwicklungen erreichen. [366]

---

[363] Freudenthal, 1977, S. 110.
[364] Ebd. S. 110f.
[365] Ein Blick in Inhaltsverzeichnisse von Lehrwerken für den Mathematikunterricht zeigt allerdings, dass zumindest entsprechend der Gliederungen und Überschriften strukturell dieser Eindruck entsteht.
[366] Vgl. Abschnitt 3.2.2.

Zusammenarbeit der Lehrenden

Die grundlegenden fachlichen Begriffe im Mathematikunterricht besitzen eine starke Vernetzung, die sich über die einzelnen Klassenstufen entwickelt und stets wieder rückbezüglich erinnert werden kann. Dabei entsteht auch eine zunehmende Abstraktion, bei der Sachverhalte zum Beispiel verallgemeinert oder neu strukturiert werden. Wenn die Lernenden aktiv in diese verknüpfte Wissensprogression mit einbezogen werden sollen, muss die Aneignung des Wissens und seine Dokumentation von den Lehrenden entsprechend aufbereitet werden. Dazu sind inhaltliche und methodische Vereinbarungen innerhalb einer Fachschaft notwendig, um den Lernenden einen verlässlichen Rahmen zu geben, in dem sich die Fachlichkeit entwickeln kann. Dazu gehören zum Beispiel insbesondere:

- die Einigung auf eine durchgängig genutzte und schuljahresübergreifende Form der Wissensdokumentation seitens der Fachschaft,
- eine schulintern vereinbarte und dokumentierte Vernetzung des fachlichen Aufbaus nach Prioritäten, die nicht allein über den Bildungsplan geklärt sind, welche den Lernenden über alle Schuljahre ein inhaltlich und methodisch stimmiges Bild von Mathematik vermitteln können,
- eine kollegiale Zusammenarbeit bei der Entwicklung und Ausarbeitung von konkreten Unterrichtseinheiten zur Wissensvermittlung und für differenzierende Übungsphasen, welche zur Mitarbeit der Lernenden auffordern und diese auch einfordern,
- eine Überprüfung tradierter mathematischer Algorithmen hinsichtlich ihrer heutigen Nutzung in der alltäglichen Praxis und gegebenenfalls deren Ersetzung durch aktuellere Verfahren oder einer verstehbaren Begründung ihres Einsatzes in der Schule für die Lernenden,
- die Einbeziehung dynamischer computerunterstützter Programme zur Visualisierung und Darstellung mathematischer Sachverhalte,
- eine stärkere Berücksichtigung der sprachlichen bzw. nicht verschriftlichten Kommunikation bei der Entwicklung des Wissens (über Mathematik sprechen zu können, ist die Voraussetzung dafür, über Mathematik schreiben zu können),
- eine gegenüber den Lernenden transparent zu vermittelnde Verpflichtung, Lernprozesse als besonders ausgewiesene Phasen des Unterrichts zu erklären, in denen keine Prüfungsleistungen erbracht werden müssen, sondern stressfrei erworbenes Wissen angewendet und erweitert wird.

Lernprozesse müssen von den Lernenden als geschützte Anlässe und Angebote zum Lernen empfunden werden, bei denen Fehler für individuelle Orientierungshilfen genutzt werden können und über das fachliche Lernen soziales Lernen stattfindet, bei dem gesellschaftlich normativ verfasste Werte in Haltungen überführbar sind.

Mitverantwortlichkeit der Lernenden – Unterstützung durch Eltern und Gesellschaft

In Deutschland besteht Schulpflicht. Dies verpflichtet insbesondere die Kultusbehörden und Schulen darauf zu achten, dass Inhalte des Lernens zeitgemäß vermittelt und begründet werden. Andererseits ist diese Schulpflicht auch für die Lernenden und ihre erziehungsberechtigten Eltern als demokratisch gewählte Form öffentlicher Bildung als Verpflichtung zu sehen, aktiv und selbstverantwortlich an den Angeboten mitzuwirken, da sonst Lernen nicht stattfinden kann. In einem von der Gesellschaft und ihren medialen Vermittlern sowie vom Elternhaus nicht entsprechend unterstütztem Verhalten – bei dem die Forderung nach durchgängig guten Leistungen und hohen Schulabschlüssen stärker betont wird, als die Forderung, etwas Sinnvolles zu lernen – sieht der Verfasser der Studie ein langfristig erhebliches Hindernis auf dem Weg zu einer gesellschaftlich notwendigen inhaltlich-methodischen Neu-Orientierung der Schulen.

Anschlussfähigkeit des Schulfaches

Die Studie hat versucht aufzuzeigen, dass schulische Mathematik einen anderen inhaltlichen Aufbau hat als eine wissenschaftlich universitäre. Deshalb müssen Übergänge behutsam und in gegenseitiger Zusammenarbeit der beteiligten Organisationen geplant sein und weniger über administrative Forderungskataloge. Während der Übergang von Schulen in berufliche Ausbildungen in der Regel einfacher gestaltet werden kann, besitzen Übergänge in Studienfächer eine komplexere Struktur, die nicht allein über standardisierte und gegenseitig einmalig abgesprochene Inhaltskataloge überbrückbar sind, sondern auf einer Abstimmung über die gesamte Schulzeit des vorangehenden Lernabschnittes beruhen sollte, die danach inhaltlich entsprechend der Art des Anschlusses weitergeführt werden können. [367]

Entscheidend ist auch hier, dass eine Gesellschaft offen ist gegenüber Veränderungen der Informationsgesellschaft, die auch zentrale Arbeitsweisen und algorithmische Verfahren der Mathematik zum Teil radikal verändert hat. [368]

---

[367] Und bei einer Berücksichtigung emotionaler Aspekte im Prinzip schon ab dem Kindergarten oder wenigstens ab der Grundschule.

[368] Hinsichtlich dieser Veränderungen liegt nach Meinung des Verfassers ein großes Missverständnis in der Diskussion um mathematische Fertigkeiten in einer Kritik am Mathematikunterricht, über den „Schülerinnen und Schüler heutzutage nicht mehr Rechnen lernen", einer Kritik, die impliziert, dass dies früher besser war, und bei der häufig in erster Linie moderne Rechenhilfen dafür verantwortlich gemacht werden. Relativierend sei diesen Kritikern entgegengebracht, sich individuell zu überlegen, wann und wie oft sie heutzutage im täglichen Leben zum Rechnen veranlasst werden. Was in der Schule vermittelt wird, sollte außerschulisch relevant sein. Und wenn

5.3 Ausbildung für Lehrende des Schulfachs Mathematik [369]

Wer Mathematik an Schulen mit Möglichkeiten für weiterführende Anschlüsse, also eigentlich an allen Schularten unterrichten will, muss ein Verständnis für die wissenschaftliche Arbeitsweise der Mathematik erwerben und exemplarisch Einblicke in zentrale Fachgebiete der Mathematik erhalten. Diese Forderung ist mit Blick auf die schulische Praxis nicht nur von fachlicher Bedeutung, sondern auch aus punktuell individuellen Gesichtspunkten bedeutsam: Fachlich interessierte Lernende verblüffen oft (und auch hier oft unabhängig von Klassenstufen und Schularten) ihre Lehrerinnen und Lehrer mit Fragen, die hinsichtlich ihres Gehaltes eine tiefergehende fachliche Thematik ansprechen. Wenn diese vom Lehrenden nicht erkannt wird und nicht zufriedenstellend beantwortet wird, entstehen Enttäuschungen, die wiederholt auftretend auch dem Ansehen der Lehrperson schaden.

Neben einem wissenschaftlich fundierten Überblick sollten Lehramt-Studierende im Fach Mathematik unabhängig von der angestrebten Schulart eine Sensibilisierung dafür erhalten, dass der curriculare Aufbau der Schulmathematik nicht nach vorstrukturierten fachlichen Begrifflichkeiten, Prinzipien und Arbeitsweisen erfolgen kann, die dementsprechend transitiv unterrichtlich abgebildet werden.

Über einen vernetzten Wissensaufbau und dessen Entwicklung über die fachliche Kommunikation in einer Lerngruppe (Klasse) sollte gemeinsam ein Fortschritt der Wirksamkeit des Fachlichen bewusst werden und sich dabei die Bereitschaft der Lernenden entwickeln, gegebenenfalls sowohl Defizite aufzuholen als auch Angebote für Vertiefungen wahrnehmen zu wollen.

Die Befähigung für die vielfältigen Aufgaben, die Lehrende im schulischen Alltag wahrnehmen und erfüllen sollen, können nicht in einem zeitlich begrenzten Rahmen von Lehramtsstudium und Referendarausbildung erworben werden, der überdies noch zerlegt ist in trennende Ausbildungsphasen des fachlichen, pädagogischen und praktischen Erwerbs berufsbedingter Wissensaneignung.

Eine sogenannte dritte Phase der Ausbildung müsste eine fürsorgliche Förderung und Entwicklung von Lehrerqualitäten enthalten, die inhaltlich und personell geeignet gestaltet sein sollte. Die wichtigste Funktion dieser Fortbildungsphase bestünde darin, den Lehrenden einen über

---

Rechnen bzw. Rechenverfahren heutzutage noch als wichtig empfunden werden sollen, müssen sie unterrichtlich über andere Kontexte und Methoden vermittelt werden als in vorherigen Generationen.

[369] Der fachlichen Schwerpunktbildung der Studie wegen wird in diesem Abschnitt kein Bezug genommen auf die eigentlichen und beruflich bedeutsamen Kernfragen nach einer berufsbezogenen Ausbildung, Qualifizierung und pädagogisch moderierten Unterstützung von Lehrenden und Überlegungen zur beruflichen Zulassung über maßgebliche Prüfungen. Interessenten seien dazu die Veröffentlichungen Beichel, Hrsg., 2013, Beichel 2006 und Beichel, 2015 empfohlen.

lokale Erfahrungen an einzelnen Schulen hinausgehenden moderierten Erfahrungsaustausch zu ermöglichen, bei dem praktische Erfahrungen unter übergeordneten und theoretisch fundierten Bildungstheorien reflektiert und verbessert werden können.

Über eine solche übergeordnete Struktur würden Kultusbehörden und gesellschaftlich verantwortliche Bildungsplangestalter es ermöglichen, dass langfristig und unabhängig von politischen Veränderungen eine kontinuierliche und auf gesellschaftlich gewollte Bildungswirksamkeit allgemein verwirklicht werden kann.

Dazu ist es aber insbesondere notwendig, dass seitens der Kultusbehörden eine solche Phase personell geeignet ausgestattet wird, als berufliche Weiterbildung angesehen und in der Arbeitszeitanrechnung entsprechend ausgewiesen ist. Nur dann kann sie hinsichtlich der beruflichen Grundhaltung der Beteiligten nicht nur als gesollt, sondern auch als gewollt angesehen sein.

5.4 Worte zum Schluss

Die Fachsprache, als Teil der Umgangssprache mit eigener Begrifflichkeit und Grundlage der mathematischen Sprachfähigkeit, sollte sich im Mathematikunterricht entwickeln können wie eine fremde Sprache in einem Fremdsprachenfach. Zuerst wird im Unterricht das betont, was man direkt und unter Verwendung von Gestik und gegebenenfalls Körper- und Zeichensprache übertragen kann und was man braucht, um das Nötigste zu sagen. Dabei entsteht die Bereitschaft, Vokabeln assoziativ und symmetrisch in der Bedeutung zur eigenen Muttersprache zu adaptieren und syntaktisch, phonetisch und semantisch zu transformieren. Die Vertiefung und Erweiterung dieser Tätigkeiten zusammen mit dem kognitiv unterstützten Bilden von Abstraktionen führt in kleinen Schritten zu Erfolgen, die mit darüber entscheiden, ob ein Lernender noch mehr will, als im „fremden Land nicht verhungern zu müssen“. Um die Schülerinnen und Schüler, die dann von sich aus mehr Sprachfähigkeit erwerben wollen, müssen wir Lehrenden uns nicht mehr so sehr kümmern; wir können sie leichter „füttern“, da sie ihren Weg alleine gehen wollen. Aber die, welche nicht nur nicht verhungern wollen, sondern kulinarisch mehr Variationsmöglichkeiten wünschen, können wir weiterhin unterstützen.

Die Bereitschaft, mehr zu wollen, entwickelt sich insbesondere über die Selbsteinschätzung dessen, was man an handlungsfähigem Wissen besitzt. Und bezüglich dieses Wissens sollten wir Lehrenden handeln. David Ausubel hat 1980 seinem Buch „Psychologie des Unterrichts“ dem Inhaltsverzeichnis ein Zitat vorangestellt, das für den Autor als ein durchgängiges Motiv für ästhetisch fundierten Unterricht gelten kann:

„Wenn wir die ganze Psychologie des Unterrichts auf ein einziges Prinzip reduzieren müßten, würden wir dies sagen: Der wichtigste Faktor, der das zu Lernende beeinflußt, ist das, was der Lernende bereits weiß. Dies ermitteln Sie, und danach unterrichten Sie Ihren Schüler.“ [370]

Beachtenswert ist die schon 1980 erfolgte Betonung der Individualität der Lernenden und ihres Vorwissens, nach einer Zeit behavioristisch verfasster Zielorientierungen und deren verfeinernden Zerstückelungen des Fachlichen in den 60er und 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts. [371]

Norbert Jüdt betont in einer Schlussfolgerung in seiner Studie „Bildung ist ästhetisch“ die Wirksamkeit basaler ästhetischer Bildung; diese artikuliere sich *„als Grundlage, Rückgrat und Seele jeglicher Bildung [...] in sämtlichen Schulfächern [...] als ein Prinzip, das dem gesamten Schulleben unterliegt und alle Fächer durchdringt“* und *„nur als kooperatives und ganzheitliches Gesamtkonzept realisierbar“ ist.* [372]

Mit einem letzten Blick auf Unterricht möchte der Autor diese Arbeit ausklingen lassen mit drei Thesen einer Studie von Frederik Durczok mit dem Titel „Ästhetik und Didaktik - Auf der Suche nach Unterricht für die Zukunft“: [373]

„Bildung ist die Hoffnung auf eine bessere Zukunft.“ (1. These, S. 58)

„Konzepte didaktisch aufbauenden Lernens und Konzepte Ästhetischer Bildung und Erziehung sind widersprüchliche Anforderungen an Unterricht, die sich durch eine hervorragende Lehrperson und durch einen echten Lebensweltbezug im Unterricht dennoch verbinden lassen.“ (4. These, S. 68)

„Guter Unterricht muss scheitern können. Unterricht, der nie scheitert, disponiert zu Diktatur und Gleichschaltung. Unterricht, der scheitern kann, disponiert zu Demokratie und Humanität.“ (8. These, S. 82)

Und der Autor erlaubt sich eine letzte Bemerkung zur Wirksamkeit des Unterrichts und einer Verantwortung der Lehrenden gegenüber den Schülerinnen und Schülern hinsichtlich einer staatlich verordneten Schulpflicht, die auch Eltern für ihre Kinder wollen sollten.

In Deutschland müssen Kinder und Jugendliche zur Schule gehen, um etwas lernen zu sollen. Sie lernen in Fächern und schreiben Schuljahr für Schuljahr ganze Hefte voll. Vieles was dort steht, bleibt mit den Heften liegen, und vieles davon bleibt

[370] Ausubel, 1980/81, Zitat vor dem Inhaltsverzeichnis.
[371] Vgl. Mager, 1971, Lernziele und programmierter Unterricht.
[372] Jüdt, 2014, S. 181.
[373] Durczok, 2016.

> *auch in den Fächern. Was Lernenden wirklich bleibt, ist das, was nicht in den Heften steht. Und in der Erinnerung an das, was nicht in den Heften steht, entsteht das Bild von Schule, das darüber entscheidet, welches Bild von Schule sie als spätere Eltern ihren Kindern vermitteln und darüber entscheidend daran mitwirken, ob diese die Schule wollen … Die Eltern müssen sich für dieses Wollen ebenso verantwortlich fühlen wie die Lehrerinnen und Lehrer – aber auch die Schülerinnen und Schüler selbst müssen lernen, hierzu ihren Beitrag leisten zu wollen.* [374]

5.5 Persönliche Erinnerungen und Dank

Eine Arbeit im Bereich ästhetischer Bildung darf sich erlauben, abschließend persönliche und emotionale Sichtweisen zu Projekten und beruflichen Erfahrungen vorzunehmen. Diese Studie wurde verfasst vor der „Hintergrundstrahlung“ einer 38-jährigen beruflichen Erfahrung als Lehrer der Fächer Mathematik, Physik und Informatik an Gymnasien, einer langjährigen Tätigkeit als Fachberater des Oberschulamts Karlsruhe für Mathematik und Informatik mit vielfältigen Funktionen als Fortbildner, Teilnehmer in Lehrplankommissionen und Schulversuchen, einer 17-jährigen Tätigkeit als Fachdozent, Fachleiter und Bereichsleiter am Staatlichen Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) in Karlsruhe und einer inzwischen seit über 10 Jahren wiederholt im Sommersemester am Karlsruher Institut für Technologie gehaltenen fachdidaktischen Vorlesung für das Lehramt Mathematik.

Über eine basal aisthetisch erfolgte Wahrnehmung und der damit verknüpften ästhetisch konnotierten Ereignisse, aber auch vor allem den dabei erfolgten persönlichen Begegnungen, ist es dem Autor ein Anliegen, an Empfindungen in diesem Zeitraum zu erinnern und diese zu würdigen. Der hierbei stattfindende Austausch an Erfahrungen und die über sie erworbenen Haltungen sind wesentliche Voraussetzungen für diese Studie. Aber dass sie geschrieben wurde, ist vor allem mit der Möglichkeit des Autors verknüpft, in dem von Johann Beichel geleiteten Forschungsbereich „Ästhetische Bildung“ ab dem Jahr 2012 mitgewirkt zu haben. [375]

Die Teilnahme an Seminaren, Vorlesungen und Kongressen haben die berufsbedingte Verengung des pädagogischen Horizontes des Autors erweitert. [376] Besonders hervorzuheben sind

---

[374] Der kursiv geschriebene Text (ein vom Autor variiertes Zitat von Ernst Eggimann; vgl. Beichel, 2010, S.122) ist eine Assoziation zu einem „Schlusswort“, mit der Absicht, die dort satirisch aufbereitete Problematik der Sinnhaftigkeit schulischer Erziehung gesellschaftlich verantwortlichkeitsrelevant zu ergänzen.
[375] Vermittelt hat diese Möglichkeit dankenswerterweise der damalige Leiter des Seminars Karlsruhe Klaus Teichmann.
[376] Leser, die sich über Studien dieser Forschungsgruppe informieren wollen, können zum Beispiel zurückgreifen auf Beichel, et al., 2017.

dabei impulsgebende Erkenntnisse, die in Seminaren und Arbeitskreisen von Johann Beichel und Frederik Durczok zu bildungsphilosophisch fundierten und pädagogisch relevanten Themenstellungen über eine gemeinschaftlich angeregte Kommunikation und Diskussion gewonnen wurden. Prägend für den Autor waren aber auch häufig stattfindende Gespräche mit Norbert Jüdt über Verbindungen zwischen pädagogischem Handeln und neurowissenschaftlichen Erkenntnissen: Eine in der kognitiven Struktur des Gehirns veranlagte basal ästhetisch verfasste Wahrnehmung kann als Basis einer anwendbaren pädagogischen Ästhetik angesehen werden, die sich von einem formal aufgefassten fundamental-radikalen Konstruktivismus wohltuend dadurch unterscheidet, dass die Berücksichtigung menschlicher Beziehungen im Zusammenhang mit Sachlichkeit und Emotionalität als eine das Wollen fördernde Rolle beziehungshaltiger Kommunikation als Grundlage von Verständigung und Wissenserwerb angesehen wird.

Ein unterrichtspraktischer Anlass für diese Arbeit war die Zusammenarbeit mit Lehrerinnen und Lehrern am Gymnasium in den Pfarrwiesen in Sindelfingen und am Schickhardt-Gymnasium in Herrenberg in den Schuljahren 2010/11 bis 2014/15. Dank gilt insbesondere Simon Zolg, dem Initiator dieses Schulversuchs, in dem zusammen mit Uta Plath und Michaela Ewald im Schuljahr 2010/11 die grundlegenden Konzepte dieses Projektes erarbeitet wurden. Mit zunehmender Dauer wurde das Projekt auf das Gymnasium in Herrenberg erweitert und die Arbeitsgruppe durch weitere Kolleginnen und Kollegen ergänzt. [377]

Ein großer Teil der für dieses Projekt adaptierten Materialien war für die Gestaltung von Fachsitzungen Mathematik zur Lehrerausbildung am Staatlichen Seminar Karlsruhe gemeinsam in der Fachschaft entwickelt und nach eigenen unterrichtlichen Einsätzen reflektiert und getestet worden. Für eine kollegiale Mitwirkung an dieser fachinternen Seminarentwicklung in den Jahren 1998 bis 2012 möchte sich der Autor insbesondere für die Bereitschaft zu einer engen Zusammenarbeit bei gemeinsamen Vorbereitungen in der Fachschaft bedanken bei Ina Bischof, Michael Fleig, Hermann Hammer, Sonny Timm und Lars Unangst. Die Ergebnisse dieser Zusammenarbeit haben sich positiv auf eine geschlossene Darstellung und Außenwahrnehmung des Seminarangebotes für Referendarinnen und Referendare des Faches Mathematik ausgewirkt. [378]

In der Funktion als Lehrbeauftragter, Fachleiter und Bereichsleiter am Seminar von 1995 bis

---

[377] Siehe dazu Abschnitt 4.2.

[378] Die Nähe zum Modell für Lernprozesse in Kapitel 3 zeigt sich auch deutlich auf der Eingangsseite der Fachschaft Mathematik. Vgl. http://gym.seminar-karlsruhe.de/,Lde/Startseite/Seminar/Fachschaft+Mathematik+Ausbildung

2012 möchte sich der Autor bedanken bei den stets zur Zusammenarbeit bereiten Kolleginnen und Kollegen der Fachschaften und den Problemen immer aufgeschlossenen Seminarleitern Gert Niemetz, Dieter Koller, Volker Huwendiek und Klaus Teichmann. Ein Dank auch an die Kollegen der damaligen Fachschaft Mathematik Dieter Koller, Günther Dopfer, Wolfgang Henn und Werner Jock, deren Bereitschaft, mich als referendar-ausbildender Novize zu unterstützen, nicht nur auf der bereitwilligen Überlassung von Materialien beruhte, sondern auf einer ständigen Unterstützung im Fachlichen und Einbindung in gemeinsame Planungen.

In der Funktion als Fachberater des Oberschulamts Karlsruhe für Mathematik und Informatik dankt der Autor dem langjährigen Referenten dieser Fächer Wolfgang Buhmann für dessen fachliches Engagement, aber vor allem für seine Bemühungen, moderne methodische und begriffsbildende Computerwerkzeuge in den Fachunterricht zu integrieren, ohne auf wesentliche Aspekte eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts zu verzichten.

Wolfgang Buhmann hat dabei nicht nur die Energie und Bereitschaft aufgebracht, schlüssige moderne Konzepte für einen begriffsbildenden und praxisorientierten Mathematikunterricht zu entwickeln. Seinem hartnäckigen Durchsetzungsvermögen ist es zu verdanken, dass inhaltliche Konzepte bei übergeordneten Stellen auch als administrativ gewollte Veranstaltungen angesehen wurden.

Um den „Karlsruher Kreis“ der an der gymnasialen Mathematikausbildung beteiligten Institutionen und Institute im Karlsruher Raum zu schließen, soll die gute Kooperation der Abteilung für Didaktik am KIT unter der Leitung von Andreas Kirsch und dem Geschäftsführenden Leiter der Fakultät Klaus Spitzmüller mit allen bisher genannten Bereichen gewürdigt werden. Am KIT hat Ernestina Dittrich seit dem Jahr 2000 eine Abordnung an die Abteilung für Didaktik der Mathematik am KIT [379] wahrgenommen und war maßgeblich am Aufbau eines Schülerlabors beteiligt, das derzeit fast durchgängig im Schuljahr von Klassen aus dem Raum Karlsruhe und Umgebung besucht wird. Dort kann man eine weitere Form ästhetisch konnotierter Mathematik erfahren, bei der man *sich nicht verrechnen kann, keine Taschenrechner, keine Formeln und keine Gleichungen benötigt, nur neugierig sein, beobachten, knobeln und experimentieren* wollen soll, um an *über 80 Experimentierstationen* mathematikhaltige Situationen zu erfahren, und man Verständnis für die fachlichen Gegebenheiten erhalten kann. [380]

---

[379] Die Abteilung Didaktik der Mathematik in der Fakultät für Mathematik wurde schon 1968 von Heinz Kunle gegründet. Sie gehört zu den frühesten Didaktikinstitutionen an baden-württembergischen Universitäten und versteht sich als Bindeglied zwischen Schule und Hochschule als Ansprechpartner für Schülerinnen und Schüler, Lehrende und Lehramtsstudierende.

[380] Die kursiv geschriebenen Textstellen sind ein grammatikalisch angepasstes Zitat der Internetseite Schülerlabor des KIT. Quelle: http://www.math.kit.edu/didaktik/seite/schuelerlabor.

Der Kreis des Dankes schließt sich in Ettlingen. Ein nach der Pensionierung begonnenes Engagement des Autors als Dozent für Hector-Kurse an Grundschulen für Dritt- und Viertklässler hat über eine Zusammenarbeit mit Susanne Wehrle und Ingrid König im Bereich des Mathematikunterrichts in der ersten und zweiten Klasse der Thiebauth-Grundschule eine Tätigkeit als „Rechenpate“ bewirkt, über die dem Autor bewusst wurde, welches Einfühlungsvermögen die Grundschulpädagogik erfordert und wie unbefangen davon er zum Beispiel Schülerinnen und Schüler in der fünften Klasse mit Mathematik konfrontiert hat. Beiden Kolleginnen sei für ihre bewusstseinsbildende Hilfe Dank gesagt. [381]

[381] Und der in der Regel einmal pro Woche stattfindende Gang in das „Lehrerzimmer“ invertiert die Genderproblematik: Herr Reimer ist dann der einzige „Lehrer“ unter 16 Lehrerinnen.

6 Abbildungsverzeichnis

Nr.	Seite	Beschriftung / Quellennachweis
		Kapitel 1
1.1	13	Dialog zwischen Sokrates und Hippias über das Wesen des Schönen (ca. 2400 v. Chr.). Schwarzmüller, 2014, S. 12.
1.2	22	Überblick zum bildungsphilosophischen Konzept des Karlsruher Forschungsprojekts „Ästhetische Bildung“. Zusammengesellt von Rolf Reimer nach Beichel, 2007, S. 41f.
1.3	27	Schematische Darstellung der Verarbeitung von Wahrnehmungen im menschlichen Gehirn unter der Vernetzung von Kognition und Emotion. Jüdt, 2013, S. 402 (Vereinfacht durch den Autor).
1.4	30	Zusammenführung einer scheinbaren Trennung von Geist und Welt, Sach- und Glaubenswelt im Zusammenspiel von Kognition (blau), Kommunikation (ocker), der sogenannten realen Welt (grün) und der Welt des Glaubens (gelb). Rolf Reimer.
1.5	32	Darstellung der drei Welten-Theorie nach Sir Karl Popper. Die Aufzählungen sind exemplarisch zu sehen. Eccles, 1990, S. 205 f.
1.6	33	Schema des Informationsflusses der verschiedenen Arten von Wechselwirkungen zwischen den drei Welten. Eccles, 1990, S. 208.
		Kapitel 2
2.1	43	Gegenüberstellung von Kriterien zu Bildung und Allgemeinbildung. Heymann, 1996, S. 46. Vom Autor gekürzt aufbereitet.
2.2	57	Rezeptives und entdeckendes Lernen in den Ausprägungen „mechanisch“ und „sinnvoll“ mit Bezügen zu Lernsituationen nach Ausubel (Ausubel, 1980/81, S.48).
2.3	62	Horizontal- und Vertikalkriterium des Prinzips „Fundamentale Idee“. Vom Autor gestaltet nach Humenberger, et al., 1995, Kap 1.
2.4	63	Spezifisches Wissen überträgt sich auf nichtspezifische Situationen. Vom Autor gestaltet nach Humenberger, et al., 1995.
2.5	66	Ikonische und textlich/sprachliche Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Flächeninhalt eines Rechtecks und eines Parallelogramms. Rolf Reimer.
		Kapitel 3
3.1	72	Bildung geschieht ästhetisch – zum Beispiel auch in Mathematik. Jüdt, 2016, Abb. 24, S. 152. Übertragen von Rolf Reimer.
3.2	76	Stadien eines hermeneutischen Zirkels zur Überwindung von Fehlinterpretationen im Zusammenhang mit philosophischem, kulturellem und wissenschaftlichem Interpretieren und Verstehen. Zusammengestellt nach Gadamer. Rolf Reimer.
3.3	78	Visualisierung symmetrisierender Transformationen hinsichtlich eines Lerngegenstandes (einer Sache) zwischen Lehrenden und Lernenden. Rolf Reimer.
3.4	81	Mathematik als ausbaufähiger Werkzeugkasten für Probleme der Alltagswelt. Rolf Reimer.
3.5	84	Darstellung des Weges zu kommunikativer Kompetenz in naturwissenschaftlichen Fächern nach Heinz Muckenfuß. Muckenfuß, 1995, S. 248.
3.6	85	Die Darstellungsformen grafisch, numerisch, symbolisch und verbal/textlich am Beispiel des Flächeninhalts beim Figure 1Quadrat in Klassenstufe 5/6. Rolf Reimer.

3.7	87	Basale neuronale Gestaltungsprinzipien und analoge fundamentale fachliche Methoden des Mathematikunterrichts. Rolf Reimer.
3.8	88	Wahrnehmung und kognitive Sinngebung mittels neuronaler Kontrastverstärkung bzw. kognitiv vervollständigter Imagination, nach Jüdt
3.9	88	Unterschiedliche kognitive Wahrnehmungsformen eines Dreiecks. die Form generiert die Umrandung, die Umrandung imaginiert die Form. Rolf Reimer.
3.10	91	Beschreibung der Komplexität des Geodreiecks hinsichtlich der Vielfalt seiner Funktionen. Rolf Reimer.
3.11	92	Übersicht elementarer Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Rolf Reimer
3.12	95	Darstellung einer Funktion in den Formen Term, Graph und Tabelle mit GeoGebra. Rolf Reimer.
3.13	97	Aufbau der Wissensbasis über gelenktes Entdecken und Erfinden. Rolf Reimer.
3.14	97	Fachinhalte primär geordnet nach ihrer mentalen Entstehung und integrativer Verknüpfung. Rolf Reimer.
3.15	99	Struktur und unterrichtliche Phasen einer Lernaufgabe. Rolf Reimer.
3.16	100	Verantwortlichkeit von Lehrenden und Lernenden bei der Bearbeitung von Lernaufgaben. Rolf Reimer.
3.17	101	Darstellung des prozessbegleitenden Wissenszuwachses. Rolf Reimer.
3.18	102	Parallel verlaufender Wissens- und Beziehungsaufbau in einer Lerngruppe über Kommunikationsprozesse, geführt durch die/den Lehrenden. Rolf Reimer. Rolf Reimer.
3.19	104	Aufgabenblatt mit vorab formulierten Aufträgen zum Entdecken des Winkelsummensatzes beim Dreieck. Rolf Reimer.
3.20	106	Ergebnisse zu den Aufträgen 3 und 4. Rolf Reimer.
3.21	107	Vergleich von Lernprozessen, die über Arbeitsblätter bzw. auftragsgesteuertes Lernen geführt sind. Rolf Reimer.
3.22	111	Entwicklung geometrischer Formen über Wahrnehmung und Abstraktion: vom Ganzen zu den Teilen (grüner Pfeil). von den Teilen zum Ganzen (blauer Pfeil). Rolf Reimer.
3.23	112	Von der „Zweikreis“ zur „Dreikreisfigur“- Ausgangspunkt für entdeckendes und erforschendes Lernen im Problemkreis „Eigenschaften von Dreiecken“. Rolf Reimer.
3.24	113	Symmetrie bei einfachen Figuren. Rolf Reimer.
3.25	115	Folie aus einer Vorlesung mit dem Titel „Fachinhaltliche Didaktik des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts“ zur räumlichen Wahrnehmung, ebenen perspektiven Darstellungen und korrespondierenden Messprinzipien. Rolf Reimer.
3.26	117	Das Einkerben ermöglicht eine bijektive Zuordnung zwischen der Anzahl der Schafe und der Anzahl der Kerben. Ifrah 1989, S. 28.
3.27	119	Die Menschen dieses Insulaner Stammes können nur von 1 bis 33 zählen. Ifrah, 1989, S. 30.
3.28	120	Zählen mit den Fingern von Eins bis Fünf oder mit den Fingergliedern von Eins bis Zwölf. Rolf Reimer.
3.29	120	Darstellung auf der Dariusvase“. Bild auf Vase, 2400 v. Chr. Bildquelle: http://www.rechenhilfsmittel.de/darius.gif .

3.30	120	Briefmarke mit Holzschnitt von Adam Ries. Warum wohl 10 ct? Rolf Reimer.
3.31	121	Titelblatt der Erfurter Ausgabe von 1525. http://www.medienwerkstatt-online.de/lws_wissen/vorlagen/show-card.php?id=1517 https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/78/Rech-nung_auff_der_linihen_1525_Adam_Ries.PNG.
3.32	121	Georg Reisch, Margarita Arithmeticae, 1503. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gregor_Reisch,_Marga-rita_Philosophica,_1508_(1230x1615).png.
3.33	122	Dezimaler Abakus mit farbiger Fünferreihung. Lernmittelfirma Goki, Güster.
3.34	126	Drei Darstellungsformen zu natürlichen Zahlen mit zwei Abstraktions-stufen. Ifrah, 1989, S. 43; übertragen und ergänzt Rolf Reimer.
3.35	124	Dienes-Blöcke vermitteln einen Zusammenhang zwischen einer Darstel-lung von Zählzahlen und einer Schreibweise im Zehnersystem, mit Zif-fern und Stellenwerten. Beide Formen entsprechen kognitiven Mustern bzw. Konstruktionen, die hinsichtlich des Zahlbegriffs symmetrisch ver-knüpft sein müssen. Rolf Reimer.
3.36	127	Veranschaulichung der natürlichen Zahlen auf einem Zahlenstrahl, bei der jeder Zahl ein Punkt entspricht, der als ihr Wohnort angesehen wird. Entsprechen nachfolgender Zahlerweiterungen wird der Zahlenstrahl von anderen Zahlen bevölkert und zur Zahlengeraden erweitert. Rolf Reimer.
3.37	127	Notation von Dezimalzahlen in unterschiedlichen Darstellungen (alle in Klasse 6 verwendet). Rolf Reimer.
3.38	128	Wissensdokumentation zum Rechnen mit natürlichen Zahlen.
3.39	129	Eine Aufgabe für David (vgl. Fußnote 228). Wittmann, 2006, S. 64.
3.40	132	Brüche werden zu Bruchzahlen. Rolf Reimer.
3.41	132 f.	Wissensdokumentation zu Bruchzahlen in Klasse 6, erstellt mit Lernen-den nach der Behandlung der Bruchrechnung, die als Argumentationsba-sis für das Bruchrechnen dienen kann. Rolf Reimer.
3.42	135	Übersicht über Bezeichnungen im Zusammenhang mit ganzen Zahlen. Rolf Reimer.
3.43	136	Handlungsorientiertes Vereinbaren der Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen. Rolf Reimer.
3.44	136	Merksätze zur Addition und Subtraktion ganzer Zahlen. Rolf Reimer
3.45	139	Darstellungsarten bei rationalen Zahlen. Rolf Reimer.
3.46	140	Eigenschaften rationaler Zahlen und ihre Verwendung. Rolf Reimer.
3.47	140 f.	Übersicht von Strategien zur Bestimmung von Termwerten. Rolf Rei-mer.
3.48	145 ff.	Inhaltsübersicht Mathematik, Klasse 7 bis 10. Rolf Reimer.
3.49	150	Der „Satz des Thales“ und seine Umkehrung.
3.50	152	Bei kongruenten Dreiecken können Standardbezeichner das paarweise Zuordnen der Objekte visuell unterstützen.
3.51	153	Der Begriff Ähnlichkeit, assoziiert mit Alltagsvorstellungen, dem Kon-struktionsprinzip der zentrischen Streckung und den korrespondierenden Strahlensätzen. Ein begriffsbildender Mathematikunterricht sollte diese beiden Ausprägungen unbedingt integrativ thematisieren. Zusammen-stellung mit Abbildungen aus dem Internet und eigene Darstellungen.

		Rolf Reimer. Ergänzt durch kopierte Bilder aus dem Internet nach Stichworten.
3.52	154	Von Steigungsdreiecken zum Sinus und Cosinus beim rechtwinkligen Dreieck. Rolf Reimer.
3.53	155	Zerlegung eines beliebigen Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke. Rolf Reimer.
	154 ff.	Abbildungen in den Abschnitten 3.5.6.3 und 3.5.6.4 (alle vom Autor erstellt).
	156 ff.	Abbildungen in den Abschnitt 3.5.6.5 vom Autor zusammengestellt; zum Teil unter Verwendung von Kopien aus Lambacher Schweizer 5, Klasse 10, Baden-Württemberg,
3.54	159 f.	Grundvorstellungen zum Begriff Wahrscheinlichkeit.
3.55	163 f.	Entwicklung der ersten „Binomischen Formel“ und Änderungen der Variablenaspekte in den Klassen 5 bis 8.
3.56	166	Inhaltliche Entwicklung der ersten „Binomischen Formel“ und Variablenaspekte. Rolf Reimer.
3.57	168	Unterschiedliche Variablenaspekte am Beispiel Flächeninhalt beim Quadrat. Rolf Reimer.
3.58	169	Allgemeine und konkrete Formen bei quadratischen Funktionen.
3.59	170	Variablen bei qualitativen Funktionsdarstellungen.
3.60	172	Darstellung von Funktionen und Verknüpfungen mit GeoGebra.
3.61	174 f.	Schaubilder von Funktionen mit Gleichungen der Form x^b *bzw.* a^x. Rolf Reimer (erzeugt mit GeoGebra).
3.62	177 f.	Modellierung diskreter Wachstumsformen als Zahlenfolgen. Rolf Reimer
3.63	178	Diskrete rekursive oder explizite bzw. kontinuierliche Beschreibung von Wachstumsformen in Klasse 9. Zusammenstellung Rolf Reimer
3.64	180	Fachliches Vorwissen zur Differential- und Integralrechnung und deren Vernetzung. Rolf Reimer
3.65	181	Ableitungskonzept für reelle Funktionen einer Veränderlichen als Modellierungswerkzeug für Anwendungen. Rolf Reimer
3.66	182	Interpretation der Ableitung in unterschiedlichen Kontexten. Zusammenstellung nach Blum u. Kirsch, 1996, S. 60.
3.67	183	Das Ähnlichkeitsprinzip wird übertragen auf das Vektorkonzept im Anschauungsraum. Rolf Reimer
3.68	184	Vektorkonzept und Rechnen mit Vektoren im Anschauungsraum. Zusammenstellung nach Lambacher Schweizer 11 mit Anpassungen durch den Autor
3.70	185	Vernetzte Wissensdarstellung zwischen Alltagswelt, Fachlichkeit und kognitiven Wahrnehmungs- und Verarbeitungsweisen
		Kapitel 4
4.1-1	189	Der Satz des Pythagoras: sprachlich und in unterschiedlichen Darstellungen bzw. Anwendungsmöglichkeiten formuliert. Rolf Reimer.
4.1-2	191	Einzelbilder einer grafischen Animation zum „Satz von Pythagoras“. Rolf Reimer.
4.2-3	203	Folie für die exemplarische Erarbeitung der Grundbegriffe Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz beim Prozentrechnen über Grundaufgaben. Projektgruppe CAS ab Klasse 7.
4.2-4	204	Aufgabenblatt zu Grundbegriffen der Prozentrechnung, Klasse 7. Dto.
4.3-1	207	Eine Zwergwürfellieferung im Land der Würfelzwerge. Rolf Reimer.
4.3-2	210	Plan eines Würfelobjektes und Foto einer Realisierung. Rolf Reimer.

4.3-3	212	Gebäude in der Welt der Würfelzwerge. Rolf Reimer.
4.3-4	213	Das vorliegende Zählblatt erlaubt einen handlungsorientierten Übergang von der sequentiellen Zählweise in eine dezimale Zahldarstellung. Rolf Reimer.
4.3-5	213	Übergang vom sequentiellen Zählprinzip (links) zur „Verortung“ der Zählzahlen im Zehnersystem (rechts). Rolf Reimer.
4.3-6	214	Übergang zum Stellenwertverständnis durch veränderte Bedeutung der Ziffern nach Stellenwerten. Rolf Reimer.
4.3-7	215	Beispiele für strukturierte Würfelbauten. Rolf Reimer.
4.3-8	217	Vom Hallenbau zum kleinen Einmaleins: eine „fünf mal sechs“- Halle wird mit 30 Zwergwürfeln gebaut usw. Rolf Reimer.
4.3-9	219	Zu jedem Bruch gibt es eine Bruchzahl (Punkt) und eine Teilstrecke (blau) der Einheitsstrecke. Rolf Reimer.
4.3-10	220	Vorbereitung eines Papierstreifens zur Darstellung der ganzen Zahlen auf einer Zahlengeraden. Rolf Reimer.
4.3-11	222	“Momentaufnahme“ der Unterrichtsführung. Kopie aus Veröffentlichung, vgl. Reimer, 2015.
4.3-12	222	Erinnerung an die Ganzen Zahlen. Die Klasse von Simon Zolg ist zufrieden. Aufnahme: Simon Zolg.
4.4-1	223	Vollwinkelmesser und Winkelscheibe verbinden statische und dynamische Vorstellungen bei Winkeln. Rolf Reimer.
4.4-2	225	Einstimmung, Funktionen eines Geodreiecks. Rolf Reimer
4.4-3	222	Funktionen des Geodreiecks (möglicher Tafelanschrieb und/oder Hefteintrag). Rolf Reimer.
4.6-1	227	Heftaufschrieb eines Schülers. Kopie aus Heft, Rolf Reimer
4.6-2	229	Geordnete Fallunterscheidung zu Würfelnetzen, um auszuschließen, dass es mehr als 11 Netze gibt. Rolf Reimer.
4.6-3	230	Schrägbildskizzen zu Würfelkörpern. Rolf Reimer.
4.6-4	230	Beispiele für Würfelkörpern. Fotos: Rolf Reimer.
4.6-5	231	Tafelbilder zur Vereinbarung der Arbeitsaufträge und 3-D Anregung seitens des Lehrers. Fotos: Rolf Reimer.
4.6-6	232	Entwurfsskizze einer Arbeitsgruppe, Klasse 5b, 2004. Foto: Rolf Reimer
4.6-7	232	Exponate nach einer Durchführung der Unterrichtseinheit am Gymnasium Neureut, Klasse 5b, 2007. Foto der Lehrerin Brigitte Oestreich.
4.7	238 f.	Bildeindrücke ohne Worte aus Kursen in den Herbstferien 2016 und 2017 an der Thiebauthschule Ettlingen. Fotos der Kursleiter Ingrid König und Rolf Reimer.
4.8-1	240	Kandinsky: „Komposition Nr. 8“. Kopie einer Postkarte.
4.8-2	241	Suche nach ähnlichen Teilfiguren. Zusammenstellung Rolf Reimer.
4.8-3	241	Argumentkarte Wechsel- und Stufenwinkel. Rolf Reimer.
4.8-4	242	Argumentkarte Scheitel- und Nebenwinkel. Dto.
4.8-5	242	Argumentkarte gleichschenkliges Dreieck. Dto.
4.8-6	243	Die Begründung des Innenwinkelsatzes für Dreiecke mit einer Argumentkarte. Rolf Reimer.
4.8-7	243	Weitere Ausschnitte – Anlässe für Vermutungen
4.8-8	244	Zwei Aufgabenformate im Zusammenhang mit geometrischem Argumentieren und mechanisiertem bzw. entdeckendem Lernen unter Verwendung dynamischer Geometriesoftware. Rolf Reimer unter Verwendung einer Kopie aus Lambacher Schweizer 3 (Klasse 7)
4.11-1	250	Bildschirmkopie des Funktionendarstellers von Simone Neher. Eine Besonderheit dieser Applikation ist, Tabellenwerte numerisch (als

		Dezimalzahl) oder symbolisch (als Bruchzahl) anzuzeigen.
4.11-2	252	Visualisierung von Äquivalenzumformungen einer linearen Gleichung über eine Interpretation der „beidseitigen“ Terme als lineare Zuordnungen. Rolf Reimer, zusammengestellt mit GeoGebra.
4.12-1	253	Heron und eine seiner Erfindungen. Kopien aus dem Internet, zusammengestellt Rolf Reimer.
4.12-2	243	Rechteck im Gitternetz. Rolf Reimer.
4.12-3	254	Skizze eines Quadrates mit gegebener Flächenmaßzahl 20. Rolf Reimer
4.12-4	255	Eine Tabelle der Näherungswerte für Wurzel aus 20.
4.12-5	256	Arbeitsblatt mit Schaubild und Tabelle der Quadratfunktion. Erstellt mit GeoGebra. Rolf Reimer.
4.13	258	Pythagoras von Samos, Illustration von J. August Knapp (1853-1938).
4.14-1	259	Darstellung der Ableitung als lokaler Grenzwert (oben) und als globale Approximation (unten). Die Bildschirmkopien sind mit GeoGebra erstellt. Rolf Reimer.
4.14-2	262	Zwei Approximationen einer Integralfunktion, interpretiert als „Füllvorgang“ eines Zwischenspeichers. Erstellt mit GeoGebra. Rolf Reimer
4.15	263	Verweise auf unterrichtsrelevante Beispiele in den Kapiteln 2 und 3. Zusammengestellt vom Autor.

7 Literaturverzeichnis

Ausubel, David P.: Psychologie des Unterrichts. Beltz Verlag, Weinheim/Basel 1980/81

Barzel, Bärbel: Computeralgebra im Mathematikunterricht: Ein Mehrwert - aber wann? Verl. Waxmann, Münster, New York 2012

Bauersfeld, Heinrich u. a.: Lehren und Lernen von Mathematik.Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Bd.6, S. 1- 56. Aulis Verlag, Köln 1983

Baumgarten, Alexander Gottlieb: Theoretische Ästhetik: Die grundlegenden Abschnitte aus der „Aesthetica“ (1750/58). Philosophische Bibliothek, Band 355, 2. Auflage. Übersetzt und herausgegeben von Hans Rudolf Schweizer. Felix Meiner Verlag, Hamburg 1988

Baumgarten, Alexander Gottlieb: Aesthetica, Bd. 2, Verl. Kleyb, Frankfurt (Oder) 1750/1758

Beck, Herbert, Bol, Peter C. und Bückling, Maraike (Hrsg): Polyklet, der Bildhauer der griechischen Klassik. Verl. Philipp von Zabern, Mainz 1990

Beichel, Johann J. (Hrsg.): Geprüfte Lehrerqualitäten. Von der fachlichen Exzellenz über Eignungsfragen zur Einstellungspraxis und Vergütung. Schneider Verlag Hohengehren, Batmannsweiler 2013

Beichel, Johann J.: Ästhetische Bildung als Potentialentfaltung und Kulturerschließung in aufbauendem Untericht und nachhaltiger Erziehung auf kunstnahen Begegnungs- und Lernfeldern. Eine Studie zur Bildungstheorie. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler 2010

Beichel, Johann J.: Ästhetische Mobilmachung. Zur Praxis und Theorie der Musik- und Tanztheaterimprovisation in der Schule. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler 2007

Beichel, Johann J.: Lehramtsprüfungen. Zur Praxis und Theorie der personalen Evaluation im Lehramt. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler 2006

Beichel, Johann J.: Lehramts-Staatsprüfungen. Validitätsschwache Auslaufmodelle? Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler 2015

Beichel, Johann J. (Hrsg.): Ästhetische Praxis - als allgemeines Unterrichtsprinzip für die Schule - als Kunstsparten übergreifendes Projektmodell. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler 2017

Blum, Werner und Kirsch, Arnold: Die beiden Hauptsätze der Differential-und Intergralrechnung. In: mathematik lehren, Bd. 78. Friederich Verlag, Seelze 1996

Bruner, Jerome S.: Der Akt der Entdeckung. In: Neber, Heinz (Hrsg.): Entdeckendes Lernen. Beltz Verlag, Weinheim und Basel 1973 (Originalversion „Discovery learning“ 1961)

Bruner, Jerome S.: Der Prozeß der Erziehung. Berlin Verlag, Berlin 1970

Cantor, Moritz B.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Verl. B. G. Teubner, Leipzig 1880

Connally, Eric, Hughes-Hallett, Deborah und Gleason, Andrew M. et al.: Functions Modelling Change. Verl. John Wiley & Sons, 5. Aufl. New York 2015

Cucrowicz, Jutta und Zimmermann, Bernd et al.: MatheNetz 7. Bd. Ausgabe N. Westermann Schulbuchverlag, Braunschweig 2004

Dewey, John: Demokratie und Erziehung. Beltz Verlag, Weinheim und Basel 1993 (Orig. 1915)

Diels, Hermann: Die Fragmente der Vorsokratiker. Griechisch und Deutsch. Bd. 1. Classic Reprint. Verl. Forgotten books, Berlin 2017

Durczok, Frederik: Ästhetik und Didaktik. Auf der Suche nach Unterricht für die Zukunft. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler 2016

Eccles, John C.: Die Psyche des Menschen. Das Gehirn-Geist-Problem in neurologischer Sicht. Verl. Piper, München 1990

Freudenthal, Hans: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd.1. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1977

Freudenthal, Hans: Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? In: Der Mathematikunterricht. Bd. 4, S. 5-29. Friedrich Verlag, Seelze 1963

Gadamer, Hans.Georg: Gesammelte Werke. Band 1: Hermeneutik I, Wahrheit und Methode. Verl. J. C. B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen 1986

Gadamer, Hans-Georg: Wahrheit und Methode. Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik. Verl. J.C.B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen 1960

Gallin, Peter und Ruf, Urs: Sprache und Mathematik in der Schule. Verl. Kallmeyer, Seelze 1998

Gehirn und Geist: Die Sprachzentren. Spektrum der Wissenschaft, Nr. 1 Heidelberg 2011

Gehirn und Geist: Entdeckungsreise durch das Gehirn. Spektrum der Wissenschaft, Nr. 1 Heidelberg 2011

Glade, Heinz und Manteufel, Karl: Am Anfang stand der Abacus. Aus der Kulturgeschichte der Rechengeräte. Urania Verlag, Leipzig/Jena/Berlin 1973

Griesel, Heinz, Postel, Helmut, Suhr, Friedrich u.a.: Elemente der Mathematik, Bd. 2. Schroedel Verlag, Braunschweig 2004

Herbart, Johann Friedrich: Pädagogische Schriften, Bd. 1. Verlag Klett-Cotta, Stuttgart 1804

Heymann, Hans Werner: Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik, Band 13. Beltz Verlag, Weinheim und Basel 1996

Heymann, Hans Werner und van Lück, Willi (Hrsg.): Allgemeinbildung und öffentliche Schule: Klärungsversuche. Materialien und Studien, Band 37, S. 9 -20. Bielefeld 1990

Humenberger, Johann und Reichel, Hans-Christian: Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihrer Umsetzung im Unterricht. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 31. BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim,Leipzig, Wien, Zürich 1995

Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Campus Verlag, Frankfurt, New York 1989

Jüdt, Norbert: Ästhetik und Lehrerbildung. Ein ästhetisch orientierter Beitrag zum Diskurs "Gute Lehrer, gute Schüler". Dissertation, Onlineversion, KIT 2013

Jüdt, Norbert: Ästhetische Erziehung schlechthin? Schiller umdeuten. Ansätze zu einer Pädagogischen Ästhetik. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler 2016

Jüdt, Norbert: Bildung ist ästhetisch. Schüler und ihre Lernprozesse wahrnehmen - Kontakt und Kommunikation gestalten. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler 2014

Kirsch, Arnold: Der Hauptsatz - anschaulich? In: mathematik lehren. Grundvorstellungen, Bd. 78, S. 55 - 59. Friederich Verlag, Seelze 1996

Kirsch, Arnold: Mathematik wirklich verstehen. Aulis-Verlag Deubner, Köln 1987.

KM Baden-Württemberg: Lehrpläne für das Gymnasium. Kultusministerium Baden-Württemberg, Stuttgart 1985

Kropp, Gerhard: Geschichte der Mathematik. Verl. Quelle & Meyer, Heidelberg 1969

Lambacher Schweizer 10, Baden Württemberg. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1998

Lambacher Schweizer 11, Baden Württemberg. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1998

Lambacher Schweizer 1, Mathematik an Gymnasien. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2003

Lambacher Schweizer 3, Mathematik an Gymnasien. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2005

Leisen, Josef und Berge, Otto: Das Verhältnis von Verstehen und Fachsprache. In: Unterricht Physik 3/2005, S. 26-27. Friedrich Verlag, Seelze 2005

Leuders, Timo (Hrsg.): Mathematik Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag Scriptor, Berlin 2003

Leuders, Timo: Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag Scriptor, Berlin 2001

Lichtenberg, Georg Christoph: Aus den Sudelbüchern. Verl. Holzinger, Berlin 2013

Lorenz, Jens Holger und Radatz, Hendrik: Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht Schroedel Verlag, Hannover 1993

Luhmann, Thomas: Soziale Systeme - Grundriß einer allgemeinen Theorie. Verl. Suhrkamp, Frankfurt am Main 1984

Mager, Roger: Lernziele und programmierter Unterricht. Beltz Verlag, Weinheim, Berlin 1971

Malle, Günther: Didaktik der elementaren Algebra. Verl. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1993

Malle, Günther: Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? In: mathematik lehren. Bd. 118, S.52-56. Friedrich Verlag, Seelze 2003

Meschkowski, Herbert: Denkweisen großer Mathematiker: Ein Weg zur Geschichte der Mathematik. Verl. Friedrich Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1961

Meyerhöfer,Wolfram: Jeder Arbeiter verlegt gleich viel. Sekundarstufe I; 7. Schuljahr. In: mathematik lehren. Bd. 114, S. 60 f. Friedrich Verlag, Seelze 2004

MKJS Baden-Württemberg, Bildungsplan 2004, Allgemein bildendes Gymnasium. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport, Stuttgart 2004

Muckenfuß, Hans: Lernen im sinnvollen Kontext: Entwurf einer zeitgemäßen Didaktik des Physikunterrichts. Verl. Cornelsen, Berlin 1995

Naumann, Friedrich: Vom Abakus zum Internet: Die Geschichte der Informatik. Verl. Primus, Darmstadt 2001

Pfreundschuh, Gerhard: Mathe in der Würfelwelt anschaulich und begreifbar. Verlag Pfreundschuh, Heidelberg 2015

Pleines, Jürgen E.: Glauben oder Wissen. Analyse eines Dilemmas. (Bd. Philosophische Texte und Studien). Georg Olms Verlag, Hildesheim 2008

Pöller, Kirsten: Anschauungsmaterialien in der Dyskalkulietherapie. Institut für Integratives Lernen und Weiterbildung IFLW Berlin, Berlin 2006

Polya, George: Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. A. Francke Verlag, Tübingen und Basel 4. Aufl. 1995 (Originalversion 1949)

Popper, Karl R.: On the Theorie of the objective mind. Akten des XIV Internationalen Kongresses für Philosophie, Bd. 1, S. 25-53. Verl. Herder, Wien 1968

Popper, Karl R. und Eccles John C.: Das Ich und sein Gehirn. Verl. Piper, München 1996

Reimer, Rolf: Die Bevölkerung der Zahlengeraden. In: Mathematik in der Klassenstufe 5 bis 10, Bd. 33. Friedrich Verlag, Seelze 2015

Rein, Wilhelm: Encyclopädisches Handbuch der Pädagogik, Band 1. Verl. Beyer u. Söhne, Langensalza 1903

Rizzolatti, Giacomo u.a.: Empathie und Spiegelneurone. Suhrkamp Verlag, Frankfurt 2009

Russel, Bertrand: The Principles of Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge 1903

Safranski, Rüdiger: Schiller oder Die Erfindung des Deutschen Idealismus. Carl Hanser Verlag, München, Wien 2004

Schiller, Friedrich: Ueber die ästhetische Erziehung des Menschen. [2. Teil; 10. bis 16. Brief.] In: Schiller, Friedrich: Die Horen, 2. Stück. Tübingen 1795 (nach Internetquelle: http://www.deutschestextarchiv.de/book/view/schiller_erziehung02_1795?p=38)

Schwarzfischer, Klaus: Integrative Ästhetik. InCodes Verlag, Regensburg 2014

Siever-Staudte, Adelheid: Ästhetische Bildung oder Ästhetische Erziehung? In: Zacharias, Wolfgang (Hrsg): Schöne Aussichten. Ästhetische Bildung in einer technisch-medialen Welt. Verl. Hermes – Klartext, Essen 1991

Stewart, Ian: Die Macht der Symmetrie. Warum Schönheit Wahrheit ist. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2008

Störig, Hans Joachim: Kleine Weltgeschichte der Philosophie, Band 1. Fischer Verlag, Frankfurt a. Main 1981

Timm, Sonny, Reimer, Rolf und Unangst, Lars: Statt zu messen, denk‘ ich nach. In: mathematik lehren, Bd. 168. Friedrich Verlag, Seelze 2011

Tobinski, David A.: Kognitive Psychologie: Problemlösen, Komplexität und Gedächtnis. Springer Verlag, Heidelberg 2007

Viehoff, Heinrich: Schiller‘s Gedichte. Balz‘sche Buchhandlung, Stuttgart 1839

vom Hofe, Rudolf: Grundvorstellungen - Basis für inhaltliches Denken. In: mathematik lehren, Bd. 78. Friedrich Verlag, Seelze 1996

Wagenschein, Martin: Naturphänomene sehen und verstehen. Genetische Lehrgänge. Hrsg. von Berg, Hans Christoph. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1988

Wagenschein, Martin: Ursprüngliches verstehen und exaktes Denken. Pädagogische Schriften. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1965

Wagenschein, Martin: Verstehen lehren. Genetisch, sokratisch, exemplarisch. Verl. Beltz, Weinheim und Basel, 9. Aufl. 1992

Watzlawick, Paul, Beavin, Janet H. und Jackson, Don D.: Menschliche Kommunikation. Verlag Hans Huber, Bern, Stuttgart, Wien, 5. Aufl. 1980

Weigmann, Katrin: Die Intelligenz des Körpers. In: Gehirn und Geist. Spektrum der Wissenschaft, Bde. 1-2, S. 28-31, Stuttgart 2013

Welsch, Wolfgang: Ästhetik - Ethische Implikationen und Konsequenzen der Ästhetik. Verlag Philipp Reclam jun., Stuttgart 1996.

Whithead, A. N.: Die Gegenstände des mathematischen Unterrichts [1913]. In: Neue Sammlung 2/3, Göttinger Zeitschrift für Erziehung und Gesellschaft. Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1962

Willmann, Otto Johann: Friedrich Herbart‘s Pädagogische Schriften, Bd. 1. Verlag Leopold Voss, Leipzig 1873

Winter, Heinrich: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: GDM-Mitteilungen Nr. 61 (1996), S. 37-46.

Wittmann, Gerald: Grundvorstellungen zu Brüchen - auch für leistungsschwache Schüler? In: mathematica didactica. Bd. 29, S. 49-74. Verlag Franzbecker, Hildesheim 2006.

Zacharias, Wolfgang: Schöne Aussichten? Verl. Hermes - Klartext, Essen 1991