ISSN : 1412 - 72818

Volume 2
Nomor 1, Januari - Juli 2013

JURNAL MATEMATIKA

Journal of Mathematics

Jurnal Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga
Jl.Mulyorejo Kampus C UNAIR, Surabaya-Indonesia
telp : +62-31-592 36501
Kode Pos : 60115
Fax : +62-31-592 36502, +62-31-592 36503
E-mail : math@fst.unair.ac.id

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga
Surabaya, Indonesia

DAFTAR ISI

Bilangan Dominasi Lokasi Metrik pada Graf Kisi

Ratnaning Palupi, Liliek Susilowati,Nenik Estuningsih & Hazrul Iswadi

DepartemenMatematikaFakultasSainsdanTeknologi

UniversitasAirlangga

ratnaning.palupi@yahoo.com

Abstract. For an ordered set$W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ of vertices and a vertex v in a connected graph G, the representation of v with respect to W is the ordered k-tuple $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), d(v, w_3), \dots, d(v, w_k))$, where $d(x, y)$ represents the distance between the vertices x and y. The set W is called a locating set for G if every vertex of G has a distinct representation. A set W is a dominating set of G if every vertex in $V(G) - W$ is adjacent to a vertex of W. A dominating set W is a metric-locating-dominating set, or an MLD-set, if W is both a dominating set and a locating set in G. The metric location domination number $\gamma_M(G)$ of G is the minimum cardinality of an MLD-set in G. The purpose of this paper is to find the metric location domination of grid graph. A grid graph is defined as a cartesian product of two path graphs $P_m \times P_n$. The results are metric location domination number for each$m = 4$ and $n = 4, 7, 10, 13$ is $4, 7, 10, 13$ and for $m = n = 7$is 12. Moreover, we found a conjecture that a metric location domination for $m = 3k + 1$ and $n = 3l + 1$is $k + 2kl + l$.

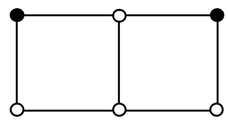
Keywords:*grid graph, metric location domination number, and metric locating dominating set.*

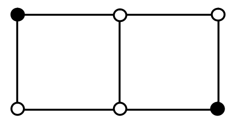
5 Latar Belakang

Graf G didefinisikan sebagai himpunantitik tak kosong$V(G)$dan himpunangaris $E(G)$yang menghubungkanduatitiktak terurut pada$V(G)$. Kardinalitas $V(G)$, dinotasikan dengan $n(G)$ disebut ordo dari graf G. Graf G disebut graf sederhana jika setiap garis pada graf G menghubungkan dua titik yang berbeda dan setiap dua titik yang berbeda di graf G hanya dihubungkan oleh satu garis. Graf G dikatakan terhubung jika setiap dua titik u dan v di graf G selalu terdapat lintasan yaitu barisan selang-seling titik dan garis yang menghubungkan u dengan v. Pada makalah ini, graf G yang ditinjau adalah graf sederhana dan terhubung. Istilah dan notasi yang digunakan pada makalah ini mengacu pada Chartrand dan Lesniak (1996).

Jarak antara dua titik u dan v dinotasikan $d(u,v)$ di suatu graf terhubung G adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v di G. Misalkan $v \in V(G)$. Representasi dari v terhadap W di G adalah vektor dengan k unsur $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), d(v, w_3), \dots, d(v, w_k))$ dengan komponennya adalah jarak dari v ke semua titik di W. Himpunan W disebut dengan himpunan pelokasian untuk G jika $r(u|W) = r(v|W)$ maka $u = v$ untuk semua u, v di G. Himpunan $W \subseteq V(G)$ disebut himpunan pendominasi dari G jika setiap titik di $V(G) - W$ bertetangga dengan minimal sebuah titik dari W. Bilanganpendominasi$\gamma(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan pendominasi pada G. Pada Gambar 1, titik-titik berwarna hitam merupakan salah satu himpunan pendominasi pada graf $P_3 \times P_2$, sedangkan pada Gambar 2 titik-titik berwarna hitam merupakan salah satu himpunan pelokasian pada graf $P_3 \times P_2$.

Gambar 1 Himpunan pendominasi pada graf **Gambar**





Gambar 2 Himpunan pelokasian pada graf **Gambar**

Henning dan Oellermann menggabungkan konsep himpunan pendominasi dan himpunan pelokasian menjadi konsep himpunan pendominasi pelokasian metrik (Henning dan Oellermann, 2004). Himpunan-MLD W di graf terhubung G adalah himpunan titik-titik dari G yang bersifat sebagai himpunan pelokasian dan himpunan pendominasi di G. Bilangan dominasi lokasi metrik $\gamma_M(G)$ dari G adalah kardinalitas minimum dari suatu himpunan-MLD di G.

Makalah ini membahas penentuan bilangan dominasi lokasi metrik dari graf kisi $P_m \times P_n$ dengan $m = 3k + 1$ dan $n = 3l + 1$. Setiap indeks dalam pembahasan ini merupakan bilangan asli.

6 Pembahasan

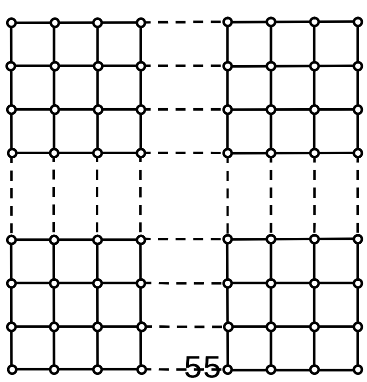
Graf kisi $P_m \times P_n$ didefinisikan sebagai suatu graf yang dibentuk dari graf P_m dan P_n dengan himpunan titik dan himpunan garisnya berturut-turut adalah

$$V(P_m \times P_n) = \{v(i,j) | i = 1, 2, 3, \ldots, m \text{ dan } j = 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

dan

$$E(P_m \times P_n) = \{v(i,j)v(i,j+1) \cup v(i,j)v(i+1,j) | v(i,j) \in V(P_m \times P_n)\}$$

dengan P_m adalah graf lintasan berordo m.



Gambar 1 Graf Kisi **Gambar**

Haynes dkk (Haynes dkk., 1998) telah menunjukkan kondisi sebuah himpunan pendominasi minimal seperti yang dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema 2.1 Sebuah himpunan pendominasi S merupakan himpunan pendominasi minimal jika dan hanya jika untuk setiap titik $u \in S$, satu dari dua kondisi berikut dipenuhi :

a. u adalah isolasi pada S

b. terdapat sebuah titik pada $V - S$ sedemikian hingga $N(v) \cap S = \{u\}$

Iswadi (2010) telah menunjukkan bahwa super himpunan dari himpunan pelokasian juga merupakan himpunan pelokasian seperti yang dinyatakan pada Lemma 2.2.

Lemma 2.2 Misal G adalah sebuah graf dan $U \subseteq V(G)$. Jika$U$ memuat sebuah himpunan pelokasian pada G sebagai himpunan bagiannya, maka Ujuga himpunan pelokasian.

Lemma 2.3$W = \{u(1,3), u(2,1), u(3,4), u(4,2)\} \subseteq V(P_4 \times P_4)$ merupakan himpunan dominasi pada graf $P_4 \times P_4$.

Bukti Jarak antar titik pada W adalah tiga. Ini artinya setiap lintasan antar titik pada W, misalkan u dan v selalu melalui dua titik yang masing-masing bertetangga dengan u atau v. Dengan demikian setiap titik dalam $V(P_4 \times P_4)$ merupakan anggota W atau bertetangga dengan minimal satu anggota W.■

Lemma 2.4$W = \{u(1,3), u(2,1), u(3,4), u(4,2)\} \subseteq V(P_4 \times P_4)$ merupakan himpunan dominasi minimal pada graf $P_4 \times P_4$.

Bukti Jarak antar titik pada W adalah tiga sehingga setiap titik pada W merupakan isolasi pada W. Jadi, berdasarkan Teorema 2.1 maka himpunan W merupakan himpunan dominasi minimal pada graf $P_4 \times P_4$. Selanjutnya himpunan W disebut sebagai himpunan $S_{1,1}$.■

Lemma2.5 Himpunan dominasi minimal pada graf $P_{3k+1} \times P_{3l+1}$ adalah gabungan dari himpunan dominasi minimal pada tiap blok, yaitu $S = \bigcup_{c=1}^{k} \bigcup_{d=1}^{l} S_{c,d}$.

BuktiBerdasarkan Lemma 2.4,$S_{1,1}$ merupakan himpunan dominasi minimal. Misalkan $S_{1,1}$ dicerminkan terhadap lintasan $u_{3i+1,1}, u_{3i+1,2}, u_{3i+1,3}, \ldots, u_{3i+1,j}$ maupun terhadap lintasan $u_{1,3j+1}, u_{2,3j+1}, u_{3,3j+1}, \ldots, u_{i,3j+1}$ dan hasil pencerminannya disebut $S'_{1,1}$ makajarakantara$S'_{1,1}$ dengan cermin akan sama dengan jarak antara $S_{1,1}$ dengan cermin. Dengan demikian, karena untuk setiap $u, v \in S_{1,1}, d(u,v) \geq 2$ maka untuksetiap$u, v \in S'_{1,1}, d(u,v) \geq 2$. Ini artinya $S'_{1,1}$ merupakan himpunan dominasi minimal.Selanjutnya, jelas bahwa setiap hasil pencerminan dari $S_{c,d}$ merupakan himpunan dominasi minimal.Setiap titik di $S_{c,d}$ selalu berjarak minimal dua dengan $S'_{c,d}$ kecuali titik yang terletak pada cermin. Dengan demikiangabungandari$S_{c,d}$ dengan $S'_{c,d}$ juga merupakan himpunan dominasi minimal yaitu

$$S = \bigcup_{c=1}^{k}\bigcup_{d=1}^{l} S_{c,d} - \left\{ \begin{matrix} u_{3p+1,3q}, p = 0,2,4,\ldots,k, q = 1,3,5,\ldots,l \\ \text{dan } p = 1,3,5,\ldots,k, q = 2,4,6,\ldots,l \end{matrix} \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{matrix} u_{3p+1,3q-1}, p = 0,2,4,\ldots,k, q = 2,4,6,\ldots,l \\ \text{dan } p = 1,3,5,\ldots,k, q = 1,3,5,\ldots,l \end{matrix} \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{matrix} u_{3p-1,3q+1}, p = 1,3,5,\ldots,k, q = 0,2,4,\ldots,l \\ \text{dan } p = 2,4,6,\ldots,k, q = 1,3,5,\ldots,l \end{matrix} \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{matrix} u_{3p,3q+1}, p = 2,4,6\ldots,k, q = 0,2,4,\ldots,l \\ \text{dan } p = 1,3,5,\ldots,k, q = 1,3,5,\ldots,l \end{matrix} \right\}$$

■

Lemma 2.6 Himpunandominasi minimal $S = \bigcup_{c=1}^{k}\bigcup_{d=1}^{l} S_{c,d}$pada graf kisi $P_{3k+1} \times P_{3l+1}$ juga merupakan himpunan pelokasian dari graf tersebut.

Bukti Berikut ini adalah representasi semua titik pada graf $P_m \times P_n$ terhadap $S_{1,1} = \{u(1,3), u(2,1), u(3,4), u(4,2)\} \subseteq S$.

- Untuk $i = 1,2,3,4$ dan $j = 1,2,3,4$

$r(u(1,1)|S_{1,1}) = (2,1,5,4)$

$r(u(1,2)|S_{1,1}) = (1,2,4,3)$

$r(u(1,3)|S_{1,1}) = (0,3,3,4)$

$r(u(1,4)|S_{1,1}) = (1,4,2,5)$

$r(u(3,1)|S_{1,1}) = (4,1,3,2)$

$r(u(3,2)|S_{1,1}) = (3,2,2,1)$

$r(u(3,3)|S_{1,1}) = (2,3,1,2)$

$r(u(3,4)|S_{1,1}) = (3,4,0,3)$

$r(u(2,1)|S_{1,1}) = (3,0,4,3)$

$r(u(2,2)|S_{1,1}) = (2,1,3,2)$

$r(u(2,3)|S_{1,1}) = (1,2,2,3)$

$r(u(2,4)|S_{1,1}) = (2,3,1,4)$

$r(u(4,1)|S_{1,1}) = (5,2,4,1)$

$r(u(4,2)|S_{1,1}) = (4,3,3,0)$

$r(u(4,3)|S_{1,1}) = (3,4,2,1)$

$r(u(4,4)|S_{1,1}) = (4,5,1,2)$

- Untuk $i = 1,2,3,4$ dan $5 \le j \le 3l + 1$

$r(u(1,j)|S_{1,1}) - (j-3, j, j-2, j+1)$

$r(u(2,j)|S_{1,1}) = (j-2, j-1, j-3, j)$

$r(u(3,j)|S_{1,1}) = (j-1, j, j-4, j-1)$

$r(u(4,j)|S_{1,1}) = (j, j+1, j-3, j-2)$

- Untuk $5 \leq i \leq 3k + 1$ dan $j = 1,2,3,4$

$r(u(i,1)|S_{1,1}) = (i+1, i-2, i, i-3)$

$r(u(i,2)|S_{1,1}) - (i, i-1, i-1, i-4)$

$r(u(i,3)|S_{1,1}) = (i-1, i, i-2, i-3)$

$r(u(i,4)|S_{1,1}) = (i, i+1, i-3, i-2)$

- Untuk $5 \leq i \leq 3k+1$ dan $5 \leq j \leq 3l+1$

$r(u(i,j)|S_{1,1}) = (i+j-4, i+j-4, i+j-7, i+j-6)$

Karena representasi setiap titik $u(i,j) \in P_{3k+1} \times P_{3l+1}$ terhadap $S_{1,1}$ berbeda, maka $S_{1,1}$ merupakan himpunan pelokasian pada $P_{3k+1} \times P_{3l+1}$. Himpunan$S = \bigcup_{c=1}^{k} \bigcup_{d=1}^{l} S_{c,d}$ memuat $S_{1,1}$ sebagai himpunan bagiannya. Berdasarkan Lemma 2.2 maka S juga merupakan himpunan pelokasian. ■

Teorema 2.7 Himpunandominasi minimal $S = \bigcup_{c=1}^{k} \bigcup_{d=1}^{l} S_{c,d}$ merupakan himpunan pendominasi pelokasian metrik padagrafkisi$P_{3k+1} \times P_{3l+1}$.

Bukti Berdasarkan Lemma2.5 dan Lemma2.6, $S = \bigcup_{c=1}^{k} \bigcup_{d=1}^{l} S_{c,d}$ merupakan himpunan dominasi minimal sekaligus himpunan pelokasian. Dengan demikian, $S = \bigcup_{c=1}^{k} \bigcup_{d=1}^{l} S_{c,d}$ merupakan himpunan dominasi lokasi metrik.■

Teorema 2.8$\gamma_M(P_4 \times P_4) = 4$

Bukti Andaikan$\gamma_M(P_4 \times P_4) < 4$. Misalkan $\gamma_M(P_4 \times P_4) = 3$. Berikut adalah kombinasi posisi dari titik dominasi yaitu pada titik ujung, titik tepi atau titik tengah dan banyaknya titik dominasi pada posisi tersebut dengan asumsi bahwa untuk setiap titik dominasi u dan v maka $N(u)$ dan $N(v)$ tidak saling beririsan.

Tabel 1 Kombinasi posisi titik dominasi pada graf 1

Titik Tengah	Titik Tepi	Titik Ujung	Keterangan

3	0	0	Berdasarkan Observasi 6, kombinasi ini tidak memenuhi himpunan dominasi minimal karena semua titik ujung tidak terdominasi.
2	1	0	Berdasarkan Observasi 6, kombinasi ini tidak memenuhi himpunan dominasi minimal karena terdapat tiga titik ujung yang tidak terdominasi.
2	0	1	Berdasarkan Observasi 6, kombinasi ini tidak memenuhi himpunan dominasi minimal karena terdapat tiga titik ujung yang tidak terdominasi.
1	2	0	Berdasarkan Observasi 6, kombinasi ini tidak memenuhi himpunan dominasi minimal karena terdapat dua titik ujung yang tidak terdominasi.
1	1	1	Berdasarkan Observasi 6, kombinasi ini tidak memenuhi himpunan dominasi minimal karena terdapat dua titik ujung yang tidak terdominasi.

Titik Tengah	**Titik Tepi**	**Titik Ujung**	**Keterangan**
1	0	2	Berdasarkan Observasi 6, kombinasi ini tidak memenuhi himpunan dominasi minimal karena terdapat dua titik ujung yang tidak terdominasi.
0	3	0	Berdasarkan Observasi 6, kombinasi ini tidak memenuhi himpunan dominasi minimal karena terdapat satu titik ujung yang tidak terdominasi.
0	2	1	Berdasarkan Observasi 6, kombinasi ini tidak memenuhi himpunan dominasi minimal karena terdapat satu titik ujung yang tidak terdominasi.
0	1	2	Berdasarkan Observasi 6, kombinasi ini tidak memenuhi himpunan dominasi minimal karena terdapat satu titik ujung yang tidak terdominasi.
0	0	3	Berdasarkan Observasi 6, kombinasi ini tidak memenuhi himpunan dominasi minimal karena terdapat satu titik ujung yang tidak terdominasi.

Karenatidakadakombinasitigatitikpada$P_4 \times P_4$ yang memenuhi kriteria himpunan dominasi minimal maka sebuah himpunan dengan kardinalitas tiga pada $P_4 \times P_4$ bukan himpunan dominasi. Dengan demikian pengandaiansalahsehinggaterbuktibahwa$\gamma_M(P_4 \times P_4) = 4$.■

Dengan cara yang sama akan diperoleh beberapa teorema berikut.

Teorema 2.9 $\gamma_M(P_4 \times P_7) = 7$

Teorema 2.10 $\gamma_M(P_4 \times P_{10}) = 10$

Teorema 2.11 $\gamma_M(P_4 \times P_{13}) = 13$

Teorema 2.12 $\gamma_M(P_7 \times P_7) = 12$

Teorema 2.13 $\gamma_M(P_7 \times P_{10}) = 17$

Teorema 2.14 $\gamma_M(P_7 \times P_{13}) = 22$

Teorema 2.15 $\gamma_M(P_{10} \times P_{10}) = 24$

Teorema 2.16 $\gamma_M(P_{10} \times P_{13}) = 31$

Selanjutnya untuk graf $P_{3k+1} \times P_{3l+1}$ diperoleh sebuah konjektur sebagai berikut.

Konjektur 2.17 $\gamma(P_{3k+1} \times P_{3l+1}) = k + 2kl + l$

7 Kesimpulan

Himpunan dominai lokasi metrik pada graf $P_{3k+1} \times P_{3l+1}$ adalah

Himpunan dominai lokasi metrik pada graf $P_{3k+1} \times P_{3l+1}$adalah

$$S = \bigcup_{c=1}^{k} \bigcup_{d=1}^{l} S_{c,d} = \left\{ \begin{matrix} u_{3p+1,3q}, p = 0, 2, 4, \ldots, k, q = 1, 3, 5, \ldots, l \\ \text{dan } p = 1, 3, 5, \ldots, k, q = 2, 4, 6, \ldots, l \end{matrix} \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{matrix} u_{3p+1,3q-1}, p = 0, 2, 4, \ldots, k, q = 2, 4, 6, \ldots, l \\ \text{dan } p = 1, 3, 5, \ldots, k, q = 1, 3, 5, \ldots, l \end{matrix} \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{matrix} u_{3p-1,3q+1}, p = 1, 3, 5, \ldots, k, q = 0, 2, 4, \ldots, l \\ \text{dan } p = 2, 4, 6, \ldots, k, q = 1, 3, 5, \ldots, l \end{matrix} \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{matrix} u_{3p,3q+1}, p = 2, 4, 6, \ldots, k, q = 0, 2, 4, \ldots, l \\ \text{dan } p = 1, 3, 5, \ldots, k, q = 1, 3, 5, \ldots, l \end{matrix} \right\}$$

Beberapa bilangan dominasi lokasi metrik pada graf kisi yaitu $\gamma_M(P_4 \times P_4) = 4$, $\gamma_M(P_4 \times P_7) = 7$, $\gamma_M(P_4 \times P_{10}) = 10$, $\gamma_M(P_4 \times P_{13}) = 13$, $\gamma_M(P_7 \times P_7) = 12$, $\gamma_M(P_7 \times P_{10}) = 17$, $\gamma_M(P_7 \times P_{13}) = 22$, $\gamma_M(P_{10} \times P_{10}) = 24$, $\gamma_M(P_{10} \times P_{13}) = 31$.

Dari hasil di atas, diperoleh konjektur sebagai berikut.

$$\gamma_M(P_{3k+1} \times P_{3l+1}) = k + 2kl + l$$

8 Daftar Pustaka

[10] Chartrand, G. danLesniak, L., *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall / CRC, New York, 1996.

[11] Dreyer, P. A., *Applications and Variations of Domination in Graphs*, New Brunswick, New Jersey, 2000.

[12] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., dan Peter J. S., *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc, New York, 1998.

[13] Iswadi, H., Baskoro, E. T., Salman A. N. M., dan Simanjuntak, R., *The Resolving Graph of Amalgamation of Cycles*, An International Journal of Discrete and Combinatorial Mathematics, Utilitas Mathematica 83, 2010.

[14] Iswadi, H., Batas Atas Bilangan Dominasi Lokasi Metrik dari Graf Hasil Operasi Korona, Universitas Surabaya, Surabaya, 2011.

[15] Sukma, I. A., *Pelabelan-α pada Graf Grid Dimensi Dua dan Dimensi Tiga*, Minor Tesis, Universitas Brawijaya, Malang, 2011.