ISSN : 1412 - 72818

Volume 2

Nomor 1, Januari - Juli 2013

JURNAL MATEMATIKA

Journal of Mathematics

Jurnal Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga
Jl.Mulyorejo Kampus C UNAIR, Surabaya-Indonesia
telp : +62-31-592 36501
Kode Pos : 60115
Fax : +62-31-592 36502, +62-31-592 36503
E-mail : math@fst.unair.ac.id

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga
Surabaya, Indonesia

DAFTAR ISI

DimensiMetrikdanBilanganPembedaTerhubungdari Graf Piramidadan Graf PiramidaTerpancung

Febri K.D.K.W[1], Liliek Susilowati[1], Inna Kuswandari[1]&Hazrul Iswadi[2]
[1]DepartemenMatematika, FakultasSainsdanTeknologi
UniversitasAirlangga
[2]Departemen MIPA, Gedung TG Lantai 6
Universitas Surabaya
ebi742@gmail.com

Abstract. Let G is connected graph and $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subset V(G)$. The representation a vertex $v \in V(G)$ with respect to W is the ordered k-tuple $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \ldots, d(v,w_k))$ where $d(v,w)$ represents the distance between vertices v and w. The set W is called a resolving set for G if every vertex of G has a distinct representation. A resolving set containing a minimum number of vertices is called basis for G. The metric dimension of G denoted $\dim(G)$, is the number of vertices in a basis of G. A resolving set W of G is connected if the subgraph induced by W is a connected subgraph of G. The connected resolving number is the minimum cardinality of a connected resolving set in a graph G, denoted by $cr(G)$. In this paper, determined metric dimension and connected resolving set number of pyramid graph and truncated pyramid graph. The pyramid graph is form by snake graph, denoted by Pr_n and truncated pyramid graph is form by deleting vertex of vertices pyramid graph. The result from this paper are $\dim(Pr_n) = 2$, $\dim(Pr_t^m) = 2$, $cr(Pr_n) = \frac{n+3}{2}$ for $n = 1,3,5,$ and 7, $cr(Pr_n) = \frac{n}{2} + 2$ for $n = 2,4,$ and 6, $cr(Pr_1^1) = 2$, $cr(Pr_1^2) = 2$, and $cr(Pr_2^1) = 3$.

Keywords: *basis; metric dimension; connected resolving set number; pyramid graph*

1. Pendahuluan

Graf G didefinisikan sebagai himpunantitik tak kosong$V(G)$dan himpunansisi$E(G)$yang menghubungkanduatitiktak terurut pada$V(G)$. Kardinalitas $V(G)$, dinotasikan dengan $|V(G)|$ disebut ordo dari graf G. Graf G dikatakan terhubung jika setiap dua titik u dan v di graf G selalu dihubungkandengansuatu lintasan.Jarak antara dua titik u dan v dinotasikan $d(u,v)$ di suatu graf terhubung G adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v di G.[3]

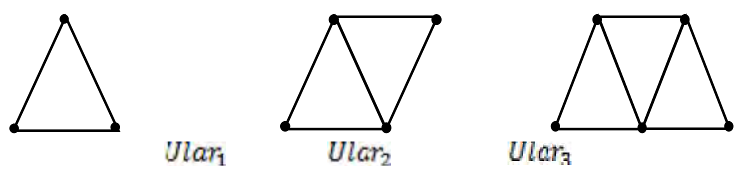
Misalkan$G$ graf terhubung dan himpunan$W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subseteq V(G)$. Representasititik$v \in V(G)$, terhadap$W$ adalah pasangan terurut k-tuple $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \ldots, d(v,w_k))$. Himpunan W disebut himpunan pembeda dari graf G jika representasi setiap titik v di G terhadap himpunan W berbeda. Himpunan pembeda darigraf$G$ yang mempunyai kardinalitas minimum disebut basis dari graf G dan kardinalitas basis disebut dimensi metrik dari graf G yang dinotasikan dengan $dim(G)$. Himpunanpembeda$W$ dari G terhubung jika subgraf yang terinduksi oleh W merupakan suatusubgrafterhubungdari$G$. Kardinalitas minimum darihimpunanpembedaterhubungdisebutbilanganpembedaterhubungdarigraf$G$ dan dinotasikan dengan $cr(G)$ [1].

Konseptentangdimensimetrikpadagrafdiperkenalkanpertama kali oleh Slater padatahun 1975 danHararydkkpadatahun 1976. Merekamemperkenalkan ide tentanghimpunanpembeda, basis, dandimensimetrik. Kemudianpadatahun 2000, Chartranddkkmengembangkandenganbaiktentangkonsepdimensimetriksuatugrafsertamenemukanketerkaitandenganbidangilmulainnya, salahsatunyaadalahdalambidangkomputer [7].Sejaktahun 2000, kajiantentanghimpunanpembeda, basis, dandimensimetriksuatugrafmendapatkanbanyakperhatiandariahligrafteori. Padapenelitianini, ditentukandimensimetrikdanbilanganpembedaterhubungdarigrafpiramidadangrafpiramida terpancung.

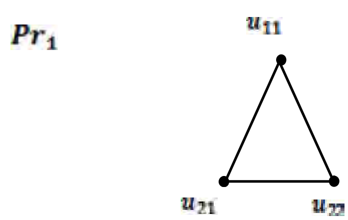
2. Pembahasan

Pengubinanadalahrangkaiandarisegibanyak yang digunakanuntukmenutupisuatubidangdatartertentutanpatumpangtindihdantanpaadanyaper potongan. Subgrafberhinggadarihasilpengubinandisebutdengangrafubin[4].Misalkanterdapatsuatupe ngubinanpadabidangdatarmenggunakansegitigasamasisi yang kongruen, duasegitigadikatakanterhubungjikaduasegitigatersebutbersekutupadasatusisi. Misalkan T adalahkumpulansegitiga-segitiga yang terhubung, maka T adalahgrafterhubungdengansikelterpendektigadanmasing-masingsegitiga paling sedikitterdapatsatusisi yang bersekutudengansisisegitiga yang lainnya. Kumpulan segitigaterhubungdisebuttriomino. T disebut$n$**-triomino**jika T merupakan$n$ buah graf ubin. Graf ular, graf piramida, dan graf piramida terpancung terbentuk dari satu buah graf ubin sehingga ketiga graf tersebut merupakan 1-triomino. [6]

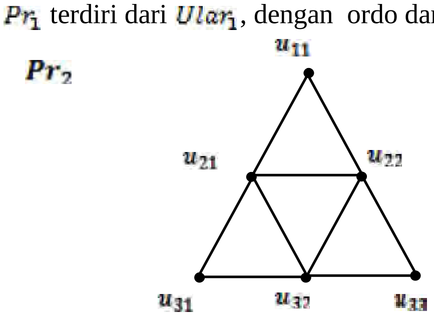
Definisi 2.2.1 **Graf ular**denganpanjang$k$ yang dinotasikan dengan $Ular_k$ merupakan 1-triomino yang dibentuk dari k segitiga samasisi dengan cara berikut:



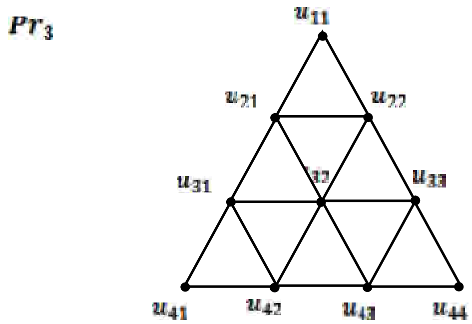
Definisi 2.2.2 **Graf piramida**dengantinggi$n$, $n \geq 1$ ditulis Pr_n merupakan 1-triomino, yang dibentuk dengan cara berikut:



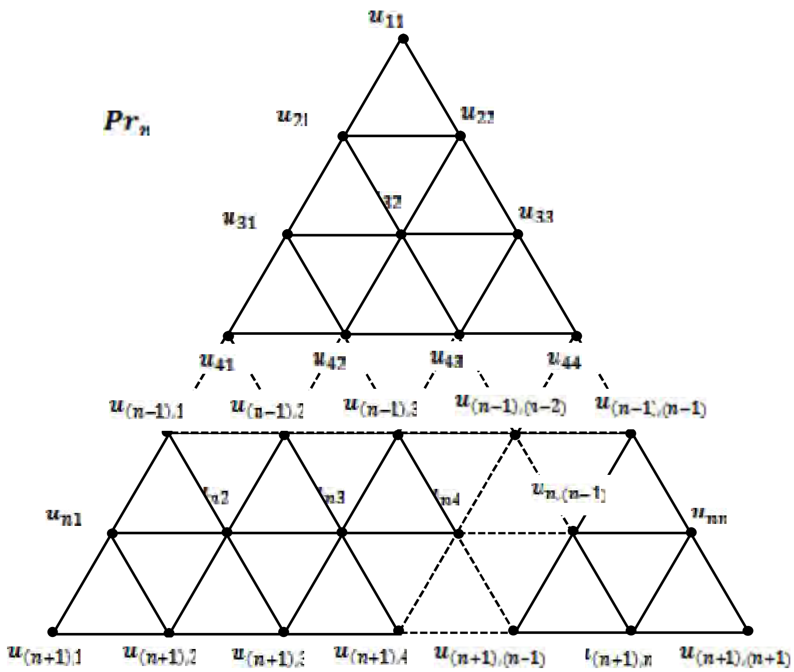
Pr_1 terdiri dari $Ular_1$, dengan ordo dari Pr_1 adalah 3.



Pr_2 terdiri dari $Ular_1$ dan $Ular_3$, dengan ordo dari Pr_2 adalah 6.



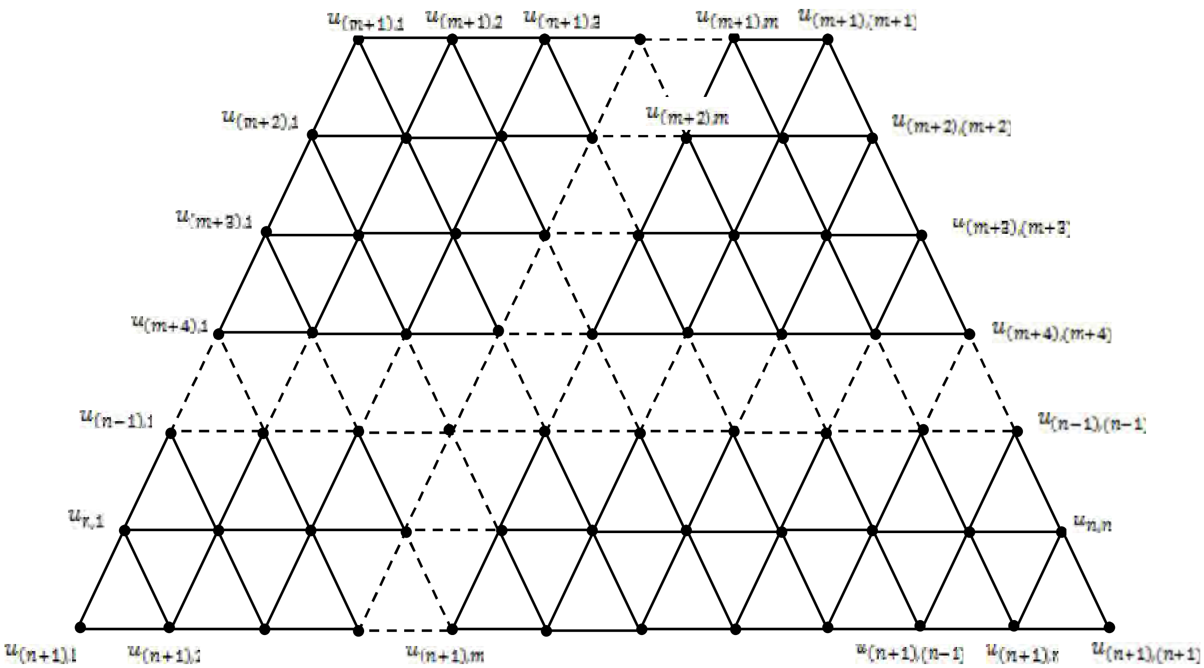
Pr_3 terdiri dari $Ular_1$, $Ular_3$, dan $Ular_5$, dengan ordo dari Pr_3 adalah 10.



Graf piramida Pr_n dengan $V(Pr_n)$ = $\{u_{ij}$, i =1,2,3,…,$n+1$ dan $j = 1,2,3,\ldots,i\}$ dan $E(Pr_n)$= $\{u_{ij}u_{kl}$, i =1,2,3,…,n+1, j =1,2,3,…,i dan $k = i, i+1$, $l = j, j+1$, $k \leq n+1$, $u_{ij} \neq u_{kl}\}$. Pr_n terdiri dari $Ular_1$, $Ular_3$, $Ular_5$, . . ., dandan $Ular_{2n-1}$, dengan ordo dari Pr_n adalah $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Graf piramidaterpancungadalahgraf yang dibentukdaripenghapusantitikpadapuncaksegitiga Pr_n dan dinotasikan Pr_c^m, dengan m menunjukkan banyaknya lapisan graf piramida Pr_n yang dipancung dan $c = n - m$

adalah tinggi graf piramida terpancung. Graf piramida Pr_c^m disajikan pada gambar berikutini:



Graf piramidaterpancungPr_c^mdengan$V(Pr_c^m)$ ={$u_{ij}, i = m$+1,m+2, ... ,n+1dan $j = 1,2, ..., i$}dan$E(Pr_c^m)$={$u_{ij}u_{kl}$, $i = m$+1, m+2,m+3,…,n+1, j =1,2,3,…,i dan $k = i, i$+1, $l = j, j$+1, $l < k < n$+1, $u_{ij} \neq u_{kl}$}. Ordo dari graf Pr_c^m adalah $\frac{1}{2}(c+2m+2)(c+1)$.

Lemma 1 Misalkan$G$ adalah graf terhubung dengan ordo n. Graf G mempunyai dimensi metrik 1 jika dan hanya jika graf G adalah P_n. [2]

Lemma 2 Misalkan$G$ graf terhubungdan$S' \subseteq V(G)$. Jika S' memuat sebuah himpunan pembeda pada G sebagai himpunan bagiannya, maka S' juga merupakan himpunan pembeda. [5]

Berikutiniadalahhasildari$\dim(Pr_n)$ dan $\dim(Pr_c^m)$ yang disajikandalambentukteorema.

Teorema 2.1$\dim(Pr_n) = 2$

Bukti: Dipilihhimpunanterurut$W = \{u_{11}, u_{(n+1),1}\} \subset V(Pr_n)$dantitik-titikpada$W$ tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_1. Representasisetiaptitik$u_{ij} \subset V(Pr_n)$ terhadap himpunan W adalah:

$r(u_{ij}|W) = (i-1, n-i+j)$

Karenarepresentasisetiaptitiku_{ij} di Pr_n terhadap himpunan W berbeda maka W merupakan himpunan pembeda dari Pr_n. Berdasarkan Lemma 1, karenagrafpiramidaPr_n

bukan merupakan graf lintasan maka $\dim(Pr_n) \geq 2$ sehinggahimpunan$W$ merupakan himpunan pembeda minimal. Jadi W merupakan basis dari Pr_n dan terbukti bahwa $\dim(Pr_n)$=2.■

Teorema 2.2$\dim(Pr_c^m) = 2$

Bukti: Dipilihhimpunanterurut= $\{u_{(m+1,1)}, u_{(n+1),1}\} \subset V(Pr_c^m)$dantitik-titikpada$W$ tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_2. Representasisetiaptitik$u_{ij} \in Pr_c^m$terhadaphimpunan$W$ adalah:

$$r(u_{ij}|W) = \begin{cases} (j-1, n-(i-j)), & \text{untuk } i-j \leq m \\ (i-(m+1), n-(i-j)), & \text{untuk } i-j > m \end{cases}$$

Karenarepresentasisetiaptitiku_{ij} di Pr_c^m terhadap himpunan W berbeda maka W merupakan himpunan pembeda dari Pr_c^m. Berdasarkan Lemma 2.3.3, karenagrafpiramidaterpancungPr_c^m bukan merupakan graf lintasan maka $\dim(Pr_c^m) > 2$ sehinggahimpunan$W$ merupakan himpunan pembeda minimal. Jadi$W$ merupakan basis dari graf piramida terpancung Pr_c^m dan terbukti bahwa $\dim(Pr_c^m)$=2. ■

SetelahmenentukandimensimetrikdarigrafpiramidaPr_n dan graf piramida terpancung Pr_c^m, selanjutnya ditentukan bilangan pembeda terhubung dari graf piramida Pr_n dan graf piramida terpancung Pr_c^m. Berikut ini disajikan beberapa lemma untuk mendukung penentuan bilangan pembeda terhubung dari grafpiramidaPr_n dan graf piramida terpancungPr_n .

Lemma 2.3 Misalkan$W \subseteq V(Pr_n)$, jika anggota himpunan W terdiri dari tepatsatutitikujungdantitik-titiksegarisdengantitikujungtersebutmaka$W$ bukan merupakan himpunan pembeda.

Bukti: Misalkandiambilsebarang$W \subseteq V(G)$ yang anggotadari$W$ terdiri dari titik-titik segaris tanpa titik ujung, maka terdapat 2 titik di G yang mempunyai representasi yang sama terhadap himpunan W. Himpunan W tersebut adalah:

$W = \{u_{11}, u_{21}, \dots, u_{m1}\}$, $m \leq n$ $\quad$ $W = \{u_{(n+1),1}, u_{n,1}, \dots, u_{p1}\}$, $p < 1$

$W = \{u_{11}, u_{22}, \dots, u_{kk}\}$, $k \leq n$ $\quad$ $W = \{u_{(n+1),(n+1)}, u_{nn}, \dots, u_{q1}\}$, $q < 1$

$W = \{u_{(n+1),1}, u_{(n+1),2}, \dots, u_{(n+1),l}\}$, $l \leq n$ $\quad$ $W = \{u_{(n+1),(n+1)}, u_{(n+1),n}, \dots u_{r1}\}$, $r < 1$

Tanpamengurangikeumumanbukti, dipilihhimpunan$W = \{u_{11}, u_{21}, \dots, u_{m1}\}$mengakibatkan $r(u_{(m+1),1}|W) = r(u_{(m+1),2}|W)$. Karena$r(u_{(m+1),1}|W) = r(u_{(m+1),2}|W)$ maka himpunan W tersebut bukan merupakanhimpunanpembedadariPr_n .■

Lemma 2.4 Misalkan$W \subseteq V(Pr_n)$, jika anggota himpunan W terdiri dari titik-titik segaris tanpa memuat titik ujung maka W bukan merupakan himpunan pembeda.

Bukti: Diambilsebarang$W \subseteq V(G)$ yang anggota dari W terdiri dari titik-titik segaris tanpa titik ujung dan titik-titik pada W tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_n. Himpunan W=$\{u_{ij} | i,j \neq 1 ; i,j \neq n+1,\ u_{ij}\ segaris\}$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan dipilih himpunan $W = \{u_{22}, u_{32}, \dots, u_{c2}\}$, $c \leq n$ mengakibatkan $r(u_{21}|W) = r(u_{33}|W)$. Karena $r(u_{21}|W) = r(u_{33}|W)$ maka himpunan W tersebut bukan himpunan pembeda dari Pr_n. ■

Lemma 2.5 $cr(Pr_1) = 2$

Bukti: DipilihhimpunanW $W = \{u_{11}, u_{21}\} \subset V(Pr_1)$dantitik-titikpada$W$ tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_1. Representasi setiap titik di Pr_1 terhadap himpunan W sebagai berikut:

$r(u_{11}|W = (0,1)$ $r(u_{21}|W = (1,0)$ $r(u_{22}|W = (1,1)$

Karenarepresentasisetiaptitik di Pr_1 terhadap himpunan W tersebut berbeda maka himpunan W tersebut merupakan himpunan pembeda terhubung dari Pr_1. Berdasarkan Lemma 1, karenaPr_1 bukan merupakan graf lintasan maka $\dim(Pr_1) \geq 2$ sehingga himpunan W tersebut merupakan himpunan pembedaterhubung minimal dariPr_1 dan terbukti bahwa $cr(Pr_1) = 2$. ■

Lemma 2.6$cr(Pr_2) = 3$

Bukti: Dipilihhimpunan$W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\} \subset V(Pr_2)$dantitik-titikpada$W$ tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_2. Representasi setiap titik di Pr_2 terhadap himpunan W sebagai berikut:

$r(u_{11}|W = (1,1,2)$ $r(u_{22}|W = (1,0,2)$ $r(u_{32}|W = (1,1,1)$

$r(u_{21}|W = (0,1,1)$ $r(u_{31}|W = (1,2,0)$ $r(u_{33}|W = (2,1,2)$

Representasisetiaptitik di Pr_2 terhadap himpunan W berbeda sehingga himpunan $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf Pr_2. Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan $W \subset V(Pr_2)$ dengan $|W| = 2$. Berdasarkan Lemma 2.3dan Lemma 2.4, himpunan$W \subset V(Pr_2)$ dengan $|W| = 2$ bukan merupakan himpunanpembedaterhubungdarigrafPr_2. Representasi setiap titik di Pr_2 terhadap himpunan W dengan $|W| = 2$ disajikan pada Lampiran 1. Karena himpunan$W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung dan semua himpunan W dengan $|W| = 2$ bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari Pr_2 maka himpunan $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf Pr_2 dan terbukti bahwa $cr(Pr_2) = 3$. ■

Lemma 2.7$cr(Pr_3) = 3$

Bukti: Dipilihhimpunan$W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\} \subset V(Pr_3)$dantitik-titikpada$W$ tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_3. Representasisetiaptitik di Pr_3 terhadap himpunan W diberikan pada Lampiran 4. Karena representasi setiap titik di Pr_3 terhadap himpunan W berbeda maka himpunan $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf Pr_3. Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan $W \subset V(Pr_3)$ dengan $|W| = 2$. Berdasarkan Lemma 2.3dan Lemma 2.4, himpunan$W \subset V(Pr_3)$ dengan $|W| = 2$ bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf Pr_3. Representasi setiap titik di Pr_3 terhadap himpunan W dengan $|W| = 2$ disajikanpadaLampiran 2. Karenahimpunan$W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung dan semua himpunan W dengan$|W| = 2$ bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari Pr_3 maka himpunan $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf Pr_3 dan terbukti bahwa $cr(Pr_3) = 3$. ■

Lemma 2.8$cr(Pr_4) = 4$

Bukti: Dipilihhimpunan$W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\} \subset V(Pr_4)$dantitik-titikpada$W$ tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_4. Representasisetiaptitik di Pr_4 terhadap himpunan W diberikan pada Lampiran 4. Karena representasi setiap titik di Pr_4 terhadap himpunan W berbeda maka himpunan $W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf Pr_4. Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan$W \subset V(Pr_4)$ dengan $|W| = 3$. Berdasarkan Lampiran 2, semua himpunan $W \subset V(Pr_4)$ dengan $|W| = 3$bukanmerupakanhimpunanpembedakarenaselaluterdapat 2 titikpadagrafPr_4 yang mempunyai representasi sama terhadap himpunan W tersebut.

Sehingga himpunan $W \subset V(Pr_4)$ dengan $|W| = 3$ bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf Pr_4. TerbuktibahwaW= $\{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf Pr_4 dan $cr(Pr_4) = 4$. ■

Lemma 2.9$cr(Pr_5) = 4$

Bukti: Dipilihhimpunan$W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\} \subset V(Pr_5)$dantitik-titikpada$W$ tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_5. Representasisetiaptitik di Pr_5 terhadap himpunan W diberikan pada Lampiran 4. Karena representasi setiap titik di Pr_5terhadap himpunan W berbeda maka himpunan $W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung darigrafPr_5. Selanjutnyadibuktikanuntukhimpunan $W \subset V(Pr_5)$ dengan $|W| = 3$. Semua himpunan$W \subset V(Pr_5)$ dengan $|W| = 3$ mempunyai karakterisasi yang sama seperti himpunan $W \subset V(Pr_4)$ dengan $|W| = 3$. Karena himpunan $W \subset V(Pr_4)$ dengan $|W| = 3$ bukan merupakan himpunan pembeda terhubungdariPr_4 maka himpunan $W \subset V(Pr_5)$ dengan $|W| = 3$ juga bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf Pr_5. Jaditerbuktibahwahimpunan$W = \{u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf Pr_5 dan $cr(Pr_5) = 4$. ■

Lemma 2.10$cr(Pr_6) = 5$

Bukti: Dipilihhimpunan$W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44} u_{51}\} \subset V(Pr_6)$dantitik-titikpada$W$ tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_6. Representasisetiaptitik di Pr_6 terhadap himpunan W diberikan pada Lampiran 4. Karena representasi setiap titik di Pr_6 terhadap himpunan Wberbedamakahimpunan$W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44,} u_{51}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubungdarigrafPr_6. Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan $W \subset V(Pr_6)$, dengan$|W| = 4$. Berdasarkan Lampiran 3, semua himpunan $W \subset V(Pr_6)$ dengan $|W| = 4$bukanmerupakanhimpunanpembedakarenaselaluterdapat 2 titikpadagrafPr_6 yang mempunyai representasi sama terhadap himpunan W tersebut. Sehingga himpunan $W \subset V(Pr_6)$ dengan $|W| = 4$ bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf Pr_6. Jadi terbukti bahwahimpunan$W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44,} u_{51}\} \subset V(Pr_6)$merupakanhimpunanpembedater hubung minimal darigrafPr_6 dan terbukti bahwa $cr(Pr_6) = 5$.■

Lemma 2.11$cr(Pr_7) = 5$

Bukti: Dipilihhimpunan$W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44} u_{51}\} \subset V(Pr_7)$dantitik-titikpada$W$ tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_7. Representasisetiaptitik di Pr_7 terhadap himpunan W diberikan pada Lampiran 4. Karena representasi setiap titik di Pr_7 terhadap himpunan W berbeda maka himpunan$W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44,} u_{51}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf Pr_7. Selanjutnya dibuktikan untuk himpunan $W \subset V(Pr_7)$, dengan$|W| = 4$. Semua himpunan $W \subset V(Pr_7)$ dengan $|W| = 4$ mempunyai karakterisasi yang samasepertihimpunan$W \subset V(Pr_6)$ dengan $|W| = 4$. Karena himpunan $W \subset V(Pr_4)$ dengan $|W| = 4$ bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari Pr_4 maka himpunan $W \subset V(Pr_7)$ dengan $|W| - 4$ juga bukan merupakan himpunan pembeda terhubung dari graf Pr_7. Jaditerbuktibahwahimpunan$W = \{u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44,} u_{51}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf Pr_7 dan $cr(Pr_7) = 5$.■

Dari Lemma 2.5 sampaidengan Lemma 2.11dapatdisimpulkanbahwa,bilanganpembedadarigrafpiramidaPr_n untuk $n \leq 7$ adalah,

$$cr(Pr_n) = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, \text{untuk } n = 1,3,5, \text{dan } 7 \\ \frac{n}{2} + 2, \text{untuk } n = 2,4, \text{dan } 6 \end{cases}$$

SelanjutnyadidapatkankonjekturbilanganpembedaterhubungdarigrafpiramidaPr_n untuk $n \in \mathbb{N}$, yaitu:

Konjektur 2.12 BilanganpembedaterhubungdarigrafpiramidaPr_n dengan $n \leq 7$ adalah,

$$cr(Pr_n) = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, \text{untuk } n \text{ gasal} \\ \frac{n}{2} + 2, \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

denganhimpunanpembedaterhubungminimalnyaadalah,

$$W = \begin{cases} \{u_{\frac{n+1}{2},1}, \quad u_{\frac{n+1}{2},2}, \quad \ldots, u_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}, u_{\frac{n+3}{2},1}\}, \text{untuk } n \text{ gasal} \\ \{u_{\frac{n}{2}+1,1}, \quad u_{\frac{n}{2}+1,2}, \quad \ldots, u_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1}, u_{\frac{n}{2}+2,1}\}, \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Setelahmenentukan$cr(Pr_n)$, untuk $n \leq 7$, selanjutnya disajikan beberapa lemma untuk bilangan pembeda terhubung dari graf piramida terpancung Pr_c^m.

Lemma 2.13$cr(Pr_1^1) = 2$

Bukti: Dipilihhimpunan$W = \{u_{21}, u_{31}\} \subset V(Pr_1^1)$dantitik-titikpada$W$ tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_1^1. Representasi setiap titik di Pr_1^1 terhadap himpunan W sebagai berikut:

$r(u_{21}|W = (0,1)$ $\qquad$ $r(u_{32}|W = (1,1)$
$r(u_{22}|W = (1,2)$ $\qquad$ $r(u_{33}|W = (2,2)$
$r(u_{31}|W = (1,0)$

Karenarepresentasisetiaptitik di Pr_1^1 terhadap himpunan W tersebut berbeda dan subgraf dari Pr_1^1 yang terinduksi oleh W adalah subgraf terhubung maka himpunan W tersebut merupakan himpunan pembeda terhubung dari Pr_1^1. Berdasarkan Lemma 2.3.3, himpunan$W$ tersebut merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari Pr_1^1 dan terbukti bahwa $cr(Pr_1^1) = 2$.■

Lemma 2.14$cr(Pr_1^2) = 2$.

Bukti: Dipilihhimpunan$W = \{u_{31}, u_{41}\} \subset V(Pr_1^2)$ dan titik-titik pada W tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_1^2. Representasi setiap titik di Pr_1^2 terhadap himpunan W sebagai berikut:

$r(u_{31}|W = (0,1)$
$r(u_{32}|W = (1,2)$
$r(u_{33}|W = (2,3)$
$r(u_{41}|W = (1,0)$
$r(u_{42}|W = (1,1)$
$r(u_{43}|W = (2,2)$
$r(u_{44}|W = (3,3)$

Karenarepresentasisetiaptitik di Pr_1^2 terhadap himpunan W tersebut berbeda dan subgraf dari Pr_1^2 yang terinduksi oleh W adalah subgraf terhubung maka himpunan W tersebutmerupakanhimpunanpembedaterhubungdariPr_1^2. Berdasarkan Lemma 2.3.3, karenaPr_1^2 bukan merupakan graf lintasan maka himpunan$W$ tersebut merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari Pr_1^1 dan terbukti bahwa $cr(Pr_1^2) = 2$.■

Lemma 2.15$cr(Pr_2^1) = 3$.

Bukti: Dipilihhimpunan$W = \{u_{21}, u_{22}, u_{33}\} \subset V(Pr_2^1)$ dan titik-titik pada W tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_2^1. Karena$V(Pr_2^1) \subset V(Pr_3)$, berdasarkan Lemma 4.3.4, maka $W = \{u_{21}, u_{22}, u_{33}\}$ merupakan hipunan pembeda terhubungdariPr_2^1. Diambil sebaranghimpunan$W \subset V(Pr_2^1)$ dengan $|W| = 2$ dan titik-titik pada W tersebut membangun subgraf terhubung dari Pr_2^1. Semua kombinasi himpunan W tersebut selalu beranggotakan tepat satu titik ujung dan titik-titik segaris dengannya ataudtitik-titiksegaris yang tidakmemuattitikujung. Berdasarkan Lemma 4.3.1 dan Lemma 4.3.2, himpunan$W = \{u_{21}, u_{22}, u_{31}\}$ merupakan himpunan pembeda terhubung minimal dari graf Pr_2^1 dan terbukti bahwa $cr(Pr_2^1) = 3$.■

Dari Lemma 2.13, Lemma 2.14, dan Lemma 2.15dapatdisimpulkanbahwabilanganpembedaterhubungdarigrafpiramidaterpancung Pr_c^muntuk$n = 2$ dan 3 adalah,

$$cr(Pr_c^m) = \begin{cases} c+1, \text{untuk } c > m \\ cr(Pr_n), \text{untuk } c \leq m \end{cases}$$

SelanjutnyadidapatkankonjekturbilanganpembedaterhubungdarigrafpiramidaterpancungPr_c^m untuk $c, m \in \mathbb{N}$, yaitu:

Konjektur

2.16 BilanganpembedaterhubungdarigrafpiramidagrafpiramidaterpancungPr_c^m adalah,

$$cr(Pr_c^m) = \begin{cases} c+1, \text{untuk } c > m \\ cr(Pr_n), \text{untuk } c \leq m \end{cases}$$

denganhimpunanpembedaterhubungnya,

$$W = \begin{cases} \{u_{m+1,1}, \quad u_{m+2,2}, \quad \ldots, u_{m+1,m+1}\}, \text{untuk } c > m \\ \text{himpunan pembeda terhubung minimal dari } Pr_n, \text{untuk } c \leq m \end{cases}$$

3. Kesimpulan

1. Graf piramida Pr_n dengan $V(Pr_n)$ = $\{u_{ij},\ i$ =1,2,3,…,n+1dan $j = 1,2,3,\dots,i\}$ dan $E(Pr_n)$ = $\{u_{ij}u_{kl},\ i$ =1,2,3,…,n+1, j =1,2,3,…,i dan $k - i, i+1,\ l - j, j+1,\ k \leq n+1,\ u_{ij} \neq u_{kl}\}$. Dimensi metrik dari grafpiramida Pr_n adalah 2danbasisnyaadalah $\{u_{11}, u_{(n+1),1}\}$.
2. Graf piramidaterpancung Pr_c^m dengan $V(Pr_c^m)$ =$\{u_{ij}, i = m$+1,m+2,…,n+1dan $j = 1,2,\dots,i\}$dan$E(Pr_c^m)$ = $\{u_{ij}u_{kl},\ i = m$+1, m+2,m+3,…,n+1, j =1,2,3,…,i dan $k = i, i$+1, $l = j, j$+1, $l \leq k \leq n$+1, $u_{ij} \neq u_{kl}\}$. Dimensi metrik dari grafpiramidaterpancung Pr_c^m adalah 2danbasisnyaadalah $\{u_{(m+1),1}, u_{(n+1),1}\}$.
3. Bilanganpembedaterhubungdarigrafpiramida Pr_n dengan $n \leq 7$ adalah,

$$cr(Pr_n) = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, \text{untuk } n \text{ } gasal \\ \frac{n}{2} + 2, \text{untuk } n \text{ } genap \end{cases}$$

4. Bilanganpembedaterhubungdarigrafpiramidaterpancung Pr_c^m untuk $n = 2$ dan 3 adalah,

$$cr(Pr_c^m) = \begin{cases} c+1, \text{untuk } c > m \\ cr(Pr_n), \text{untuk } c \leq m \end{cases}$$

4. DaftarPustaka

[1] Baskoroputro, Herolistra.,*DimensiMetrikdanBilanganPembedaTerhubungdariAmalgamasi-SisiSiklus*. Matematika, InstitutTeknologi Bandung, Bandung, 2009.

[2] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson M.A., danOellermann, O.R., *Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph*, Discrete Appl. Math., 105: 5 – 7, 2000.

[3] Chartrand, G. danLesniak, L., *Graphs and Digraph*, 3rd ed., Chapman & Hall, Florida, pp. 1-16, 2000.

[4] Grunbaum, B. danShephard, G.C., *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman and Company, Newyork, pp. 58-64, 2007.

[5] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Salman, A.N.M., danSimanjutak, R., *The Resolving Graph of Amalgamation of Cycles*, An International Journal of Discrete and Combinatorial Mathematics. UtilitasMathematica, 83, 2010.

[6] Low, R.M. dan Lee, S.M., *On the integer-magic spectra of tessellation graphs*, Australian Journal of Combinatorics, 34: 195-210, 2004.

[7] Manuel, P., Rajan, B., Rajasingh, I., dan M., Chris, *On minimum metric dimension of honeycomb networks*, Journal of Discrete Algorithms, 6: 20-27, 2000.