ISSN : 1412 - 72818

Volume 2

Nomor 1, Januari - Juli 2013

JURNAL MATEMATIKA

Journal of Mathematics

Jurnal Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga
Jl.Mulyorejo Kampus C UNAIR, Surabaya-Indonesia
telp : +62-31-592 36501
Kode Pos : 60115
Fax : +62-31-592 36502, +62-31-592 36503
E-mail : math@fst.unair.ac.id

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga
Surabaya, Indonesia

DAFTAR ISI

DimensiMetrikdanDimensiPartisi Graf BukuBertumpuk

Eko Prasetyo[1], Liliek Susilowati[1], Nenik Estuningsih[1]&Hazrul Iswadi[2]
[1]DepartemenMatematika, FakultasSainsdanTeknologi
UniversitasAirlangga
[2]Departemen MIPA, Gedung TG Lantai 6
Universitas Surabaya
ecoprast@live.com

Abstract. The aims of this research were to decide metric dimension and partition dimension on the stacked book graph $B_{3,n}$for $n \geq 3$. The stacked book graph $B_{3,n}$ is formed by Cartesian product of star graph $K_{1,3}$and path graph P_n.To complete this study, is used characterization of metric dimension and partition dimension of path graph, lemma about the character of resolving set, resolving partition and some supporting observations of stacked book graph $B_{3,n}$. The each result about metric dimension and partition dimension of stacked book graph $B_{3,n}$ is 3 for $n \geq 3$.

Keywords: *metric dimension; partition dimension; resolving set; resolving partition; stacked book graph*

14. Pendahuluan

Graf G didefinisikan sebagai himpunantitik tak kosong$V(G)$dan himpunansisi$E(G)$yang menghubungkanduatitiktak terurut pada$V(G)$. Kardinalitas $V(G)$, dinotasikan dengan $|V(G)|$ disebut ordo dari graf G. Graf G dikatakan terhubung jika setiap dua titik u dan v di graf G selalu dihubungkandengansuatu lintasan.Jarak antara dua titik u dan v dinotasikan $d(u,v)$ di suatu graf terhubung G adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v di G.[2]

Misalkan$G$ graf terhubung dan himpunan $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subseteq V(G)$. Representasi titik $v \in V(G)$ terhadap W adalah pasangan terurut *k*-tuple $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \ldots, d(v,w_k))$. Himpunan$W$ disebut himpunan pembeda dari graf G jika representasi setiap titik v di G terhadap himpunan W berbeda. Himpunan pembeda dari graf G yang mempunyai kardinalitas minimum disebut basis dari graf G dan kardinalitas basis disebut dimensi metrik dari graf$G$ yang dinotasikan dengan $dim(G)$. Misalkan $S \subseteq V(G)$ dan terdapat titik v pada graf terhubung G, maka jarak antara v dan S dinotasikan $d(v,S)$, didefinisikan sebagai $d(v,S) = \min\{d(v,x): x \in S\}$. Jika $\prod = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ adalah k-partisi dari $V(G)$, maka representasi v terhadap $\prod$ adalah k-tuple $r(v|\prod) = \left(d(v,S_1), d(v,S_2), \ldots \ldots, d(v,S_k)\right)$. Jika k –tuple $r(v|\prod)$ untuk $v \in V(G)$ semuanya berbeda, maka partisi $\prod$ disebut sebagai partisi pembeda. Bilangan k –minimal yang merupakan k –partisipembedadari$V(G)$ disebut dimensi partisi dari G dan dinotasikan dengan $pd(G)$ [3].

Konseptentangdimensimetrikpertama kali dikenalkanoleh F. Hararydan R. Melterpadatahun 1976.Kemudianpadatahun 2000, Chartranddkkmengembangkandenganbaiktentangkonsepdimensimetrikyaitudimensipartisi yang diterbitkandalamjurnalberjudul*The Partition Dimension of A Graph.*

Pengembangandimensimetrikdandimensipartisigrafsalahsatunyadapatditerapkandalamoperasihasil kali *Cartesian*.Padapenelitianini, ditentukandimensimetrikdandimensipartisidarigrafbukubertumpuk $B_{3,n}$ yang merupakan hasil kali Cartesian antara graf bintang $K_{1,3}$ dan graf lintasan P_n.

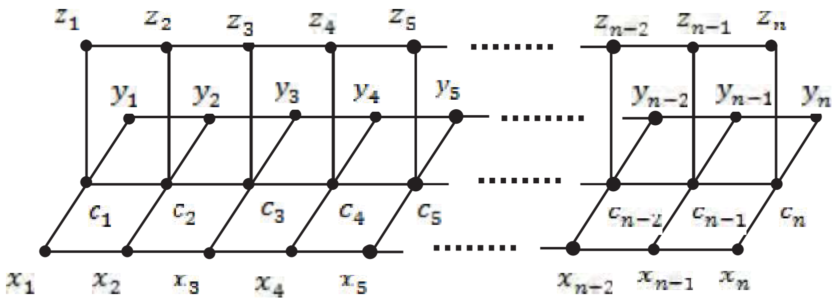
15. Pembahasan

Dalamteorigrafterdapatbeberapaoperasigrafuntukmembentukgraf yang baru, salahsatunyaadalahoperasihasil kali Cartesian.

Definisi 2.1. MisalkanG_1danG_2adalahduabuahgraf.**Hasil kali Cartesian**$G_1 \times G_2$ adalah graf yang memuat himpunan titik $V(G_1) \times V(G_2)$. Duatitik(u_1,u_2) dan (v_1,v_2)terhubunglangsung di $G_1 \times G_2$ jika dan hanya jika memenuhi syarat sebagai berikut:

1. $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_1)$, atau
2. $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_2)$[2]

Definisi 2.2.Graf bukubertumpukdinotasikandengan$B_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dari hasil kali Cartesian $K_{1,m} \times P_n$.[5]



Graf bukubertumpuk$B_{3,n}$mempunyaihimpunantitik $V(B_{3,n}) = \{x_i | i = 1,2,\dots,n\} \cup \{y_i | i = 1,2,\dots,n\} \cup \{z_i | i = 1,2,\dots,n\} \cup \{c_i | i = 1,2,\dots,n\}$ dan himpunan sisi

$E(B_{3,n}) = \{x_i x_{i+1} | i = 1,2,\dots,n-1\} \cup \{y_i y_{i+1} | i = 1,2,\dots,n-1\} \cup \{z_i z_{i+1} | i = 1,2,\dots,n-1\} \cup \{c_i c_{i+1} | i = 1,2,\dots,n-1\} \cup \{x_i c_i | i = 1,2,\dots,n\} \cup \{y_i c_i | i = 1,2,\dots,n\} \cup \{z_i c_i | i = 1,2,\dots,n\}$
denganordodarigrafbukubertumpuk $B_{3,n}$ adalah $4n$ dan ukurannya adalah $7n-4$.

Lemma 1. Misalkan G graf terhubung dengan $U' \subseteq U \subseteq V(G)$. Jika U' adalah himpunan pembeda maka U juga merupakanhimpunan pembeda.[4]

Lemma 2.$dim(K_{1,n}) = n-1$ $(n \geq 2)$.[6]

Lemma 3. Misalkan G adalah graf terhubung dengan order n. Graf G mempunyai dimensi metrik 1 jika dan hanya jika graf G adalah P_n. [1]

Lemma 4. Misalkan $\prod$ adalah partisi pembeda dari $V(G)$ dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u,w) = d(v,w)$, untuk semua $w \in V(G) - \{u,v\}$ maka u dan v harus berada di kelas partisi yang berbeda.[3]

Lemma 5. Misalkan G adalah graf terhubung dengan order n $\geq$ 2. Maka $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$.[3]

Lemma 6. Jika G adalah graf terhubung tak trivial, maka $pd(G) \leq \dim(G) + 1$ [3]

Lemma 7. Untuksebaranggrafterhubung G_1 dan G_2,

$$pd(G_1 \times G_2) \leq pd(G_1) + dim(G_2) \text{ [6]}$$

Akibat8. Untuksebaranggrafterhubung G_1 dan G_2,

$$pd(G_1 \times G_2) \leq dim(G_1) + dim(G_2) + 1 \text{ [6]}$$

Berikutiniadalahhasildari $dim(B_{3,n})$ untuk $n \geq 3$ yang disajikan dalam bentuk observasi, lemma,danteorema.

Observasi2.1. $d(x_i,c_i) = d(y_i,c_i) = d(z_i,c_i) = 1$.

Observasi2.2. $d(x_i,y_i) = d(x_i,z_i) = d(y_i,z_i) = 2$.

Observasi 2.3. $d(x_i,x_j) = d(y_i,y_j) = d(z_i,z_j) = d(c_i,c_j) = |j-i|$.

Observasi2.4. Untuk $i \neq j$, $d(c_i,x_j) = d(c_i,y_j) = d(c_i,z_j) = |j-i| + 1$.

Observasi2.5. Untuk $i \neq j$, $d(x_i,y_j) = d(x_i,z_j) = d(y_i,z_j) = |j-i| + 2$.

Lemma 2.6. Misalkan $W \subseteq V(B_{3,n})$ untuk $n \geq 3$. Jika $|W| = 2$ maka W bukan merupakan himpunan pembeda.

Bukti: Misalkan $W \subseteq V(B_{3,n})$ untuk $n \geq 3$ dan $|W| = 2$, maka terdapat 2 kasus.

- Kasus 1: Jikadipilihtitik-titik di W berindeks sama.
  - a. Untuk W yang tidak memuat titik pusat. Diambil sebarang $W = \{x_i, y_i\}$, $W = \{x_i, z_i\}$, atau $W = \{y_i, z_i\}$ dengan $i = 1,2,\ldots,n$. Berdasarkan Observasi 2.2 dan Observasi 2.4makauntuk $W = \{x_i, y_i\}$ berlaku $r(z_i|W) = r(c_{i+1}|W) = (2,2)$atau $r(z_i|W) = r(c_{i-1}|W) = (2,2)$. Untuk $W = \{x_i, z_i\}$ berlaku $r(y_i|W) = r(c_{i+1}|W) = (2,2)$atau $r(y_i|W) = r(c_{i-1}|W) = (2,2)$. Untuk $W = \{y_i, z_i\}$ berlaku $r(x_i|W) = r(c_{i+1}|W) = (2,2)$atau $r(x_i|W) = r(c_{i-1}|W) = (2,2)$.
  - b. Untuk W yang memuat titik pusat. Diambil sebarang $W = \{x_i, c_i\}$, $W = \{y_i, c_i\}$, atau $W = \{z_i, c_i\}$ dengan $i = 1,2,\ldots,n$. Berdasarkan Observasi 2.1 dan Observasi 2.2makauntuk $W = \{x_i, c_i\}$berlaku $r(z_i|W) = r(y_i|W) = (2,1)$. Untuk $W = \{y_i, c_i\}$berlaku $r(x_i|W) = r(z_i|W) = (2,1)$. Untuk $W = \{z_i, c_i\}$berlaku $r(x_i|W) = r(y_i|W) = (2,1)$.
- Kasus 2: Jikadipilihtitik-titik di W indeksnya berbeda.
  - a. Jika W hanya memuat 1 titik sejenis.

- Untuk W yang tidak memuat titik pusat. Diambil sebarang $W = \{x_i, x_j\}$, $W = \{y_i, y_j\}$, atau $W = \{z_i, z_j\}$ dengan $i \neq j, i = 1,2, \dots n, j = 1,2, \dots, n$. Berdasarkan Observasi 2.3 dan Observasi 2.5makauntuk $W = \{x_i, x_j\}$berlaku $r(y_i|W) = r(z_i|W) = (2, |j-i| + 2)$. Untuk $W = \{y_i, y_j\}$ berlaku $r(x_i|W) = r(z_i|W) = (2, |j-i| + 2)$ dan untuk $W = \{z_i, z_j\}$berlaku $r(x_i|W) = r(y_i|W) = (2, |j-i| + 2)$.
- Untuk W yang memuat titik pusat. Diambil sebarang $W = \{c_i, c_j\}$dengan $i \neq j, i = 1,2, \dots n, j = 1,2, \dots, n$. Berdasarkan Observasi 2.1 dan Observasi 2.4makaberlaku $r(x_i|W) = r(y_i|W) = r(z_i|W) = (2, |j-i| + 1)$.

b. Jikadipilih W yang memuat 2 titiksejenis.

- Untuk W yang tidak memuat titik pusat. Diambil sebarang $W = \{x_i, y_j\}$, $W = \{x_i, z_j\}$, atau $W = \{y_i, z_j\}$ dengan $i \neq j, i = 1,2, \dots n, j = 1,2, \dots, n$. Berdasarkan Observasi 2.3, Observasi 2.4, dan Observasi 2.5makauntuk $W = \{x_i, y_j\}$ berlaku $r(x_{i+1}|W) = r(c_i|W)$, $r(y_{i-1}|W) = r(c_j|W)$ atau $r(x_{i-1}|W) = r(c_i|W)$, $r(y_{i+1}|W) = r(c_j|W)$. Untuk $W = \{x_i, z_j\}$berlaku $r(x_{i+1}|W) = r(c_i|W)$, $r(z_{i-1}|W) = r(c_j|W)$ atau $r(x_{i-1}|W) = r(c_i|W)$, $r(z_{i+1}|W) = r(c_j|W)$. Untuk $W = \{y_i, z_j\}$berlaku $r(y_{i+1}|W) = r(c_i|W)$, $r(z_{i-1}|W) = r(c_j|W)$ atau $r(y_{i-1}|W) = r(c_i|W)$, $r(z_{i+1}|W) = r(c_j|W)$.
- Untuk W yang memuat titik pusat. Diambil sebarang $W = \{x_i, c_j\}$, $W = \{y_i, c_j\}$, atau $W = \{z_i, c_j\}$ dengan $i \neq j, i = 1,2, \dots n, j = 1,2, \dots, n$. Berdasarkan Observasi 2.2 dan Observasi 2.4makauntuk $W = \{x_i, c_j\}$berlaku $r(y_i|W) = r(z_i|W) = (2, |j-i| + 1)$. Untuk $W = \{y_i, c_j\}$ berlaku $r(x_i|W) = r(z_i|W) = (2, |j-i| + 1)$ dan untuk $W = \{z_i, c_j\}$berlaku $r(x_i|W) = r(y_i|W) = (2, |j-i| + 1)$.

Jadíterbuktibahwauntuk $|W| = 2$ maka W bukan merupakan himpunan pembeda.■

Teorema2.7. Untuk$n \geq 3$, $dim(B_{3,n}) = 3$.

Bukti: Dipilih$W = \{x_1, y_1, z_1\} \subseteq B_{3,n}$. BerdasarkanObservasi2.3

$d(x_i,x_j) = d(y_i,y_j) = d(z_i,z_j) = |j - i|$. BerdasarkanObservasi2.4

$d(c_i,x_j) = d(c_i,y_j) = d(c_i,z_j) = |j - i| + 1$. BerdasarkanObservasi2.5

$d(x_i,y_j) = d(x_i,z_j) = d(y_i,z_j) = |j - i| + 2$. Sehingga representasi setiap titik terhadap W dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$r(x_i | W) = (i-1, i+1, i+1)$$
$$r(y_i | W) = (i+1, i-1, i+1)$$
$$r(z_i | W) = (i+1, i+1, i-1)$$
$$r(c_i | W) = (i, i, i)$$

Jelasbahwa$d(x_i,x_1) \neq d(y_i,x_1) \neq d(c_i,x_1)$sehingga $r(x_i | W) \neq r(y_i | W) \neq r(c_i | W)$. Sedangkan $d(y_i,x_1) = d(z_i,x_1)$, namun karena $d(y_i,y_1) \neq d(z_i,y_1)$ sehingga $r(y_i | W) \neq r(z_i | W)$.Karenasemuarepresentasititikberbedamaka$W$ adalah himpunan pembeda.Lemma 2.6 menyatakanbahwauntuksetiap$W$ dengan kardinalitas 2 bukan merupakan himpunan pembeda.Sehingga$W$ merupakan basis dari $B_{3,n}$. Jadi terbukti bahwa $dim(B_{3,n}) = 3$.■

Setelahmenentukandimensimetrikgrafbukubertumpuk$dim(B_{3,n})$, selanjutnyaakanditentukandimensipartisigrafbukubertumpuk$pd(B_{3,n})$untuk$n \geq 3$ yang disajikan dalam bentuk observasi, lemma, dan teorema sebagai berikut.

Observasi2.8. Misalkan$a_i \in V(B_{3,n})$. Jika S memuat $a_i$maka $d(a_i,S) - 0$.

Observasi2.9. Jika$S = \{x_1\}$maka $d(x_i,S) = i - 1$, $d(y_i,S) = d(z_i,S) = i + 1$, dan $d(c_i,S) = i$.

Observasi2.10. Jika$S = \{x_n, y_n, c_n\}$maka:

$$d(x_i,S) = \min\{n-i, n-i+2, n-i+1\} = n-i.$$

$$d(y_i,S) = \min\{n-i+1, n-i, n-i+1\} = n-i.$$

$$d(z_i,S) = \min\{n-i+2, n-i+2, n-i+1\} = n-i+1.$$

$$d(c_i,S) = \min\{n-i+1, n-i+1, n-i\} = n-i.$$

Observasi2.11. Jika$S$ memuat x_{n-1}maka $d(x_n,S)=1$.

Observasi2.12. Jika$S$ memuat y_{n-1}maka $d(y_n,S)=1$.

Observasi2.13. Jika$S$ memuat c_{n-1}maka $d(c_n,S)=1$.

Teorema2.10. Untuk$n \geq 3$, $pd(B_{3,n})=3$.

Bukti: Dipilih$\prod=\{S_1,S_2,S_3\}$dengan $S_1=\{x_1\}$, $S_2=\{x_n,y_n,c_n\}$, dan $S_3=\{x_2,x_3 \dots ,x_{n-1},y_1,y_2,\dots,y_{n-1},z_1,z_2,\dots,z_n,c_1,c_2,\dots,c_{n-1}\}$. BerdasarkanObservasi 2.9maka$d(x_i,S_1)=i-1$, $d(y_i,S_1)=d(z_i,S_1)=i+1$, dan $d(c_i,S_1)=i$. BerdasarkanObservasi 2.10maka$d(x_i,S_2)=d(y_i,S_2)=d(c_i,S_2)=n-i$,$d(z_i,S_2)=n-i+1$,dan $d(x_i,S_3)=0$ atau $d(x_i,S_3)=1$, $d(y_i,S_3)=0$ atau $d(y_i,S_3)=1$, $d(c_i,S_3)=0$ atau $d(c_i,S_3)=1$. BerdasarkanObservasi 2.8, Observasi 2.11, Observasi 2.12, danObservasi2.13$d(z_i,S_3)=0$. Sehingga representasi setiap titik pada graf buku bertumpuk $B_{3,n}$ terhadap $\prod$ adalah sebagai berikut:

$$r(x_i|\prod)=\begin{cases}(i-1,n-i,0), & \text{untuk } 1<i<n\\ (i-1,n-i,1), & \text{untuk yang lain}\end{cases}$$

$$r(y_i|\prod)=\begin{cases}(i+1,n-i,0), & \text{untuk } 1\leq i<n\\ (i+1,n-i,1), & \text{untuk } i=n\end{cases}$$

$$r(z_i|\prod)=(i+1,n-i+1,0)$$

$$r(c_i|\prod)=\begin{cases}(i,n-i,0), & \text{untuk} 1\leq i<n\\ (i,n-i,1), & \text{untuk} i=n\end{cases}$$

Jelasbahwa$d(x_i,S_1)\neq d(z_i,S_1)\neq d(c_i,S_1)$sehingga $r(x_i|\prod)\neq r(y_i|\prod)\neq r(c_i|\prod)$. Sedangkan $d(y_i,S_1)=d(z_i,S_1)$, namun karena $d(y_i,S_2)\neq d(z_i,S_2)$ sehingga

$r(y_i|\prod) \neq r(z_i|\prod)$. Karenasemuarepresentasititik di grafbukubertumpuk $B_{3,n}$ terhadap $\prod$ berbeda, maka $\prod$ adalah partisi pembeda.Berdasarkan Lemma 5dapatdipastikanbahwa $pd(B_{3,n}) \neq 2$ dikarenakan graf $B_{3,n}$ bukan merupakan graf lintasan P_n. Oleh karena itu $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda minimum dari graf buku bertumpuk $B_{3,n}$. Jaditerbuktibahwa $pd(B_{3,n}) = 3$. ■

16. Kesimpulan

1. Dimensimetrikdarigrafbukubertumpuk $B_{3,n}$ adalah 3.
2. Dimensipartisigrafbuku bertumpuk $B_{3,n}$ adalah 3 denganpartisipembedanyatidaktunggaltetapisalahsatupartisidalampartisipembedan yamemuatsatutitik.

17. DaftarPustaka

[1] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M.A., danOellermann, O.R., *Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of A Graph*, Discrete Appl. Math., 105: 99 – 113,2000.

[2] Chartrand, G. danLesniak, L., *Graphs and Digraph Third Edition*, Chapman & Hall/CRC. Florida. 1-20, 2000.

[3] Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P., The Partition Dimension of A Graph, *Aequationes Math*, 59:45-54, 2000.

[4] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Salman, A.N.M., danSimanjutak, R., *The Resolving Graph of Amalgamation of Cycles*, An International Journal of Discrete and Combinatorial Mathematics. UtilitasMathematica, 83.3,2010.

[5] Khalil,Ayhan A. dan Khalil, Omar A., *Determination and Testing the Domination Numbers of Tadpole Graph, Book Graph and Staced Book Graph Using Matlab*, College of Basic Education Researchers Journal, Vol 10, No. 1.494, 2010.

[6] Yero, Ismail G. dan Rodriguez-Velaguez, Juan A., *A note on the partition dimension of Cartesian product graphs*, Applied Mathematics and Computation, 217:3571-3574, 2010.