



*Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos,  
Canales y Puertos.*  
**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**



# **Modelado numérico de la interacción vehículo-estructura y aplicación al estudio de puentes atirantados frente al tráfico vehicular**

Trabajo realizado por:

***Moisés Álvarez Cuesta***

Dirigido:

***Óscar Ramón Ramos Gutiérrez***

Titulación:

**Máster Universitario en  
Ingeniería de Caminos, Canales y  
Puertos**

Santander, julio de 2019

**TRABAJO FIN DE MASTER**



Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales  
y Puertos de Santander

Trabajo Fin de Máster

---

**Modelado numérico de la interacción  
vehículo-estructura y aplicación al  
estudio de puentes atirantados frente al  
tráfico vehicular**

---

Titulación: Máster Universitario en Ingeniería de Caminos, Canales y  
Puertos

Autor: Moisés Álvarez Cuesta

Tutor: Óscar Ramón Ramos Gutiérrez

Julio del 2019

# Modelado numérico de la interacción vehículo-estructura y aplicación al estudio de puentes atirantados frente al tráfico vehicular

---

AUTOR: MOISÉS ÁLVAREZ CUESTA\*  
DIRECTOR: ÓSCAR RAMÓN RAMOS GUTIÉRREZ

CONVOCATORIA: JULIO DEL 2019

*Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.  
Universidad de Cantabria. Avda. de los Castros, s/n, 39005, Santander, Cantabria*

*\*Email: moises.alvarez@alumnos.unican.es*

---

**Resumen:** El presente estudio porta sobre el problema de interacción vehículo-estructura, que considera la alteración de las propiedades dinámicas de los dos subsistemas (estructura y vehículos) por los efectos recíprocos entre ambos. Convencionalmente, la investigación aplicada al proyecto de estructuras se centraba en la determinación del factor de impacto, definido como el porcentaje de mayoración de la respuesta estática de la estructura al considerar los efectos inerciales y viscosos que se generan. Generalmente, el efecto del tráfico vehicular se modeliza mediante cargas móviles, por lo que no se tiene en cuenta la interacción. Este tipo de análisis resulta válido para analizar la respuesta de gran parte de los puentes convencionales, aunque no aporta ninguna información sobre la dinámica vehicular ni sobre el confort de tránsito del pasajero. En el caso de que el confort de tránsito sea un parámetro crítico de diseño o en el proyecto de estructuras en las que la masa de la sobrecarga de tráfico sea significativa frente al peso propio del tablero, se hace indispensable la modelización de la interacción vehículo-estructura. La complejidad de las ecuaciones acopladas de los dos subsistemas (vehículo y estructura) obliga al recurso a métodos numéricos. Por ello, se ha desarrollado un programa de elementos finitos en el plano que permite, entre otros, resolver problemas de interacción vehículo-estructura considerando la presencia de un pavimento rugoso. El programa es ampliamente validado mediante soluciones analíticas y semi-analíticas presentes en la literatura para casos simples y mediante el programa Sofistik en estructuras más complejas. Posteriormente se aplica al estudio de puentes atirantados mediante un análisis paramétrico en el que se hace variar la masa y el espaciamiento de los vehículos, la rugosidad del firme, la inercia del tablero, la vinculación pila-tablero y la configuración del sistema de atirantamiento. La respuesta de los global del sistema vehículo-estructura es evaluada mediante factores de impacto de esfuerzos y desplazamientos y mediante el nivel de confort de tránsito obtenido a partir de la serie temporal de aceleraciones en la cabina de los vehículos.

**Palabras clave:** Dinámica de estructuras, interacción vehículo-estructura, puentes atirantados

## Introducción

La respuesta dinámica de los puentes ante cargas móviles comienza a estudiarse en la mitad del siglo XIX gracias a los trabajos de Willis (1849) y Stokes (1849) a partir del colapso del puente de Chaster en Inglaterra en 1847. En estos primeros estudios los efectos inerciales de la viga son despreciados y el vehículo se modela como una masa concentrada que se desplaza a velocidad constante. La gran complejidad del problema unida a los recursos computacionales inexistente de la época dificultó la resolución de casos realistas, pero la contribución de estos autores fue esencial a la hora de sentar las bases teóricas del problema de interacción.

Unas décadas después, Timoshenko (1922) estudió el problema de vigas simples bajo cargas móviles despreciando la inercia de los vehículos. Los trabajos de Inglis (1934) y Lowan (1935) también contribuyeron al estado del arte. En las últimas décadas, la investigación de este fenómeno ha aumentado notablemente gracias al éxito del transporte ferroviario en algunos países europeos y en Japón. Asimismo, el desarrollo de los ordenadores personales permitió la creación de modelos más complejos y realistas de estructuras y vehículos. Los textos generales de Timoshenko (1955) en dinámica de estructuras ya trataron el problema de las cargas móviles. Fryba (1987) analizó la vibración de estructuras bajo cargas ferroviarias. Por otro lado Genin et al. (1975) estudiaron las vibraciones de interacción tren-vía y Taheri et al. (1990) se centraron en la respuesta de placas bajo cargas móviles mediante el método de los elementos finitos. Yang et al. (2004), sentaron las bases de cálculo de interacción dinámica y propusieron una formulación para considerar los efectos centrífugos en vigas curvas.

En este estudio se recurre a la modelización de la interacción mediante el método propuesto por Yang et al. (2004). Esta técnica consiste en el planteamiento de un sistema de ecuaciones dinámicas acopladas del sistema vehículo-estructura mediante las fuerzas de contacto o de interacción.

Por otro lado, la escasez de estudios sobre el desempeño dinámico de las diferentes configuraciones usuales utilizadas en el proyecto de puentes atirantados frente al tráfico vehicular, así como la búsqueda de las causa de determinadas vibraciones observadas en algunas auscultaciones; han motivado el tema de aplicación del presente trabajo final de máster.

## Modelado de la interacción vehículo-estructura

El problema más simple de interacción vehículo-estructura se muestra en la figura 0.1. Consiste en el paseo de un oscilador de un grado de libertad sobre una viga biapoyada bajo la hipótesis de no despegue del punto de contacto. El equilibrio dinámico del sistema global puede escribirse mediante un sistema de ecuaciones desacoplado que comprenda el equilibrio de la estructura y de los vehículos o mediante un sistema de ecuaciones que tenga en cuenta el acoplamiento entre los dos subsistemas. Se escoge el segundo método pues es más eficiente al conservar el ancho de banda del sistema global.

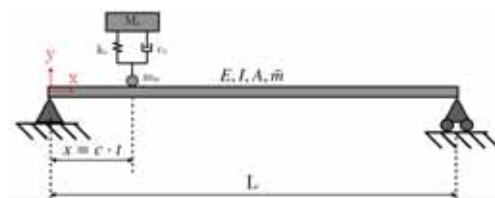


Figura 0.1: Modelo de masas suspendidas móviles

Tras la formulación del equilibrio dinámico

co de la estructura mediante la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, se obtienen sus matrices de masa  $\underline{M}$ , amortiguamiento  $\underline{C}$  y rigidez  $\underline{K}$ . La particularidad del método de cálculo consiste en la determinación de las fuerzas de interacción. Para ello, se deben considerar el equilibrio dinámico del vehículo separando los grados de libertad de contacto con la estructura (subíndice 1) de los libres (subíndice 2):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_v & 0 \\ 0 & m_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_v & -c_v \\ -c_v & c_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_1 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_v & -k_v \\ -k_v & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(M_v + m_w)g + f_c \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (0.1)$$

Resolviendo incrementalmente la parte del vehículo que no contacta con el firme (primera línea de la ecuación 0.1), se obtiene:

$$\begin{aligned} M_v \ddot{z}_{2,t+\Delta t} + c_v \dot{z}_{2,t+\Delta t} + k_v z_{2,t+\Delta t} &= \\ &= c_v \dot{z}_{1,t+\Delta t} + k_v z_{1,t+\Delta t} \end{aligned} \quad (0.2)$$

Aplicando el método de Newmark al grado de libertad superior y tras diversas manipulaciones se obtiene:

$$\Delta z_2 = \Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) \quad (0.3)$$

Dónde:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= M_v \frac{1}{\beta \Delta t^2} + c_v \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + k_v \\ q_{2,c} &= c_v \dot{z}_{1,t+\Delta t} + k_v z_{1,t+\Delta t} \\ q_{2,t} &= -M_v \left[ -\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{z}_{2,t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{z}_{2,t} \right] - \\ & c_v \left[ \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{z}_{2,t} + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \Delta t \right) \Delta t \ddot{z}_{2,t} \right] - \\ & - k_v z_{2,t} \end{aligned} \quad (0.4)$$

Los desplazamientos de la parte superior del vehículo en el instante  $t + \Delta t$  tras la aplicación del esquema de Newmark son:

$$\begin{aligned} z_{2,t+\Delta t} &= z_{2,t} + \Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) \\ \dot{z}_{2,t+\Delta t} &= \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{z}_{2,t} + \\ & \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{z}_{2,t} \\ \ddot{z}_{2,t+\Delta t} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) - \\ & - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{z}_{2,t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{z}_{2,t}] \end{aligned} \quad (0.5)$$

Sustituyendo las expresiones precedentes en la ecuación de gobierno de la parte inferior del vehículo (línea 1 de la ecuación matricial 0.1), se obtiene, tras varias manipulaciones, la expresión siguiente de las fuerzas de contacto:

$$\begin{aligned} f_{c,t+\Delta t} &= m_w \ddot{z}_{1,t+\Delta t} + c_c \dot{z}_{1,t+\Delta t} + \\ & k_c z_{1,t+\Delta t} + q_{c,t} + (M_v + m_w)g_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (0.6)$$

Se aprecia como la fuerza de contacto en el instante  $t + \Delta t$  no sólo depende de la respuesta en ese instante sino también en el instante precedente. Aplicando la condición de contacto rueda-estructura, se pone de manifiesto el acoplamiento de los dos sistemas:

$$z_1(t) = u(x_c, t) + r(x_c) \quad (0.7)$$

Dónde  $u(x_c, t)$  son los desplazamientos en el punto de contacto y  $r(x_c)$  la rugosidad. Teniendo en cuenta la desratización por elementos finitos, siendo  $\underline{N}^T(\xi_c(x_c))$  los factores de interpolación del elemento  $\xi$  en el punto de contacto y denotando  $\partial/\partial x = (')$ ; se escribe la condición de contacto en desplazamientos, velocidades y aceleraciones por derivación sucesiva de la ecuación 0.7. Se desprecian los términos de la aceleración centrípeta y de Co-

riolis y se considera un movimiento rectilíneo uniforme:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \underline{U}_c + r(x_c) \\ \dot{z}_1(t) &= \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \dot{\underline{U}}_c + r'(x_c)c \\ \ddot{z}_1(t) &= \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \ddot{\underline{U}}_c + r''(x_c)c^2 \end{aligned} \quad (0.8)$$

Dónde  $c$  es la velocidad del vehículo y  $\underline{U}_c$  los desplazamientos en el elemento de contacto.

Incluyendo la condición anterior en la ecuación de las fuerzas de contacto 0.7, se obtiene la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} f_{c,t+\Delta t} &= m_w \underline{N}_v^T(\xi(x_c)) \ddot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} + \\ &+ c_c \underline{N}^T(\xi(x_c)) \dot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} + \\ &+ k_c \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \underline{U}_{c,t+\Delta t} + \\ &+ q_{c,t} + (M_v + m_w)g_{t+\Delta t} + \\ &+ m_w r''(x_c)c^2 + c_c r'(x_c)c + k_c r(x_c) \end{aligned} \quad (0.9)$$

Para obtener las fuerzas nodales creadas por el vehículo atravesando el elemento  $c$ , y tras aplicación del PTV, se debe pre-multiplicar las fuerzas de contacto por el vector de funciones de interpolación ligadas a los gdl verticales ( $\underline{N}_v$ ) en el punto de contacto:

$$\begin{aligned} V_{c,t+\Delta t} &= \underline{N}(\xi_c(x_c)) f_{c,t+\Delta t} = \underline{M}_c^* \ddot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} \\ &+ \underline{C}_c^* \dot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} + \underline{K}_c^* \underline{U}_{c,t+\Delta t} + \underline{f}_c^* \end{aligned} \quad (0.10)$$

Una vez calculadas las fuerzas de contacto en el instante  $t + \Delta t$ , se integra el comportamiento del vehículo en la ecuación dinámica de la estructura:

$$\begin{aligned} \left( \underline{M} + \underline{M}_c^* \right) \ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \left( \underline{C} + \underline{C}_c^* \right) \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} \\ + \left( \underline{K} + \underline{K}_c^* \right) \underline{U}_{t+\Delta t} = -\underline{f}_c^* \end{aligned} \quad (0.11)$$

La resolución de la ecuación 0.11 mediante un esquema de integración temporal conduce a la resolución del problema de interacción vehículo-estructura.

Por otro lado, la obtención del perfil de rugosidad  $r(x)$  se basa en la superposición de funciones sinusoidales de frecuencia angular  $\Omega_i$  (rad/s), de amplitud  $A_i$  (mm) y de desfase  $\varphi_i$ :

$$r(x) = \sum_i A_i \text{sen}(\Omega_i x - \varphi_i) \quad (0.12)$$

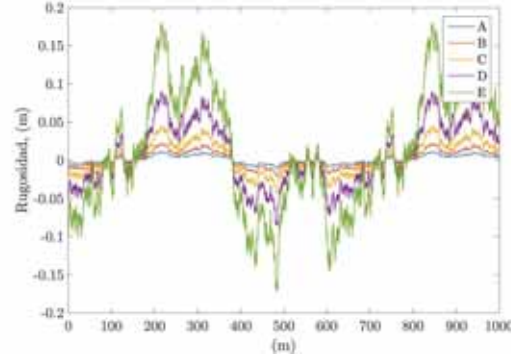


Figura 0.2: Representación espacial de los perfiles de rugosidad generados

El perfil del pavimento se define mediante una función de densidad espectral (PSD) a partir de la cual se extrae la amplitud con respecto al plano de referencia. La forma de la función PSD en el dominio de la frecuencia angular según la norma ISO 8608 es la siguiente:

$$\phi(\Omega) = \phi(\Omega_0) \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{-w} \quad (0.13)$$

Dónde:

- $\Omega = \frac{2\pi}{L}$ , en rad/m denota la frecuencia angular y  $L$  la longitud de onda. El valor de  $\Omega_0$  de referencia según la norma ISO 8608 es de 1 rad/m.
- $n = \frac{\Omega}{2\pi}$ , en ciclos/m es la frecuencia espacial, siendo  $n_0$  igual a 0,1 ciclos/m.

- $w$  es la ondulación de la superficie que según la literatura especializada toma el valor de 2.
- El valor de  $\phi(\Omega_0)$  depende del estado del pavimento.

La norma define cinco categorías de pavimento que varían desde el tipo A (estado muy bueno) hasta el tipo E (estado muy pobre). Los perfiles generados se muestran en la figura 0.2.

### Validación del modelo

El modelo desarrollado en el lenguaje Matlab/Octave es validado mediante el estudio de tres casos de complejidad creciente. En primer lugar se estudia el paseo de cargas y masas suspendidas móviles con y sin rugosidad sobre una viga biapoyada. Los resultados del caso de fuerzas móviles se comparan con la solución analítica de Frýba (1987) mientras que el modelo de masas móviles sin rugosidad es contrastado con la solución de Biggs (1964) monomodal. Cuando se analizan varias masas móviles y el efecto de la rugosidad del firme, la respuesta del sistema vehículo-estructura se valida mediante el programa Sofistik.

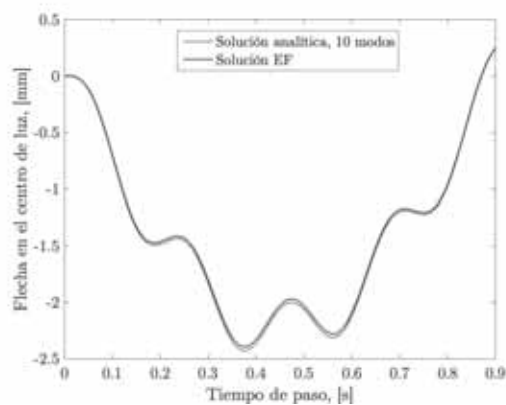


Figura 0.3: Validación mediante la solución analítica de Frýba (1987)

Posteriormente se estudia el caso de la viga sobre cimentación elástica sometida al paseo de fuerzas y masas móviles. El

último modelo de contraste es una viga atirantada por cuatro cables. El objetivo es la validación del código incluyendo en la misma modelización elementos tipo viga y barra. Se consideran en este caso el paseo de masas suspendidas sobre pavimento rugoso de tipo A y cómo resultados se obtiene la respuesta en desplazamientos y aceleraciones tanto en la estructura como en los vehículos, tal y como se muestra en la figura 0.4.

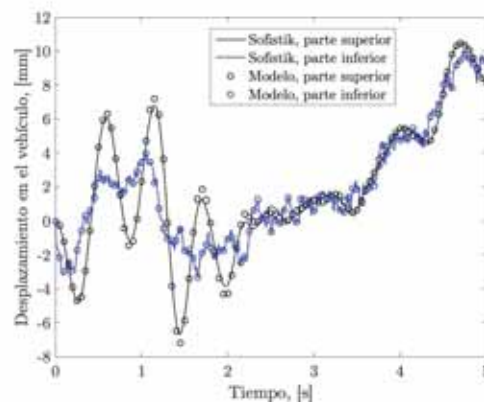


Figura 0.4: Validación mediante el programa Sofistik

### Aplicación al estudio de puentes atirantados

Una vez se ha demostrado la fiabilidad del código, se realiza un estudio paramétrico en puentes atirantados haciendo variar la masa y espaciado de los vehículos, la rugosidad del firme, la inercia del tablero, la vinculación pila-tablero y la configuración del sistema de atirantamiento. Para caracterizar la respuesta de la estructura se consideran los factores de impacto (ecuación 0.14) de desplazamientos y esfuerzos en las posiciones mostradas en la figura 0.5. También se evalúa el nivel de confort de tránsito aplicando la norma ISO 2631 *Evaluation of human exposure to whole-body vibration* a la serie temporal de aceleraciones en el vehículo.



$$FI = \frac{\max[z_d(t)]}{\max[z_e(t)]} \quad (0.14)$$

Dónde  $z_d(t)$  es la serie temporal dinámica del desplazamiento o esfuerzo  $z$  y  $z_e(t)$  es la respuesta temporal estática.

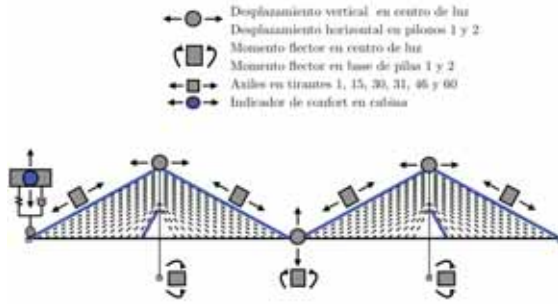


Figura 0.5: Parámetros de evaluación de la respuesta

El modelo de base utilizado en el estudio paramétrico es el mismo que en el estudio estático realizado por [Walther \(1999\)](#).

## Conclusiones

Del estudio paramétrico realizado en puentes atirantados, se extraen las siguientes conclusiones respecto del comportamiento de la estructura:

1. Del análisis de la influencia de la rugosidad del firme se comprueba que la respuesta de la estructura es independiente de éste.
2. Los efectos inerciales del paso aislado de un vehículo comienzan a ser importantes cuando el peso total del mismo supera las 40 toneladas (1% de la masa del vano central). A partir de este valor, se aprecian diferencias superiores al 6% en los factores de impacto calculados con y sin interacción. Si el modelo es elástico y lineal, el hecho de aumentar la masa del vehículo no influye de manera relevante en la respuesta

de la estructura.

3. El efecto del paso de vehículos equiespaciados obedece, globalmente, a las condiciones de resonancia y cancelación estudiadas por [Yang et al. \(2004\)](#). Sin embargo, se aprecian fenómenos locales en elementos cuya respuesta no depende del primer modo, como en los tirantes más verticales próximos a la pila. Pese a que la repetición de cargas equiespaciadas es poco probable debido al carácter aleatorio del tráfico de carretera, existen algunos niveles de servicio en los que sí podría ser posible.
4. Considerando la variación de la inercia del tablero, la asimetría de la respuesta producida por la propagación de ondas de cortante complica la interpretación de los resultados. Pese a ello, del estudio de los factores de impacto se concluye que las soluciones esbeltas son las más vulnerables.
5. El modelo de cálculo empleado, siendo plano y al no tener implementado el grado de libertad de torsión, no es adecuado para representar la influencia de la configuración transversal del sistema de atirantamiento.
6. Del estudio de la vinculación pila tablero, se pone de manifiesto que la ausencia de un punto fijo material en el puente magnifica los factores de impacto de desplazamientos y esfuerzos al concentrar la traslacionalidad de la estructura en las pilas.
7. En lo que se refiere a la configuración longitudinal del sistema de atirantamiento, los factores de impacto de desplazamientos y esfuerzos de la configuración en arpa, son inferiores, globalmente, a la configuración



---

ración en abanico y semi-arpa. La distribución de la carga que viaja por los tirantes a lo largo del fuste de los pilonos, minimiza la flexión y por consiguiente la deformabilidad vertical del tablero y los factores de impacto observados.

Por otro lado, de la aplicación de la norma ISO 2631 a la serie temporal de aceleraciones verticales registradas en los vehículos, se obtienen las siguientes conclusiones referidas al confort de tránsito:

1. El estado del pavimento influye de manera notable en la respuesta del vehículo, que llega a multiplicar por cinco el nivel de aceleraciones que sufre entre un pavimento en perfecto estado y un pavimento en estado medio de conservación, en las velocidades usuales de circulación.
2. Del estudio de la influencia de la masa de los vehículos, se observa que los vehículos ligeros en el rango de masas de las motocicletas son extremadamente sensibles a las vibraciones, alcanzando valores de  $a_w$  de  $1,2 \text{ m/s}^2$  en el rango de velocidades usuales, lo que equivale a un nivel de confort muy bajo.
3. La separación de los vehículos en su respuesta en aceleraciones comienza a ser relevante a partir de una

velocidad de 50 km/h cuando los vehículos están próximos. Sin embargo, cuando la distancia de los vehículos supera la mitad del vano central, la influencia de la interacción vehículo-estructura-vehículo comienza a ser despreciable.

4. Se aprecia una disminución considerable del nivel de confort de tránsito en secciones de tipo losa aligerada, en los que los niveles de aceleración en cabina alcanzan valores un 64 % superiores a secciones menos esbeltas. En secciones tipo cajón, no se aprecia dependencia en el grado de confort de tránsito del canto de la sección.
5. En lo referido a la configuración longitudinal del sistema de atirantamiento, las configuraciones en arpa, semi-arpa y abanico estudiadas no muestran diferencias significativas con respecto a las aceleraciones verticales medidas en los vehículos

#### **Bibliografía básica**

- Frýba, L. (1987). Dynamic interaction of vehicles with tracks and roads. *Vehicle System Dynamics*, 16(3):129-138.
- Yang, Y.B., Yau, J. and Wu, Y. (2004). *Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways* World Scientific.
- Walther, R (1999). *Cable-stayed bridges*. Thomas Telford.

# Vehicle-bridge interaction dynamics and applications to cable stayed bridges under traffic loads

---

AUTHOR: MOISÉS ÁLVAREZ CUESTA\*  
ADVISOR: ÓSCAR RAMÓN RAMOS GUTIÉRREZ

CALL: JULY 2019

*Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.  
Universidad de Cantabria. Avda. de los Castros, s/n, 39005, Santander, Cantabria*

*\*Email: moises.alvarez@alumnos.unican.es*

---

**Abstract:** this study deals with the problem of vehicle-structure interaction, which considers the interdependence of the dynamic properties of the two subsystems (structure and vehicles) due to the reciprocal effects between them. Conventionally, research applied to the design of structures focused on the determination of the impact factor, defined as the percentual amplification of the static response of the bridge when considering inertial and viscous effects. In most cases, the effect of vehicular traffic is modelled by mobile loads, so interaction is not taken into account. This type of analysis is valid for analyzing the response of most conventional bridges, although it does not provide any information on vehicle dynamics or passenger riding comfort. When traffic comfort is a critical design parameter or in the design of structures in which the mass of the traffic overload is significant compared to the weight of the deck, modelling the vehicle-structure interaction becomes essential. The complexity of the coupled equations of the two subsystems (vehicle and structure) requires the use of numerical methods. For this reason, a 2D finite element program has been developed that allows, among others, to solve vehicle-structure interaction problems considering the presence of a rough pavement. The program is widely validated by means of analytical and semi-analytical solutions present in the literature for simple cases and by means of a commercial FE program in more complex structures. Once validated, It is applied to the study of cable-stayed bridges by means of a parametric analysis in which the mass and spacing of the vehicles, the roughness of the road surface, the inertia of the deck, the pile-board linkage and the configuration of the cable-stayed system are varied. The overall response of the vehicle-structure system is evaluated by means of displacement and effort impact factors and by means of the level of traffic comfort obtained from the time series of accelerations in the vehicles cab.

**Keywords:** Dynamics of structures, vehicle-structure interaction, cable-stayed bridges

---

## Introduction

The dynamic response of bridges to moving loads begins to be studied in the middle of the 19th century thanks to the work of Willis (1849) and Stokes (1849) since the collapse of the Chaster Bridge in England in 1847. In these early studies the inertial effects of the beam were neglected and the vehicle was modelled as a concentrated mass moving at constant speed. The great complexity of the problem coupled with the non-existent computational resources of the time made it difficult to solve more realistic configurations, but the contribution of these authors was essential in laying the theoretical foundations of the interaction problem. A few decades later, Timoshenko (1922) studied the problem of simple beams under moving loads while disregarding the inertia of vehicles. The works of Inglis (1934) and Lowan (1935) also contributed to the state of the art. In recent decades, research attention into this phenomenon has increased markedly thanks to the success of rail transport in some European countries and in Japan. Also, the development of personal computers allowed the creation of more complex and realistic models of structures and vehicles. The general texts of Timoshenko (1955) on structure dynamics have already dealt with the problem of moving loads. Frýba (1987) analyzed the vibration of structures under railway loads. On the other hand Genin et al. (1975) studied train-track interaction vibrations and Taheri et al. (1990) focused on the response of plates under moving loads using the finite element method. Yang et al. (2004), laid the basis for calculating dynamic interaction and proposed a formulation for considering centrifugal effects on curved beams. This study uses modelling of interaction using the method proposed by Yang et al. (2004).

This technique consists in solving a system of coupled dynamic equations of the vehicle-structure by considering the contact or interaction forces.

On the other hand, the scarcity of studies on the dynamic performance of the different usual configurations used in the design of cable-stayed bridges against vehicular traffic, as well as the search for the cause of certain vibrations observed in some bridge auscultations; have motivated the practical application of this master's thesis.

## Vehicle-bridge interaction modelling

The simplest vehicle-structure interaction problem is shown in figure 0.6. It consists in a moving one degree of freedom oscillator on a statically determinate beam under the hypothesis of wheel-structure full contact. The dynamic equilibrium of the overall system can be written either by a decoupled system of equations comprising the equilibrium of the structure and the vehicles or by a system of equations taking into account the coupling between the two subsystems. The second method is chosen because of its efficiency, as it does not lose bandwidth of the global system.

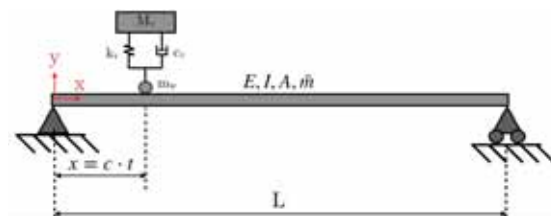


Figura 0.6: Suspended moving mass problem

After formulating the dynamic equilibrium of the structure through the application of the Principle of Virtual Works, one obtains the of mass  $\underline{M}$ , damping  $\underline{C}$

and stiffness  $\underline{K}$  matrices. The particularity of the calculation method is the determination of the interaction forces. For this purpose, the dynamic equilibrium of the vehicle must be considered by separating the degrees of freedom of contact with the structure (sub-index 1) from the free dofs (sub-index 2):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_v & 0 \\ 0 & m_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_v & -c_v \\ -c_v & c_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_1 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_v & -k_v \\ -k_v & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(M_v + m_w)g + f_c \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (0.15)$$

By incrementally resolving the part of the vehicle that does not contact the road surface (first line of the equation 0.15), one gets:

$$\begin{aligned} M_v \ddot{z}_{2,t+\Delta t} + c_v \dot{z}_{2,t+\Delta t} + k_v z_{2,t+\Delta t} &= \\ &= c_v \dot{z}_{1,t+\Delta t} + k_v z_{1,t+\Delta t} \end{aligned} \quad (0.16)$$

Applying the Newmark method to the upper degree of freedom and after various manipulations, the following expression is obtained:

$$\Delta z_2 = \Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) \quad (0.17)$$

Where:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= M_v \frac{1}{\beta \Delta t^2} + c_v \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + k_v \\ q_{2,c} &= c_v \dot{z}_{1,t+\Delta t} + k_v z_{1,t+\Delta t} \\ q_{2,t} &= -M_v \left[ -\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{z}_{2,t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{z}_{2,t} \right] - \\ & c_v \left[ \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{z}_{2,t} + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \Delta t \right) \Delta t \ddot{z}_{2,t} \right] - \\ & - k_v z_{2,t} \end{aligned} \quad (0.18)$$

The displacements of the top of the vehi-

cle at the instant  $t + \Delta t$  after the application of the Newmark scheme are:

$$\begin{aligned} z_{2,t+\Delta t} &= z_{2,t} + \Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) \\ \dot{z}_{2,t+\Delta t} &= \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{z}_{2,t} + \\ & \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{z}_{2,t} \\ \ddot{z}_{2,t+\Delta t} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) - \\ & - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{z}_{2,t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{z}_{2,t}] \end{aligned} \quad (0.19)$$

Substituting the preceding expressions in the equation of the lower part of the vehicle (line 1 of the matrix equation 0.15), the following expression of the contact forces is obtained after several steps:

$$\begin{aligned} f_{c,t+\Delta t} &= m_w \ddot{z}_{1,t+\Delta t} + c_c \dot{z}_{1,t+\Delta t} + \\ & k_c z_{1,t+\Delta t} + q_{c,t} + (M_v + m_w)g_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (0.20)$$

Is is noticeable how the contact force in the instant  $t + \Delta t$  depends also in the preceding instant. Applying the condition of contact wheel-structure, the coupling of the two systems becomes yields:

$$z_1(t) = u(x_c, t) + r(x_c) \quad (0.21)$$

aking into account the finite elements deratization, being  $\underline{N}^T(\xi_c(x_c))$  the interpolation factors of the element  $\xi$  in the contact point and denoting  $\partial/\partial x = (')$ ; the contact condition is written in displacements, velocities and accelerations by successive derivation of the equation 0.21. The contact condition applied in the FE formulation is obtained by disregarding acceleration centripetal and Coriolis terms and by considering uniform motion:

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \underline{U}_c + r(x_c) \\
\dot{z}_1(t) &= \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \dot{\underline{U}}_c + r'(x_c)c \quad (0.22) \\
\ddot{z}_1(t) &= \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \ddot{\underline{U}}_c + r''(x_c)c^2
\end{aligned}$$

Where  $c$  is the speed of the vehicle and  $\underline{U}_c$  the displacements in the contact element.

Including the above condition in the equation of contact forces 0.20, the following expression is obtained:

$$\begin{aligned}
f_{c,t+\Delta t} &= m_w \underline{N}^T(\xi(x_c)) \ddot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} + \\
&+ c_c \underline{N}^T(\xi(x_c)) \dot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} + \\
&+ k_c \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \underline{U}_{c,t+\Delta t} + \\
&+ q_{c,t} + (M_v + m_w)g_{t+\Delta t} + \\
&+ m_w r''(x_c)c^2 + c_c r'(x_c)c + k_c r(x_c) \quad (0.23)
\end{aligned}$$

To obtain the nodal forces created by the vehicle passing through element  $c$ , and after application of VWP, the contact forces must be premultiplied by the vector of interpolation functions linked to the vertical gdl ( $\underline{N}_v$ ) at the point of contact:

$$\begin{aligned}
V_{c,t+\Delta t} &= \underline{N}(\xi_c(x_c)) f_{c,t+\Delta t} = \underline{M}_c^* \ddot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} \\
&+ \underline{C}_c^* \dot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} + \underline{K}_c^* \underline{U}_{c,t+\Delta t} + \underline{f}_c^* \quad (0.24)
\end{aligned}$$

Once the contact forces at the instant  $t + \Delta t$  have been calculated, the behaviour of the vehicle is integrated into the dynamic equation of the structure:

$$\begin{aligned}
(\underline{M} + \underline{M}_c^*) \ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + (\underline{C} + \underline{C}_c^*) \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} \\
+ (\underline{K} + \underline{K}_c^*) \underline{U}_{t+\Delta t} = -\underline{f}_c^* \quad (0.25)
\end{aligned}$$

Equation 0.25 can be solved by applying a time integration scheme.

On the other hand, the obtaining of the roughness profile  $r(x)$  is based on the superposition of sinusoidal functions of angular frequency  $\Omega_i$  (rad/s), amplitude  $A_i$  (mm) and offset  $\varphi_i$ :

$$r(x) = \sum_i A_i \text{sen}(\Omega_i x - \varphi_i) \quad (0.26)$$

The pavement profile is defined by a spectral density function (PSD) from which the amplitude with respect to the reference plane is extracted. The form of the PSD function in the angular frequency domain according to ISO 8608 is as follows:

$$\phi(\Omega) = \phi(\Omega_0) \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{-w} \quad (0.27)$$

Where:

- $\Omega = \frac{2\pi}{L}$ , in rad/m denotes the angular frequency and  $L$  the wavelength. The reference value of  $\Omega_0$  according to ISO 8608 is 1 rad/m.
- $n = \frac{\Omega}{2\pi}$ , in cycles/m is the spatial frequency, being  $n_0$  equal to 0.1 cycles/m.
- $w$  is the undulation of the surface that according to the specialized literature takes the value of 2.
- $\phi(\Omega_0)$  is given in the International Standard and depends on the pavement rugosity.

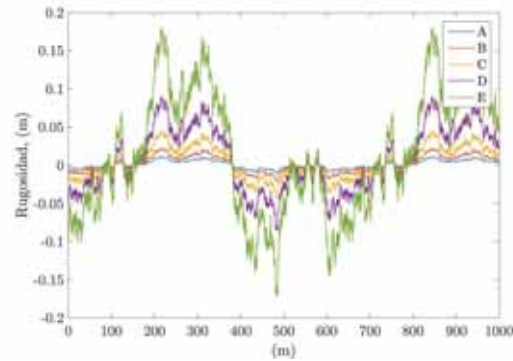


Figura 0.7: Spatial representation of generated rugosity profiles

The standard ISO 8608 defines five categories of flooring ranging from type A (very good condition) to type E (very poor condition). The profiles generated are shown in the figure 0.7.

### Model validation

The model developed in the Matlab/Octave language is validated through the study of three cases of increasing complexity. Firstly it is studied the moving load and mass problem with and without pavement roughness on a statically determinate beam. The results of the case of mobile forces are compared with the analytical solution of Frýba (1987) while the model of moving suspended masses without roughness is contrasted with the single-mode solution of Biggs (1964). When several moving masses and the effect of road surface roughness are analysed, the response of the vehicle-structure system is validated by the Sofistik program.

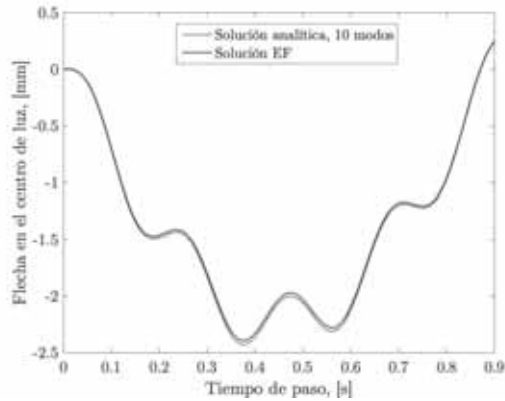


Figura 0.8: Validation with the analytic moving force solution by Frýba (1987)

Subsequently, the case of the beam on elastic foundation subjected to moving forces and masses is studied. The last validation exemple is a cable-stayed beam. The aim of this test is to validate the code by including beam and bar type elements in the same system. In this case, we consider the ride of suspended masses

on rough pavement of type A. Displacement and acceleration response on both the structure and the vehicles is obtained, as shown in the figure 0.9.

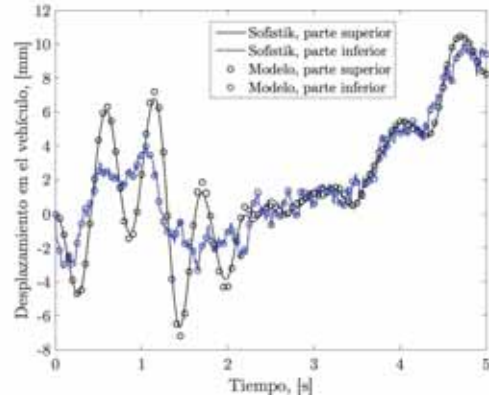


Figura 0.9: Validation with Sofistik

### Applications to cable stayed bridges

Once the reliability of the code has been demonstrated, a parametric study is carried out on cable-stayed bridges by varying the mass and spacing of the vehicles, the roughness of the road surface, the inertia of the deck, the pile-deck linkage and the configuration of the cable-stayed system. In order to characterize the response of the structure, the impact factors (IF) of displacements and efforts in the positions shown in figure 0.10 are considered. The level of riding passengers comfort is also evaluated by applying ISO 2631 textEvaluation of human exposure to whole-body vibration to the time series of accelerations in the vehicle.

$$IF = \frac{\max[z_d(t)]}{\max[z_e(t)]} \quad (0.28)$$

Where  $z_d(t)$  is the dynamic time series of displacement or effort  $z$  and  $z_e(t)$  is the static time response.



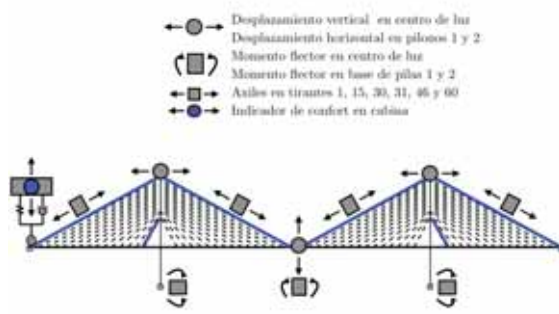


Figura 0.10: Response evaluation parameters

The basic model used in the parametric study is the same as in the static study performed by [Walther \(1999\)](#).

### Conclusions

From the parametric study carried out on cable-stayed bridges, the following conclusions can be drawn regarding the behaviour of the structure:

1. From the analysis of the influence of pavement roughness, it is verified that the response of the structure does not depend on this parameter.
2. The inertial effects of the vehicle become important when the total weight of the vehicle exceeds 40 tons (1% of the main span deck weight). From this value, there are differences of more than 6% in the impact factors calculated using the model of moving loads and masses (without and with interaction). If the model is elastic and linear, increasing the mass of the vehicle does not significantly influence the response of the structure.
3. The effects of the ride of equally-spaced vehicles through a cable-stayed bridge respects the resonance and cancellation conditions studied by [Yang et al. \(2004\)](#) for statically determinate beams. However, local phenomena can be seen in ele-

ments whose response does not depend on the first mode, such as in the most vertical cables close to the pylon. Although repetition of evenly spaced loads is unlikely due to the random nature of road traffic, there are some levels of service at which it might be possible.

4. Considering the variation in deck inertia, the asymmetry of the response produced by shear wave propagation complicates the interpretation of the results. Despite this, the study of impact factors concludes that slender solutions are the most vulnerable.
5. The 2D finite element program developed is not adequate to represent the influence of the transverse configuration of the stays.
6. From the study of the pile-deck linkage, it becomes clear that the absence of a fixed point on the bridge magnifies the impact factors of displacements and stresses by concentrating the translationality of the structure on the piles.
7. With regard to the longitudinal configuration of the stays system, the impact factors of displacements and stresses of the harp configuration are globally lower than in the fan and semi-harp configuration. The distribution of the load that travels through the cables along the pylon shaft minimizes the deflection and consequently the vertical deformability of the deck and the observed impact factors.

On the other hand, from the application of ISO 2631 to the time series of vertical accelerations recorded in vehicles, the following conclusions can be drawn with regard to traffic comfort:

1. The state of the pavement has a

---

significant influence on the response of the vehicle, which can multiply by five the level of acceleration between a pavement in perfect condition and a pavement in average state of conservation, at the usual speeds of circulation.

2. From the study of the influence of the mass of vehicles, it can be observed that light vehicles in the mass range of motorcycles are extremely sensitive to vibrations, reaching values of  $a_w$  of  $1.2 \text{ m/s}^2$  in the usual speed range, which is equivalent to a very low comfort level.
3. The spacing of vehicles begins to be relevant for their accelerations responses from a speed of 50 km/h when the vehicles are close. However, if the distance of the vehicles exceeds half the central span, the influence of the vehicle-structure-vehicle interaction begins to be negligible.
4. There is a considerable decrease in

the level of comfort in light slab sections, in which the levels of acceleration in the cab reach values 64 % higher than less slender configurations. In box-type sections, there is no dependence on the depth of the section with respect to the level of riding traffic comfort.

5. With regard to the longitudinal configuration of the cable-stayed system, the harp, semi-harp and fan configurations studied do not show significant differences with respect to the vertical accelerations measured in the vehicles.

#### **Basic bibliography**

-Frýba, L. (1987). Dynamic interaction of vehicles with tracks and roads. *Vehicle System Dynamics*, 16(3):129-138.

-Yang, Y.B., Yau, J. and Wu, Y. (2004). *Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways* World Scientific.

-Walther, R (1999). *Cable stayed bridges*. Thomas Telford.

# Índice general

Índice de figuras	XIX
Índice de cuadros	XXVII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción del problema . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	3
1.3. Objetivos y alcance . . . . .	4
1.4. Estructura . . . . .	5
<b>2. Estado del Arte</b>	<b>7</b>
2.1. Estudio de efectos dinámicos en puentes motivados por el paso de vehículos . . . . .	7
2.2. Modelado de la interacción vehículo-estructura . . . . .	8
2.3. Comportamiento dinámico de puentes atirantados frente al tráfico . .	12
2.4. Estimación del confort de tránsito . . . . .	15
<b>3. Formulación del problema de interacción</b>	<b>19</b>
3.1. Modelo de estructura . . . . .	19
3.1.1. Ecuación general de la elástica de vigas . . . . .	21
3.1.2. Formulación débil mediante el Principio de Trabajos Virtuales	25
3.1.3. Simulación de la rugosidad del firme . . . . .	34
3.2. Modelo de vehículos . . . . .	37
3.2.1. Cálculo de las fuerzas de contacto . . . . .	37
3.3. Resolución temporal de la ecuación dinámica . . . . .	43
3.3.1. Descomposición modal . . . . .	43
3.3.2. Integración directa . . . . .	44
3.3.2.1. Método de las diferencias centradas . . . . .	46
3.3.2.2. Método de Newmark- $\beta$ . . . . .	47
3.3.2.3. Estabilidad, precisión y amortiguamiento numérico .	48
<b>4. El modelo de cálculo desarrollado</b>	<b>51</b>
4.1. Interés y estructura . . . . .	51
4.1.1. Fichero de geometría, materiales y condiciones de contorno . .	53
4.1.2. Fichero de cálculo estático . . . . .	54
4.1.3. Fichero de cálculo dinámico . . . . .	56

4.1.4.	Fichero de análisis de Fourier . . . . .	57
4.1.5.	Fichero de salidas gráficas . . . . .	58
4.1.6.	Resumen del proceso de cálculo . . . . .	59
<b>5.</b>	<b>Validación</b>	<b>61</b>
5.1.	Viga isostática . . . . .	62
5.1.1.	Cálculo modal . . . . .	63
5.1.2.	Paseo de un vehículo . . . . .	64
5.1.3.	Paseo de dos vehículos . . . . .	73
5.2.	Viga isostática sobre cimentación elástica . . . . .	78
5.2.1.	Cálculo modal . . . . .	79
5.2.2.	Paseo de un vehículo . . . . .	81
5.2.3.	Paseo de dos vehículos . . . . .	84
5.3.	Viga atirantada simple . . . . .	86
5.3.1.	Cálculo modal . . . . .	87
5.3.2.	Paseo de dos vehículos . . . . .	88
<b>6.</b>	<b>Aplicación al estudio de puentes atirantados</b>	<b>91</b>
6.1.	Parámetros de caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos . . . . .	92
6.2.	Modelo de base . . . . .	93
6.2.1.	Descripción del modelo . . . . .	93
6.2.2.	El concepto de velocidad adimensional . . . . .	97
6.2.3.	Influencia de la modelización . . . . .	99
6.3.	Influencia de la rugosidad del firme . . . . .	103
6.4.	Estudio del efecto de la masa del vehículo y del espaciamiento entre vehículos . . . . .	106
6.4.1.	Efecto de la masa del vehículo . . . . .	107
6.4.2.	Influencia del espaciamiento entre vehículos . . . . .	112
6.5.	Influencia de la rigidez del tablero y de la configuración transversal del sistema de atirantamiento . . . . .	118
6.6.	Influencia de la vinculación pila-tablero . . . . .	123
6.7.	Influencia de la configuración longitudinal del sistema de atirantamiento	127
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>131</b>
7.1.	Respecto al modelo de cálculo desarrollado . . . . .	131
7.2.	Respecto a la respuesta dinámica de los diferentes sistemas estudiados	132
7.3.	Posibles mejoras y líneas de trabajo . . . . .	134
	<b>Bibliografía</b>	<b>137</b>
<b>A.</b>	<b>Cálculo Matricial de estructuras</b>	<b>I</b>
A.1.	Método matricial, caso estático de una viga Navier-Bernoulli . . . . .	II
A.2.	Caso dinámico de la viga Navier-Bernoulli . . . . .	IV
A.3.	Caso estático de la viga sobre apoyos elásticos . . . . .	VI
A.4.	Caso dinámico de la viga sobre apoyos elásticos . . . . .	VII

<b>B. Verificación del comportamiento del modelo base</b>	<b>IX</b>
B.1. Calibración de la rigidez de la retenida . . . . .	IX
B.2. Análisis de la influencia de la rigidez en la retenida . . . . .	XII
B.3. Algunas evoluciones temporales de desplazamientos y esfuerzos en el modelo de base . . . . .	XX
<b>C. Análisis modal de las diferentes configuraciones estudiadas</b>	<b>XXIX</b>
C.1. Variación de la inercia del tablero y de la configuración transversal del sistema de atirantamiento . . . . .	XXXI
C.2. Variación de la vinculación pila-tablero . . . . .	XXXII
C.3. Variación de la configuración longitudinal del sistema de atirantamiento	XXXIII





*A mis güelitos,  
por haberme dado todo.*

---



# Índice de figuras

0.1. Modelo de masas suspendidas móviles . . . . .	II
0.2. Representación espacial de los perfiles de rugosidad generados . . . . .	IV
0.3. Validación mediante la solución analítica de Frýba (1987) . . . . .	V
0.4. Validación mediante el programa Sofistik . . . . .	V
0.5. Parámetros de evaluación de la respuesta . . . . .	VI
0.6. Suspended moving mass problem . . . . .	IX
0.7. Spatial representation of generated rugosity profiles . . . . .	XI
0.8. Validation with the analytic moving force solution by Frýba (1987) . . . . .	XII
0.9. Validation with Sofistik . . . . .	XII
0.10. Response evaluation parameters . . . . .	XIII
2.1. Modelo de cargas móviles . . . . .	8
2.2. Modelo de masas móviles . . . . .	9
2.3. Modelo de masas suspendidas móviles . . . . .	9
2.4. Ejemplo de modelo de vehículo ferroviario 3d completo. <i>Fuente:</i> (Noguera, 2016) . . . . .	10
2.5. Factores de ponderación en frecuencias de las series de aceleraciones . . . . .	16
3.1. Modelización por elementos finitos . . . . .	21
3.2. Elemento diferencial de viga en equilibrio dinámico . . . . .	21
3.3. Elemento diferencial de viga sobre cimentación elástica de tipo Winkler en equilibrio dinámico . . . . .	25
3.4. Definición de los perfiles de rugosidad mediante sus funciones de densidad espectral . . . . .	35
3.5. Representación espacial de los perfiles de rugosidad generados . . . . .	36
3.6. Representación frecuencial de los perfiles de rugosidad generados; en trazo discontinuo se representan los modelos teóricos y en trazo continuo los generados . . . . .	37
3.7. Modelo de vehículo con un grado de libertad sobre una estructura con pavimento rugoso . . . . .	38
3.8. Vehículo atravesando un elemento de la estructura . . . . .	40
3.9. Esquema de la resolución incremental de la ecuación dinámica . . . . .	46
4.1. Estructura del modelo . . . . .	52
4.2. Criterio de signos en esfuerzos y desplazamientos del modelo . . . . .	53
4.3. Esquema del análisis en frecuencias . . . . .	57
4.4. Proceso de cálculo . . . . .	59

5.1. Geometría del modelo de viga isostática en EF . . . . .	62
5.2. Primeros modos propios de la viga isostática obtenidos mediante el modelo EF . . . . .	63
5.3. Esquema de las modelizaciones de vehículo mediante fuerza y masa móvil . . . . .	65
5.4. Flecha vertical en el centro de luz bajo distintas modelizaciones de vehículos . . . . .	67
5.5. Validación con Sofistik, viga con pavimento no rugoso . . . . .	69
5.6. Validación con Sofistik, viga con pavimento rugoso de tipo A . . . . .	70
5.7. Flecha en el centro de luz según el tipo de análisis . . . . .	72
5.8. Aceleración en el centro de luz según el tipo de análisis . . . . .	72
5.9. Aceleración la parte superior del vehículo según la rugosidad del pavimento . . . . .	73
5.10. Modelo de Rayleigh, porcentaje de amortiguamiento crítico en función de la frecuencia . . . . .	74
5.11. Respuesta de la viga en centro de luz considerando la rugosidad del firme . . . . .	75
5.12. Respuesta de los vehículos . . . . .	76
5.13. Sensibilidad de las aceleraciones al algoritmo numérico de integración temporal . . . . .	78
5.14. Primeros modos propios de la viga sobre cimentación elástica . . . . .	79
5.15. Validación con Sofistik, viga sobre cimentación elástica con pavimento no rugoso . . . . .	82
5.16. Validación con Sofistik, viga sobre cimentación elástica con pavimento rugoso de tipo A . . . . .	83
5.17. Respuesta de la viga sobre cimentación elástica en centro de luz considerando la rugosidad del firme . . . . .	84
5.18. Respuesta de los vehículos . . . . .	85
5.19. Geometría del modelo de viga atirantada en EF . . . . .	86
5.20. Cálculo modal de la estructura . . . . .	87
5.21. Respuesta de la estructura en centro de luz considerando la rugosidad del firme . . . . .	89
5.22. Respuesta de los vehículos . . . . .	90
6.1. Nomenclatura de elementos del modelo . . . . .	92
6.2. Parámetros de caracterización de la respuesta dinámica . . . . .	92
6.3. Sección transversal del modelo de base adaptada de Walther (1999), cotas en metros . . . . .	94
6.4. Geometría del modelo de base . . . . .	95
6.5. Detalle de los apoyos del tablero en el modelo de base, $k_r$ designa la rigidez vertical de la retenida . . . . .	96
6.6. Modelización de los vehículos FLM2-2 y FLM2-3 mediante fuerzas y masas suspendidas . . . . .	96
6.7. Cálculo de las frecuencias espaciales de la deformada modal para el cálculo de la frecuencia de excitación . . . . .	99

6.8. Caracterización de la respuesta dinámica en el modelo de base según diferentes métodos de cálculo . . . . .	102
6.9. Representación espacial de los perfiles de rugosidad generados . . . . .	103
6.10. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según diferentes rugosidades de firme . . .	105
6.11. Modelo de vehículo utilizado . . . . .	106
6.12. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura a diferentes velocidades según la masa del vehículo, (1/3) . . . . .	108
6.13. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura a diferentes velocidades según la masa del vehículo, (2/3) . . . . .	109
6.14. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura a diferentes velocidades según la masa del vehículo, (3/3) . . . . .	110
6.15. Diferencia relativa entre la modelización del vehículo por masas y cargas móviles en el factor de impacto del desplazamiento vertical en centro de luz . . . . .	111
6.16. Concición de resonancia en el paseo de varios vehículos equiespaciados	114
6.17. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según el espaciamiento entre vehículos, (1/2) . . . . .	115
6.18. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según el espaciamiento entre vehículos, (2/2) . . . . .	116
6.19. Aceleración vertical rms filtrada en cabina . . . . .	117
6.20. Secciones transversales estudiadas, cotas en metros . . . . .	118
6.21. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según diferentes rigideces del tablero . . .	121
6.22. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según diferentes rigideces del tablero y configuraciones transversales del sistema de atirantamiento . . . . .	122
6.23. Vinculaciones pila-tablero estudiadas . . . . .	124
6.24. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según diferentes vinculaciones entre la pila y el tablero . . . . .	126
6.25. Detalle de un vano de las diferentes configuraciones longitudinales de tirantes estudiadas . . . . .	128
6.26. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según diferentes configuraciones longitudinales del sistema de atirantamiento . . . . .	129
7.1. Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base a altas velocidades . . . . .	136
A.1. Grados de libertad de la línea elástica . . . . .	II
A.2. Reacciones de empotramiento frente a un desplazamiento unitario vertical del primer nodo . . . . .	III
A.3. Reacciones de empotramiento frente a desplazamientos unitarios en los extremos . . . . .	III

B.1. Modelo de cinco vanos . . . . .	IX
B.2. Deformada del modelo de cinco vanos al cargar el centro de luz del vano intermedio . . . . .	X
B.3. Deformada del modelo calibrado de tres vanos al cargar el centro de luz del vano intermedio . . . . .	X
B.4. Cálculo modal del modelo de cinco vanos . . . . .	XI
B.5. Cálculo modal del modelo calibrado de tres vanos . . . . .	XI
B.6. Modos propios según diferentes rigideces verticales en la retenida . . .	XIII
B.7. Influencia de la rigidez vertical de la retenida en desplazamientos y esfuerzos . . . . .	XIV
B.8. Influencia rigidez vertical de la retenida en esfuerzos . . . . .	XV
B.9. Influencia rigidez vertical de la retenida en el factor de impacto de desplazamientos en el centro de luz y en cabeza de pilonos . . . . .	XVI
B.10. Influencia rigidez vertical de la retenida en el factor de impacto del momento flector en centro de luz y en la base de pilas . . . . .	XVII
B.11. Influencia rigidez vertical de la retenida en el factor de impacto del esfuerzo axil en tirantes de la pila uno . . . . .	XVIII
B.12. Influencia rigidez vertical de la retenida en el factor de impacto del esfuerzo axil en tirantes de la pila dos . . . . .	XIX
B.13. Factor de impacto en función de la velocidad adimensional en una viga isostática. <i>Fuente: Frýba (1987)</i> . . . . .	XX
B.14. Series temporales de desplazamientos. En trazo negro discontinuo el cálculo estático, en negro continuo el modelo de cargas móviles, en trazo azul discontinuo el modelo de cargas suspendidas sin rugosidad y en trazo azul continuo se representa el modelo de masas suspendidas sobre pavimento tipo A . . . . .	XXI
B.15. Series temporales de esfuerzos (1/4). En trazo negro discontinuo el cálculo estático, en negro continuo el modelo de cargas móviles, en trazo azul discontinuo el modelo de cargas suspendidas sin rugosidad y en trazo azul continuo se representa el modelo de masas suspendidas sobre pavimento tipo A . . . . .	XXII
B.16. Series temporales de esfuerzos (2/4). En trazo negro discontinuo el cálculo estático, en negro continuo el modelo de cargas móviles, en trazo azul discontinuo el modelo de cargas suspendidas sin rugosidad y en trazo azul continuo se representa el modelo de masas suspendidas sobre pavimento tipo A . . . . .	XXIII
B.17. Series temporales de esfuerzos (3/4). En trazo negro discontinuo el cálculo estático, en negro continuo el modelo de cargas móviles, en trazo azul discontinuo el modelo de cargas suspendidas sin rugosidad y en trazo azul continuo se representa el modelo de masas suspendidas sobre pavimento tipo A . . . . .	XXIV
B.18. Series temporales de esfuerzos (4/4). En trazo negro discontinuo el cálculo estático, en negro continuo el modelo de cargas móviles, en trazo azul discontinuo el modelo de cargas suspendidas sin rugosidad y en trazo azul continuo se representa el modelo de masas suspendidas sobre pavimento tipo A . . . . .	XXV



B.19. Series temporales de aceleraciones verticales en cabina. En la primera fila se muestran las aceleraciones obtenidas de los modelos sin rugosidad y sobre pavimento de tipo A, en la segunda se muestra el filtrado propuesto por la norma ISO 2631 en las aceleraciones del modelo no rugoso y en la tercera fila se muestra el filtrado en las aceleraciones del modelo sobre pavimento A . . . . .	XXVI
B.20. Series temporales de la fuerza de contacto dinámica ejercida por el eje de la cabina en la primera fila. En la segunda fila se muestra la transformada de Fourier de las series temporales (espectro de amplitudes). . . . .	XXVII
C.1. Modos propios de las diferentes configuraciones estudiadas (1/3) . . .	XXXI
C.2. Modos propios de las diferentes configuraciones estudiadas (2/3) . . .	XXXII
C.3. Modos propios de las diferentes configuraciones estudiadas (3/3) . . .	XXXIII



# Índice de cuadros

2.1. Niveles de confort y aceleraciones límite . . . . .	17
3.1. Grado de rugosidad, valores medios según la norma ISO 8608 . . . . .	35
4.1. Matriz de propiedades . . . . .	53
4.2. Matriz nodal . . . . .	54
4.3. Matriz de conectividades . . . . .	54
4.4. Matriz de condiciones de contorno . . . . .	54
5.1. Propiedades geométricas y mecánicas de la viga isostática . . . . .	62
5.2. Propiedades del modelo EF . . . . .	62
5.3. Comparación de las frecuencias fundamentales de la viga isostática obtenidas a partir del modelo con la formulación analítica . . . . .	64
5.4. Propiedades de los vehículos modelizados . . . . .	65
5.5. Propiedades de los vehículos . . . . .	74
5.6. Primeros modos propios de la viga sobre cimentación elástica . . . . .	80
5.7. Propiedades geométricas y mecánicas de la viga atirantada simple . . . . .	86
5.8. Propiedades del modelo EF de la viga atirantada simple . . . . .	86
5.9. Comparación de las frecuencias fundamentales de la viga atirantada obtenidas a partir del modelo con la formulación analítica . . . . .	88
5.10. Propiedades de los vehículos . . . . .	88
6.1. Características principales del tablero y de las pilas en el modelo de base . . . . .	93
6.2. Características simplificadas de los tirantes de un cuadrante . . . . .	94
6.3. Propiedades del modelo EF de la viga atirantada simple . . . . .	95
6.4. Propiedades de los vehículos FLM2-2 y FLM2-3 . . . . .	97
6.5. Propiedades del vehículo en función de la masa total, $M$ . . . . .	107



# 1

## Introducción

### 1.1. Descripción del problema

La interacción entre un puente y los vehículos que circulan por el mismo es un problema dinámico en el que las ecuaciones del movimiento de los dos sistemas (vehículos y estructura) están acoplados. Convencionalmente, la investigación se centraba en la determinación del factor de impacto de las cargas móviles, definido como un aumento del valor de la respuesta estática al tener en cuenta los efectos dinámicos. Cuando el estudio se centra en la respuesta de las estructuras, los vehículos se asimilan a cargas móviles. Sin embargo, cuando el confort de los viajeros entra en juego, como en el caso de puentes ferroviarios o grandes puentes vehiculares susceptibles a los efectos dinámicos, el estudio de la interacción vehículo-estructura es imprescindible. En este capítulo se describen los fundamentos teóricos del problema de interacción dinámica, así como los diferentes métodos de resolución que son utilizados en la actualidad y son aplicados en el modelo numérico desarrollado en el capítulo siguiente.

Por otro lado, el cálculo convencional se basa en un diseño de tipo pseudo-determinista (corregido mediante coeficientes de seguridad obtenidos estadísticamente), tanto sobre las acciones como sobre las resistencias de los materiales. Esto cobra sentido para simplificar el proyecto, sin embargo, en estudios detallados, los cálculos de tipo probabilista son la opción más precisa. En estos últimos, el cálculo está basado no en coeficientes de seguridad sino en la verdadera distribución de probabilidad tanto de las acciones (tráfico, peatones, viento, sismo ...) como de las resistencias de los materiales y la calidad de ejecución se vuelve necesario. El tráfico vehicular

se trata, por tanto, de una variable estocástica al igual que el comportamiento estructural del puente. El desarrollo de un modelo de interacción sencillo permitirá la implementación de estos métodos.

La interacción entre los vehículos y las estructuras representa un problema de interacción dinámico entre los puentes y las cargas vehiculares integrando una disciplina de estudio dentro de la dinámica de estructuras. Desde un punto de vista teórico, los dos sistemas serán asimilados a sistemas elásticos caracterizando sus rigideces y masas por sus frecuencias fundamentales de vibración.

Ambos sistemas interactúan por medio de fuerzas de contacto. Este problema es dependiente del tiempo debido a que las fuerzas de contacto cambian de posición con el movimiento de los vehículos, mientras que sus magnitudes no son constantes debido a la flexibilidad del sistema de suspensión que hace variar la posición relativa entre los dos subsistemas. La manera en la que interactúan los dos subsistemas está determinada fundamentalmente por sus frecuencias propias y por el movimiento de los vehículos. La consideración en el cálculo de la interacción vehículo-estructura es necesaria cuando se desea estudiar no sólo la respuesta de la estructura si no la respuesta de los vehículos de cara a determinar las condiciones de confort.

En aquellos casos en los que la masa de los vehículos es pequeña con respecto a la masa de la estructura, los efectos elásticos e inerciales de los vehículos pueden ser despreciados y la respuesta es obtenida mediante modelos mucho más simples de cargas móviles. En este caso simplificado, las fuerzas de interacción entre los dos sistemas son ignoradas y el algoritmo es mucho más rápido, adecuado para calcular la respuesta de grandes sistemas estructurales, pero no del comportamiento de los vehículos.

Desde el punto de vista de la dinámica de estructuras, un puente ferroviario es diferente de un puente carretero en términos de la excitación originada por las cargas móviles. Las cargas ferroviarias están constituidas por una serie de vehículos idénticos conectados más una o dos locomotoras de mayor peso. Generalmente un tren

se asimila a una serie de masas o cargas móviles en intervalos regulares. Debido al carácter repetitivo de las cargas por bogie, un tren lleva asociado sus frecuencias propias más una frecuencia de excitación asociada a su velocidad y al carácter repetitivo de las cargas. Si alguna de estas frecuencias coincide con alguna de las frecuencias de vibración del puente, el fenómeno de resonancia ocurre, entendido como la amplificación de la respuesta del puente y de los coches. Por otro lado, el tráfico vehicular es inherentemente estocástico. Los vehículos varían en términos de peso por eje, separación por eje, velocidad y espaciamiento.

Conviene considerar que el tráfico es una más de las sobrecargas a considerar en el diseño, las cargas permanentes y el resto de cargas variables, viento, sismo, impactos deberán ser consideradas determinista o probabilísticamente tanto en magnitud como en ocurrencia conjunta.

## 1.2. Motivación

El desarrollo de la ingeniería estructural y de materiales junto con las tecnologías de construcción, así como las exigencias medioambientales crecientes en nuestros días, hacen que el proyecto de nuevos puentes tienda hacia soluciones de mayor luz. Dentro de las tipologías más adaptadas a estos condicionantes se encuentran los puentes atirantados, ampliamente utilizados para vanos de entre 150 y 800 metros.

El mayor enemigo de los puentes de grandes luces es, debido a la flexibilidad de la estructura y a la gran esbeltez de la sección, el viento, [Kahan \(2018\)](#), [Virlogeux \(2017\)](#), [Walther \(1999\)](#). El cálculo de los efectos del viento es complejo y requiere la combinación de métodos experimentales, numéricos y analíticos, para así considerar los efectos de estela (influencia de obstáculos sobre el flujo en la estructura), aeroelásticos (efectos del flujo sobre una estructura en movimiento) y turbulentos (efectos de las variaciones aleatorias del viento en torno a sus estadísticos medios). Sin embargo, las investigaciones iniciadas tras el colapso del puente de Tacoma, han clarificado significativamente los efectos adversos del viento en estructuras y los cri-

terios de diseño anti-viento son conocidos por los proyectistas.

En lo que se refiere al tráfico de carretera, los efectos dinámicos globales de los vehículos en puentes atirantados, a velocidades usuales, no suponen un problema debido a que las frecuencias propias fundamentales de estas estructuras se encuentra lejos de la frecuencia de excitación, [Menn \(2012\)](#). Es por ello que no se ha prestado especial atención al estudio concreto de puentes atirantados frente al tráfico vehicular.

Sin embargo, estudios y auscultaciones realizados en diversos puentes de esta tipología, ponen de manifiesto que si bien el comportamiento global de la estructura no se ve afectado por el tráfico, si se advierte el deterioro por fatiga acelerado en algunos elementos así como vibraciones que no se corresponden con ninguno de los efectos dinámicos del viento.

El desconocimiento de la respuesta dinámica de las diferentes configuraciones usuales utilizadas en el proyecto de puentes atirantados frente al tráfico vehicular, así como la búsqueda de las causa de determinadas vibraciones observadas en algunas auscultaciones, han motivado el tema del presente trabajo final de máster.

### **1.3. Objetivos y alcance**

El fin de este trabajo es doble. Por un lado se desarrolla íntegramente un modelo de cálculo en elementos finitos 2D especialmente diseñado para el cálculo de la interacción vehículo-estructura en problemas planos y tras su validación se aplica al estudio de puentes atirantados. Bien es cierto que el programa desarrollado así como todas las rutinas de integración numérica implementadas, no aportan ninguna novedad al estado del arte del problema de interacción, pues ya existen programas comerciales que ofrecen estas capacidades. Sin embargo, se considera un buen ejercicio académico, que demuestra la comprensión del problema y su materialización en un programa simple pero completo y fácilmente generalizable.



Por otro lado está la componente de investigación; una vez desarrollado y validado el código, se aplica al estudio de puentes atirantados con el objetivo de comparar y clasificar de manera sistemática las diferentes configuraciones usuales frente al tráfico de vehículos. Para ello, se considera no sólo la respuesta de la estructura sino también el grado de confort de tránsito mediante el análisis de las aceleraciones en los vehículos.

El alcance del documento se resume en los siguientes puntos:

- Desarrollo de un modelo de elementos finitos 2D elástico lineal, especialmente indicado para el cálculo de la interacción vehículo-estructura.
- Validación del modelo mediante soluciones analíticas, en el caso de que existan, y numéricas mediante el programa Sofistik.
- Aplicación al estudio dinámico de puentes atirantados estudiando los parámetros siguientes:
  - Masa y espaciamiento de los vehículos
  - Estado del pavimento
  - Rigidez del tablero y configuración transversal del sistema de atirantamiento
  - Vinculación pila-tablero
  - Configuración longitudinal del sistema de atirantamiento

Para caracterizar las diferentes configuraciones estudiadas, se estudian factores de impacto a las velocidades de tránsito usuales y se evalúa el grado de confort de tránsito a partir de la serie temporal de aceleraciones en cabina.

### 1.4. Estructura

Esta memoria está organizada en seis capítulos y el cuerpo principal del documento está dividido en cuatro partes. Tras la introducción del problema de interacción vehículo-estructura y la exposición de los objetivos, se realiza un análisis bibliográfico de los métodos de cálculo de los efectos dinámicos en estructuras por el paso de vehículos para posteriormente profundizar en los estudios específicos realizados en

puentes atirantados. En el capítulo tres se formula el problema de interacción, por un lado se detallan las ecuaciones dinámicas del comportamiento de la estructura y los métodos de consideración del amortiguamiento estructural. A continuación se describe el método empleado para simular la rugosidad del firme, se detallan las ecuaciones de gobierno del movimiento de los vehículos y se formulan las ecuaciones acopladas del sistema vehículo-estructura. Finalmente, algunos métodos de cálculo incremental de la ecuación dinámica son introducidos, haciendo especial hincapié en el método de Newmark- $\beta$ , por ser el empleado en el modelo desarrollado.

En el capítulo cuatro se describe someramente la estructura del modelo de cálculo y de las rutinas principales que lo componen. Posteriormente, en el capítulo cinco, el código se valida mediante tres ejemplos de complejidad creciente. Se estudia en primer lugar una viga isostática, obteniéndose la respuesta para el paseo de cargas y masas suspendidas móviles con y sin pavimento rugoso. Los resultados son validados con ecuaciones analíticas en los dos primeros casos, recurriendo finalmente al programa Sofistik para la validación del caso sobre pavimento rugoso. A continuación se analiza el caso de una viga sobre cimentación elástica de tipo Winkler y el caso de una viga atirantada por cuatro tirantes, los resultados del paseo de cargas y masas móviles se comparan con el programa comercial Sofistik.

Una vez validado el modelo, se lleva a cabo un estudio paramétrico de diversas configuraciones de puentes atirantados y vehículos. Para ello, se toman como indicadores de la respuesta dinámica del sistema los factores de impacto de desplazamientos y esfuerzos en diversos puntos característicos de la estructura y se analiza la serie de aceleraciones en el vehículo para estimar el grado de confort de tránsito.

Finalmente, las conclusiones obtenidas se resumen en el capítulo seis y se detallan algunas líneas de investigación que podrían surgir a partir de este trabajo.

# 2

## Estado del Arte

### 2.1. Estudio de efectos dinámicos en puentes motivados por el paso de vehículos

La respuesta dinámica de los puentes ante cargas móviles comienza a estudiarse en la mitad del siglo XIX gracias a los trabajos de [Willis \(1849\)](#) y [Stokes \(1849\)](#) a partir del colapso del puente de Chaster en Inglaterra en 1847. En estos primeros estudios los efectos inerciales de la viga son despreciados y el vehículo se modela como una masa concentrada que se desplaza a velocidad constante. La gran complejidad del problema unida a los recursos computacionales inexistente de la época dificultó la resolución de problemas más reales, pero la contribución de estos autores fue esencial a la hora de sentar las bases teóricas del problema de interacción.

Unas décadas después, [Timoshenko \(1922\)](#) estudió el problema de vigas simples bajo cargas móviles despreciando la inercia de los vehículos. Los trabajos de [Inglis \(1934\)](#) y [Lowan \(1935\)](#) también contribuyeron al estado del arte. En las últimas décadas, la investigación de este fenómeno ha aumentado notablemente gracias al éxito del transporte ferroviario en algunos países Europeos y en Japón. Asimismo, el desarrollo de los ordenadores personales permitió la creación de modelos más complejos y realistas de estructuras y vehículos. Los textos generales de [Timoshenko \(1955\)](#) en dinámica de estructuras ya trataron el problema de las cargas móviles. [Fryba \(1987\)](#) analizó la vibración de estructuras bajo cargas ferroviarias. Por otro lado [Genin et al. \(1975\)](#) estudiaron las vibraciones de interacción tren-vía y [Taheri et al. \(1990\)](#) se centraron en la respuesta de placas bajo cargas móviles mediante el método de los elementos finitos. [Yang et al. \(2004\)](#), sentaron las bases de cálculo de interacción

dinámica y propusieron una formulación para considerar los efectos centrífugos en vigas curvas.

## 2.2. Modelado de la interacción vehículo-estructura

### Modelos de vehículos

El modelo más simplista que puede ser analizado es el de la carga móvil (sin interacción). En este caso se movilizan las fuerzas inerciales, viscosas y de rigidez de la estructura pero no se considera la interacción con los vehículos, siendo la carga constante en todo el paseo. Esta modelización mediante cargas móviles es válida siempre y cuando no estemos interesados en la respuesta de los vehículos y según revelan investigaciones precedentes magnifica generalmente los factores de impacto.

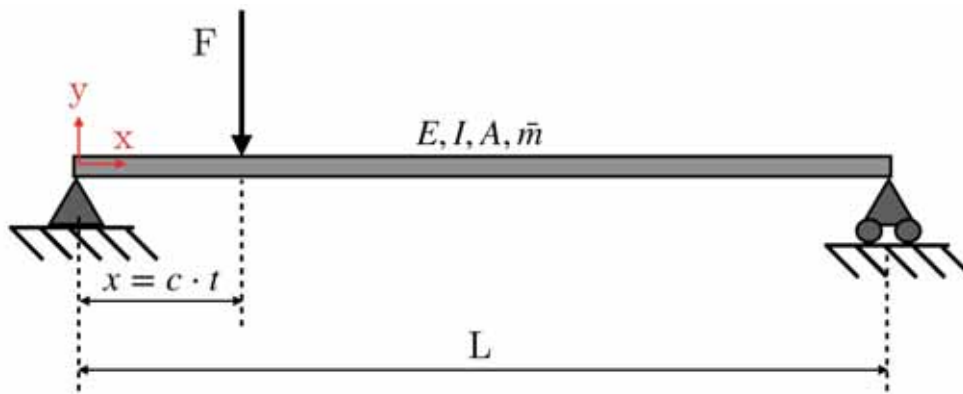


Figura 2.1: Modelo de cargas móviles

Esta modelización es válida siempre y cuando la masa del vehículo es pequeña con respecto a la de la estructura y sus efectos inerciales pueden ser despreciados y cuando la respuesta del vehículo no es de interés en el estudio.

En aquellos casos en los que la inercia del vehículo no es despreciable, el siguiente escalón en complejidad es el modelo de masas móviles (interacción inercial), figura 2.2. Un inconveniente de este modelo es la exclusión del movimiento relativo entre la masa suspendida del vehículo y la estructura debido a la suspensión, que puede

ser importante en presencia de irregularidades del firme y altas velocidades.

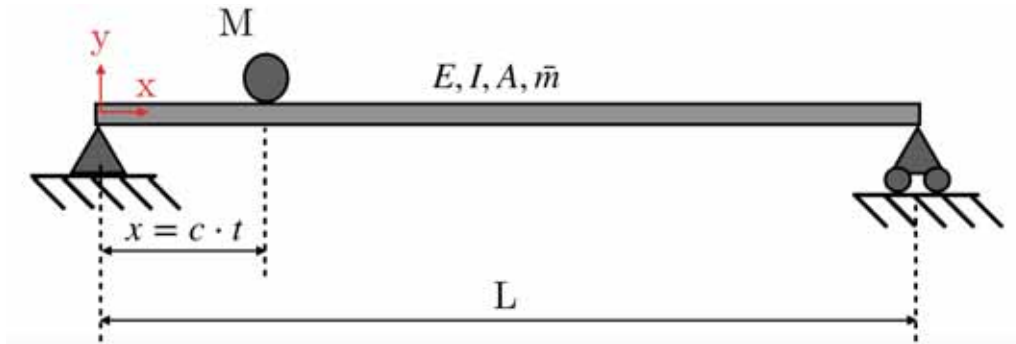


Figura 2.2: Modelo de masas móviles

Por último, la modelización más realista del vehículo consiste en la consideración de los efectos elásticos y viscosos de los sistemas de suspensión (interacción inercial y cinemática), figura 2.3. El modelo más sencillo en este caso es el de la masa móvil suspendida. En este caso, valores pequeños de la rigidez del amortiguador transforman el problema en el problema de la masa móvil (figura 2.2), mientras que si la rigidez tiende a infinito, el problema puede ser asimilado a una carga móvil (figura 2.1).

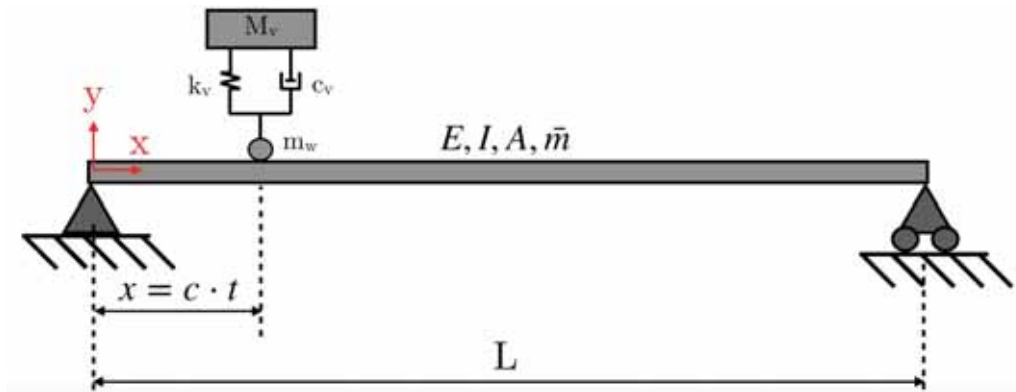


Figura 2.3: Modelo de masas suspendidas móviles

Este tipo de modelización puede llegar a ser muy compleja si se consideran todos los puntos de contacto de los vehículos y todos sus grados de libertad. Esto implica el uso de procedimientos numéricos para su resolución, ya que la obtención de soluciones analíticas es inviable considerando el acoplamiento de las ecuaciones del movimiento de los dos subsistemas.

El modelo de masas suspendidas representado en la figura 2.3 es el modelo de vehículo más simple para considerar la interacción. En la literatura existen diferentes modelos de vehículos basados en sistemas multicuerpo en dos o tres dimensiones, cuyo fin es representar de manera más precisa su respuesta dinámica. Los modelos más complejos en 3d, desarrollados sobre todo en el estudio de puentes ferroviarios, llegan a representar todos los movimientos de sólido rígido de la cabina y algunos de los grados de libertad de los sistemas de suspensión, que incluyen la oscilación vertical y longitudinal, el abatimiento, la guiñada o rotación en torno al eje z, el cabeceo o rotación en torno al eje horizontal perpendicular al plano del vehículo y el alabeo o rotación en torno al eje longitudinal, [Madrazo-Aguirre et al. \(2015\)](#), [Noguera \(2016\)](#), [Elnashar \(2017\)](#), [Sánchez \(2013\)](#).

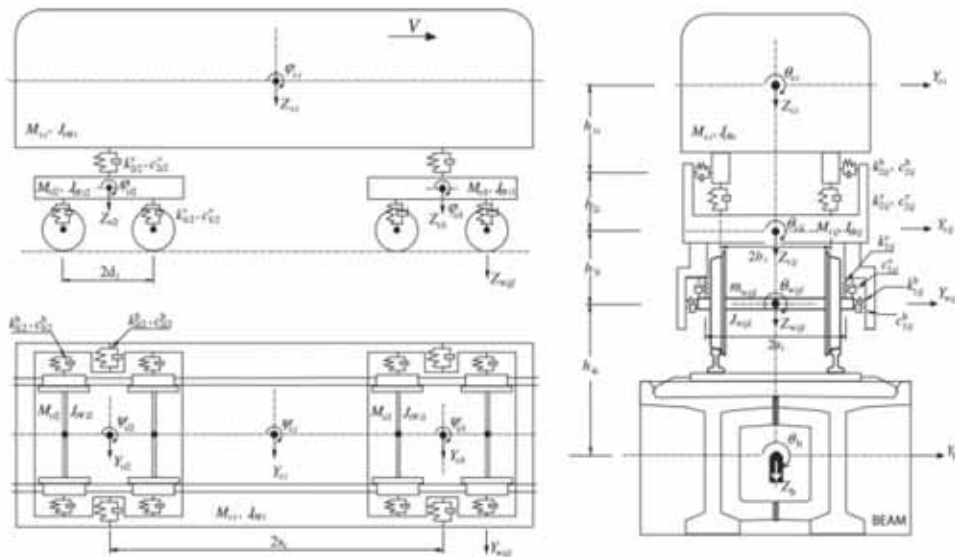


Figura 2.4: Ejemplo de modelo de vehículo ferroviario 3d completo. Fuente: ([Noguera, 2016](#))

Teniendo en cuenta que el fin de la modelización de la interacción es, en este trabajo, la comparación del grado de confort de tránsito de las diferentes configuraciones que se estudian y no la evaluación precisa y rigurosa de la respuesta de un sistema vehículo-puente concreto, el modelo de vehículo a un grado de libertad se considera suficiente.

## Métodos de resolución numérica

Existen en la literatura diferentes métodos de resolución numérica del problema de interacción. Una clasificación completa es presentada en [Noguera \(2016\)](#) en la que se distinguen tres variantes en función del planteamiento de las ecuaciones de los dos subsistemas:

1. Métodos que plantean un sistema de ecuaciones lineales aunando la información de los vehículos y de la estructura. Dentro de este método existen variantes según la base de las ecuaciones de la estructura, que puede ser física (directa) o modal.

El problema fundamental de la resolución en base física mediante el ensamblaje de las matrices de rigidez elementales del subsistema estructura, es que la matriz de ecuaciones pierde el ancho de banda al incorporar las ecuaciones de los vehículos, lo que unido a la consideración de todos los grados de libertad de la estructura, aumenta el coste computacional de la solución.

Una alternativa eficaz consiste en la representación en base modal, de las ecuaciones de la estructura, lo que limita el número de grados de libertad al número de modos escogido, disminuyendo consecuentemente el tiempo de cálculo.

2. Métodos basados en técnicas de optimización. Para evitar la programación de las rutinas de ensamblaje de las ecuaciones matriciales de la estructura y de los vehículos, esta técnica permite modelar la estructura y eventualmente los vehículos en programas comerciales de EF. La resolución de la interacción se realiza mediante la imposición de condiciones de acoplamiento entre los dos subsistemas mediante técnicas de optimización con restricciones, haciendo coincidir el desplazamiento del puente y del vehículo en el punto de contacto.
3. Métodos que plantean un único sistema de ecuaciones acoplado. Se basan en la escritura de las ecuaciones matriciales de la estructura y del vehículo de manera independiente, que posteriormente se acoplan en cada paso de tiempo. Dentro de este grupo, existen diversos subgrupos en función de la linealidad del contacto y de si se realizan o no iteraciones en cada paso de tiempo. El modelo implementado en el presente TFM pertenece a este grupo y considera

una teoría de contacto lineal (sin despegues) y sin iteraciones en cada paso de tiempo.

### 2.3. Comportamiento dinámico de puentes atirantados frente al tráfico

En lo que se refiere al estudio de vibraciones en puentes atirantados destacan las investigaciones de [Fleming and Egeseli \(1980\)](#), que comparaban el análisis dinámico lineal y no lineal de un puente atirantado bajo cargas sísmicas y de viento. El puente se modelizó como un modelo 2-D discretizado en elementos finitos. El comportamiento no lineal de cables y el cálculo en segundo orden P- $\delta$  fue considerado.

Por otro lado [Wilson and Barbas \(1980\)](#) realizaron trabajos teórico-experimentales en puentes atirantados determinando los efectos dinámicos de cargas móviles. La estructura se modelizó mediante una viga Euler-Bernoulli (sin deformación por cortante) sobre soportes elásticos discretos modelizando la rigidez de los tirantes. Los estudios teóricos fueron respaldados mediante ensayos a tamaño reducido y los resultados mostraban bastante similitud. La investigación concluyó que un aumento de la rigidez de los cables implica un aumento de la amplificación dinámica.

[Brancaleoni et al. \(1987\)](#) presentaron soluciones al problema de interacción locomotora- puente atirantado. El puente modelizado mediante elementos finitos y las no linealidades geométricas fueron consideradas en el análisis. El cálculo dinámico fue realizado por integración directa mediante un algoritmo explícito. Se consideraron diferentes velocidades de paso de trenes y se evaluaron los factores de impacto despreciando la rugosidad del firme. Las conclusiones fundamentales mostraron que la amplificación de los momentos flectores en el centro de luz eran bastante superiores a las amplificaciones del esfuerzo axial de los tirantes.

[Huang and Wang \(1992\)](#) estudiaron el factor de impacto en puentes atirantados frente al tráfico vehicular considerando diferentes configuraciones de vinculación



pilono-tablero. Para ello se emplearon diversos perfiles de rugosidad del firme y un modelo de vehículo de siete grados de libertad.

Chatterjee et al. (1994) analizaron la vibración de puentes atirantados considerando la flexibilidad de los pilonos, y el acoplamiento de los movimientos de torsión y verticales del tablero debido a cargas excéntricas, considerando en este caso la rugosidad del firme. Concluyeron que los modelos de cargas móviles sobrestiman los factores de amplificación dinámica. Por otro lado los efectos de la rugosidad amplifican también la respuesta de la estructura y de los vehículos.

Yang and Fonder (1998) estudiaron la excitación de los cables frente a cargas móviles mediante un modelo de elementos finitos. La no-linealidad de los cables inducida por la catenaria (hipótesis de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones) y la variación de tensión fue introducida en un análisis que constaba de tres etapas. En primer lugar, un modelo global del puente incluía los tirantes como elementos cable de dos nodos considerando una matriz de rigidez constante durante el análisis dinámico. En segundo lugar, la respuesta dinámica no lineal de los cables se evalúa en cada cable independientemente, imponiendo los desplazamientos extremos calculados en el modelo global al modelo de cable discretizado, esta vez sí, en diversos elementos. En tercer lugar, las reacciones en los extremos de los cables se comparan con las obtenidas en el paso uno y se itera hasta lograr la convergencia.

Karoumi (2000) estudió las vibraciones del tráfico en puentes atirantados modelizando la estructura primero como una viga continua es un semiespacio elástico que consideraba la rigidez de los cables y pilonos y después mediante el empleo de elementos finitos. En el segundo caso empleó matrices de rigidez considerando las no linealidades geométricas ( $P-\delta$ ) bajo cargas permanentes, calculadas mediante un proceso iterativo.

Yau and Yang (2004) analizaron las vibraciones en un modelo de puente atirantado inducidas por el tráfico ferroviario y se centraron en métodos para su reducción.

Se elaboró un modelo plano de EF en el que se consideraron las inestabilidades de axil y flexión mediante la matriz de rigidez geométrica aunque no se precisa si se tiene en cuenta el proceso constructivo en la determinación del estado precargado inicial. Los cables son modelados como elementos celosía con módulo reducido según la formulación de Ernst y emplearon un series de masas suspendidas para modelar los vehículos.

[Bruno et al. \(2008\)](#) realizaron un estudio de la respuesta dinámica de puentes atirantados bajo cargas móviles centrándose en el factor de impacto de la flecha vertical y momento flector en centro de luz y axiles en tirantes extremos. Para ello, el puente se modelizó como viga , asumiendo por tanto que el espaciamiento de los cables es despreciable frente a la longitud del puente. Las fuerzas de interacción entre el tablero, los cables y los pilonos se integraron en el análisis mediante funciones continuas, y el modelo de cargas móviles incluía los efectos de las fuerzas centrípetas y de Coriolis. Los efectos inerciales y viscosos de interacción vehículo-estructura no fueron considerados en el análisis.

[Madrado-Aguirre et al. \(2015\)](#) y [Camara et al. \(2014\)](#) se centraron en la respuesta dinámica de puentes atirantados inferiores de tablero mixto bajo cargas móviles el primero y modelos de vehículos más complejos el segundo. Se realizó un estudio de sensibilidad de los parámetros críticos que controlan los modos de vibración y las aceleraciones registradas y se definieron las configuraciones más efectivas para respetar el estado límite de vibraciones, que es limitante en el diseño de este tipo de puentes.

[Song et al. \(2016\)](#) analizaron la respuesta de un puente atirantado por cuatro cables y pilonos fijos bajo la acción de cargas móviles equiespaciadas considerando la interacción cable-tablero. La interacción fue resuelta mediante una formulación basada en la descomposición modal y en el método de Galerkin. El estudio se centró en los efectos de modos localizados, la distancia entre cargas y las no linealidades geométricas de los cables en la respuesta dinámica de la estructura.

## 2.4. Estimación del confort de tránsito

El grado de afección de las vibraciones mecánicas a las personas depende de numerosos factores y ha sido tratado en diversas publicaciones en ámbitos tanto de la ingeniería como de la medicina. En lo que se refiere a vibraciones de un pasajero de un vehículo sea de ferrocarril o carretera se corresponde con vibraciones de cuerpo completo cuyos efectos en el organismo dependen del contenido frecuencial de las aceleraciones, de la duración de la exposición, de las actividades que realizan los pasajeros en el viaje, de su posición, ...

La norma ISO2631 *Evaluation of human exposure to whole body vibration* propone una metodología para la evaluación de los efectos de las vibraciones en el organismo diferenciando entre salud, confort y percepción y mareo :

- Salud. Se considera que se necesitan varios años de exposición a aceleraciones periódicas, aleatorias o transitorias para que se produzcan consecuencias negativas en una persona sana. Se aplican por tanto exposiciones continuadas en el tiempo en el rango de frecuencias ente 0,5 y 80 Hz.
- Confort y percepción. Concieme a los efectos de las vibraciones en el confort de personas sanas expuestas a vibraciones periódicas aleatorias o transitorias durante un viaje, en el trabajo o practicando actividades de recreo. Se aplica a vibraciones de corto plaza en el rango de frecuencias entre 0,5 y 80 Hz.
- Mareo. Es aplicable a las vibraciones en frecuencias inferiores a 0,5 Hz que causan efectos no deseados de malestar. Los métodos presentados en la norma ISO2631 se aplican a movimientos en barcos y otras embarcaciones.

COon el fin de estudiar el confort de tránsito de pasajeros sentados, las series de aceleración medidas en los vehículos necesitan ser tratadas para clasificarlas según diferentes niveles propuestos pour la norma. La metodología se aplica en varios pasos:

- En primer lugar, a las series temporales se les aplica una función de ponderación dependiente de la frecuencia en función de la posición de las personas (sentada, tumbada o de pie) y de la dirección de la aceleración. Este filtrado

en frecuencias tiene como objetivo atribuir un peso según la nocividad de los armónicos que componen la serie temporal. Para las personas sentadas, el filtro  $W_d$  se aplica a las vibraciones en el plano horizontal mientras que el filtro  $W_k$  a las aceleraciones verticales. Para obtener la serie temporal de la serie de aceleraciones ponderada en frecuencias, la señal debe ser transcrita del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia para una vez aplicado el filtro, trasladarla de nuevo al dominio temporal. El resultado de este proceso es la aceleración promediada en la dirección  $j$ ,  $a_{w,j}$ .

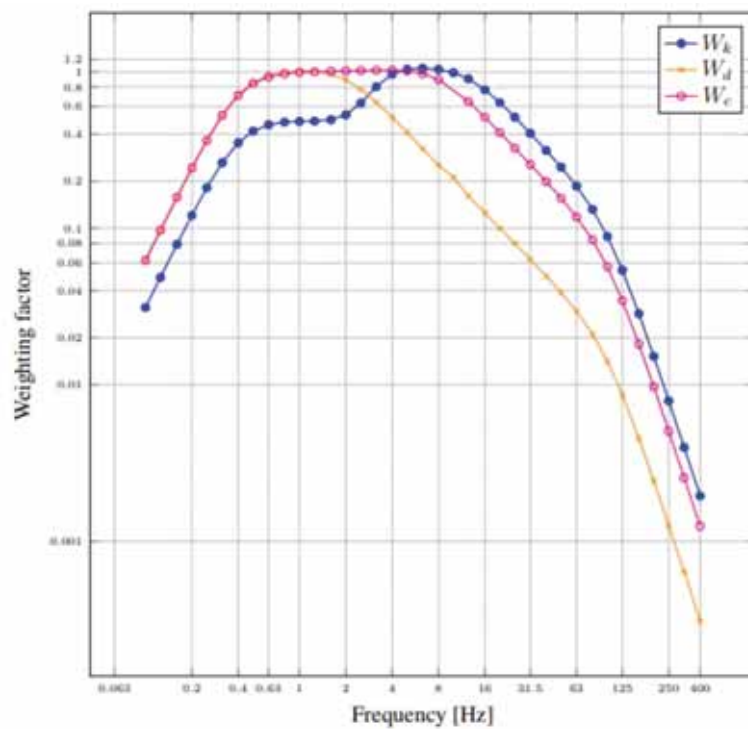


Figura 2.5: Factores de ponderación en frecuencias de las series de aceleraciones

- Una vez las series de aceleraciones son promediadas, la norma propone un método básico de aceleración basado en la media cuadrática de la serie filtrada. El método básico de evaluación es adecuado para aceleraciones con factores de cresta inferiores a 9, definiéndose el factor de cresta como el cociente entre el máximo absoluto de la serie aceleración promediada y el valor cuadrático medio de la serie.

$$\bar{a}_{w,j}(t) = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T a_{w,j}(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

Dónde  $\bar{a}_{w,j}(t)$  es la aceleración cuadrática media y T es la duración de la me-

didada.

En caso de que los factores de cresta sean superiores a 9, la norma ISO 2631 propone métodos más sofisticados para analizar el confort de las serie temporales. En las series sintéticas generadas en este trabajo, todos los factores de cresta calculados son inferiores a 9.

- Para combinar las vibraciones producidas en más de una dirección, se debe realizar la operación siguiente:

$$a_w = (k_x^2 \bar{a}_{w,x}^2 + k_y^2 \bar{a}_{w,y}^2 + k_z^2 \bar{a}_{w,z}^2)^{1/2} \quad (2.2)$$

Dónde los coeficientes  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  dependen de la posición de los pasajeros y son iguales a uno si viajan sentados.

- Finalmente, la aceleración de referencia  $a_w$  se compara con los límites de la norma:

Límites de $a_w$ , $m/s^2$	Nivel de confort
$< 0,32$	Cómodo
$0,32 - 0,63$	Ligeramente incómodo
$0,50 - 1,00$	Bastante incómodo
$0,80 - 1,60$	Incómodo
$1,25 - 2,50$	Muy incómodo
$> 2,00$	Extremadamente incómodo

Cuadro 2.1: Niveles de confort y aceleraciones límite

En el presente TFM, debido a la simplicidad del vehículo modelizado mediante masas móviles de un grado de libertad y de la estructura modelizada por elementos viga y barra en dos dimensiones, la serie temporal de aceleraciones en cabina es únicamente vertical. Por otro lado no se considera el ruido ambiental presente en las series de aceleraciones reales motivado por la propia vibración de los elementos mecánicos del vehículo, vibraciones aleatorias originadas por el viento en la estructura o el tráfico existente.

La aplicación de la metodología se limita, por tanto, al filtrado de la serie de aceleraciones verticales en cabina mediante el filtro Wk y al cálculo de la media

cuadrática. Sin embargo, mediante esta aplicación simple se consigue obtener una estimación del nivel de confort de tránsito de las diferentes configuraciones de estudio, detectando las más vulnerables.

# 3

## Formulación del problema de interacción

### 3.1. Modelo de estructura

Para modelizar el problema, se podría considerar la estructura como un continuo, un número infinito de gdl regidos por la ecuación de la elástica de vigas, sin embargo debido a la complejidad de los cálculos iterativos necesarios para la resolución del problema dinámico se ha optado por limitar los grados de libertad del estudio mediante la aplicación del método de los elementos finitos.

En el presente trabajo, la estructura se ha discretizado en elementos con dos nodos cuya información geométrica y mecánica es representada por medio de sus matrices de masa, amortiguamiento y de rigidez obtenidas mediante el método de los elementos finitos.

El procedimiento de los elementos finitos se basa en la utilización de funciones base (polinomios interpoladores) o también llamadas funciones sombrero para aproximar la verdadera solución analítica. Estas funciones sombrero suelen ser polinomios de distinto grado según la precisión del cálculo y los objetivos deseados, siendo los lineales los polinomios interpoladores más básicos.

El paso de la formulación fuerte a la formulación débil en EF se realiza mediante la aplicación, en este caso, del principio de los Trabajos Virtuales. Lo que conlleva

a igualar en cada elemento el trabajo de deformación interna con el trabajo de las fuerzas exteriores. El método de los EF será exacto siempre y cuando la solución exacta del problema esté contenida en el conjunto generado por las funciones de interpolación.

Es importante tener en cuenta que el método de los EF es un método de resolución en desplazamientos. Por ello, y al contrario que en el método de la flexibilidad, los resultados del análisis son los desplazamientos nodales de la estructura, a partir de los cuales se puede reconstituir el campo de desplazamientos total mediante el uso de las funciones de interpolación. Es por ello que los esfuerzos se obtienen por derivación del campo de desplazamientos y por tanto de las funciones de interpolación, lo que implica que si el interés del análisis reside en los esfuerzos, se deben utilizar funciones de interpolación de orden elevado.

Los nodos de la estructura representan el sistema de coordenadas generalizadas, a partir del cual, se representan los desplazamientos de la estructura con la ayuda de los polinomios interpoladores.

El paso de la formulación fuerte del proble

Las ventajas del método son las siguientes:

- Se puede introducir un número arbitrario de nodos en función de la precisión deseada.
- Los cálculos son altamente simplificados si se escogen las mismas funciones de interpolación en todos los elementos.
- Las ecuaciones dinámicas del sistema se desacoplan ya que el desplazamiento de un nodo sólo afecta a sus vecinos (principio de las funciones sombrero).

Es por ello, que según la bibliografía especializada, el método de los elementos finitos es el más potente para la resolución de problemas dinámicos permitiendo expresar los desplazamientos globales de una estructura en un número finito de coordenadas generalizadas.



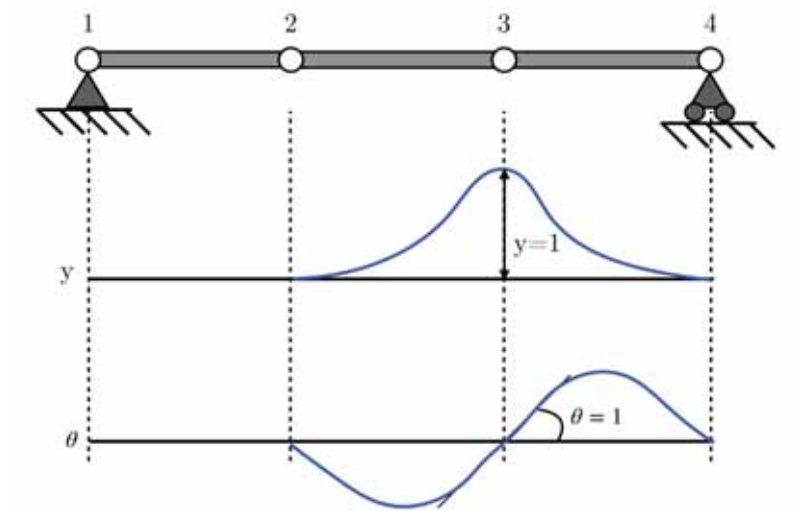


Figura 3.1: Modelización por elementos finitos

### 3.1.1. Ecuación general de la elástica de vigas

En esta sección se estudia el caso de vigas rectas definidas como el sólido engendrado por una sección recta  $A$  a lo largo de una línea media, normal al plano de la sección. En el planteamiento nos limitamos a la flexión de estructuras planas en el plano  $(x,y)$  dónde la línea media es dirigida según  $x$ .

En primer lugar, se estudia el equilibrio de un elemento diferencial de viga, considerando en este caso, los efectos inerciales de la masa y sin amortiguamiento:

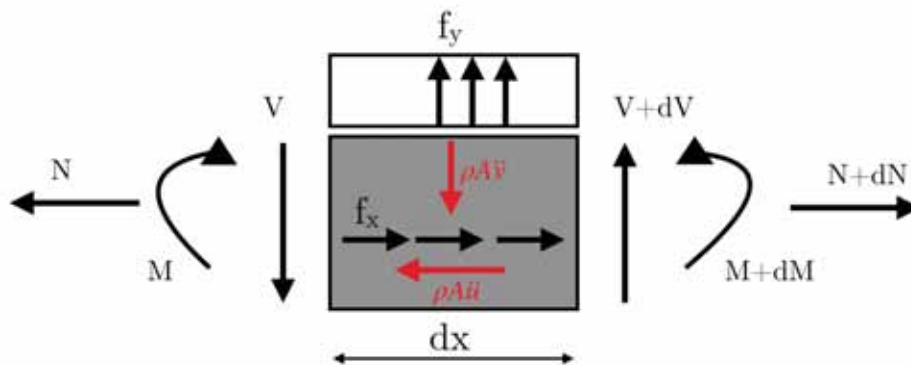


Figura 3.2: Elemento diferencial de viga en equilibrio dinámico

- El equilibrio horizontal resulta:

$$dN + f_x dx = \rho A \ddot{u} dx$$

$$\frac{\partial N(x, t)}{\partial x} + f_x = \rho A \ddot{u}$$

Dónde  $\rho$  es la densidad del elemento,  $S$  es su área y  $u(x,t)$  es el desplazamiento axial.

- El equilibrio de esfuerzos vertical se escribe:

$$dV + f_y dx = \rho A \ddot{v} dx$$

$$\frac{dV(x, t)}{dx} + f_y = \rho A \ddot{v}$$

Dónde  $v(x,t)$  es el desplazamiento vertical de la viga.

- El equilibrio de momentos despreciando los términos de segundo orden y la inercia en rotación de la viga resulta:

$$\frac{dM}{dx} + V = 0$$

Una vez descrito el equilibrio dinámico del elemento, se determina la cinemática de la viga. Una partícula de la viga plana de coordenadas  $(x,y)$ , se sufrirá, tras aplicación de la carga, un desplazamiento caracterizado por dos traslaciones ( $u$  y  $v$ ) y una rotación ( $\theta$ ). El campo de desplazamientos es entonces:

$$\underline{U}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x) - y\theta(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

A partir del campo de desplazamientos, se pueden calcular las deformaciones ligadas a cada esfuerzo:

- La deformación axial es :

$$\delta = \frac{du}{dx}$$

- La deformación por cortante transversal es:

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta$$

- La curvatura de flexión es:

$$\chi = \frac{d\theta}{dx}$$

En este estudio se aplica la hipótesis de vigas de Navier-Bernoulli que establece que tras la deformación de la viga, las secciones rectas normales a la fibra media, siguen plana y ortogonales a la fibra media deformada ( $\theta = v'$ ). Tras ello, las deformaciones son:

$$\delta = \frac{du}{dx}, \quad \gamma = 0, \quad \chi = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Para finalizar el planteamiento, tras la aplicación de las condiciones de equilibrio y cinemáticas, sólo queda introducir las ecuaciones constitutivas o leyes de comportamiento. Asumiendo un comportamiento elástico lineal, las ecuaciones constitutivas del esfuerzo axial y flector son:

$$N = EA\delta, \quad M = EI\chi$$

Combinando las ecuaciones precedentes, llegamos a la ecuación de comportamiento dinámico de vigas a axil y flexion:

$$EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -f_x \quad (3.2)$$

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = f_y \quad (3.3)$$

Reordenando la primera ecuación, se obtiene la ecuación de propagación de ondas axiales en una viga:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{f_x}{\rho A} \quad (3.4)$$

Dónde  $c$  es la celeridad de ondas de axil:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

#### Viga sobre cimentación elástica

En este trabajo se analizará el efecto dinámico del tráfico sobre un puente y a modo de comparación, se considera también el efecto de los vehículos circulando en una calzada que reposa sobre el terreno natural. Para ello, se recurre a una modelización de viga apoyada sobre apoyos elásticos cuya reacción depende del movimiento vertical de la viga que representa las capas más rígidas adheridas del pavimento.

Para ello hay diversos tipos de modelizaciones de la reacción  $p$  del terreno de cimentación, siendo las más utilizadas:

- Modelo de Winkler. Este modelo de cimentación considera únicamente el parámetro  $k$ , que representa la constante de proporcionalidad entre la reacción  $p(x)$  y la flecha de la viga  $v(x)$ :

$$p(x) = -kv(x) \tag{3.5}$$

*Nota: El signo negativo de la ecuación precedente viene del hecho que la presión del terreno tiene la misma dirección pero sentido opuesto a la deflexión de la viga.*

El modelo de Winkler ha sido mejorado asumiendo interacciones entre muelles y añadiendo un segundo parámetro (modelos de Pasternak o Vlasov).

- Modelo de Pasternak. Es un modelo biparamétrico que asume que la parte superior de los muelles está conectada a una capa incompresible de grosor unitario que se deforma únicamente por cortante.

$$p(x) = -kv(x) + k_p \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \tag{3.6}$$

En este estudio nos limitamos a la utilización del modelo de Winkler. Para la formulación de las ecuaciones, partimos de un elemento diferencial de viga sobre ci-

mentación elástica:

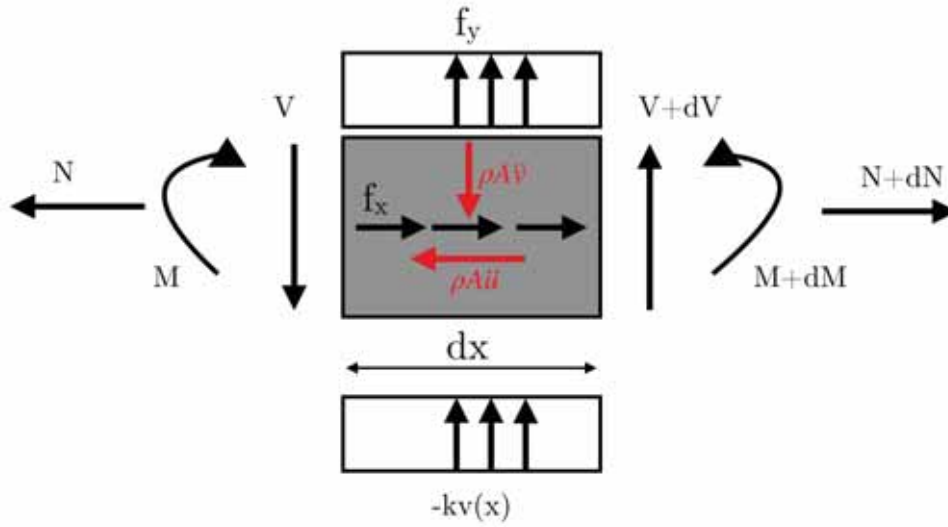


Figura 3.3: Elemento diferencial de viga sobre cimentación elástica de tipo Winkler en equilibrio dinámico

Destaca que la única diferencia respecto a la formulación tratada en la sección anterior viene del hecho de considerar en el equilibrio vertical la acción de la presión del suelo  $-kv(x)$ .

Repitiendo el mismo procedimiento descrito anteriormente, se obtienen las ecuaciones de comportamiento dinámico de vigas sobre cimentación elástica Winkler en axil y flector:

$$EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -f_x \quad (3.7)$$

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + kv(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = f_y \quad (3.8)$$

### 3.1.2. Formulación débil mediante el Principio de Trabajos Virtuales

El Principio de Trabajos Virtuales (PTV) es una dualización de las ecuaciones de equilibrio y constituye la formulación débil del problema. Este principio establece que sea un elemento cargado por un tursor de esfuerzos  $\underline{F}$ , siendo  $\hat{U}$  un campo de desplazamientos cinemáticamente admisible con las condiciones de contorno de la

estructura, se cumple que el trabajo virtual externo de la carga es igual al trabajo de deformación más el trabajo de las fuerzas inerciales.

$$W_{def} + W_{acc} = W_{ext} \quad (3.9)$$

En el medio continuo la expresión precedente se escribe de la manera siguiente:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{\epsilon}}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \cdot \underline{\underline{\ddot{U}}} \cdot \underline{\underline{\hat{U}}} d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\hat{U}}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\hat{U}}} dS, \quad \forall \underline{\underline{\hat{U}}} \text{ CA y continuo} \quad (3.10)$$

El principio del mínimo de la energía potencial establece que la combinación del PTV con la ley de comportamiento material (condición constitutiva) implica un mínimo de la solución del problema de entre todos los campos  $\underline{\underline{\hat{U}}}$  cinemáticamente admisibles posibles. Es por ello que la solución  $\underline{\underline{U}}$  obtenida a partir de las condiciones constitutivas conduce al mínimo del funcional energía potencial,  $\Pi = W_{el} - W_{ext}$ .

Al particularizar las expresiones del Principio de los Trabajos Virtuales del medio continuo al caso particular de las ecuaciones de la teoría de vigas de Navier-Bernoulli (sin deformación por cortante), se obtienen las expresiones siguientes para un elemento de longitud  $l$  en el plano  $xy$  orientado según  $x$ :

- Trabajo de deformación interna:

$$W_{def} = \int_0^l (N\hat{\delta} + M\hat{\chi}) dx$$

$$W_{def} = \int_0^l (N\hat{u}' + M\hat{v}'') dx$$

Reincorporando las leyes constitutivas se obtiene:

$$W_{def} = \int_0^l (EAu'\hat{u}' + EIv''\hat{v}'') dx \quad (3.11)$$

- Trabajo de las fuerzas de aceleración:

$$W_{acc} = \int_0^l \rho A \ddot{u} \hat{u} dx + \int_0^l \rho A \ddot{v} \hat{v} dx \quad (3.12)$$

- Trabajo de las fuerzas exteriores. Dentro del trabajo de este término, consi-

deramos el eventual empuje del terreno, en el caso de la viga sobre apoyos elásticos, y el trabajo de las cargas móviles (vehículos).

Para la modelización matemática de los vehículos (considerados como fuerzas móviles o como masas móviles), se debe recurrir a la función  $\delta$  de Dirac que tiene las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned}\delta(0) &= \infty \\ \delta(\neq 0) &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)f(x) dx &= f(a)\end{aligned}$$

Esta función se puede asimilar a un impulso cuando toma el valor 0. Por ello, cuando un vehículo se desplaza a una velocidad  $c$  constante a lo largo del eje  $x$  de un elemento, su punto de aplicación será la coordenada  $x=ct$ , con lo que la fuerza se modeliza como:

$$F_y = F_q\delta(x - ct) \tag{3.13}$$

Dónde  $F_q$  será la magnitud de la fuerza en el caso de una modelización mediante fuerzas móviles o la fuerza de contacto  $F_c$  si se considera la interacción vehículo-estructura.

Teniendo en cuenta las consideraciones precedentes, el trabajo de las fuerzas exteriores es:

$$\begin{aligned}W_{ext} &= \int_0^l F_q\delta(x - ct)\hat{v}(ct)dx - \int_0^l kv\hat{v}dx \\ &= F_q\hat{v}(ct) \int_0^l \delta(x - ct)dx - \int_0^l kv\hat{v}dx\end{aligned} \tag{3.14}$$

Dónde:

$$\int_0^l \delta(x - ct) dx = \begin{cases} 0, & \text{Si la fuerza no está entre los nodos } ij \text{ del elemento.} \\ 1, & \text{Si la fuerza está contenida el elemento} \end{cases} \quad (3.15)$$

Una vez definidos los trabajos elementales que contribuyen al PTV, se llega a la expresión siguiente:

$$\int_0^l (EAu' \hat{u}' + EIv'' \hat{v}'') dx + \int_0^l \rho A \ddot{u} \hat{u} dx + \int_0^l \rho A \ddot{v} \hat{v} dx = \int_0^l F_q \delta(x - ct) \hat{v}(ct) dx - \int_0^l kv \hat{v} dx \quad (3.16)$$

## Interpolación del campo de desplazamientos

La base del método de los Elementos Finitos reside en la elección de las funciones de interpolación. En la mayoría de los problemas del medio continuo, ante el desconocimiento de la solución analítica, se recurre a funciones de interpolación polinómicas de mayor o menor grado según el interés del estudio recaiga en esfuerzos o desplazamientos respectivamente. En el caso de vigas, la solución exacta del problema elástico lineal es conocida, por lo que se puede razonar a la inversa y utilizar las funciones de interpolación de la solución exacta.

En lo que se refiere al desplazamiento axial, en el problema que se trata en este TFM, no es preponderante, aunque si merece ser tenido en cuenta en el estudio de puentes atirantados. Debido a que los esfuerzos aplicados son fundamentalmente puntuales y no se consideran cargas distribuidas, los polinomios de interpolación escogidos para representar el campo de desplazamientos axial varía linealmente en el elemento:

$$u(x) = \underline{N}_u^T(x) \cdot \underline{U}_u = N_{u,1}(x)u_i + N_{u,2}(x)u_j \quad (3.17)$$

Siendo  $N_1$  y  $N_2$  las funciones de forma o polinomios interpoladores del elemento:

$$N_{u,1} = 1 - \frac{x}{l}; \quad N_{u,2} = \frac{x}{l} \quad (3.18)$$



La deformaci3n longitudinal elemental se obtiene simplemente derivando el campo de desplazamientos:

$$\delta = \frac{du(x)}{dx} = N'_{u,1}(x)u_i + N'_{u,2}(x)u_j = \frac{-1}{l}u_i + \frac{1}{l}u_j \quad (3.19)$$

En cuanto al desplazamiento vertical, deben ser al menos polinomios de grado dos para evitar que la curvatura y el momento flector sean nulos, pero para poder imponer cuatro condiciones de contorno en las extremidades, deben ser al menos c3bicos:

$$v(x) = \underline{N}_v^T(x) \cdot \underline{U}_v = N_{v,1}(x)v_i + N_{v,2}(x)\theta_i + N_{v,3}(x)v_j + N_{v,4}\theta_j \quad (3.20)$$

Siendo las funciones de forma del desplazamiento vertical las siguientes:

$$\begin{cases} N_{v,1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_{v,2}(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ N_{v,3}(x) = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_{v,4}(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{cases} \quad (3.21)$$

Teniendo en cuenta las hip3tesis de Navier-Bernoulli, se puede reconstruir la cinemática de la viga:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= N'_{v,1}(x)v_i + N'_{v,2}(x)\theta_i + N'_{v,3}(x)v_j + N'_{v,4}(x)\theta_j \\ \chi(x) &= N''_{v,1}(x)v_i + N''_{v,2}(x)\theta_i + N''_{v,3}(x)v_j + N''_{v,4}(x)\theta_j \end{aligned} \quad (3.22)$$

## Obtenci3n de las matrices de masa y rigidez elementales

Expresando el campo de desplazamientos horizontal mediante las expresiones 3.17 y 3.20 y sustituyendo en 3.16 se obtiene:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\underline{U}_u^T EA \int_0^l \underline{N}'_u(x) \underline{N}'_u{}^T(x) dx \hat{U}_u + \underline{U}_v^T EI \int_0^l \underline{N}''_v(x) \underline{N}''_v{}^T(x) dx \hat{U}_v}_{W_{def}} + \\ &+ \underbrace{\underline{U}_u^T \rho A \int_0^l \underline{N}_u(x) \underline{N}_u^T(x) dx \hat{U}_u + \underline{U}_v^T \rho A \int_0^l \underline{N}_v(x) \underline{N}_v^T(x) dx \hat{U}_v}_{W_{acc}} = \\ &= \underbrace{F_q \underline{N}_v^T(ct) \hat{U}_v \int_0^l \delta(x - ct) dx - \underline{U}_v^T k \int_0^l \underline{N}_v(x) \underline{N}_v(x)^T dx \hat{U}_v}_{W_{ext}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3. Formulación del problema de interacción

---

De la expresión precedente se pueden simplificar los desplazamientos virtuales  $\hat{U}_u$  y  $\hat{U}_v$  y se identifican las matrices de rigidez y masa y el vector nodal de cargas externas:

- Matriz de rigidez a axil:

$$\underline{\underline{K}}_u = EA \int_0^l \underline{N}'_u(x) \underline{N}'_u{}^T(x) dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

- Matriz de rigidez a flexión:

$$\underline{\underline{K}}_v = EI \int_0^l \underline{N}''_v(x) \underline{N}''_v{}^T(x) dx = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

- Matriz de masas a axil:

$$\underline{\underline{M}}_u = \rho A \int_0^l \underline{N}_u(x) \underline{N}_u{}^T(x) dx = \rho Al \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

- Matriz de masas a flexión:

$$\underline{\underline{M}}_v = \rho A \int_0^l \underline{N}_v(x) \underline{N}_v{}^T(x) dx = \rho Al \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11l}{210} & \frac{9}{70} & \frac{-13l}{420} \\ \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & \frac{13l}{420} & \frac{-l^2}{140} \\ \frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & \frac{13}{35} & \frac{-11l}{210} \\ \frac{-13l}{420} & \frac{-l^2}{140} & \frac{-11l}{210} & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

- Vector de cargas externas:

$$\underline{F} = F_q \underline{N}_v(ct) \int_0^l \delta(x - ct) dx = F_q \begin{Bmatrix} N_{v,1}(ct) \\ N_{v,2}(ct) \\ N_{v,3}(ct) \\ N_{v,4}(ct) \end{Bmatrix} \int_0^l \delta(x - ct) dx \quad (3.28)$$

- Efecto de la cimentación elástica:

$$-\underline{\underline{K}}_{cim} = -k \int_0^l \underline{N}_v(x) \underline{N}_v^T(x) dx = kl \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11l}{210} & \frac{9}{70} & \frac{-13l}{420} \\ \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & \frac{13l}{420} & \frac{-l^2}{140} \\ \frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & \frac{13}{35} & \frac{-11l}{210} \\ \frac{-13l}{420} & \frac{-l^2}{140} & \frac{-11l}{210} & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Condensando los grados de libertad de axil y flexión en el vector  $\underline{U}^T = \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\}$  se obtienen las matrices de rigidez y masa de axil y flector elementales. Asimismo, se incluye el efecto rigidizador de la cimentación elástica en la matriz de rigidez y se obtienen las siguientes matrices elementales:

$$\underline{\underline{K}}_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} + \frac{13}{35}kl & \frac{6EI}{l^2} + \frac{11}{210}kl^2 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} + \frac{9}{70}kl & \frac{6EI}{l^2} + \frac{-13}{420}kl^2 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} + \frac{11}{210}kl & \frac{4EI}{l} + \frac{1}{105}kl^3 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} + \frac{13}{420}kl^2 & \frac{2EI}{l} + \frac{-1}{140}kl^3 \\ -\frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} + \frac{9}{70}kl & -\frac{6EI}{l^2} + \frac{13}{420}kl^2 & 0 & \frac{12EI}{l^3} + \frac{13}{35}kl & -\frac{6EI}{l^2} + \frac{-11}{210}kl^2 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} + \frac{-13}{420}kl^2 & \frac{2EI}{l} + \frac{-1}{140}kl^3 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} + \frac{-11}{210}kl^2 & \frac{4EI}{l} + \frac{1}{105}kl^3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\underline{\underline{M}}_e = \rho Al \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & \frac{-13l}{420} \\ 0 & \frac{11l}{210} & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & \frac{-l^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & \frac{-11l}{210} \\ 0 & \frac{-13l}{420} & \frac{-l^2}{140} & 0 & \frac{-11l}{210} & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Realizando el ensamblaje de matrices elementales, se obtiene la ecuación de equilibrio dinámica global de la estructura según el método de los Elementos Finitos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_e(\underline{\underline{M}}_e \ddot{\underline{U}}_e) + \mathcal{A}_e(\underline{\underline{K}}_e \underline{U}_e) &= \mathcal{A}_e \underline{F}_e(t) \\ \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}} \underline{U} &= \underline{F}(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

## Consideración del amortiguamiento

La modelización del amortiguamiento es una de las mayores complicaciones del cálculo dinámico, pues las fuentes de amortiguamiento son realmente complejas (plantificación de materiales, rozamiento entre juntas, movimientos de microfisuras, deformación de elementos secundarios de la estructura, ... ). Debido a la dificultad de la modelización rigurosa de todos los fenómenos, una técnica comúnmente utilizada consiste en la consideración de un amortiguamiento viscoso equivalente para representar la disipación de energía. Es por ello que para estimar el amortiguamiento de una estructura, se recurre habitualmente a dos técnicas:

- Medir la disipación de energía de la estructura bajo distintas cargas y determinar el amortiguamiento equivalente.
- Estimar a priori el amortiguamiento de la estructura.

Haciendo la hipótesis que los modos propios poseen las mismas propiedades de ortogonalidad con respecto a la matriz de amortiguamiento que con respecto a las matrices de masa y rigidez, la solución de  $N$  ecuaciones diferenciales puede resolverse mediante la técnica de descomposición modal como suma de  $N$  osciladores a 1 gdl.

Para obtener a las ecuaciones modales, una hipótesis importante se ha hecho sobre la estructura de la matriz de amortiguamiento. Gracias a ello, los únicos datos necesarios para el análisis son los porcentajes de amortiguamiento críticos equivalentes de cada modo.

Sin embargo, en algunos casos es necesario construir una matriz de amortiguamiento cuando se recurre a cálculos por integración temporal en sistemas no lineales. En estos casos, varias técnicas pueden ser aplicadas como la construcción de una matriz de amortiguamiento a partir del amortiguamiento modal o a partir de datos geométricos y de comportamiento en el caso de amortiguadores localizados para el aislamiento sísmico por ejemplo. El primer método conduce a un amortiguamiento ortogonal porque la diagonalización de la matriz de amortiguamiento en la base de los modos propios es preservado mientras que el segundo método conduce a un

amortiguamiento no diagonal que necesita el uso de técnicas específicas para la resolución mediante descomposición modal.

En el caso de conocer los porcentajes de amortiguamiento crítico de  $N$  modos, se puede construir directamente la matriz de amortiguamiento modal, que es especialmente indicada para el cálculo mediante descomposición modal. La matriz se construye de la manera siguiente:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{M}} \left( \sum_{j=1}^N \frac{2\xi_j w_j}{m_j} \underline{\underline{D}}_j \otimes \underline{\underline{D}}_j^T \right) \underline{\underline{M}} \quad (3.33)$$

Dónde  $m_j$  es la masa generalizada del modo  $j$ ,  $w_j$  es su pulsación propia y  $\underline{\underline{D}}_j$  es su vector propio. El operador  $\otimes$  es el producto tensorial externo.  $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}} \rightarrow g_{ij} = a_i b_j \quad i, j = 1, 2 \dots N$ .

El método más utilizado para la construcción de la matriz de amortiguamiento en el caso de cálculos por integración directa es mediante el amortiguamiento de Rayleigh. Este método parte de la estructura de la matriz de amortiguamiento formada por combinación lineal de la matriz de masa y de la matriz de rigidez:

$$\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}} \quad (3.34)$$

Dónde el porcentaje de amortiguamiento crítico equivalente se expresa de la manera siguiente:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \quad (3.35)$$

El amortiguamiento modal obtenido mediante la ecuación precedente se compone de dos términos, uno proporcional a la pulsación otro inversamente proporcional a ésta. En general, es conveniente representar la disipación de energía de un sistema por un amortiguamiento independiente de la frecuencia, lo que se puede conseguir, de manera aproximada, a partir de una elección apropiada de los valores  $\alpha$  y  $\beta$ . El cálculo de los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  se realiza fijando los amortiguamientos de la primera pulsación del sistema  $w_1$  y su porcentaje de amortiguamiento crítico  $\xi_1$  y generalmente se toma el valor de  $w_2$  como la mayor pulsación de interés del sistema

y  $\xi_2$  su amortiguamiento:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/w_1 & w_1 \\ 1/w_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

La limitación fundamental del método de Rayleigh consiste en que sólo se puede imponer el amortiguamiento en dos frecuencias, mientras que en el resto de pulsaciones, sus amortiguamientos vienen impuestos por el método. Una generalización del método de Rayleigh consiste en el método de Caughey, en el que la matriz de amortiguamiento se expresa como una combinación lineal de p términos constituidos por el producto de la matriz de masa y de la matriz de rigidez. Siendo p igual al número de modos menos uno del que se dispone del amortiguamiento.

### 3.1.3. Simulación de la rugosidad del firme

La modelización de la rugosidad del firme es necesaria siempre que se efectúen estudios de confort de tránsito y cuando se modeliza la interacción vehículo-estructura, (Tyan et al., 2009). La obtención del perfil de rugosidad  $r(x)$  se basa en la superposición de funciones sinusoidales de frecuencia angular  $\Omega_i$  (rad/s), de amplitud  $A_i$  (mm) y de desfase  $\varphi_i$ :

$$r(x) = \sum_i A_i \text{sen}(\Omega_i x - \varphi_i) \quad (3.37)$$

El perfil del pavimento se define mediante una función de densidad espectral (PSD) a partir de la cual se extrae la amplitud con respecto al plano de referencia. La forma de la función PSD en el dominio de la frecuencia angular y espacial es la siguiente:

$$\phi(\Omega) = \phi(\Omega_0) \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{-w} \quad \text{o} \quad \phi(n) = \phi(n_0) \left( \frac{n}{n_0} \right)^{-w} \quad (3.38)$$

Dónde:

- $\Omega = \frac{2\pi}{L}$ , en rad/m denota la frecuencia angular y L la longitud de onda. El valor de  $\Omega_0$  de referencia según la norma ISO 8608 es de 1 rad/m.
- $n = \frac{\Omega}{2\pi}$ , en ciclos/m es la frecuencia espacial, siendo  $n_0$  igual a 0,1 ciclos/m.
- w es la ondulación de la superficie que según la literatura especializada toma

### 3. Formulación del problema de interacción

el valor de 2.

Según la norma ISO 8608, los valores de  $\phi(\Omega_0)$  y  $\phi(n_0)$  para la generación del perfil de rugosidad dependen del estado de pavimento tomando los valores que se muestran en la tabla siguiente:

Estado del pavimento	$\phi(\Omega_0)(10^{-6}m^3)$	$\phi(n_0)(10^{-6}m^2/(ciclos/m))$
A (muy bueno)	1	16
B (bueno)	4	64
C (medio)	16	256
D (pobre)	64	1024
E (muy pobre)	256	4096

Cuadro 3.1: Grado de rugosidad, valores medios según la norma ISO 8608

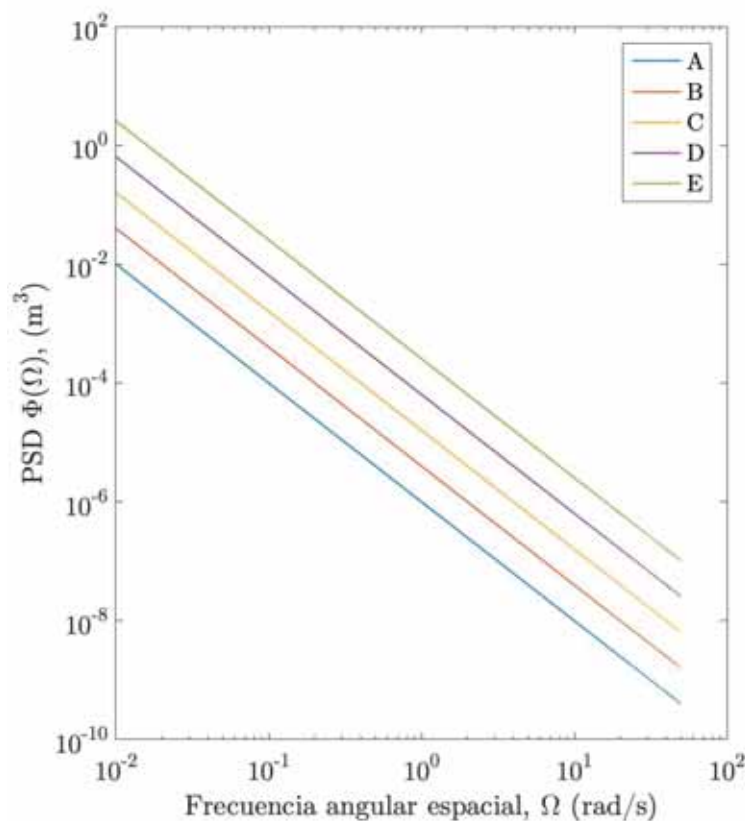


Figura 3.4: Definición de los perfiles de rugosidad mediante sus funciones de densidad espectral

Pavimentos bituminosos y de hormigón nuevos tienen en general una calidad "buena"(B) o "muy buena"(A). Si la superficie de rodadura no se mantiene adecuadamente, el pavimento se clasifica dentro del grupo C. Por otro lado, las capas de

rodadura formadas por materiales granulares tipo macadam o adoquinados tienen una calidad "media", "pobre."o "muy pobre".

El desfase  $\varphi_i$  se obtiene a partir de una distribución de probabilidad uniforme entre los valores de 0 y  $2\pi$ . La amplitud  $A_i$  se obtiene a partir de la definición de PSD de la manera siguiente:

$$A_i = \sqrt{\phi(\Omega_i) \frac{\Delta\Omega}{\pi}}; \quad A_i = \sqrt{2\phi(\Omega_i)\Delta n} \quad (3.39)$$

Dónde  $\Delta\Omega$  (rad/m) es la resolución de la frecuencia angular y  $\Delta n$  (ciclos/m) es la resolución de la frecuencia espacial que se ha tomado en la discretización.

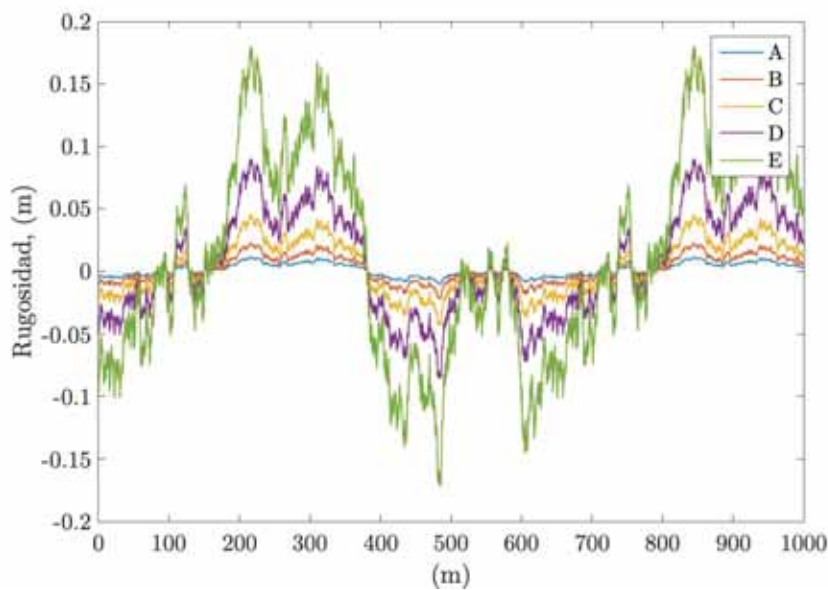


Figura 3.5: Representación espacial de los perfiles de rugosidad generados



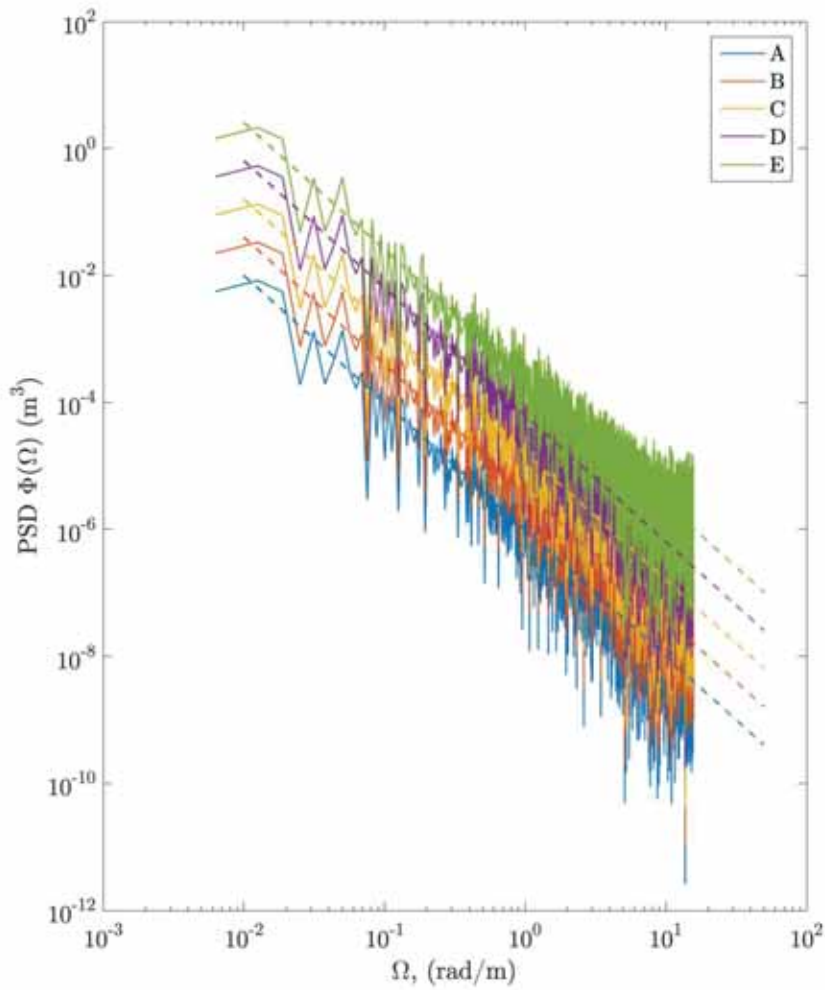


Figura 3.6: Representación frecuencial de los perfiles de rugosidad generados; en trazo discontinuo se representan los modelos teóricos y en trazo continuo los generados

## 3.2. Modelo de vehículos

### 3.2.1. Cálculo de las fuerzas de contacto

El cálculo de las fuerzas de contacto tiene en cuenta el acoplamiento de las respuestas del vehículo y de la estructura. Para su resolución, se comienza por establecer las ecuaciones de gobierno del modelo de vehículo empleado separando la parte en contacto con la estructura de la parte superior del vehículo. Para ello se puede emplear el método directo si el modelo es simple.

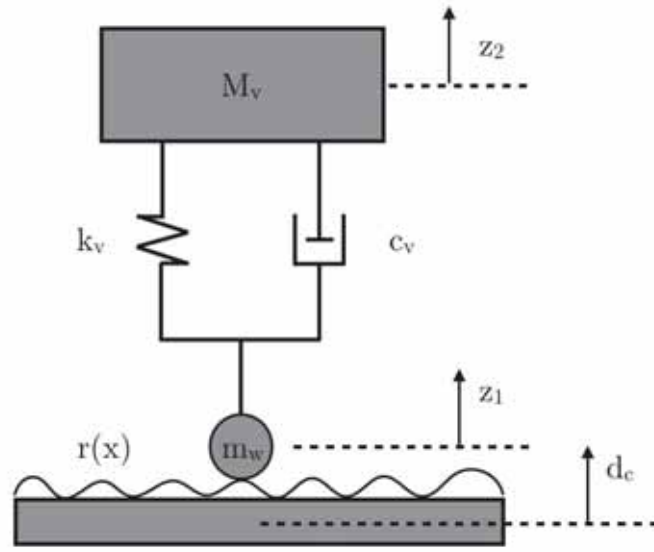


Figura 3.7: Modelo de vehículo con un grado de libertad sobre una estructura con pavimento rugoso

Partiendo de la posición en reposo, la ecuación dinámica del vehículo es:

$$\begin{bmatrix} M_v & 0 \\ 0 & m_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_v & -c_v \\ -c_v & c_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_v & -k_v \\ -k_v & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(M_v + m_w)g + f_c \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Resolviendo incrementalmente la parte del vehículo que no contacta con el firme (primera línea de la ecuación 3.40), se obtiene:

$$M_v \ddot{z}_{2,t+\Delta t} + c_v \dot{z}_{2,t+\Delta t} + k_v z_{2,t+\Delta t} = c_v \dot{z}_{1,t+\Delta t} + k_v z_{1,t+\Delta t} \quad (3.41)$$

Aplicando el método de Newmark (ecuaciones 3.67) al grado de libertad superior se obtiene:

$$\begin{aligned} & M_v \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta z_2 - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{z}_{2,t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{z}_{2,t} \right] + \\ & + c_v \left[ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta z_2 + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{z}_{2,t} + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \Delta t \right) \Delta t \ddot{z}_{2,t} \right] + \\ & + k_v (z_2 + \Delta z_2) = c_v \dot{z}_{1,t+\Delta t} + k_v z_{1,t+\Delta t} \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3. Formulación del problema de interacción

---

De la ecuación precedente se puede despejar  $\Delta z_2$ , obteniéndose lo siguiente:

$$\Delta z_2 = \Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) \quad (3.43)$$

Dónde:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= M_v \frac{1}{\beta \Delta t^2} + c_v \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + k_v \\ q_{2,c} &= c_v \dot{z}_{1,t+\Delta t} + k_v z_{1,t+\Delta t} \\ q_{2,t} &= -M_v \left[ -\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{z}_{2,t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{z}_{2,t} \right] - \\ &\quad - c_v \left[ \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{z}_{2,t} + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \Delta t \right) \Delta t \ddot{z}_{2,t} \right] - k_v z_{2,t} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Los desplazamientos de la parte superior del vehículo en el instante  $t + \Delta t$  tras la aplicación del esquema de Newmark son:

$$\begin{aligned} z_{2,t+\Delta t} &= z_{2,t} + \Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) \\ \dot{z}_{2,t+\Delta t} &= \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{z}_{2,t} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{z}_{2,t} \\ \ddot{z}_{2,t+\Delta t} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[ \Psi_2^{-1}(q_{2,t} + q_{2,c}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{z}_{2,t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{z}_{2,t} \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sustituyendo las expresiones precedentes en la ecuación de gobierno de la parte inferior del vehículo (línea 1 de la ecuación matricial 3.40), se obtiene, tras varias manipulaciones, la expresión siguiente de las fuerzas de contacto:

$$f_{c,t+\Delta t} = m_w \ddot{z}_{1,t+\Delta t} + c_c \dot{z}_{1,t+\Delta t} + k_c z_{1,t+\Delta t} + q_{c,t} + (M_v + m_w) g_{t+\Delta t} \quad (3.46)$$

Dónde los términos son:

$$\begin{aligned}
 c_c &= c_v - \left( \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c_v + k_v \right) \Psi_2^{-1} c_v \\
 k_c &= k_v - \left( \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c_v + k_v \right) \Psi_2^{-1} k_v \\
 q_{c,t} &= \left( -\frac{\gamma}{\beta \Delta t} c_v - k_v \right) \Psi_2^{-1} q_{2,t} - q_{1,t} \\
 q_{1,t} &= c_v \left[ \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{z}_{2,t} + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{z}_{2,t} \right] + k_v z_{2,t}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Se aprecia como la fuerza de contacto en el instante  $t + \Delta t$  no sólo depende de la respuesta en ese instante sino también en el instante precedente. Aplicando la condición de contacto rueda-estructura, se pone de manifiesto el acoplamiento de los dos sistemas:

$$z_1(t) = u(x_c, t) + r(x_c) \tag{3.48}$$

Dónde  $u_c$  hace referencia a la flecha vertical de la estructura en el punto de contacto y  $r_c$  es la rugosidad del pavimento en esa posición. Teniendo en cuenta la resolución por elementos finitos, la flecha vertical del punto de contacto dependerá de la posición del vehículo dentro del elemento y de los desplazamientos nodales del elemento en el que actúa:

$$z_1(t) = \underline{N}^T(\xi_c) \underline{U}_c(t) + r(x_c) \tag{3.49}$$

Dónde  $\underline{N}^T(\xi_c)$  es el vector de polinomios de interpolación que afectan a los gdl verticales obtenidos en el punto de contacto,  $\underline{U}_c(t)$  es el vector de desplazamientos nodales del elemento en el que se encuentra el vehículo y  $r(x_c)$  es la rugosidad del firme en el punto de contacto.

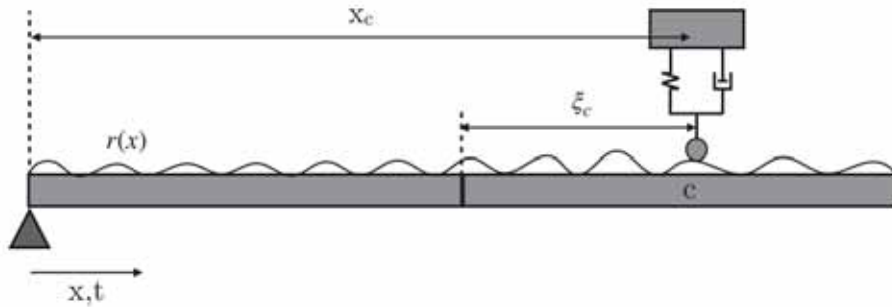


Figura 3.8: Vehículo atravesando un elemento de la estructura

El perfil del pavimento no cambia al pasar un vehículo, aunque la percepción de la rugosidad por parte de un vehículo que transita por el puente, sí es dependiente de la velocidad a la que circula. Es por ello que la condición de contacto en velocidades y aceleraciones se obtiene derivando la expresión 3.48:

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= u(x(t), t) + r(x(t)) \\
 \dot{z}_1(t) &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \\
 \ddot{z}_1(t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Teniendo en cuenta la discretización por elementos finitos, la formulación anterior se expresa de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \underline{U}_c + r(x_c) \\
 \dot{z}_1(t) &= \underline{N}'^T(\xi_c(x_c)) \underline{U}_c + \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \dot{\underline{U}}_c + r'(x_c)c \\
 \ddot{z}_1(t) &= \underline{N}''^T(\xi_c(x_c)) \underline{U}_c c^2 + 2c \underline{N}'^T(\xi_c(x_c)) \dot{\underline{U}}_c + \\
 &+ a \underline{N}'^T(\xi_c(x_c)) \underline{U}_c + \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \ddot{\underline{U}}_c + r''(x_c)c^2 + r'(x_c)a
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Dónde  $c$  es la velocidad del vehículo y  $a$  su aceleración. Es frecuente despreciar los términos ligados a la variación espacial de la flecha vertical (aceleración centrípeta y de Coriolis), y si además se considera que la velocidad es constante, la condición cinemática de contacto deviene:

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \underline{U}_c + r(x_c) \\
 \dot{z}_1(t) &= \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \dot{\underline{U}}_c + r'(x_c)c \\
 \ddot{z}_1(t) &= \underline{N}^T(\xi_c(x_c)) \ddot{\underline{U}}_c + r''(x_c)c^2
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Incluyendo la condición anterior en la ecuación de las fuerzas de contacto 3.46, se

obtiene la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
 f_{c,t+\Delta t} = & m_w \underline{N}^T(\xi(x_c)) \ddot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} + c_c \underline{N}^T(\xi(x_c)) \dot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} + k_c \underline{N}^T(\xi(x_c)) \underline{U}_{c,t+\Delta t} + \\
 & + q_{c,t} + (M_v + m_w) g_{t+\Delta t} + m_w r''(x_c) c^2 + c_c r'(x_c) c + k_c r(x_c)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Para obtener las fuerzas nodales creadas por el vehículo atravesando el elemento  $c$ , y tras aplicación del PTV (ecuación 3.28), se debe premultiplicar las fuerzas de contacto por el vector de funciones de interpolación ligadas a los gdl verticales ( $\underline{N}_v$ ) en el punto de contacto:

$$\begin{aligned}
 V_{c,t+\Delta t} = & \underline{N}(\xi_c(x_c)) f_{c,t+\Delta t} = \underbrace{\underline{N}(\xi_c(x_c)) m_w \underline{N}^T(\xi(x_c))}_{\text{matriz de masa adicional, } \underline{M}_c^*} \ddot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} + \\
 & + \underbrace{\underline{N}(\xi_c(x_c)) c_c \underline{N}^T(\xi(x_c))}_{\text{matriz de amortiguamiento adicional, } \underline{C}_c^*} \dot{\underline{U}}_{c,t+\Delta t} + \underbrace{\underline{N}(\xi_c(x_c)) k_c \underline{N}^T(\xi(x_c))}_{\text{matriz de rigidez adicional, } \underline{K}_c^*} \underline{U}_{c,t+\Delta t} + \\
 & + \underbrace{\underline{N}(\xi_c(x_c)) \left[ q_{c,t} + (M_v + m_w) g_{t+\Delta t} + m_w r''(x_c) c^2 + c_c r'(x_c) c + k_c r(x_c) \right]}_{\text{vector de fuerza adicional, } \underline{f}_c^*}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Una vez calculadas las fuerzas de contacto en el instante  $t + \Delta t$ , se integra el comportamiento del vehículo en la ecuación dinámica de la estructura:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \underline{C} \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \underline{K} \underline{U}_{t+\Delta t} = -V_{c,t+\Delta t} \tag{3.55}$$

Debido la interacción vehículo-estructura, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez elementales del elemento en el que se encuentra el vehículo en el instante de cálculo son modificadas. Haciendo pasar los términos de masa, amortiguamiento y rigidez adicional al otro lado de la ecuación, el vector de fuerzas exteriores en el instante  $t + \Delta t$  depende de la respuesta en el instante  $t$  y de las condiciones del firme, que son conocidas a priori:

$$\left( \underline{M} + \underline{M}_c^* \right) \ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \left( \underline{C} + \underline{C}_c^* \right) \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \left( \underline{K} + \underline{K}_c^* \right) \underline{U}_{t+\Delta t} = -\underline{f}_c^* \tag{3.56}$$

La respuesta del vehículo y de la estructura se obtiene de manera incremental utilizando alguno de los algoritmos de integración anteriormente citados. En el caso del presente TFM se utiliza el método de Newmark- $\beta$  con aceleración media constante (algoritmo 2).

El modelo de vehículo que hemos empleado en este desarrollo es el más simple, sin embargo, la metodología descrita es aplicable a cualquier modelo de vehículo. En primer lugar, se debe escribir el equilibrio dinámico de los vehículos separando la parte en contacto con la estructura. Aplicando el esquema de Newmark a los gdl del vehículo no en contacto con la estructura e integrando los resultados en la parte del vehículo que contacta, se obtienen las fuerzas de interacción. Esas fuerzas dan lugar a matrices de masa, amortiguamiento y rigidez adicionales en el elemento en el que actúa el vehículo que se añaden a las de la estructura global y un vector de fuerzas de contacto que es conocido a priori. La respuesta de los dos subsistemas se calcula incrementalmente a partir de esquemas de integración numérica.

## 3.3. Resolución temporal de la ecuación dinámica

### 3.3.1. Descomposición modal

La ecuación general del movimiento presenta, debido a la no diagonalidad de las matrices, un acoplamiento entre sus términos que dificulta su resolución directa:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}}\underline{U} = \underline{F}(t) \quad (3.57)$$

Para solventar ese problema, se utiliza propiedad de ortogonalidad de los modos propios, lo que permite expresar el desplazamiento total de la estructura como superposición de modos multiplicado por la función temporal:

$$\underline{U} = \sum_{i=1}^N \underline{D}_i y_i(t) \quad (3.58)$$

Dónde  $\underline{D}_i$  el el modo  $i$ .

Reescribiendo la ecuación dinámica y premultiplicando por  $\underline{D}_j^T$  se obtiene:

$$\underline{D}_j^T \underline{M} \sum_{i=1}^N \underline{D}_i \ddot{y}_i(t) + \underline{D}_j^T \underline{C} \sum_{i=1}^N \underline{D}_i \dot{y}_i(t) + \underline{D}_j^T \underline{K} \sum_{i=1}^N \underline{D}_i y_i(t) = \underline{D}_j^T \underline{P} \quad (3.59)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de modos propios podemos escribir:

$$\underline{D}_j \underline{M} \underline{D}_j \ddot{y}_j(t) + \underline{D}_j^T \underline{C} \underline{D}_j \dot{y}_j(t) + \underline{D}_j^T \underline{K} \underline{D}_j y_j(t) = \underline{D}_j^T \underline{P} \quad (3.60)$$

Definiendo las propiedades generalizadas como:

$$m_j = \underline{D}_j^T \underline{M} \underline{D}_j$$

$$c_j = \underline{D}_j^T \underline{C} \underline{D}_j$$

$$k_j = \underline{D}_j^T \underline{K} \underline{D}_j$$

$$p_j = \underline{D}_j^T \underline{P}$$

La ecuación dinámica se simplifica a:

$$m_j \ddot{y}_j(t) + c_j \dot{y}_j(t) + k_j y_j(t) = p_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.61)$$

De esta manera se reduce el problema a la resolución de  $N$  osciladores simples de un grado de libertad, que se puede llevar a cabo mediante la integral de Duhamel, transformaciones al dominio frecuencial o si la carga  $P$  es simple (sinusoidal, impulsiva rectangular ... ) mediante soluciones analíticas. Una vez obtenidas las soluciones modales, se debe obtener la respuesta total por superposición de  $N$  modos:

$$\underline{U} = \sum_{j=1}^N \underline{D}_j y_j(t) \quad (3.62)$$

### 3.3.2. Integración directa

La resolución de la ecuación dinámica mediante descomposición modal no es posible en presencia de amortiguamiento no ortogonal, en el caso de no linealidades



geométricas o materiales o en el estudio de problemas de dinámica rápida. Estos problemas pueden resolverse mediante métodos numéricos que discretizan el tiempo para la integración de las ecuaciones diferenciales. Estos métodos son de diversa tipología, e incluyen aquellos basados en la interpolación de la excitación  $p(t)$  en impulsos rectangulares o impulsos rectangulares y triangulares, para los que existe solución analítica. De otro tipo son los métodos basados en diferencias finitas, aproximando las derivadas temporales del desplazamiento (velocidad y aceleración) mediante el desarrollo de Taylor. Dentro de estos métodos, se encuentra el método de Newmark- $\beta$ , el cual será utilizado en el presente trabajo.

El objetivo de estos métodos numéricos es el conocimiento de  $\underline{U}(t)$ ,  $\underline{\dot{U}}(t)$  y  $\underline{\ddot{U}}(t)$  en diferentes instantes en el intervalo de tiempo considerado. Para ello, se debe realizar una discretización temporal del periodo de estudio en instantes en los que se calcula la respuesta de la cinemática de la estructura mediante la resolución incremental o paso a paso de la ecuación dinámica. Los diferentes esquemas de integración temporal (diferencias centradas, Newmark- $\beta$ , Wilson- $\theta$ , HHT, ...) proponen diferentes reglas de paso del instante  $t_n$  a  $t_{n+1}$ . Los esquemas de integración temporal difieren en precisión, estabilidad, coste computacional y datos de entrada (algunos necesitan los valores cinemáticos no sólo en el instante  $t_n$ , sino en  $t_{n-1}$  o  $t_{n-2}$  para calcular el instante  $t_{n+1}$ ). Los métodos más utilizados son el esquema de diferencias centradas en problemas de dinámica rápida y el esquema de Newmark en problemas habituales de dinámica de estructuras. Estos métodos consisten fundamentalmente en aproximar la variación temporal de la cinemática mediante desarrollos de Taylor truncados y realizar aproximaciones sobre el error cometido y la forma de la variación de la aceleración.

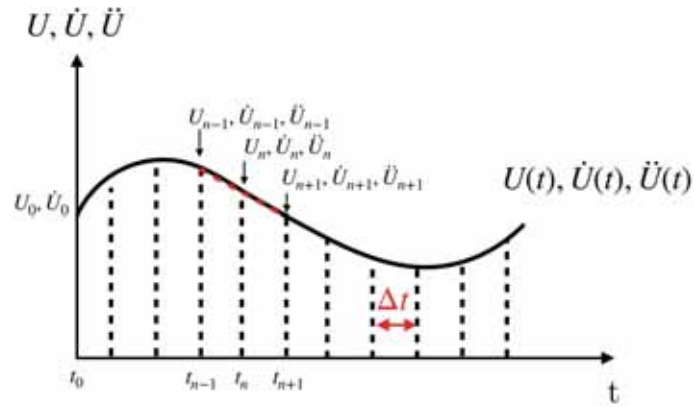


Figura 3.9: Esquema de la resolución incremental de la ecuación dinámica

### 3.3.2.1. Método de las diferencias centradas

Este método se basa en la aproximación mediante diferencias finitas de las derivadas temporales del desplazamiento. Aplicando el desarrollo de Taylor de orden dos, la expresión del desplazamiento en el instante  $t_{n+1}$  es:

$$\underline{U}(t_{n+1}) = \underline{U}(t_n + \Delta t) = \underline{U}(t_n) + \Delta t \underline{\dot{U}}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \underline{\ddot{U}}(t_n) + O(3) \quad (3.63)$$

La velocidad en el instante  $t_{n+1}$  se calcula mediante el desarrollo de Taylor de orden dos:

$$\underline{\dot{U}}(t_{n+1}) \approx \underline{\dot{U}}(t_n) + \Delta t \underline{\ddot{U}}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \underline{\ddot{\dot{U}}}(t_n) \quad (3.64)$$

Para ello se asume que la aceleración varía linealmente entre  $t_n$  y  $t_{n+1}$ :

$$\underline{\ddot{U}}(t_n) = \frac{\underline{\ddot{U}}(t_{n+1}) - \underline{\ddot{U}}(t_n)}{\Delta t} \quad (3.65)$$

Para el cálculo de la aceleración  $\underline{\ddot{U}}(t_{n+1})$ , se recurre a la ecuación de la dinámica:

$$\begin{aligned} \underline{M} \underline{\ddot{U}}(t_{n+1}) + \underline{C} \underline{\dot{U}}(t_{n+1}) + \underline{K} \underline{U}(t_{n+1}) &= \underline{F}(t_{n+1}) \\ \underline{\ddot{U}}(t_{n+1}) &= \underline{M}^{-1} \left[ \underline{F}(t_{n+1}) - \underline{C} \underline{\dot{U}}(t_{n+1}) - \underline{K} \underline{U}(t_{n+1}) \right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Generalmente, el método de las diferencias centradas es un método utilizado en problemas de choque, impacto o explosión en los que se desprecian las fuerzas viscosas y se requieren pequeños pasos de tiempo para simular acciones repentinas. Es por

---

**Algoritmo 1** Esquema de diferencias centradas

---

- 1: Definición de condiciones iniciales:  $\underline{U}_0$  y  $\underline{\dot{U}}_0$
  - 2: Cálculo de la aceleración inicial:  $\underline{\ddot{U}}_0 = \underline{M}^{-1} [\underline{F}_0 - \underline{C}\underline{\dot{U}}_0 - \underline{K}\underline{U}_0]$
  - 3: **for**  $n=\Delta t:\Delta t:t$  **do**
  - 4:     Cálculo del desplazamiento:  $\underline{U}_{n+1} = \underline{U}_n + \Delta t\underline{\dot{U}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\underline{\ddot{U}}_n$
  - 5:     Cálculo del predictor de velocidad:  $\hat{\underline{U}}_{n+1} = \underline{\dot{U}}_n + \frac{\Delta t}{2}\underline{\ddot{U}}_n$
  - 6:     Cálculo de la aceleración:  $\underline{\ddot{U}}_{n+1} = \underline{M}^{-1} [\underline{F}_{n+1} - \underline{C}\hat{\underline{U}}_{n+1} - \underline{K}\underline{U}_{n+1}]$
  - 7:     Corrección de la velocidad:  $\underline{\dot{U}}_{n+1} = \hat{\underline{U}}_{n+1} + \frac{\Delta t}{2}\underline{\ddot{U}}_{n+1}$
  - 8: **end for**
- 

ello que la cancelación de la matriz de amortiguamiento en el análisis hace que se pueda obtener la aceleración en el instante  $t_{n+1}$  sin necesidad del predictor de velocidad  $\hat{\underline{U}}(t_n)$ . Por otro lado, si la matriz de masa es diagonal (condensada en los nudos), el esquema es explícito ya que no es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones, pues la obtención de la matriz inversa de una matriz diagonal es directa y el problema se resuelve directamente por operaciones sencillas de productos de matrices y vectores. Es por ello que el bajo coste computacional del método explícito hace que sea sumamente demandado en problemas de dinámica rápida, en los que se debe discretizar finamente el dominio temporal y la respuesta a altas frecuencias es importante.

### 3.3.2.2. Método de Newmark- $\beta$

Los esquemas de Newmark constituyen una familia de métodos caracterizados por dos parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ . Para incluir el término de error de orden tres en el desarrollo de Taylor del desplazamiento, Newmark utiliza los parámetros del modelo a modo de correctores en el término de orden 2:

$$\begin{aligned}\underline{U}(t_{n+1}) &= \underline{U}(t_n) + \Delta t\underline{\dot{U}}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\underline{\ddot{U}}(t_n) + 2\beta\underline{\ddot{U}}(t_{n+1})] \\ \underline{\dot{U}}(t_{n+1}) &= \underline{\dot{U}}(t_n) + \Delta t [(1 - \gamma) + \gamma\underline{\ddot{U}}(t_{n+1})]\end{aligned}\tag{3.67}$$

Los parámetros  $\beta = 0$  y  $\gamma = 1/2$  conducen a un esquema de diferencias centradas. La aceleración en el instante  $t_{n+1}$  se calcula a partir de la ecuación dinámica:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}\ddot{\underline{U}}(t_{n+1}) + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{U}}(t_{n+1}) + \underline{\underline{K}}\underline{U}(t_{n+1}) &= \underline{F}(t_{n+1}) \\ (\underline{\underline{M}} + \gamma\Delta t\underline{\underline{C}} + \beta\Delta t^2\underline{\underline{K}})\ddot{\underline{U}}(t_{n+1}) &= \underline{F}(t_{n+1}) - \underline{\underline{C}}\left[\dot{\underline{U}}(t_n) + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{\underline{U}}(t_n)\right] \\ &\quad - \underline{\underline{K}}\left[\underline{U}(t_n) + \Delta t\dot{\underline{U}}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\ddot{\underline{U}}(t_n)\right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

El sistema precedente puede escribirse de la manera siguiente:

$$\hat{\underline{\underline{K}}}\ddot{\underline{U}}(t_{n+1}) = \underline{R}(t_{n+1}) \quad (3.69)$$

El cálculo de la aceleración en cada paso de tiempo requiere la resolución de un sistema lineal en cada incremento de tiempo, por lo que es un esquema de tipo implícito a no ser que  $\beta$  sea nulo y la matriz de masas sea diagonal.

---

**Algoritmo 2** Esquema de Newmark- $\beta$

---

- 1: Definición de condiciones iniciales:  $\underline{U}_0$  y  $\dot{\underline{U}}_0$
  - 2: Cálculo de la aceleración inicial:  $\ddot{\underline{U}}_0 = \underline{\underline{M}}^{-1} [\underline{F}_0 - \underline{\underline{C}}\dot{\underline{U}}_0 - \underline{\underline{K}}\underline{U}_0]$
  - 3: **for**  $n=\Delta t:\Delta t:t$  **do**
  - 4: Cálculo del predictor del desplazamiento:  $\hat{\underline{U}}_{n+1} = \underline{U}_n + \Delta t\dot{\underline{U}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\ddot{\underline{U}}_n$
  - 5: Cálculo del predictor de velocidad:  $\hat{\dot{\underline{U}}}_{n+1} = \dot{\underline{U}}_n + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{\underline{U}}_n$
  - 6: Cálculo de la aceleración:  $\ddot{\underline{U}}_{n+1} = \hat{\underline{\underline{K}}}^{-1} \underline{R}_{n+1}$ ; Siendo  $\underline{R}_{n+1} = \underline{F}_{n+1} - \underline{\underline{C}}\hat{\dot{\underline{U}}}_{n+1} - \underline{\underline{K}}\hat{\underline{U}}_{n+1}$
  - 7: Corrección de la velocidad:  $\dot{\underline{U}}_{n+1} = \hat{\dot{\underline{U}}}_{n+1} + \Delta t\gamma\ddot{\underline{U}}_{n+1}$
  - 8: Corrección del desplazamiento:  $\underline{U}_{n+1} = \hat{\underline{U}}_{n+1} + \Delta t^2\beta\ddot{\underline{U}}_{n+1}$
  - 9: **end for**
- 

### 3.3.2.3. Estabilidad, precisión y amortiguamiento numérico

Se dice que un método es estable si la norma del campo de desplazamientos se mantiene acotada a lo largo del tiempo de análisis. Las condiciones de estabilidad de los esquemas de Newmark son las siguientes:

- $\gamma < 1/2$ : inestable
- $\gamma \geq 1/2$  y  $\beta \geq \gamma/2$ : incondicionalmente estable

- $\gamma \geq 1/2$  y  $\beta \leq \gamma/2$ : condicionalmente estable según el paso de tiempo:

$$\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{1}{w_{max}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \quad (3.70)$$

En el caso de diferencias centradas ( $\beta = 0$  y  $\gamma = 1/2$ ), la estabilidad se consigue si:

$$\Delta t \leq \frac{2}{w_{max}} \quad (3.71)$$

En la práctica, la pulsación máxima es inversamente proporcional al tamaño de los elementos, por lo que una discretización fina, implica que el paso de tiempo debe ser pequeño para que el algoritmo sea estable. El esquema de Newmark con aceleración uniforme  $\beta = 1/6$  y  $\gamma = 1/2$  es el más preciso a condición de ser condicionalmente estable. El mejor compromiso entre precisión y estabilidad se corresponde con el esquema de aceleración media constante  $\beta = 1/4$  y  $\gamma = 1/2$ , que es incondicionalmente estable con la mejor precisión.

Sin embargo, el hecho de que el algoritmo sea incondicionalmente estable no implica que la solución obtenida represente bien la solución exacta, por lo que se debe buscar el compromiso entre precisión y coste computacional y realizar análisis de sensibilidad de paso de tiempo para analizar la convergencia del método.

La elección de unos parámetros u otros puede implicar la adición o sustracción (amortiguamiento) de energía en el sistema. Recordando el teorema de la energía cinética que dice que la variación de energía cinética y elástica en un sistema es igual a la potencia de los esfuerzos externos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} + \frac{1}{2} \dot{\underline{U}}^T \underline{M} \dot{\underline{U}} \right) = \underline{F}^T \dot{\underline{U}} \quad (3.72)$$

En el caso de que los esfuerzos externos sean nulos, se debe cumplir:

$$\mathcal{E}(t) = \dot{E}_{el} + \dot{E}_{cin} = 0 \quad (3.73)$$

Estudiando los efectos de los parámetros del método de Newmark, se obtienen los siguientes resultados:

- Si  $\gamma = 2\beta$ ;  $\Delta\mathcal{E} = C(1 - 2\gamma)$  siendo  $C > 0$ 
  - Si  $\gamma < 1/2$ ;  $\Delta\mathcal{E} > 0$ , la energía aumenta en cada incremento, esquema inestable.
  - Si  $\gamma > 1/2$ ;  $\Delta\mathcal{E} < 0$ , la energía disminuye en cada incremento (amortiguamiento numérico), esquema estable.
  - Si  $\gamma = 1/2$  ( $\beta = 1/4$ );  $\Delta\mathcal{E} = 0$ , la energía se conserva en cada incremento.
- Si  $\gamma < 2\beta$  y  $\gamma \geq 1/2$ ;  $\mathcal{E}(t)$  no se conserva pero no diverge.
- Si  $\gamma < 1/2$ ;  $\mathcal{E}(t)$  diverge, el esquema es inestable.

# 4

## El modelo de cálculo desarrollado

### 4.1. Interés y estructura

En el presente TFM se ha desarrollado un modelo numérico escrito en *Matlab/Octave* para el cálculo de la interacción vehículo-estructura. El modelo se basan en el método de los elementos finitos para la desratización espacial y técnicas de superposición de modos propios e integración numérica mediante el algoritmo de Newmark- $\beta$  para la resolución de la respuesta temporal.

El código se compone de aproximadamente 40 funciones, que conforman un modelo de elementos finitos 2-D, que permite la resolución de pórticos planos. En el mercado existen modelos de elementos finitos que integran entre sus funciones el cálculo de la interacción (*Abaqus o Sofistik*). Por ello, la elaboración de este modelo tiene una doble intención:

- Por un lado, la componente académica y educativa de la comprensión del problema y su materialización en un código simple y generalizable a cualquier estructura plana. La incorporación de un modelo espacial genérico de 6 gdl por nudo y no 3 gdl como el actual se podría realizar tomando como base la presente formulación, sin embargo su dimensión se sale del alcance presente TFM.
- Por otro lado, los ya citados programas comerciales son difícilmente parametrizables y el modelado del problema resulta laborioso. Se presenta una herramienta simple, aplicable a la mayoría de puentes y estructuras. Su facilidad de parametrización permite su integración en la resolución de problemas de tipo estocástico, al poderse realizar simulaciones de manera automática.

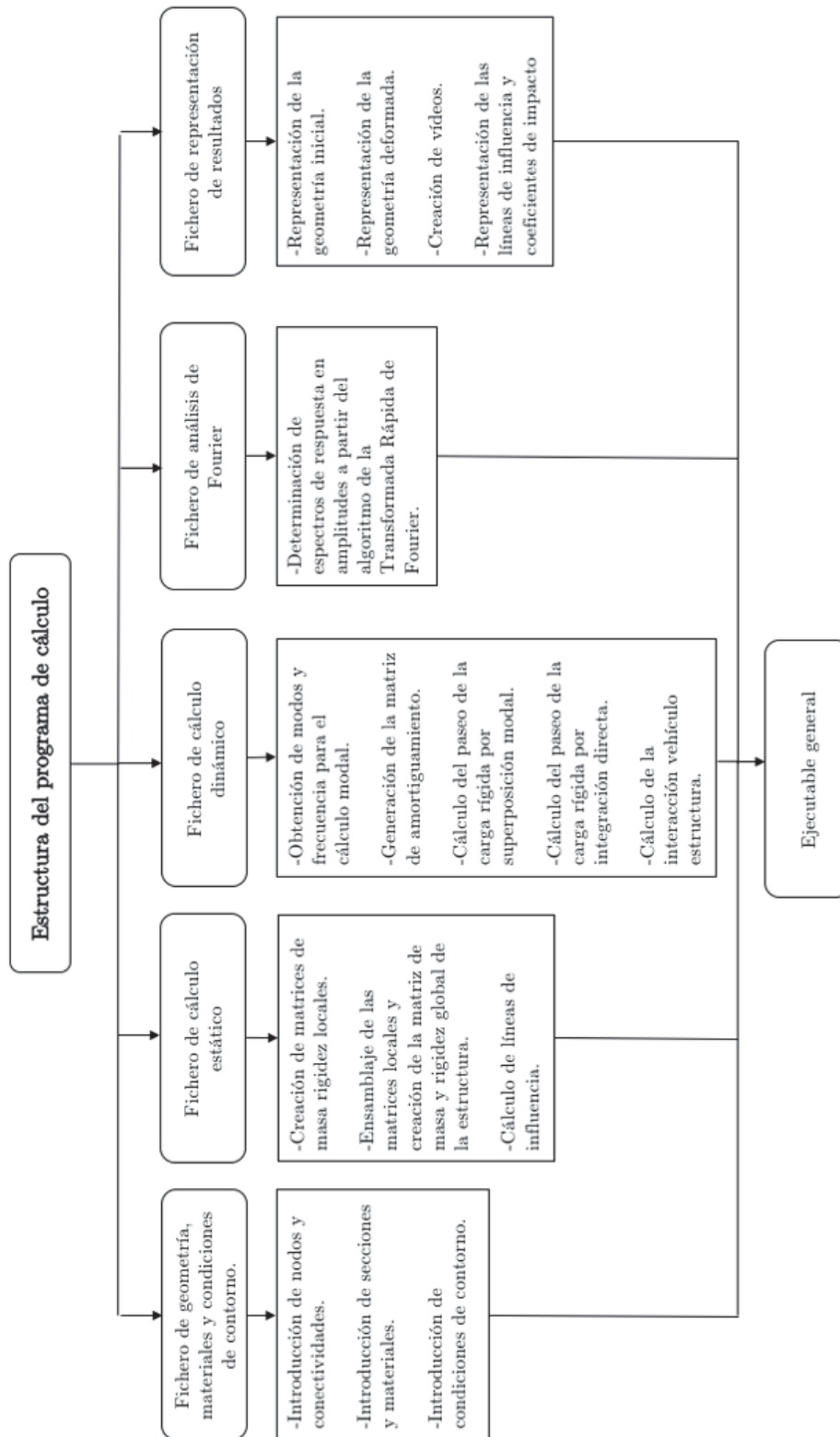


Figura 4.1: Estructura del modelo



### 4.1.1. Fichero de geometría, materiales y condiciones de contorno

Este fichero se introducen los parámetros que definen la geometría, los materiales de la estructura y las condiciones de contorno en forma matricial para su posterior tratamiento. Se trata de un código genérico, fácilmente aplicable a cualquier tipo de estructura elástica y lineal.

Se comienza imponiendo el número de elementos (barras) y el número de nodos, asumiendo que cada nodo tiene tres grados de libertad según el criterio de signos de la imagen 4.2.

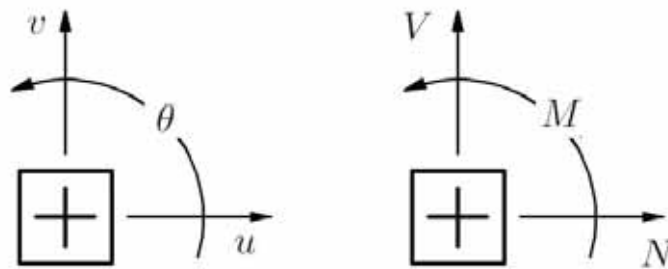


Figura 4.2: Criterio de signos en esfuerzos y desplazamientos del modelo

- Para cada elemento se precisan sus propiedades elastomécnicas (área, inercia, módulo de Young y masa volúmica) en vectores con tantos componentes como elementos o barras. Se genera una matriz de propiedades elastomecánicas.

Elemento	1	2	...	Elementos
A	$A_1$	$A_2$	...	$A_{nel}$
I	$I_1$	$I_2$	...	$I_{nel}$
E	$E_1$	$E_2$	...	$E_{nel}$
$\rho$	$\rho_1$	$\rho_2$	...	$\rho_{nel}$

Cuadro 4.1: Matriz de propiedades

- La información nodal se almacena en una matriz de dos filas y con tantas columnas como nodos tenga la estructura. La fila  $i=1$  se corresponde con la posición x de los nodos y la fila  $i=2$  con la posición y.

Nodo	1	2	...	Nodos
nx	$nx_1$	$nx_2$	...	$nx_n$
ny	$ny_1$	$ny_2$	...	$ny_n$

Cuadro 4.2: Matriz nodal

- A continuación se fijan las conectividades que definen los nodos iniciales y finales de cada elementos. Es una matriz de dos filas y tantas columnas como elemento. La fila  $i=1$  se corresponde con el primer nodo del elemento y la fila  $y=2$  con el segundo nodo, respetando el orden de entrada establecido en la matriz nodal.

Elemento	1	2	...	Elementos
Nodo 1	$n1_1$	$n1_2$	...	$n1_{nel}$
Nodo 2	$n2_1$	$n2_2$	...	$n2_{nel}$

Cuadro 4.3: Matriz de conectividades

- En el siguiente paso se definen las condiciones de contorno del problema. La matriz de condiciones de contorno tiene tantas filas como grados de libertad (3) y tantas columnas como nodos. Se completa con 0 y 1 si el movimiento en el gdl no está o está restringido.

Nodos	1	2	...	Nodos
u	$ccu_1$	$ccu_2$	...	$ccu_n$
v	$ccv_1$	$ccv_2$	...	$ccv_n$
$\theta$	$cc\theta_1$	$cc\theta_2$	...	$cc\theta_n$

Cuadro 4.4: Matriz de condiciones de contorno

- Por último se definen los elementos que componen el tablero y que el código identifica automáticamente como el camino de rodadura.

### 4.1.2. Fichero de cálculo estático

Esta sección del código se compone de un conjunto de funciones cuya misión principal es el ensamblaje de las matrices locales y globales de rigidez y de masa, y la obtención de las líneas de influencia estáticas. Para el cálculo de la matriz global de rigidez y de masa, se debe emplear una matriz de rotación ( $\underline{Q}_e$ ) para el paso de ejes locales a

ejes globales y poder proceder al ensamblaje :

$$Q_e = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Dónde  $\alpha$  es el ángulo que existe entre el sistema de coordenadas local de cada elemento y el global.

La matriz del elemento en ejes globales es:

$$\underline{\underline{A_{glob}}} = \underline{\underline{Q_e^T}} \underline{\underline{A_{loc}}} \underline{\underline{Q_e}} \quad (4.2)$$

Una parte importante del proceso consiste en el ensamblaje de las matrices globales. Para ello, se parte de la matriz de condiciones de contorno, y se numeran crecientemente los grados de libertad activos comenzando por el nodo 1 hasta el nodo N. Los grados de libertad activos son aquellos no coaccionados (valor 0 en la matriz de condiciones de contorno). Se obtiene de esta manera el número de ecuaciones a resolver para el cálculo estático de la estructura (dimensión de las matrices  $\underline{\underline{M}}$  y  $\underline{\underline{K}}$ ) y la matriz de identidad. La matriz de identidad, de dimensiones iguales a la matriz nodal, tiene valores 0 en los gdl no coaccionados, y un número 1, 2, 3 ... n que se corresponde con la fila de ese gdl en la matriz global.

La función `asamblajematriz.m`, es la encargada de realizar el mapeo de las matrices locales en las globales. En un loop se recorren los elementos, y para cada elemento, a partir de la matriz identidad se identifican los gdl activos y su posición en la matriz global.

El cálculo de líneas de influencia estáticas se realiza mediante la aplicación directa de su definición, haciendo circular una carga estática por el tablero y leyendo, a partir de la respuesta en desplazamientos, la propiedad especificada.

### 4.1.3. Fichero de cálculo dinámico

Una vez calculadas las matrices de masa y de rigidez globales, el siguiente paso consiste en la determinación de modos y frecuencias fundamentales mediante la resolución del problema de autovalores y autovectores:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_i^2 \underline{\underline{M}}\right) \underline{D}_i = \underline{0} \quad (4.3)$$

La matriz de amortiguamiento ortogonal de Rayleigh se genera por combinación lineal de las matrices de masa y rigidez del sistema, según se describe en el capítulo anterior.

A continuación, el código se bifurca en dos caminos diferentes, pudiendo resolver el problema con o sin interacción dinámica. Éste último, a su vez, puede llevarse a cabo por integración directa o por superposición modal.

Los parámetros más importantes que intervienen en la resolución del problema sin interacción son:

- Las fuerzas que ejercen los vehículos.
- Las velocidades de los vehículos.
- Las posiciones iniciales.
- El número de modos a superponer, si se emplea la técnica de descomposición modal.
- El paso de tiempo del análisis, si se emplea la técnica de integración directa.
- El periodo de análisis.

Por otro lado, la resolución del problema con interacción necesita de los siguientes parámetros:

- La matriz de masa de los vehículos.
- La matriz de amortiguamiento de los vehículos.
- La matriz de rigidez de los vehículos.
- La rugosidad del pavimento
- Las velocidades.
- El paso de tiempo del análisis y el periodo de análisis.

#### 4.1.4. Fichero de análisis de Fourier

El objetivo de este fichero es el paso de señales del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Mediante esta transformación se consigue obtener el contenido frecuencial de señales temporales, lo proporciona una valiosa información sobre la respuesta de la estructura.

El fin de estas funciones es el indicado en la figura 4.3. Por un lado se parte de una señal (aceleración, velocidad, desplazamiento, fuerza ...), que se supone combinación de diversos armónicos en el dominio del tiempo. Mediante el desarrollo en serie de senos y cosenos, podemos obtener las amplitudes de vibración y el desfase en el dominio de la frecuencia de los armónicos que componen la señal.

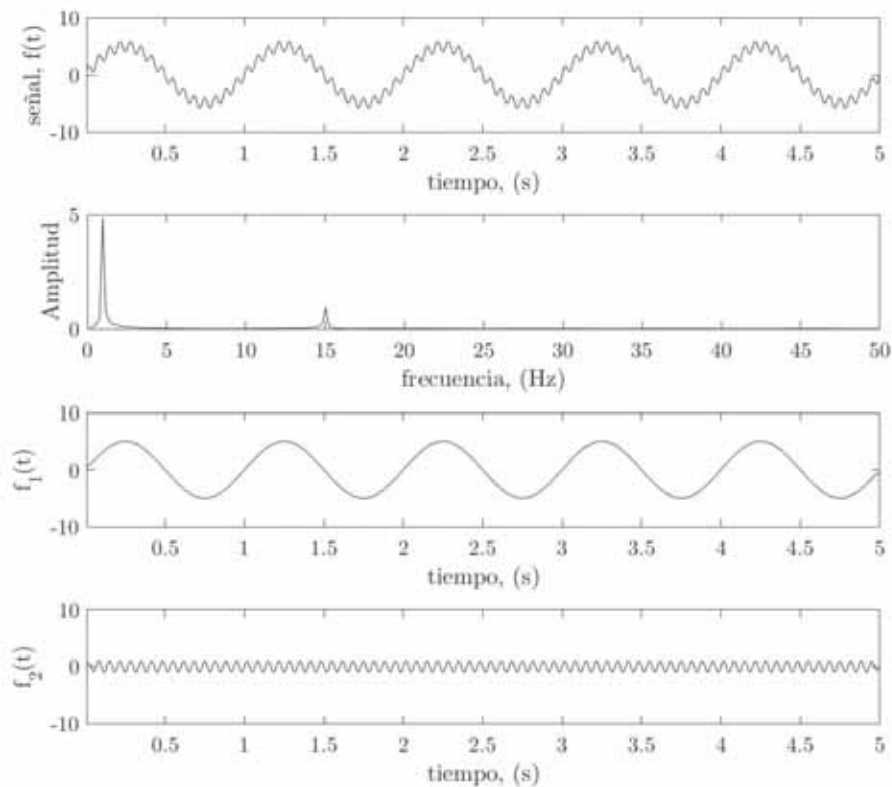


Figura 4.3: Esquema del análisis en frecuencias

Una serie temporal  $\ddot{u}(t)$  medida en un punto de la estructura durante un intervalo  $T_0 = (a,b)$  puede expresarse como una superposición de funciones sinusoidales

asumiendo que  $\ddot{u}(t)$  es periódica en  $T_0$ . La serie de aceleraciones de la estructura es:

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_{a0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ddot{u}_{an} \cos\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) + \ddot{u}_{bn} \text{sen}\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) \right] \quad (4.4)$$

Dónde las frecuencias de vibración son  $w_n = 2\pi n/(b-a)$ . Los coeficientes de la expresión anterior se obtienen al resolver las integrales siguiente:

$$\ddot{u}_{a0} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \ddot{u}(t) dt \quad (4.5)$$

$$\ddot{u}_{an} = \frac{2}{b-a} \int_a^b \ddot{u}(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt$$

$$\ddot{u}_{bn} = \frac{2}{b-a} \int_a^b \ddot{u}(t) \text{sen}\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt \quad (4.6)$$

Aplicando el coseno de la diferencia  $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$  y normalizando previamente los coeficientes  $\ddot{u}_{an}$  y  $\ddot{u}_{bn}$ , se obtiene la expresión siguiente:

$$\ddot{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{u}_{cn} \cos(w_n t - \phi_n) \quad (4.7)$$

Dónde  $\ddot{u}_{cn}$  es la normalización de los coeficientes  $\sqrt{\ddot{u}_{an}^2 + \ddot{u}_{bn}^2}$  y el desfase  $\phi_n = \arctan(b_n/a_n)$ .

El cálculo de los coeficientes de Fourier mediante la resolución de las integrales precedentes, es costoso y lento. Por ello se suele recurrir al algoritmo FFT *Fast Fourier Transform* (Cooley and Tukey, 1965) que reduce significativamente el tiempo y la complejidad del cálculo ( $O(N^2)$  a  $O(N \log N)$ ). En el presente trabajo se recurre a funciones ya implementadas en Matlab que se basan en este algoritmo para el paso del dominio temporal al frecuencial.

#### 4.1.5. Fichero de salidas gráficas

El fichero de salidas gráficas está compuesto por diversas funciones con cuatro objetivos principales, la representación de la geometría inicial, la representación de la deformada, la creación de vídeos del comportamiento de la estructura y la representación de líneas de influencia y coeficientes de impacto.

#### 4.1.6. Resumen del proceso de cálculo

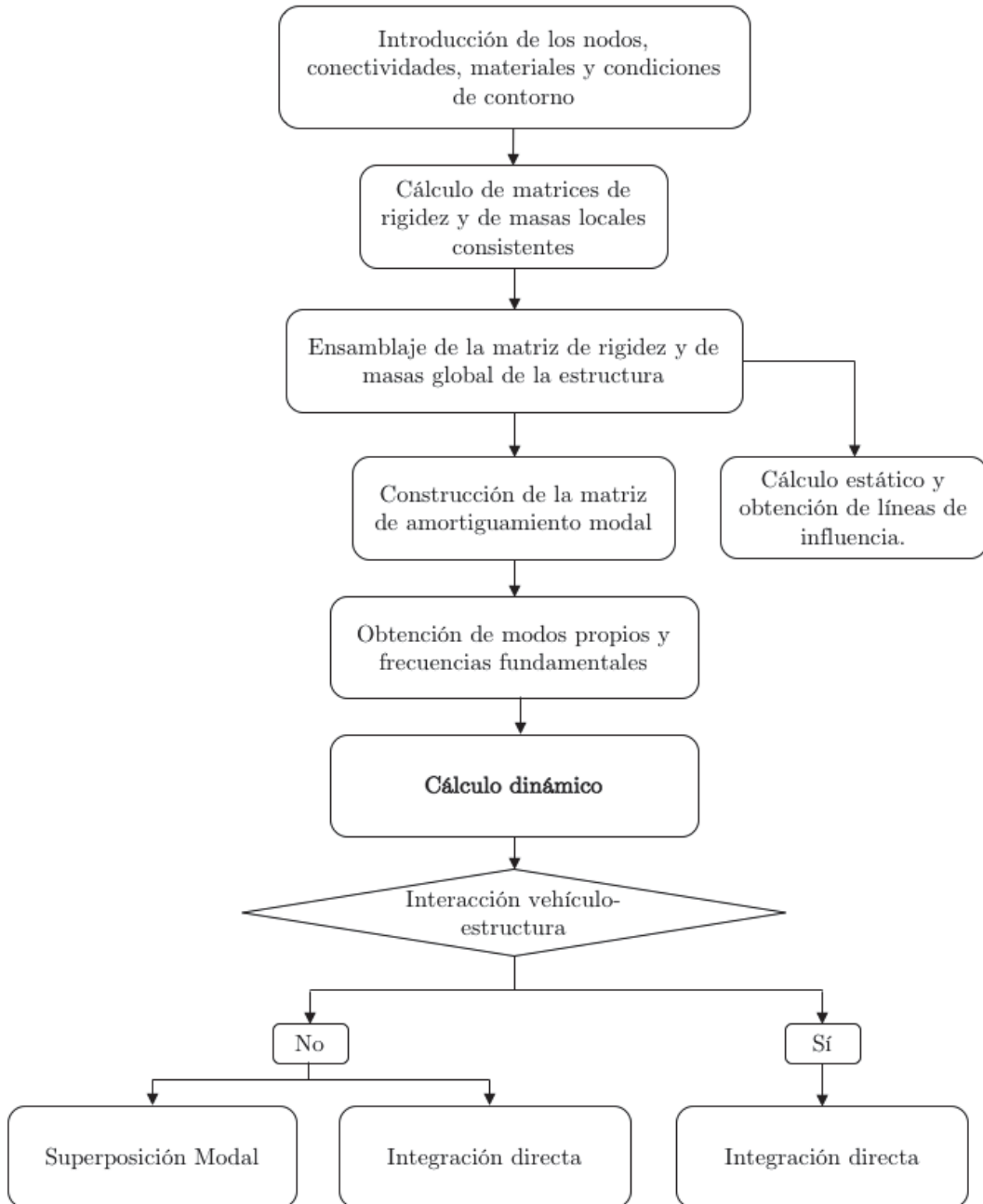


Figura 4.4: Proceso de cálculo





# 5

## Validación

En este capítulo se analizan varios casos test, de complicación creciente, con el fin de verificar los resultados del modelo de cálculo implementado en el presente TFM. En primer lugar se estudia una viga isostática simple bajo el paseo de cargas y masas móviles, con y sin rugosidad. El segundo caso tratado es una viga sobre cimentación elástica, modelización que será utilizada a posteriori para simular el paseo de vehículos sobre un pavimento cimentado en el terreno. Finalmente se estudia una viga simétrica atirantada por cuatro cables y sometida al paseo de cargas y masas móviles con y sin rugosidad.

En todos los casos se obtienen los modos propios de la estructura y se validan con fórmulas analíticas en los dos primeros casos y mediante el programa de cálculo de estructuras Sofistik en el último caso (viga atirantada simple). El objetivo del cálculo modal es la verificación de las matrices de masa y rigidez del sistema antes de pasar al cálculo transitorio de la respuesta dinámica. A continuación, se realiza mediante integración directa aplicando un esquema de Newmark- $\beta$  con aceleración media constante, algoritmo 2, comparando la solución del modelo con soluciones analíticas si existen (viga isostática y caso de cargas y masas móviles sin rugosidad) y mediante el programa Sofistik en el resto de casos. Los resultados muestran un buen comportamiento del modelo, tanto en el caso del campo de desplazamientos como en el caso más sensible de las aceleraciones.

*Nota: En esta sección, las propiedades elastomecánicas de la estructura y viscoelásticas de los vehículos no toman valores realistas. Se han tomado ejemplos de la literatura (Frýba (1987) y Yang et al. (2004)) cuyos parámetros hacen que se acentúen efectos como la diferencia de respuestas bajo cargas y masas móviles*

## 5.1. Viga isostática

El primer caso test se trata de una viga isostática en flexión con dos apoyos fijos en traslación horizontal y vertical en los extremos. Las propiedades geométricas y mecánicas del ejemplo se resumen en el cuadro 5.1.

Longitud	L	[m]	25
Área sección	A	[m <sup>2</sup> ]	4
Inercia sección	I	[m <sup>4</sup> ]	2,9
Módulo de Young	E	[N/m <sup>2</sup> ]	2,87 · 10 <sup>9</sup>
Masa lineal del tablero	$\bar{m}$	[kg/m]	2303

Cuadro 5.1: Propiedades geométricas y mecánicas de la viga isostática

En cuanto a la modelización, se han empleado elementos de viga 2D de dos nudos con tres grados de libertad por nudo ya derivados anteriormente. El modelo global comporta 25 elementos de un metro de longitud, lo que da lugar a un modelo de 78 grados de libertad totales de los que cuatro de ellos son impuestos, cuadro 5.3.

Nodos	26
Elementos viga	25
gdl totales	78
gdl impuestos	4

Cuadro 5.2: Propiedades del modelo EF

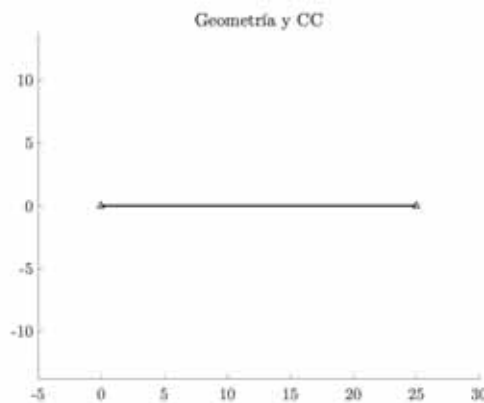


Figura 5.1: Geometría del modelo de viga isostática en EF

### 5.1.1. Cálculo modal

Los modos propios analíticos de flexión y axial de una viga isostática EB se obtienen fácilmente resolviendo la ecuación 3.3, imponiendo las condiciones de contorno y anulando la ecuación trascendente que resulta:

$$\omega_f = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} \quad (5.1)$$

$$\omega_a = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{EA}{\bar{m}}} \quad (5.2)$$

Tras el ensamblaje de las matrices de masa y rigidez elementales del modelo de EF, se calculan los modos propios resolviendo el siguiente problema de valores propios:

$$\left(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}\right) \underline{D} = \underline{0} \quad (5.3)$$

Dónde  $\omega$  son las pulsaciones propias y  $\underline{D}$  son las deformadas modales.

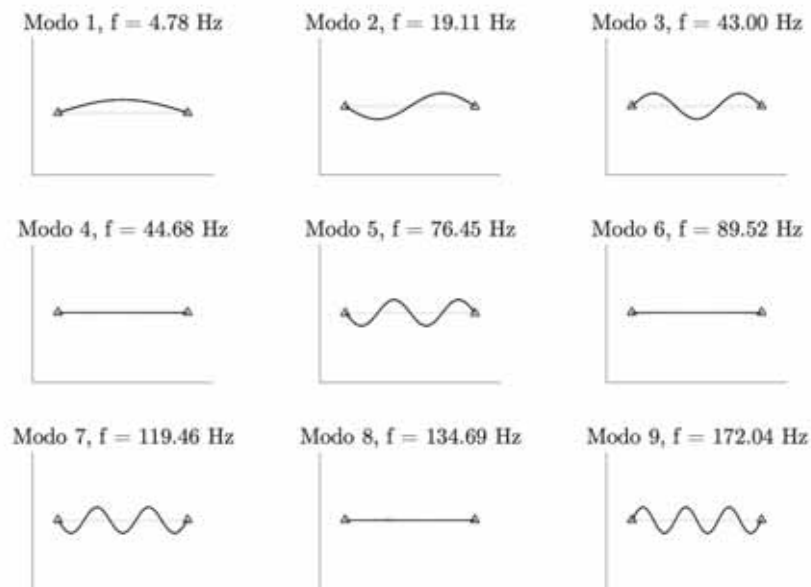


Figura 5.2: Primeros modos propios de la viga isostática obtenidos mediante el modelo EF

En el cuadro 5.3 se comparan los modos propios obtenidos en el modelos EF con

la solución analítica. Se aprecia que todos los modos propios aproximados mediante el modelo, son ligeramente superiores a los analíticos, lo que se explica mediante el principio del mínimo del mínimo de la energía potencial.

Modo	Tipo	Frecuencia, [Hz]		Error rel., [%]
		Modelo	Analítica	
1	Flexión	4,78	4,78	0,04 %
2	Flexión	19,11	19,11	0,01 %
3	Flexión	43,00	43,00	0,00 %
4	Axil	44,68	44,65	0,06 %
5	Flexión	76,45	76,45	0,00 %
6	Axil	89,52	89,31	0,24 %
7	Flexión	119,46	119,45	0,01 %
8	Axil	134,69	133,96	0,54 %
9	Flexión	172,04	172,00	0,02 %

Cuadro 5.3: Comparación de las frecuencias fundamentales de la viga isostática obtenidas a partir del modelo con la formulación analítica

### 5.1.2. Paseo de un vehículo

En un primer momento, se estudia la respuesta de la estructura no amortiguada frente al paso de un vehículo modelizado como carga móvil, lo que implica que el vector de carga es conocido a priori. A continuación se estudia el paso del vehículo modelizado como masa móvil, considerando por tanto, la interacción vehículo-estructura vertical, figura 5.3. En la simulación, la velocidad de paso del vehículo se fijó a 100 km/h, el paso de tiempo del análisis dinámico es de 0,001 segundos y el tiempo simulado igual a 1,5 segundos. Las propiedades del vehículo modelizado bien como fuerza móvil o como masa móvil se resumen en la tabla 5.4.

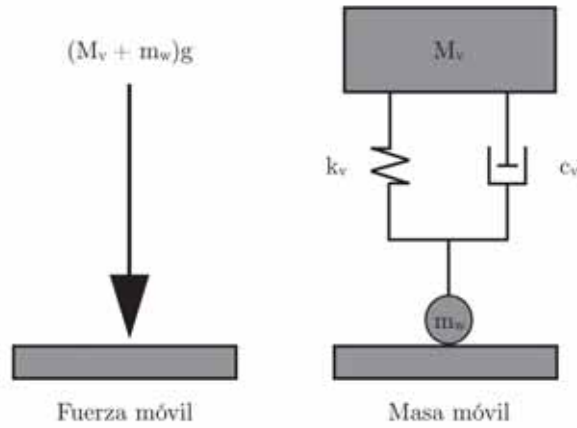


Figura 5.3: Esquema de las modelizaciones de vehículo mediante fuerza y masa móvil

Fuerza móvil		
Fuerza móvil	[kN]	56,4
Velocidad	[km/h]	100
Masa suspendida		
Masa suspendida	[kg]	5750
Masa no suspendida	[kg]	0
Rigidez de la suspensión	[kN/m]	1575
Amortiguamiento de la suspensión	[kNs/m]	0
Velocidad	[km/h]	100

Cuadro 5.4: Propiedades de los vehículos modelizados

Con el objetivo de validar el modelo, comparamos en primer lugar la respuesta dinámica de la estructura modelizada como cargas rígidas con la solución propuesta por Fryba (1987) en la figura 5.4a. La ecuación diferencial de equilibrio dinámico de una viga EB sometida al paseo de una carga móvil es:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = F_q \cdot \delta(x - ct) \quad (5.4)$$

Dónde C es la constante de amortiguamiento del sistema, c es la velocidad de tránsito,  $F_q$  es la fuerza móvil y  $v$  el campo de desplazamientos de la línea media de la viga.

La solución, obtenida mediante series de Fourier, requiere la introducción de las siguientes magnitudes:

- La pulsación propia de la fuerza móvil,

$$w_f = \frac{\pi c}{L}$$

- Las pulsaciones propias de la viga,

$$w_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

- La velocidad reducida,

$$\alpha = \frac{w_f}{w_1}$$

- El porcentaje de amortiguamiento crítico del modo  $i$ ,

$$\xi_i = \frac{\delta_l}{2\pi} = \frac{C}{2m\omega_i}$$

Siendo  $\delta_l$  el decremento logarítmico.

- La flecha estática máxima en centro de luz es:

$$v_0 = \frac{F_y L^3}{48EI}$$

Tras la introducción de los parámetro precedentes, la solución de la viga EB débilmente amortiguada bajo el paso de una fuerza móvil es:

$$v(x, t) = v_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 [i^2 (i^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2 \xi_i^2]} [i^2 (i^2 - \alpha^2) \sin(iw_f t) - \frac{i\alpha [i^2 (i^2 - \alpha^2) - 2\xi_i^2]}{(i^4 - \xi^2)^{1/2}} e^{-w_1 \xi t} \sin(w_i t) - 2i\alpha \xi (\cos(iw_f t) - e^{-w_1 \xi t} \cos(w_i t))] \sin \frac{i\pi x}{L}$$

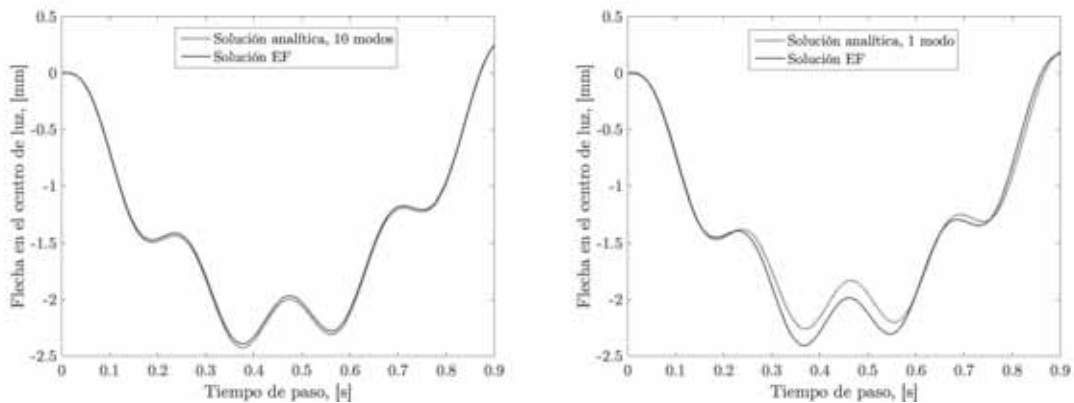
En lo que respecta al paseo de una masa móvil, en la ecuación diferencial del sistema propuesta por Biggs (1964) se descompone el campo de desplazamientos de la viga  $v(x, t)$  en la coordenada generalizada del desplazamiento vertical del centro de luz ( $q_b$ ) vibrando en el primer modo propio ( $v(x, t) = q_b \sin(\pi x/L)$ ) y se considera el

acoplamiento entre el vehículo (representado por su desplazamiento vertical  $z_2$ ) y la estructura. Este acoplamiento implica la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales que carece de solución analítica y debe realizarse numéricamente:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{q}_b \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega_v^2 \frac{M_v}{mL} \sin^2 \frac{\pi ct}{L} + \omega_1^2 & -2\omega_v^2 \frac{M_v}{mL} \sin \frac{\pi ct}{L} \\ -\omega_v^2 \frac{M_v}{mL} \sin \frac{\pi ct}{L} & \omega_v^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_b \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \frac{M_v g}{mL} \sin \frac{\pi ct}{L} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

En la ecuación anterior  $\omega_1$  es el primer modo propio de la viga y  $\omega_v$  es el modo de vibración vehículo.

En la figura 5.4 se muestra la serie temporal de la flecha en centro de luz cuando la viga es atravesada por una carga móvil (figura 5.4a) y masa móvil (figura 5.4b). Los resultados muestran que el modelo numérico se comporta adecuadamente en los dos casos, aunque la diferencia entre la solución del modelo EF de fuerzas móviles y la solución de Fryba (1987) es menor debido a la consideración de 10 modos. En el caso de la modelización de masas móviles, el error es más importante al comparar el modelo EF con la solución de la ecuación de Biggs (1964) al considerarse en ésta, sólo el primer modo de vibración.



(a) Paseo de fuerzas móviles, modelo numérico y solución de Fryba      (b) Paseo de masas móviles, modelo numérico y solución de Biggs

Figura 5.4: Flecha vertical en el centro de luz bajo distintas modelizaciones de vehículos

Finalmente se modeliza el problema en el programa comercial de elementos finitos Sofistik y se compara con el modelo desarrollado en la figura 5.5. En primer lu-

gar se analizan las flechas en el centro de luz considerando las dos modelizaciones de vehículos y se aprecia la buena correspondencia entre los modelos, figura 5.5a. En la figura 5.5b se comparan las aceleraciones en el centro de luz obtenidas en el caso de fuerzas móviles mientras que en la figura 5.5c se comparan los desplazamientos en las partes superior e inferior del vehículo obtenidas por el modelo y por el programa Sofistik. Finalmente se obtienen las aceleraciones en la parte superior del vehículo 5.5d que están ligadas a la fuerza de contacto dinámica, resultado de la interacción, que debe añadirse al peso del vehículo, figura 5.5e. En este caso se aprecia que la fuerza de contacto dinámica es igual a la aceleración de la masa suspendida multiplicada por su masa puesto que las fuerzas viscosas son nulas, ( $c_v = 0$ ).

*Nota: las fuerzas de contacto dinámicas son de signo contrario a las aceleraciones puesto que una aceleración vertical descendente (negativa) genera una fuerza de contacto vertical descendente mayor (positiva).*

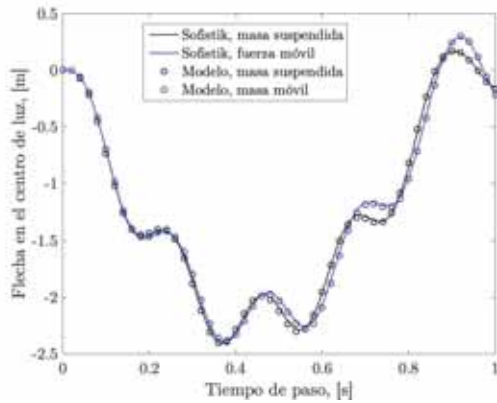
En la figura 5.6 se modela el vehículo mediante el modelo de masas móviles y considerando un perfil de rugosidad de pavimento de tipo A. La figura 5.6a muestra la rugosidad en el punto de contacto de la masa. En la figura 5.6b se dibuja la serie temporal del desplazamiento vertical en el centro de luz, obteniendo en ambos modelos resultados similares. Se comparan asimismo las aceleraciones en el centro de luz, desplazamientos y aceleraciones en el vehículo y la fuerza de contacto dinámica. En el caso de estudio se acentúa el efecto de la rugosidad del firme, puesto que el valor de la flecha dinámica máxima es un 20 % mayor en el caso del pavimento rugoso y se hace evidente la presencia de irregularidades del firme en el desplazamiento vertical del punto de contacto, figura 5.6d

Con todo ello, se ha podido validar tanto las rutinas de ensamblaje de las matrices de masa y de rigidez como las rutinas de generación de las fuerzas de contacto y de integración numérica en los casos con y sin rugosidad del firme al paso de un vehículo. Los resultados del modelo de cálculo desarrollado muestran buen acuerdo con los resultados del programa Sofistik en desplazamientos y aceleraciones, si bien,

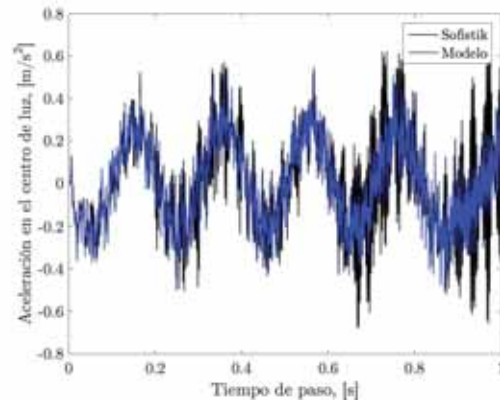


## 5. Validación

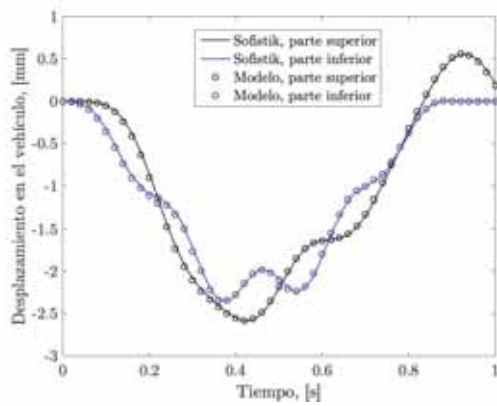
en lo que respecta a las aceleraciones de la estructura, los resultados de Sofistik muestran valores más vivos que los del modelo de EF.



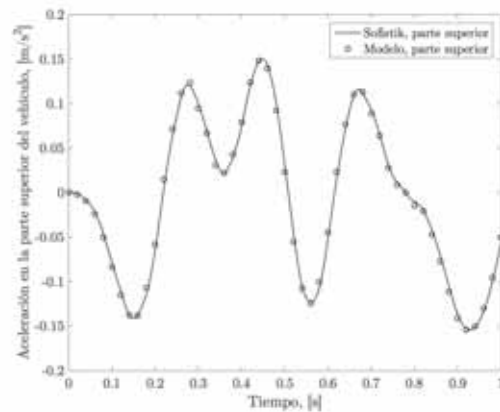
(a) Flecha en el centro de luz



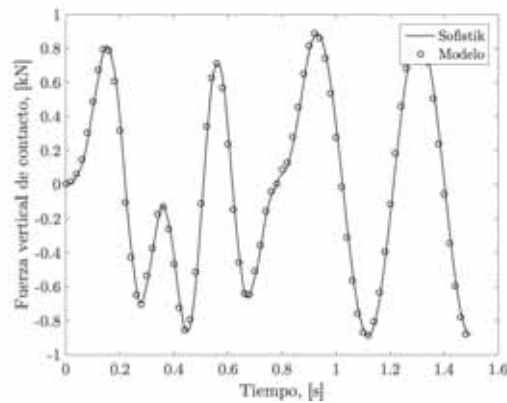
(b) Aceleración en el centro de luz



(c) Desplazamientos en el vehículo

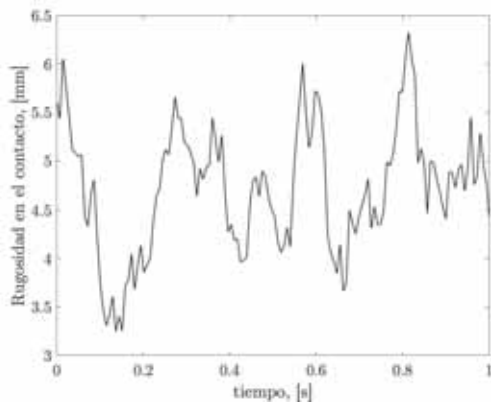


(d) Aceleración en la parte superior del vehículo

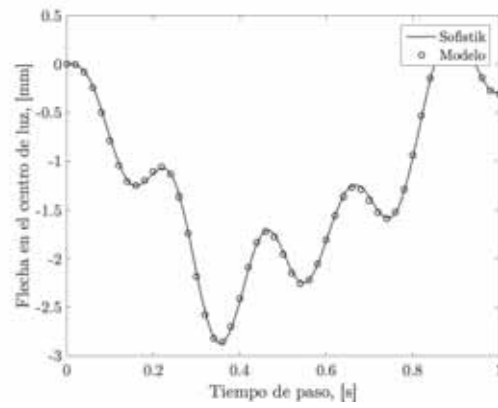


(e) Fuerza de contacto dinámica

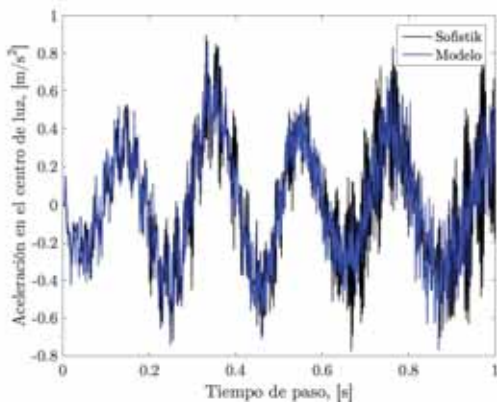
Figura 5.5: Validación con Sofistik, viga con pavimento no rugoso



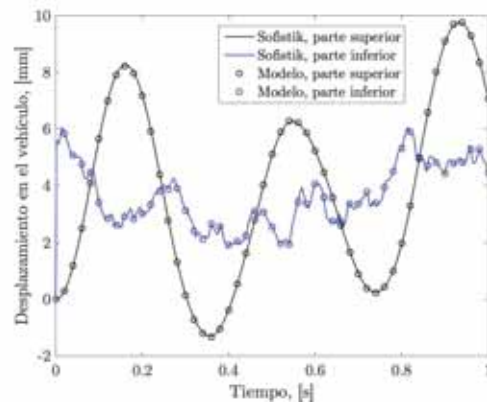
(a) Perfil de rugosidad del pavimento



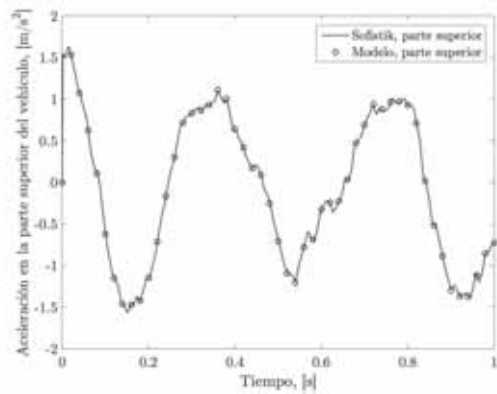
(b) Flecha en el centro de luz



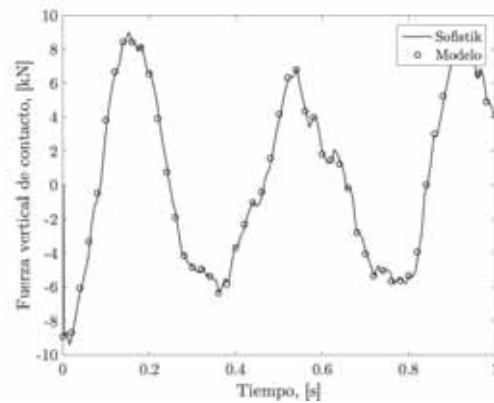
(c) Aceleración en el centro de luz



(d) Desplazamientos en el vehículo



(e) Aceleración en la parte superior del vehículo



(f) Fuerza de contacto dinámica

Figura 5.6: Validación con Sofistik, viga con pavimento rugoso de tipo A

## Análisis de resultados

Para escoger la modelización más adecuada se debe tener en cuenta el fin último de ésta, pues en la mayoría de los casos una modelización estática es suficiente para vali-

dar el comportamiento de la estructura. Sin embargo, en proyectos singulares el paso a simulaciones dinámicas resulta necesario para evaluar correctamente los regímenes transitorio y estacionario de la respuesta para cuantificar el factor de impacto y el grado de confort de tránsito. En la figura 5.7 se muestran los resultados de la evolución dinámica en el centro de luz según una modelización estática (línea discontinua negra), de cargas móviles (línea continua negra), masas suspendidas (línea discontinua azul) y masas suspendidas sobre un pavimento rugoso de tipo A (línea continua azul). En el caso de la estructura que estudiamos, se aprecian oscilaciones dinámicas importantes en torno a la modelización estática. Uno de los hechos más claros es el adelanto en el tiempo de la flecha máxima en eventos dinámicos con respecto a la estática que se magnifica en presencia de un pavimento rugoso. Sin embargo, en estructuras reales bajo los efectos del tránsito de los vehículos usuales, no se observa un impacto significativo de la rugosidad del firme en la respuesta de la estructura.

Del análisis de la respuesta dinámica de la estructura, se puede obtener mucha información relativa a su comportamiento y propiedades. En la figura 5.8b se muestra la aceleración en el centro de luz bajo las distintas modelizaciones dinámicas en el dominio del tiempo (figura izquierda) y de la frecuencia de Fourier (figura derecha). Del estudio en frecuencias se aprecian los tres primeros modos simétricos característicos de la estructura y no se aprecian los antimétricos puesto que el centro de luz es un nodo (deformada vertical nula) de los modos antimétricos. Asimismo se pone de manifiesto cómo las amplitudes espectrales del primer modo son mayores en el caso del modelo de masas móviles. La consideración de la rugosidad del pavimento introduce oscilaciones a bajas frecuencias hasta aproximadamente 80 Hz, aunque depende de la velocidad de tránsito del vehículo y tiene como efecto la amplificación de la respuesta en los modos fundamentales de la estructura.

Por otro lado, del análisis de la respuesta en los vehículos también se pueden obtener parámetros característicos de la estructura. Esto resulta extremadamente interesante para evaluar el estado de obras existentes, pues simplemente una pasada de un vehículo instrumentado, puede ser suficiente para determinar su estado de conser-

vación. Sin embargo, la aplicación de estas técnicas está aún en desarrollo pues implican el conocimiento detallado del comportamiento del sistema de suspensión del vehículo así como efectos aleatorios motivados por el viento y el tráfico entre otros. En un marco numérico, del análisis de la respuesta de los vehículos, figura 5.9b, se aprecia claramente la magnificación de las aceleraciones en la masa suspendida motivadas por la rugosidad del pavimento. Del análisis de Fourier de la respuesta, se aprecia fundamentalmente la vibración en torno al modo fundamental del vehículo  $f = \sqrt{k_v/m_v}/(2\pi) = 2,63$  Hz, aunque también se aprecian otros dos picos próximos en el espectro que corresponden al primer modo de la estructura a 4.77 Hz y a la frecuencia de excitación  $f = c/(2L) = 0,56$  Hz.

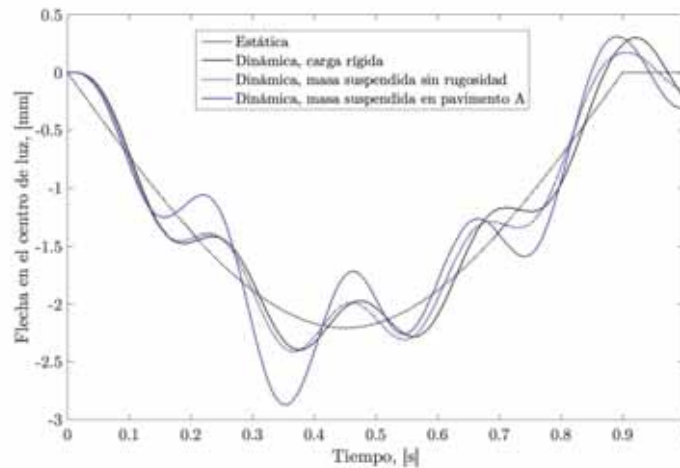
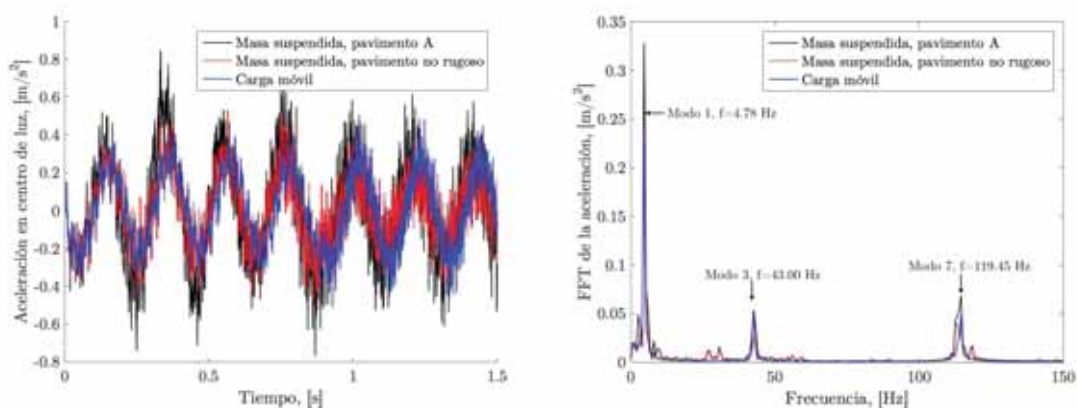


Figura 5.7: Flecha en el centro de luz según el tipo de análisis



(a) Dominio del tiempo

(b) Dominio de la frecuencia

Figura 5.8: Aceleración en el centro de luz según el tipo de análisis

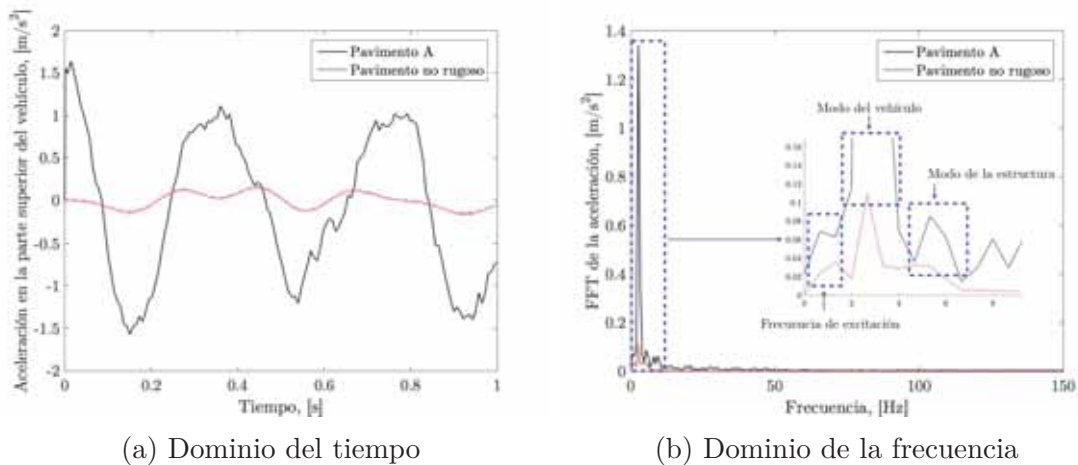


Figura 5.9: Aceleración la parte superior del vehículo según la rugosidad del pavimento

### 5.1.3. Paseo de dos vehículos

Para validar el comportamiento del modelo frente al paseo de varios vehículos, se realiza un análisis dinámico en la viga isostática anteriormente descrita pero atravesada por dos vehículos modelizados por sendas fuerzas y masas suspendidas móviles cuyas propiedades se resumen en la tabla 5.5.

La consideración de dos vehículos implica un decalaje en el tiempo del perfil de rugosidad que depende de la velocidad de tránsito y de la posición inicial de los vehículos. En este ejemplo, como la velocidad de ambos vehículos es igual, el perfil de rugosidad en función del tiempo que experimenta cada punto de contacto se obtiene por traslación directa sin necesidad de escala como se muestra en la figura 5.11a.

Por otro lado, se incluye en esta ocasión el amortiguamiento en la estructura mediante un amortiguamiento ortogonal de Rayleigh en el que los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  han sido obtenidos calando un porcentaje de amortiguamiento crítico del 5% a las frecuencias de 0,3 y 20 Hz como se presenta en la figura 5.10. Es importante tener en cuenta que en cálculos transitorios en base modal, se puede fijar directamente el amortiguamiento de cada modo, sin embargo, en cálculos transitorios en base física,

es indispensable aplicar un modelo de tipo Rayleigh o Caughey para la obtención de la matriz de amortiguamiento. El porcentaje de amortiguamiento crítico de cada modo no tiene por qué coincidir con el amortiguamiento fijado en el calaje inicial de los parámetros, y su valor depende de la pulsación propia del modo en cuestión y del modelo empleado. En el caso del modelo de Rayleigh, el porcentaje de amortiguamiento crítico del modo de pulsación  $\omega_i$  es:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_i} + \beta\omega_i \right) \quad (5.6)$$

<b>Fuerza móvil</b>			
		Vehículo 1	Vehículo 2
Fuerza móvil	[kN]	28,20	28,20
Velocidad	[km/h]	100	100
<b>Masa suspendida</b>			
		Vehículo 1	Vehículo 2
Masa suspendida	[kg]	2875	2875
Masa no suspendida	[kg]	0	0
Rigidez de la suspensión	[kN/m]	797,5	797,5
Amortiguamiento de la suspensión	[kNs/m]	1000	1000
Desfase distancias	[m]	0	-20
Velocidad	[km/h]	100	100

Cuadro 5.5: Propiedades de los vehículos

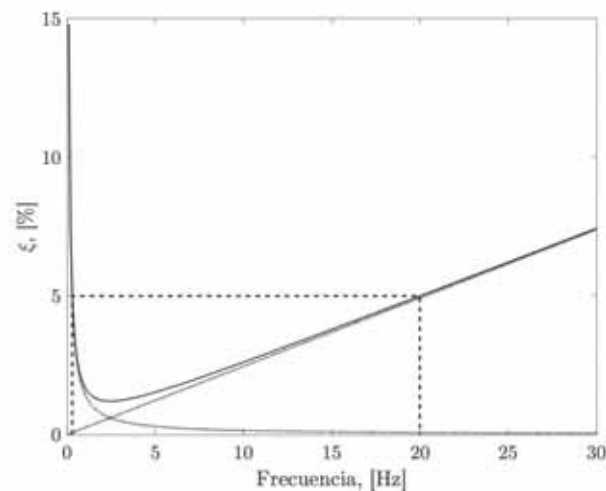
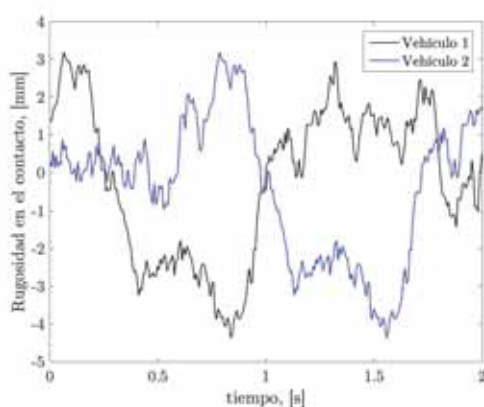


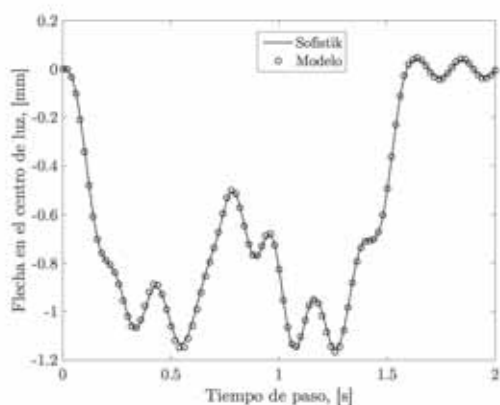
Figura 5.10: Modelo de Rayleigh, porcentaje de amortiguamiento crítico en función de la frecuencia

En las figuras 5.11 y 5.20 se muestra la respuesta dinámica obtenida mediante el programa de cálculo desarrollado y Sofistik. Se aprecia una buena correspondencia entre los valores de la respuesta de de la estructura y de los vehículos tanto en desplazamientos como en velocidades y aceleraciones, validándose por tanto, el tránsito de  $n$  cargas sobre un tablero isostático.

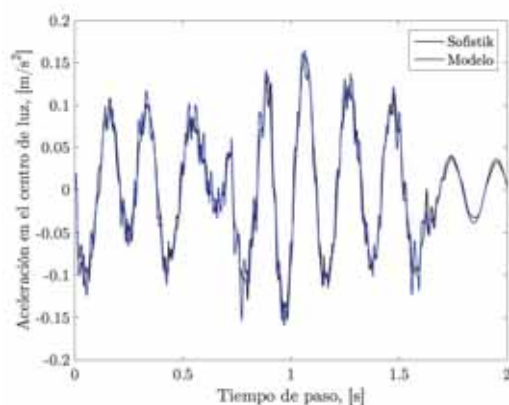
En la figura 5.11 se muestra el perfil de rugosidad en el punto de contacto de ambos vehículos y la respuesta dinámica en centro de luz de la viga isostática en desplazamientos y aceleraciones. En la serie temporal de desplazamientos, se aprecia el desfase de 20 metros entre los vehículos en los máximos de la respuesta, lo que a la velocidad de tránsito se corresponde con 0,72 segundos. Por otro lado la figura 5.12 se corresponde con las series temporales de desplazamientos, aceleraciones y fuerzas de contacto dinámica de los dos vehículos.



(a) Perfil de rugosidad del pavimento tipo A



(b) Flecha en el centro de luz

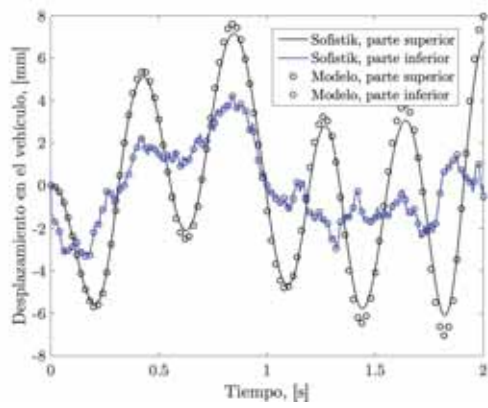


(c) Aceleración en el centro de luz

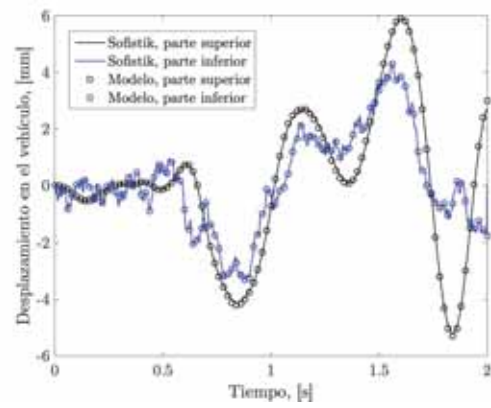
Figura 5.11: Respuesta de la viga en centro de luz considerando la rugosidad del firme



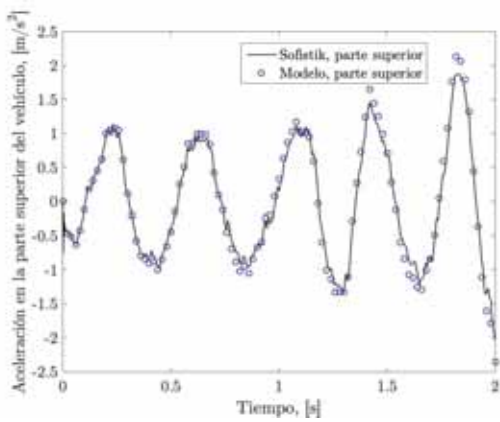
## 5. Validación



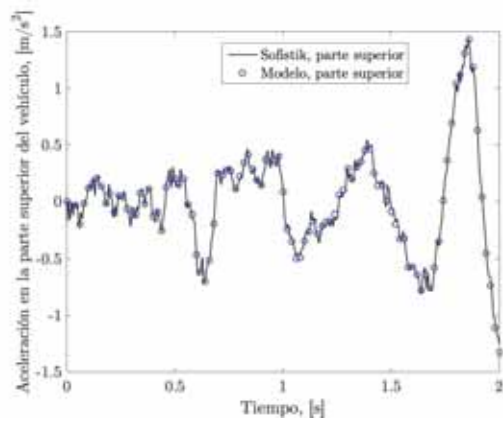
(a) Desplazamientos en el primer vehículo



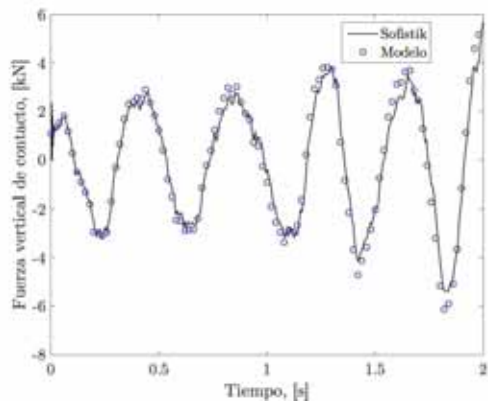
(b) Desplazamientos en el segundo vehículo



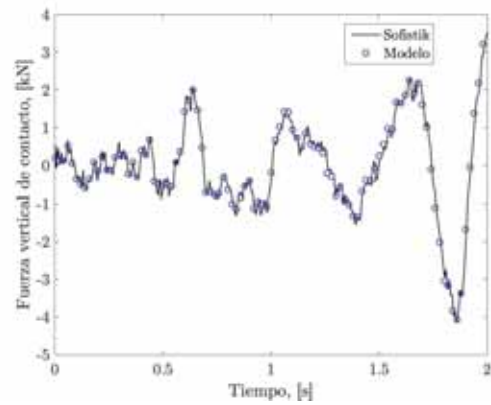
(c) Aceleraciones en el primer vehículo



(d) Aceleraciones en el segundo vehículo



(e) Fuerza de contacto dinámica ejercida por el primer vehículo



(f) Fuerza de contacto dinámica ejercida por el segundo vehículo

Figura 5.12: Respuesta de los vehículos

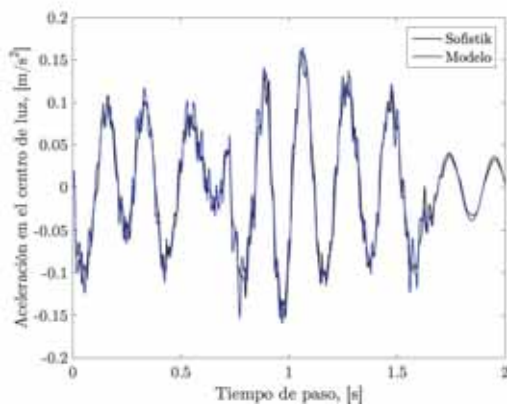


## Estabilidad numérica en la integración temporal

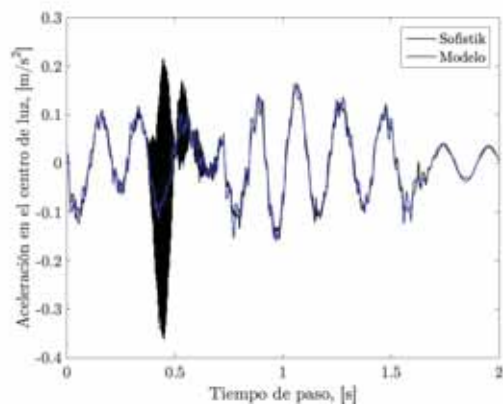
A la hora de realizar análisis dinámicos por integración temporal directa, es importante conocer las bases de los métodos numéricos de integración para así escoger los más adecuados según el problema de estudio. En la figura 5.13 se muestran las aceleraciones en el centro de luz y en el vehículo uno obtenidas por el programa de Sofistik y por el modelo desarrollado en el presente TFM. Se aprecia cómo en el caso de un esquema de Newmark- $\beta$  implementado en Sofistik, aparecen oscilaciones importantes en el instante 0.5 segundos en centro de luz y una inclusión importante de altas frecuencias en la respuesta del vehículo, lo que daría un grado de confort muy bajo. Sin embargo, los resultados del esquema de Newmark- $\beta$  implementado en el presente modelo dan lugar a aceleraciones más contenidas reduciendo notablemente el ruido de alta frecuencia.

Los parámetros empleados en el análisis dinámico se corresponden con una aceleración media constante, lo que hace que el algoritmo sea incondicionalmente estable independientemente del paso de tiempo, sin embargo eso implica que la energía del sistema no va a divergir y se va a mantener constante, lo que no quiere decir que nos conduzca a la solución correcta. Siendo el método de Newmark- $\beta$  con aceleración media constante el empleado en ambos modelos, figuras 5.13b y 5.13d, la diferencia en los resultados obtenidos se debe al paso de tiempo de la integración temporal, siendo de 0,001 segundos en el modelo desarrollado y de 0,05 segundos en el modelo de Sofistik (límite de la versión educativa).

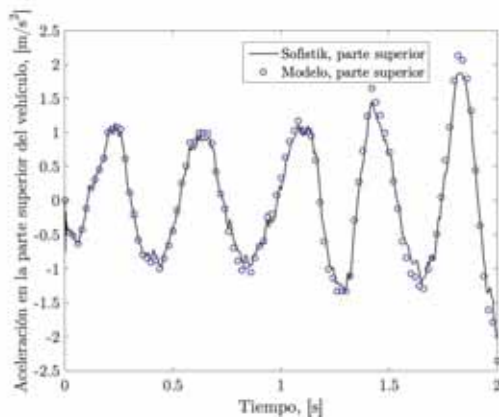
Para poder corregir la inclusión de altas frecuencias ficticias en la respuesta temporal sin reducir el paso del tiempo, el programa Sofistik tiene implementado el algoritmo HHT- $\alpha$  (Chung and Hulbert, 1993), que es una evolución del método de Newmark especialmente indicado para disipar las altas frecuencias, figuras 5.13a y 5.13c. En esta sección se pone de manifiesto la importancia de los parámetros y del esquema de integración numérica en la respuesta, pues una mala elección puede tener como consecuencias la invalidez de los resultados o un coste computacional desmesurado.



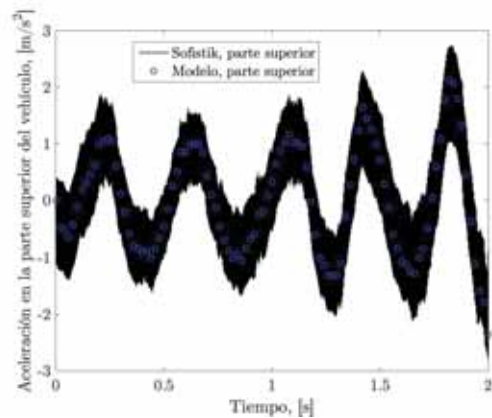
(a) Aceleraciones en centro de luz, integración temporal en Sofistik mediante un esquema HHT- $\alpha$



(b) Aceleraciones en centro de luz, integración temporal en Sofistik mediante un esquema Newmark- $\beta$



(c) Aceleraciones en el vehículo uno, integración temporal en Sofistik mediante un esquema HHT- $\alpha$



(d) Aceleraciones en el vehículo uno, integración temporal en Sofistik mediante un esquema Newmark- $\beta$

Figura 5.13: Sensibilidad de las aceleraciones al algoritmo numérico de integración temporal

## 5.2. Viga isostática sobre cimentación elástica

El modelo de viga sobre cimentación elástica de tipo Winkler es validado mediante una estructura biapoyada con los mismas propiedades elastomecánicas que la viga isostática del apartado anterior a la que se le añade el efecto rigidizador de un suelo cuya constante  $k$  es igual a 10 MPa. Este tipo de modelización resulta adecuada para modelizar el problema de tránsito de masas o cargas móviles sobre una plataforma cimentada directamente en el terreno y tener un referente de comparación de la respuesta del vehículo con respecto al paso del vehículo sobre una estructura. Es

importante tener en cuenta que pese a que se modelicen las condiciones de contorno de una viga isostática, la viga sobre cimentación elástica tiene una longitud de onda centrada en la carga de  $L = (4EI/k)^{0,25}$ . A partir de ese valor, las condiciones de contorno dejan de influir en la respuesta de la estructura, que recae únicamente en la rigidez del terreno, representada por el módulo de Winkler.

### 5.2.1. Cálculo modal

En primer lugar, se realiza un cálculo modal con el fin de verificar las matrices de masa y de rigidez de la estructura. Los valores de las frecuencias se comparan con los valores exactos que resultan de la solución homogénea por separación de variables de las ecuaciones 3.7 y 3.8.

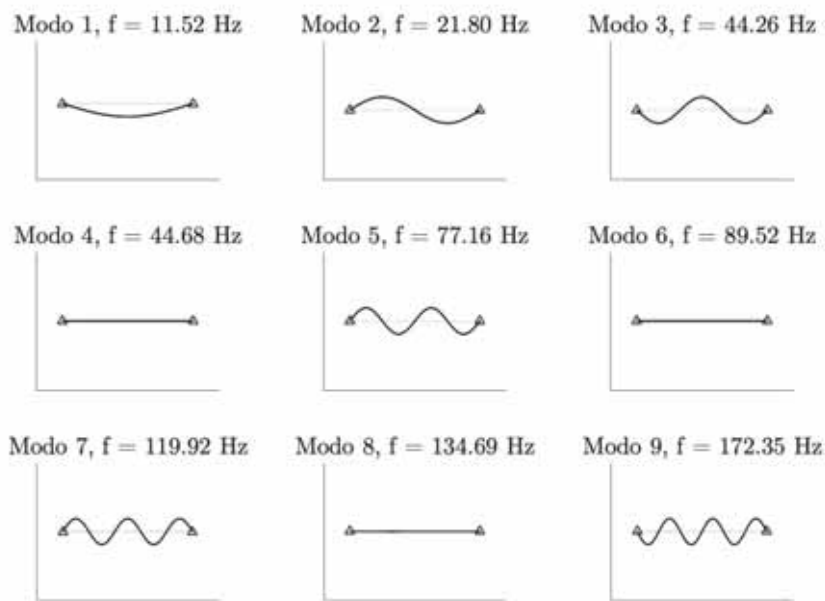


Figura 5.14: Primeros modos propios de la viga sobre cimentación elástica

Las expresiones siguientes muestran las pulsaciones propias exactas de flexión y axil de la viga sobre cimentación elástica de tipo Winkler. Se aprecia cómo el terreno sólo influye en la flexión en el segundo término de la ecuación 5.7, siendo el primer término idéntico al de la viga isostática.

$$w_f = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} + \sqrt{\frac{k}{\bar{m}}} \quad (5.7)$$

$$w_a = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{EA}{\bar{m}}} \quad (5.8)$$

La comparación entre los modos obtenidos por el modelo de EF y los modos exactos se muestra en la tabla 5.6. Los resultados del modelo EF con una discretización de  $L/25$  son satisfactorios y se aprecia cómo las pulsaciones propias del modelo EF son siempre superiores a las pulsaciones exactas, lo que se explica por el teorema del mínimo de la energía potencial.

Modo	Tipo	Frecuencia, [Hz]		
		Modelo	Analítico	Error rel., [%]
1	Flexión	11,52	11,52	0,04 %
2	Flexión	21,80	21,80	0,00 %
3	Flexión	44,26	44,26	0,00 %
4	Axil	44,68	44,65	0,06 %
5	Flexión	77,16	77,16	0,00 %
6	Axil	89,52	89,31	0,24 %
7	Flexión	119,92	119,91	0,01 %
8	Axil	134,69	133,96	0,54 %
9	Flexión	172,35	172,32	0,02 %

Cuadro 5.6: Primeros modos propios de la viga sobre cimentación elástica

Una vez validadas las matrices de masa y de rigidez del sistema mediante el cálculo modal, de la misma manera que en el caso de una viga isostática, se analiza el paseo de una y dos masas suspendidas móviles y se contrasta la respuesta de la estructura y de los vehículos con los resultados de Sofistik.

### 5.2.2. Paseo de un vehículo

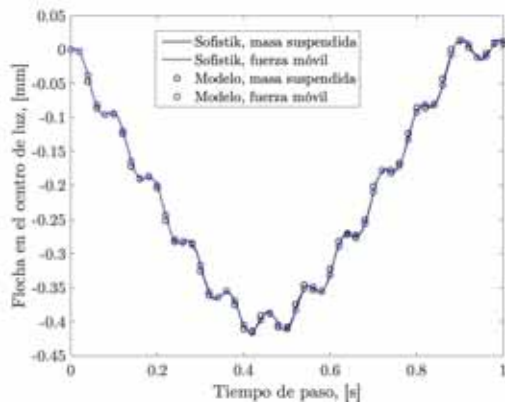
En este caso las propiedades del vehículo son idénticas a las mostradas en la tabla 5.4 y la matriz de amortiguamiento estructural es nula, como en el caso de la viga isostática. El efecto de la rigidez del suelo reduce las flechas y aceleraciones en la estructura y las aceleraciones y la fuerza de contacto en el vehículo.

En la figura 5.15 se muestra la respuesta de la estructura y de los vehículos modelizados mediante masas suspendidas sin rugosidad. Se aprecia cómo al considerar la rigidez del firme, la flecha en el centro de luz pasa de 2,4 mm a 0,42 mm. Del mismo modo, los máximos de aceleraciones en centro de luz se reducen de  $0,8 \text{ m/s}^2$  a  $0,4 \text{ m/s}^2$ . En lo que se refiere al vehículo, su respuesta en desplazamientos, aceleraciones y la fuerza de contacto dinámica que ejerce sobre la estructura también disminuyen considerablemente respecto al caso mostrado en la figura 5.5.

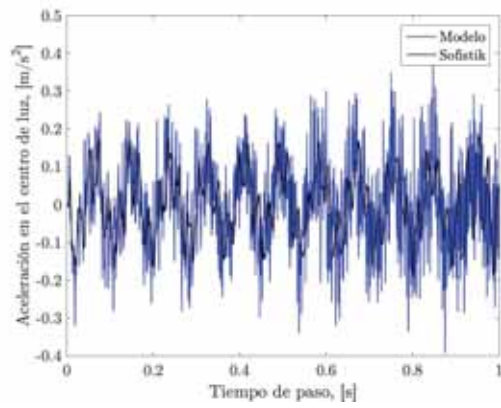
Analizado el caso no rugoso, un aumento en el nivel de dificultad de la modelización implica la consideración del pavimento rugoso, figura 5.16. La respuesta de la estructura en el centro de luz es ligeramente modificada por la introducción de la irregularidad del firme aunque los niveles máximos de flecha y aceleraciones no varían enormemente. Sin embargo, en lo que se refiere a la respuesta del vehículo, se aprecia que la aceleración de la masa suspendida pasa de  $0,08 \text{ m/s}^2$  sin rugosidad a  $1,5 \text{ m/s}^2$ , lo que repercute en la fuerza de contacto dinámica que pasa de 0,4 a 9 kN.

Es importante remarcar que la introducción del pavimento mediante el modelo de Winkler repercute únicamente en la matriz de rigidez de la estructura, pues como hipótesis simplificadora, se ha despreciado el amortiguamiento material y por radiación de ondas en el suelo, que puede alcanzar valores críticos en el entorno de hasta el 30 %.

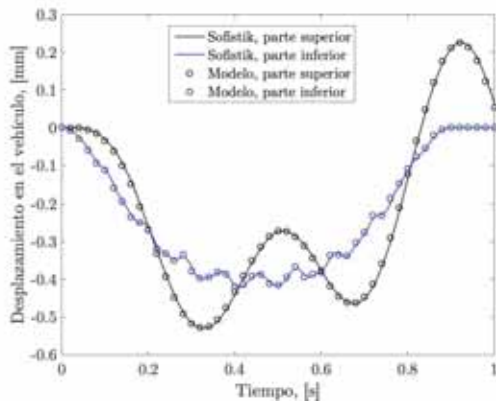
## 5. Validación



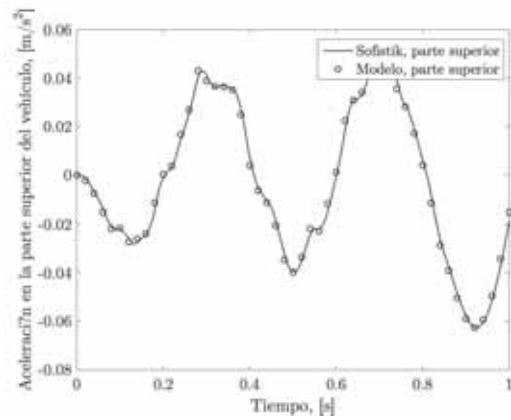
(a) Flecha en el centro de luz



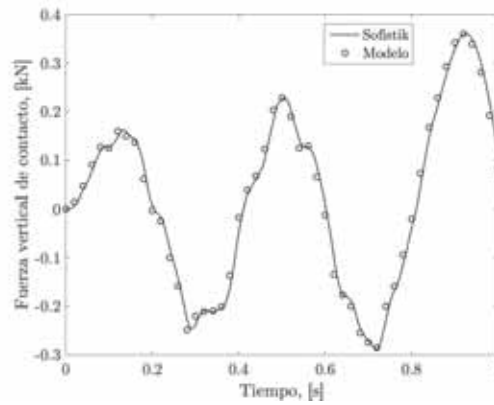
(b) Aceleración en el centro de luz



(c) Desplazamientos en el vehículo



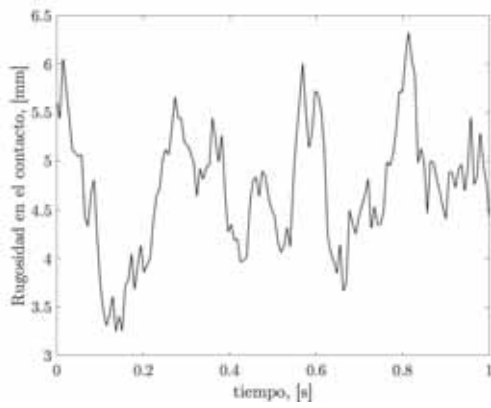
(d) Aceleración en la parte superior del vehículo



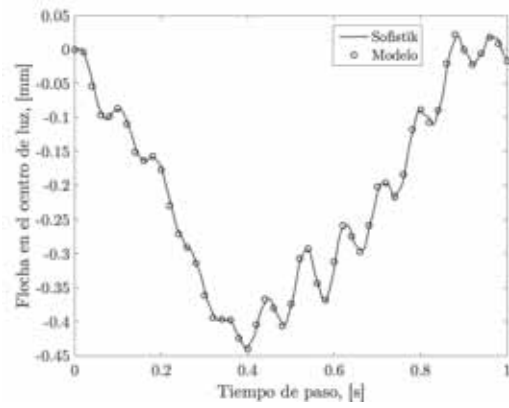
(e) Fuerza de contacto dinámica

Figura 5.15: Validación con Sofistik, viga sobre cimentación elástica con pavimento no rugoso

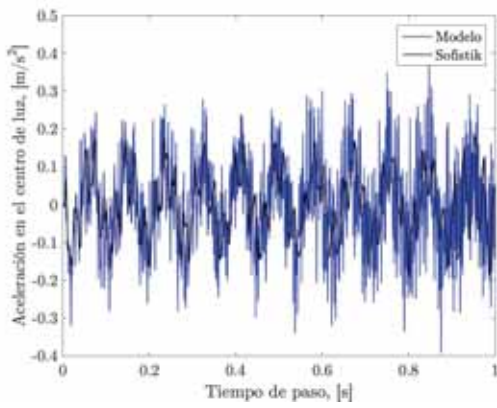
## 5. Validación



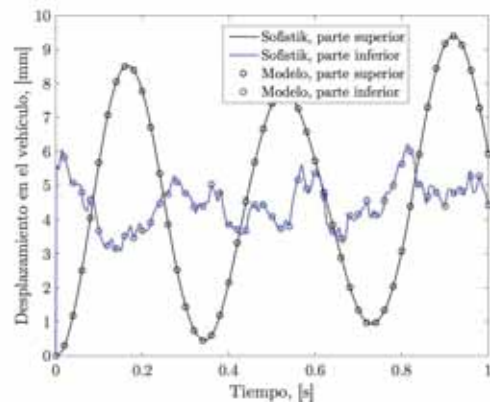
(a) Perfil de rugosidad del pavimento



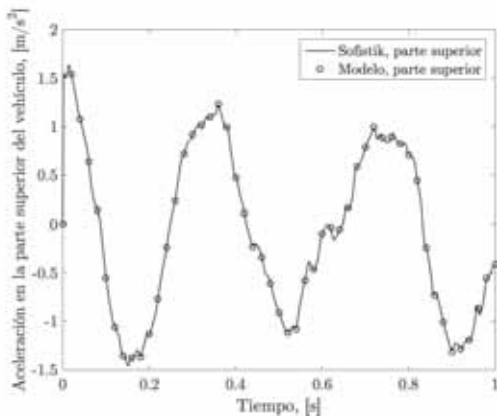
(b) Flecha en el centro de luz



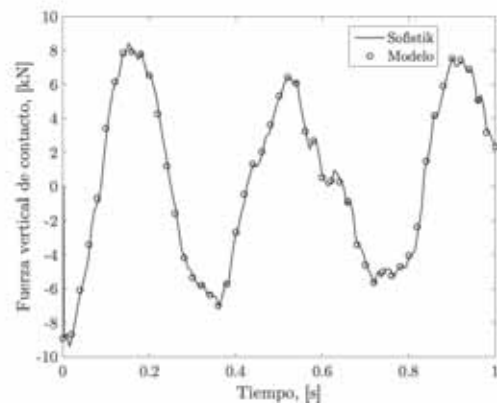
(c) Aceleración en el centro de luz



(d) Desplazamientos en el vehículo



(e) Aceleración en la parte superior del vehículo

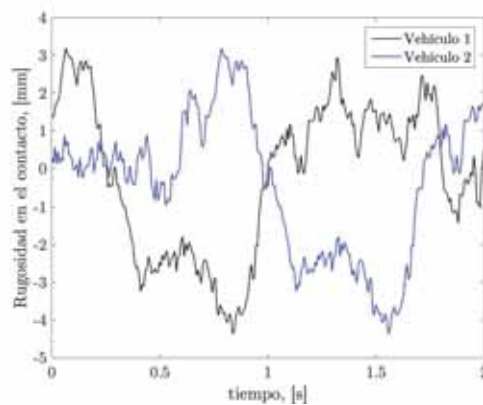


(f) Fuerza de contacto dinámica

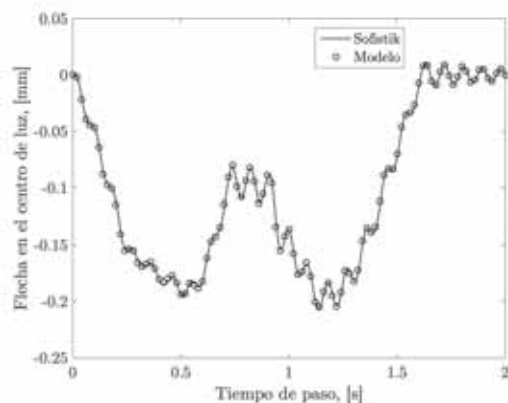
Figura 5.16: Validación con Sofistik, viga sobre cimentación elástica con pavimento rugoso de tipo A

### 5.2.3. Paseo de dos vehículos

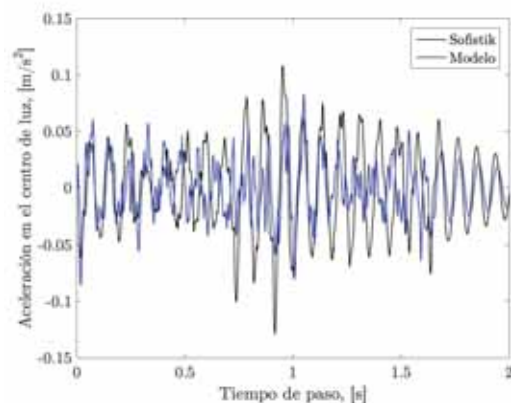
Finalmente, se modeliza el paseo de dos vehículos cuyas propiedades coinciden con las del cuadro 5.5. En este caso se considera una estructura amortiguada mediante un modelo de Rayleigh calando un porcentaje de amortiguamiento crítico del 5% entre las frecuencias de 0,3 y 20 Hz, figura 5.10. Al considerar la rigidez del pavimento, las flechas y aceleraciones en la estructura disminuyen notablemente pasando de 1,2 mm a 0,2 mm de flecha en el centro de luz y de  $0,2 \text{ m/s}^2$  a  $0,15 \text{ m/s}^2$  de aceleración vertical en la misma posición, como se muestra en la figura 5.17. En lo que se refiere a la respuesta de los vehículos, figura 5.18, los valores máximos de aceleración en la masa superior y por consiguiente, de fuerza de contacto dinámica, no varían drásticamente en la viga sobre cimentación elástica con respecto a la viga isostática.



(a) Perfil de rugosidad del pavimento tipo A



(b) Flecha en el centro de luz

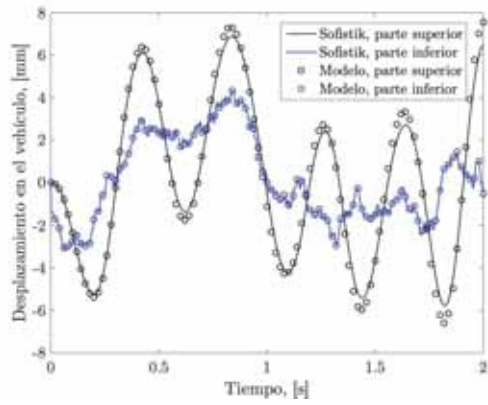


(c) Aceleración en el centro de luz

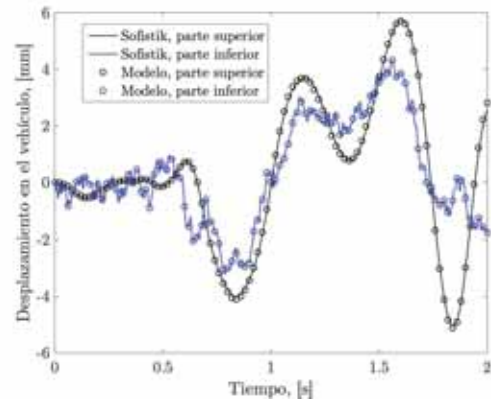
Figura 5.17: Respuesta de la viga sobre cimentación elástica en centro de luz considerando la rugosidad del firme



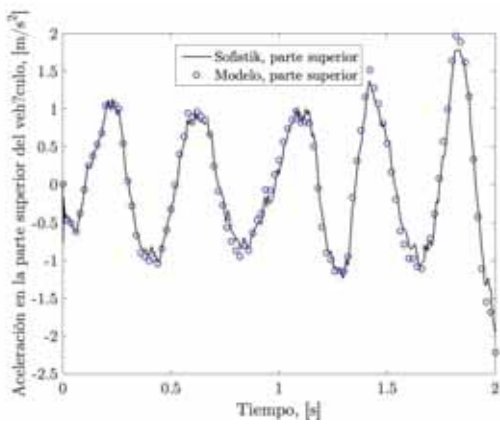
## 5. Validación



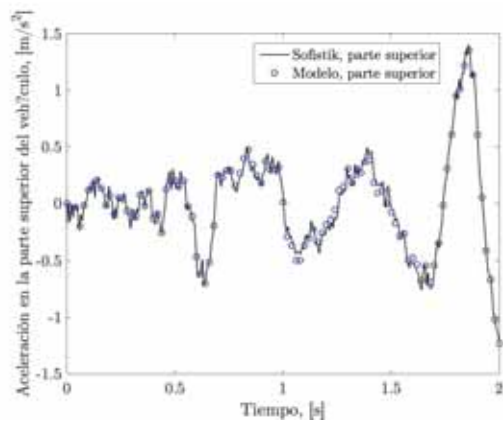
(a) Desplazamientos en el primer vehículo



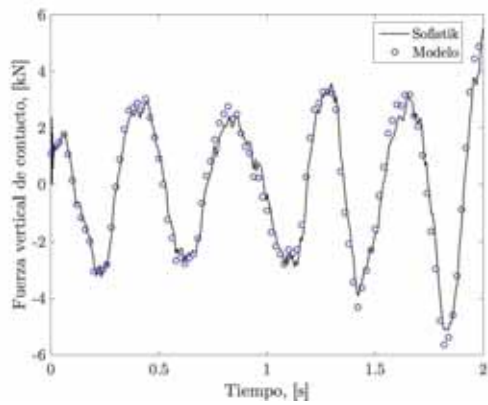
(b) Desplazamientos en el segundo vehículo



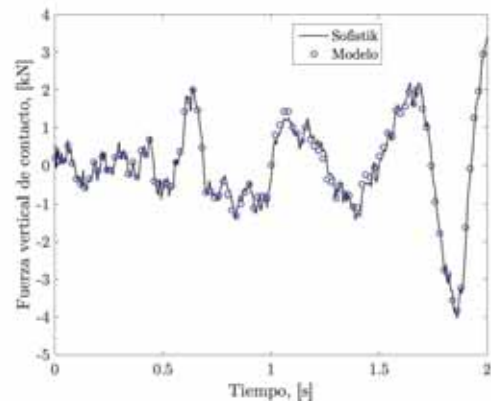
(c) Aceleraciones en el primer vehículo



(d) Aceleraciones en el segundo vehículo



(e) Fuerza de contacto dinámica ejercida por el primer vehículo



(f) Fuerza de contacto dinámica ejercida por el segundo vehículo

Figura 5.18: Respuesta de los vehículos

### 5.3. Viga atirantada simple

Para validar el modelo desarrollado en el presente TFM y poderlo aplicar al estudio de puentes atirantados, se realiza un modelo de viga atirantada para así aunar en la misma modelización elementos viga y elementos barra. La geometría y las condiciones de contorno se muestran en la figura 5.19, mientras que las características elastomecánicas de los elementos y las propiedades del mallado se resumen en los cuadros 5.7 y 6.3.

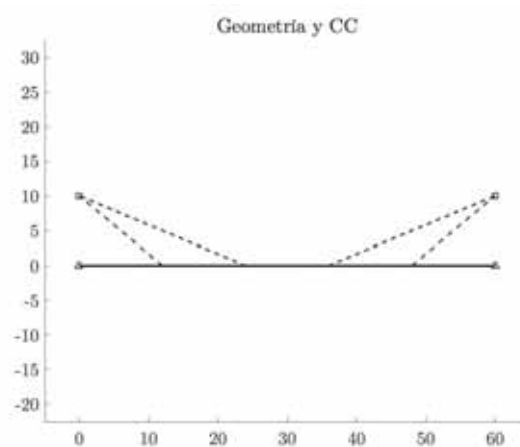


Figura 5.19: Geometría del modelo de viga atirantada en EF

Luz	L	[m]	60
Área tablero	A	[m <sup>2</sup> ]	4
Inercia tablero	I	[m <sup>4</sup> ]	1,33
Módulo de Young del tablero	E	[N/m <sup>2</sup> ]	30 · 10 <sup>9</sup>
Masa lineal del tablero	$\bar{m}$	[kg/m]	10000
Área de los cables	$A_c$	[m <sup>2</sup> ]	0,04
Módulo de Young cables	$E_c$	[N/m <sup>2</sup> ]	200 · 10 <sup>9</sup>
Masa lineal de los cables	$\bar{m}_c$	[kg/m]	308

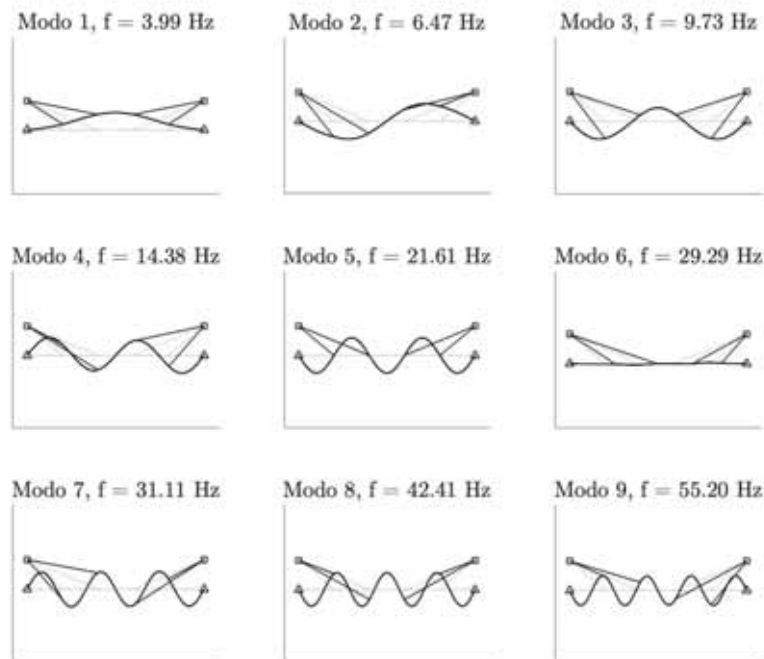
Cuadro 5.7: Propiedades geométricas y mecánicas de la viga atirantada simple

Nodos	63
Elementos viga	60
Elementos barra	4
gdl totales	187
gdl impuestos	8

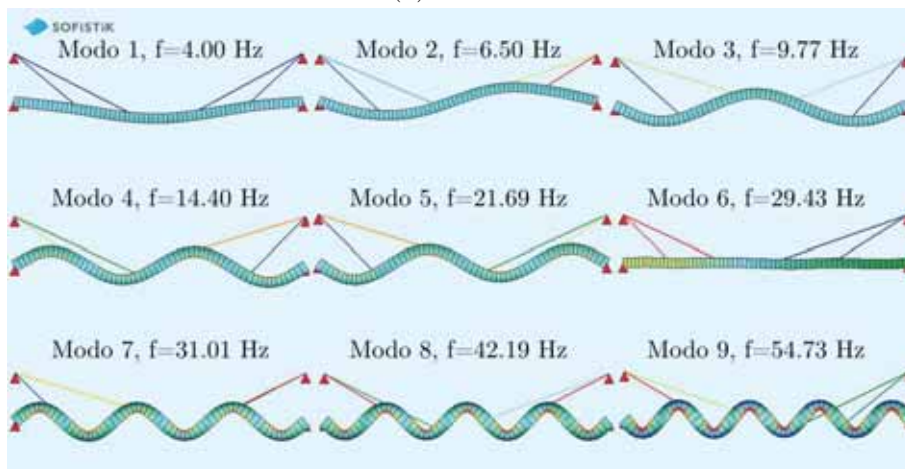
Cuadro 5.8: Propiedades del modelo EF de la viga atirantada simple

### 5.3.1. Cálculo modal

Siguiendo el procedimiento de los casos de estudio anteriores, se realiza un cálculo modal para verificar el correcto ensamblaje de las matrices de masa y rigidez globales del sistema, figura 5.20a. Ante la inexistencia de soluciones analíticas simples para el problema, se contrastan los resultados con el programa Sofistik, figura 5.20b.



(a) Modelo



(b) Sofistik

Figura 5.20: Cálculo modal de la estructura

En el cuadro 5.9 se muestra la comparación entre las frecuencias propias obtenidas en ambas modelizaciones. Los resultados son satisfactorios dado que el error relativo se mantiene inferior al 0,9 %. Se aprecia igualmente que las frecuencias propias obtenidas por el modelo desarrollado son ligeramente inferiores a las obtenidas por Sofistik en los primeros modos, lo que sirve para validar la precisión del programa.

Modo	Tipo	Frecuencia, [Hz]		Error rel., [%]
		Modelo	Sofistik	
1	Flexión	3,99	4,00	0,25 %
2	Flexión	6,47	6,50	0,46 %
3	Flexión	9,73	9,77	0,41 %
4	Flexión	14,38	14,40	0,14 %
5	Flexión	21,61	21,69	0,37 %
6	Axil	29,29	29,43	0,48 %
7	Flexión	31,11	31,01	0,32 %
8	Flexión	42,41	42,19	0,52 %
9	Flexión	55,20	54,73	0,86 %

Cuadro 5.9: Comparación de las frecuencias fundamentales de la viga atirantada obtenidas a partir del modelo con la formulación analítica

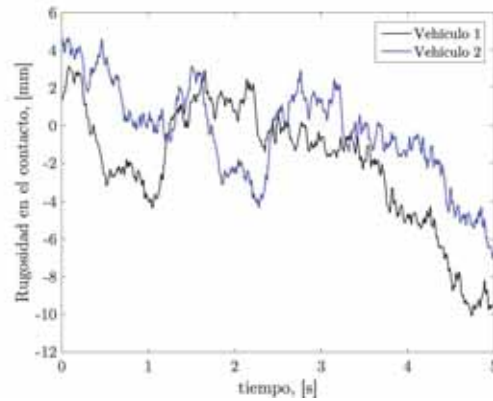
### 5.3.2. Paseo de dos vehículos

Como excitación dinámica se plantea el tránsito de dos vehículos modelizados como masas móviles que circulan sobre un pavimento rugoso de tipo A. Las propiedades de los vehículos se muestran en la tabla 5.10.

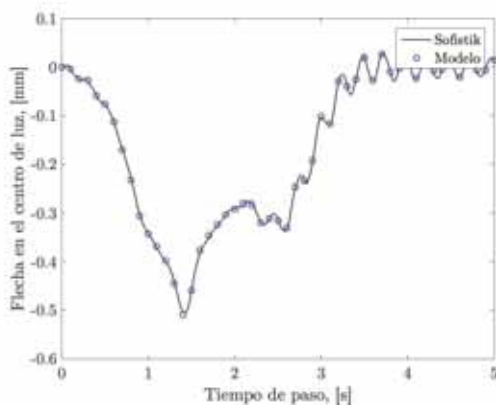
Fuerza móvil			
		Vehículo 1	Vehículo 2
Fuerza móvil	[kN]	58,86	39,24
Velocidad	[km/h]	80	100
Masa suspendida			
		Vehículo 1	Vehículo 2
Masa suspendida	[kg]	6000	4000
Masa no suspendida	[kg]	0	0
Rigidez de la suspensión	[kN/m]	797,5	797,5
Amortiguamiento de la suspensión	[kNs/m]	10000	20000
Desfase distancias	[m]	0	-40
Velocidad	[km/h]	80	100

Cuadro 5.10: Propiedades de los vehículos

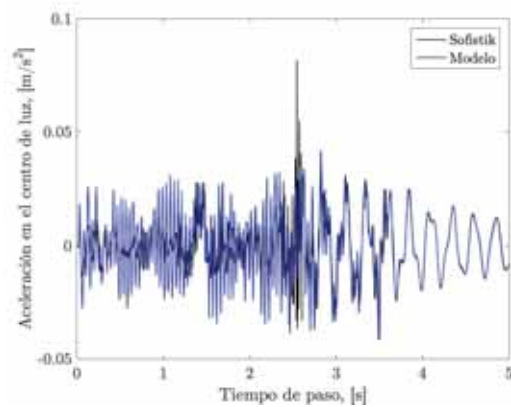
Como fuente de disipación en la estructura se adopta un modelo de Rayleigh calando un porcentaje de amortiguamiento crítico del 5 % en las frecuencias de 0,05 y 20 Hz. El amortiguamiento crítico en función de la frecuencia se muestra en la figura 5.10.



(a) Perfil de rugosidad del pavimento tipo A



(b) Flecha en el centro de luz



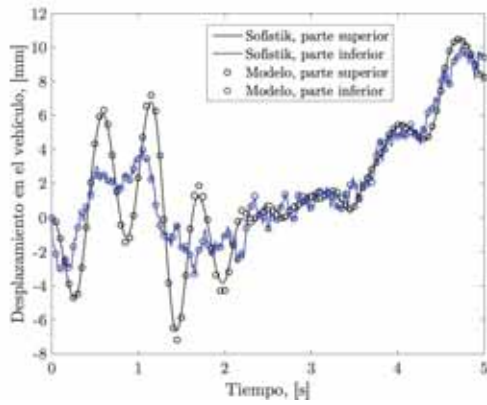
(c) Aceleración en el centro de luz

Figura 5.21: Respuesta de la estructura en centro de luz considerando la rugosidad del firme

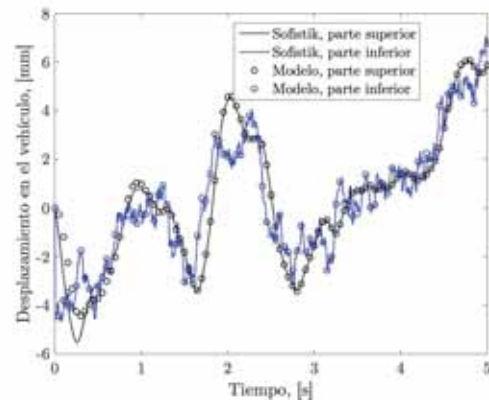
La respuesta dinámica de la estructura al paso del tren de cargas se muestra en la figura 5.21. El perfil de rugosidad que experimenta cada punto de contacto está decalado por el efecto de la distancia inicial de ambas cargas y escalado en el tiempo debido a las diferentes velocidades de paso. De la comparación entre el modelo de cálculo y el modelo de Sofistik se pone de manifiesto una buena concordancia tanto en desplazamientos como en aceleraciones verticales en centro de luz. Por otro lado, la respuesta de los vehículos se muestra en la figura 5.22. Se aprecia un acuerdo excelente entre los dos modelos en desplazamientos, aunque en lo que respecta a las aceleraciones el modelo de Sofistik muestra, en la respuesta del segundo vehículo,

## 5. Validación

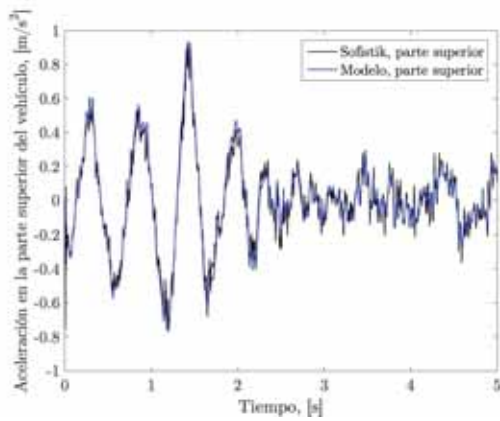
las oscilaciones de alta frecuencia motivadas por la limitación del paso de tiempo de la versión educativa de Sofistik a 0,05 segundos. Pese a ello, el comportamiento del modelo queda validado tanto en desplazamientos como en aceleraciones.



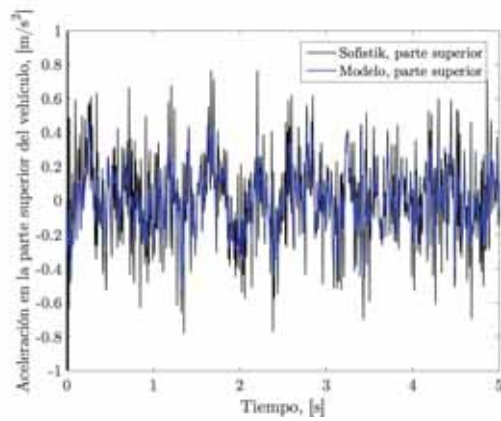
(a) Desplazamientos en el primer vehículo



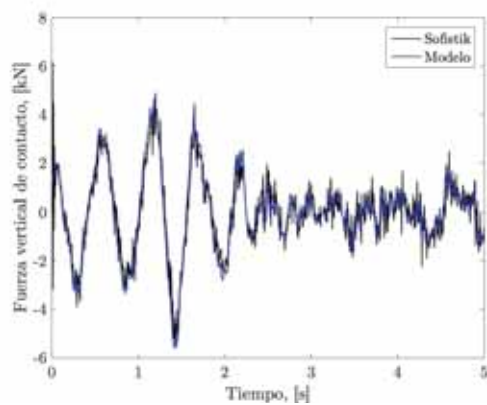
(b) Desplazamientos en el segundo vehículo



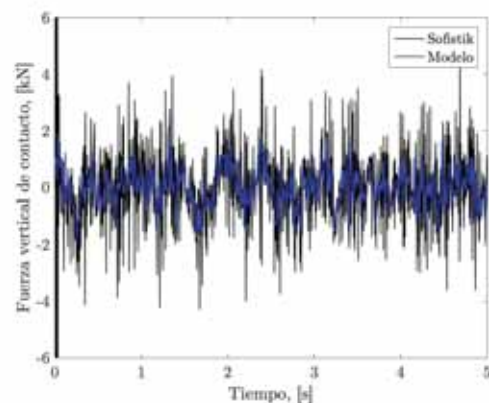
(c) Aceleraciones en el primer vehículo



(d) Aceleraciones en el segundo vehículo



(e) Fuerza de contacto dinámica ejercida por el primer vehículo



(f) Fuerza de contacto dinámica ejercida por el segundo vehículo

Figura 5.22: Respuesta de los vehículos

# 6

## Aplicación al estudio de puentes atirantados

El modelo 2D desarrollado y validado en esta memoria es utilizado para llevar a cabo un estudio paramétrico del comportamiento dinámico de puentes atirantados bajo el tráfico vehicular. Para ello se estudian diversas configuraciones tanto del tren de cargas (espaciamiento, masa y tipo de vehículo), de la estructura (rigidez del tablero, vinculación pila tablero, configuración del sistema de atirantamiento) cómo del estado del firme.

Los puentes atirantados no son especialmente sensibles a las vibraciones vehiculares debido a la gran flexibilidad de la estructura portante. Sin embargo, existen algunas configuraciones que son susceptibles a vibraciones locales de elementos motivadas por el tráfico de carretera, lo que condiciona el dimensionamiento a fatiga y la durabilidad y mantenimiento de la infraestructura. En este trabajo se ponen de manifiesto algunas de las configuraciones más vulnerables desde el punto de vista del tráfico vehicular, destacando los elementos estructurales más sensibles.

Para llevar a cabo esta investigación, se ha tomado como punto de partida la configuración de base del estudio paramétrico estático de [Walther \(1999\)](#). El modelo de base representa un puente atirantado estándar, dentro de la singularidad de la tipología, tanto en luces cómo en sección transversal y sistema de atirantamiento.



## 6.1. Parámetros de caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos

En el modelo, la circulación de los vehículos circulan de derecha a izquierda. Los sesenta tirantes del modelo se numeran de izquierda a derecha según el sentido de circulación de los vehículos. De la misma manera, dos pilas verticales del modelo se numeran en orden siguiendo el sentido de avance de los vehículos según se muestra en la figura 6.1.

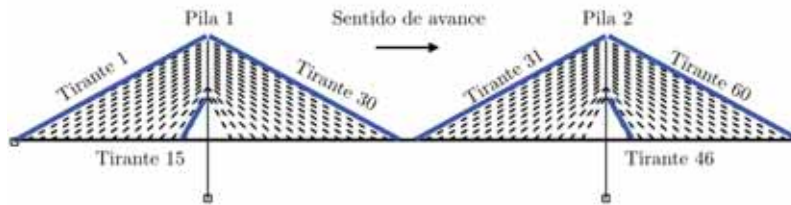


Figura 6.1: Nomenclatura de elementos del modelo

Por otro lado, para caracterizar el comportamiento dinámico y clasificar el comportamiento de las diferentes configuraciones estudiadas frente al tráfico se calcula el factor de impacto de los desplazamientos y esfuerzos esquematizados en la figura 6.2. Una estimación del grado de confort de tránsito se evalúa mediante la aplicación de la norma ISO2631 a la serie temporal de aceleraciones en cabina.

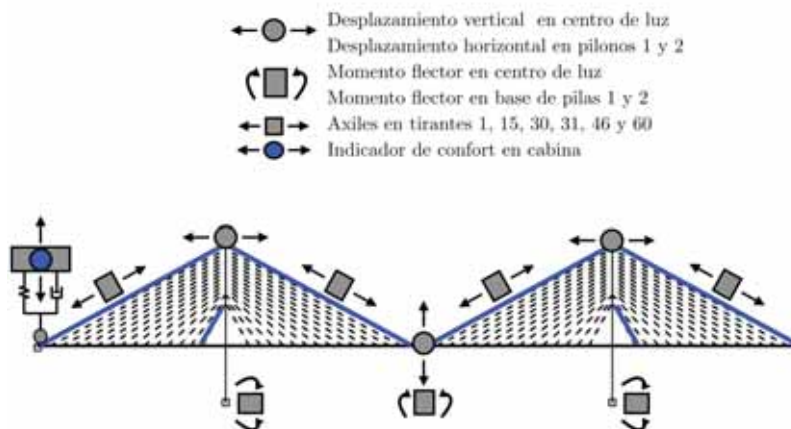


Figura 6.2: Parámetros de caracterización de la respuesta dinámica



## 6.2. Modelo de base

### 6.2.1. Descripción del modelo

Las propiedades geométricas principales del tablero y de las pilas de la configuración de base se muestran en el cuadro 6.1. Se trata de una estructura atirantada de tres vanos de 403 metros de longitud total. La inercia de la pila se corresponde con una pila de dos fustes desdoblados. El sistema de atirantamiento es doble en transversal y en semi-arpa en longitudinal. Las propiedades elastomecánicas de los tirantes se han aproximado para tener en cuenta los efectos no-lineales motivados por el efecto de la catenaria. Los tirantes modelizados presentan propiedades resistentes similares a los cables de pretensado y la disposición es simétrica respecto de la pila. Cada uno de los cuatro cuadrantes dobles que conforman la estructura tiene las propiedades mostradas en el cuadro 6.2.

Para considerar el efecto de las cargas permanentes en el comportamiento modal del puente (recogido en el anexo), se ha aumentado en consecuencia la masa lineal del tablero, que incluye un espesor de firme de 10 cm con una densidad de 2300 kg/m<sup>3</sup>, una barrera de hormigón central de contención de 620 kg/ml y dos pretilas metálicas de 65 kg/ml.

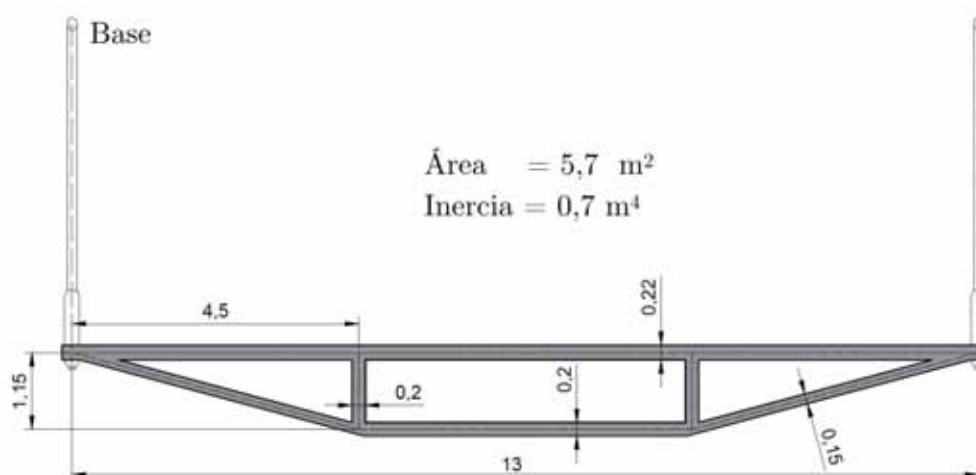
Vano principal	$L_p$	[m]	204,6
Vanos de aproximación	$L_a$	[m]	99,2
Altura de pila	$H_p$	[m]	81
Altura del tablero	$H_t$	[m]	30
Área tablero	$A_t$	[m <sup>2</sup> ]	5,7
Inercia tablero	$I_t$	[m <sup>4</sup> ]	0,78
Módulo de Young tablero	$E_t$	[N/m <sup>2</sup> ]	$30 \cdot 10^9$
Masa lineal tablero	$\bar{m}$	[kg/m]	18266
Área pila	$A_p$	[m <sup>2</sup> ]	27
Inercia pila	$I_p$	[m <sup>4</sup> ]	48
Módulo de Young pilas	$E_p$	[N/m <sup>2</sup> ]	$30 \cdot 10^9$

Cuadro 6.1: Características principales del tablero y de las pilas en el modelo de base

Tirante	Tipo	Área, [m <sup>2</sup> ]	E, [GPa]	$\rho$ , [kg/m <sup>3</sup> ]
1-2	75C15	0,0112	160	7850
3-11	55C15	0,0082	175	7850
12-15	31C15	0,0046	185	7850

Cuadro 6.2: Características simplificadas de los tirantes de un cuadrante

La sección transversal del modelo base tiene una anchura de 13 metros y un canto de 1,15 metros, lo que da una esbeltez de  $h/L$  de 180. Su perfil es aerodinámico y la baja rigidez a torsión del tablero obliga a un sistema de atirantamiento doble transversalmete. Las dimensiones de la sección transversal se recogen en la figura 6.3.

Figura 6.3: Sección transversal del modelo de base adaptada de [Walther \(1999\)](#), cotas en metros

En lo que se refiere al modelo de elementos finitos, se ha adoptado una discretización del tablero en elementos viga de 1,55 metros. Este parámetro es clave en la modelización, pues influencia junto con la velocidad de tránsito, el paso de tiempo en el análisis dinámico temporal según la condición de Courant-Levy. Se ha procurado tener al menos cuatro puntos de cálculo por elemento para no perder demasiada precisión en el cálculo. El resto de elementos (pilas y cables) en los que no se produce el contacto se modelizan por elementos cuya longitud depende únicamente de los nodos del mallado.

Nodos	299
Elementos viga, tablero	260
Elementos viga, pilas	36
Elementos barra, tirantes	60
Elementos barra, auxiliares	2
gdl totales	897
gdl impuestos	10

Cuadro 6.3: Propiedades del modelo EF de la viga atirantada simple

La figura 6.4 muestra la geometría del modelo en elementos finitos. Las condiciones de contorno impuestas son sendos empotramientos en la base de las pilas, apoyo vertical en los estribos mediante un elemento muelle de rigidez  $k_r$  igual a 10 MN/m. El valor de la rigidez de la retenida se ha obtenido calibrando un modelo de un puente equivalente de cinco vanos como se muestra en las figuras B.2 y B.3 . El punto fijo longitudinal se encuentra en el estribo izquierdo y la vinculación pila-tablero permite únicamente la transmisión de cortante (el tablero apoya simplemente en vertical en la pila, quedando la rotación y la dilatación libres).

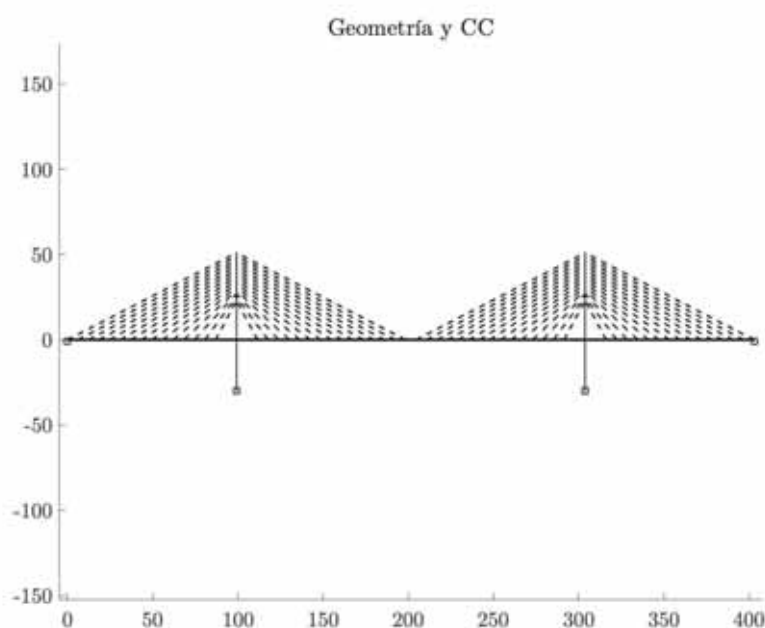


Figura 6.4: Geometría del modelo de base

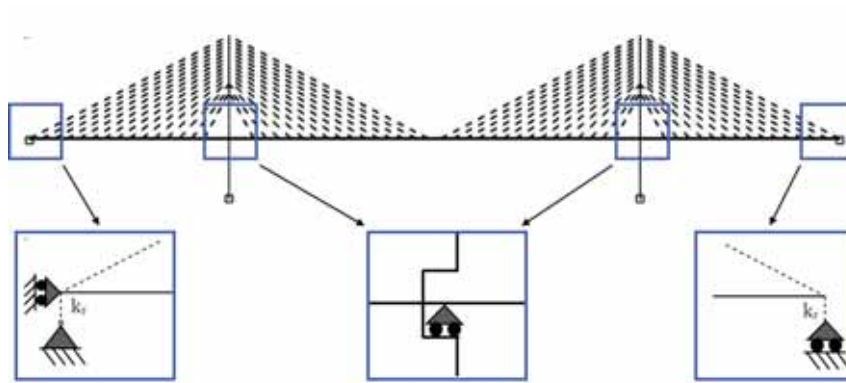


Figura 6.5: Detalle de los apoyos del tablero en el modelo de base,  $k_r$  designa la rigidez vertical de la retenida

En el estudio paramétrico se emplean el modelo de fuerzas y masas suspendidas móviles para representar la acción dinámica de vehículos. En todos los casos, a menos que se especifique lo contrario, se emplea el vehículo FLM2-2 utilizado en los estudios de fatiga del Eurocódigo cuyas propiedades se resumen en el cuadro 6.4.

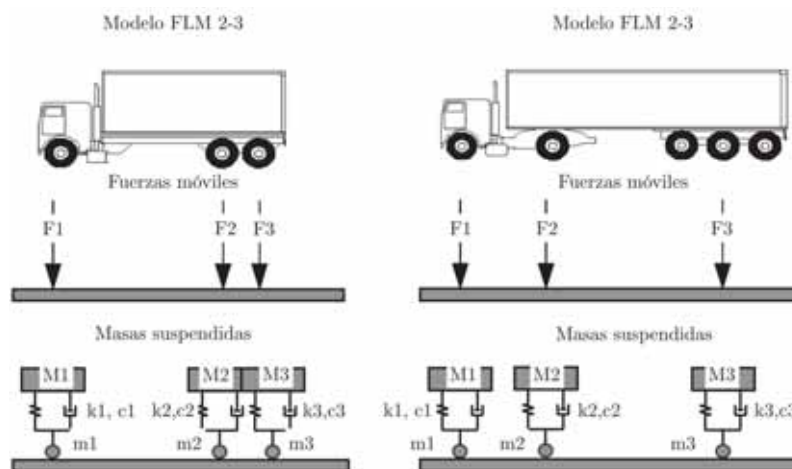


Figura 6.6: Modelización de los vehículos FLM2-2 y FLM2-3 mediante fuerzas y masas suspendidas

Parámetro	Unidad	Modelo FLM2-2	Modelo FLM2-3
F1	[kN]	80	90
F2	[kN]	140	180
F3	[kN]	140	360
M1	[t]	7,15	8,17
M2	[t]	13,27	17,34
M3	[t]	13,27	33,7
m1	[t]	1	1
m2	[t]	1	1
m3	[t]	1	1
k1	[kN/m]	238	238
k2	[kN/m]	238	238
k3	[kN/m]	238	714
c1	[kN.s/m]	20	20
c2	[kN.s/m]	20	20
c3	[kN.s/m]	20	60
d1	[m]	4,2	3,2
d2	[m]	1,3	6,5

Cuadro 6.4: Propiedades de los vehículos FLM2-2 y FLM2-3

### 6.2.2. El concepto de velocidad adimensional

En este trabajo se van a estudiar diferentes configuraciones resistentes de la estructura, lo que hace variar los modos propios preponderantes, complicando la interpretación de los resultados. El estudio dimensional del problema mediante el teorema de Vashy-Buckingham, pone de manifiesto que uno de los parámetros adimensionales más importantes es el cociente entre la frecuencia de la excitación dinámica y el primer modo propio de la estructura (velocidad adimensional). Es por ello que en las simulaciones en las que se hace variar las características modales, en el eje de abscisas se mostrará la velocidad adimensionalizada. La importancia de la adimensionalización resulta evidente al observar la figura B.9, dónde se aprecia que el hecho de hacer disminuir la rigidez de la retenida implica una disminución de los modos propios y un aumento de la velocidad adimensional. Con ello, lo que se consigue es un efecto de compresión de la curva de factores de impacto en el rango de velocidades dimensionales de estudio al disminuir la rigidez de la retenida.

Para calcular la velocidad adimensional se debe conocer la frecuencia de la excitación

y la primera frecuencia propia vertical de la estructura. El concepto de frecuencia de excitación está relacionado con la resolución por descomposición modal del problema de fuerzas móviles, dónde la fuerza generalizada del modo  $i$ , de pulsación  $\omega_i$  y deformada modal  $\phi_i(x)$  para una fuerza móvil  $F(x, t) = F_q \delta(x - ct)$ , es:

$$F_i^*(t) = \int_0^L \phi_i(x) F_q \delta(x - ct) dx \quad (6.1)$$

Considerando las propiedades de la función  $\delta$  de Dirac, podemos escribir:

$$F_i^*(t) = \int_0^L \phi_i(ct) F_q dx = \phi_i(ct) F_q \quad (6.2)$$

En el caso de una viga isostática biapoyada de propiedades uniformes en la longitud, la deformada modal del modo  $i$  es sinusoidal, con lo que la fuerza generalizada es:

$$F_i^*(t) = F_q \sin\left(\frac{i\pi ct}{L}\right) \quad (6.3)$$

Con ello, la pulsación de excitación del primer modo es simplemente  $w_1^* = \pi c/L$  o en frecuencia simple  $f_1^* = c/2L$ .

En el caso que nos ocupa, la obtención de la frecuencia de excitación resulta más laboriosa pues las deformadas modales son más complejas. Un procedimiento simplificado consistiría en estimar la longitud  $L$  como la distancia entre puntos de inflexión de la deformada modal. Sin embargo, se puede obtener de manera más precisa mediante la descomposición de Fourier de la deformada modal del tablero, que da como resultado las inversas de las longitudes de onda ( $1/2L$ ) o frecuencias espaciales modales  $\bar{f}^*$ . En la figura 6.7 se muestra que la frecuencia espacial preponderante ( $1/2L$ ) es igual a 0.00248, con lo que la distancia  $L$  entre puntos de inflexión es igual a 201 metros. Este parámetro resulta difícil de cuantificar observando únicamente la deformada modal, pues la pendiente en la zona de inflexión dificulta la determinación de los puntos exactos dónde se produce el cambio.

Por otro lado se aprecia que un modo da origen a varias frecuencias de excitación,

pues la deformada modal esta formada por la superposición de diversos armónicos. Sin embargo se toma como referencia para el cálculo de la frecuencia de excitación, a la frecuencia espacial de mayor amplitud espectral.

La velocidad adimensional es entonces:

$$\eta = \frac{c\bar{f}_{1,j}^*}{f_1} \quad (6.4)$$

Dónde  $c$  es la velocidad de tránsito,  $\bar{f}_{1,j}^*$  es la frecuencia espacial preponderante de la primera deformada modal vertical y  $f_1$  es la frecuencia del primer modo de vibración.

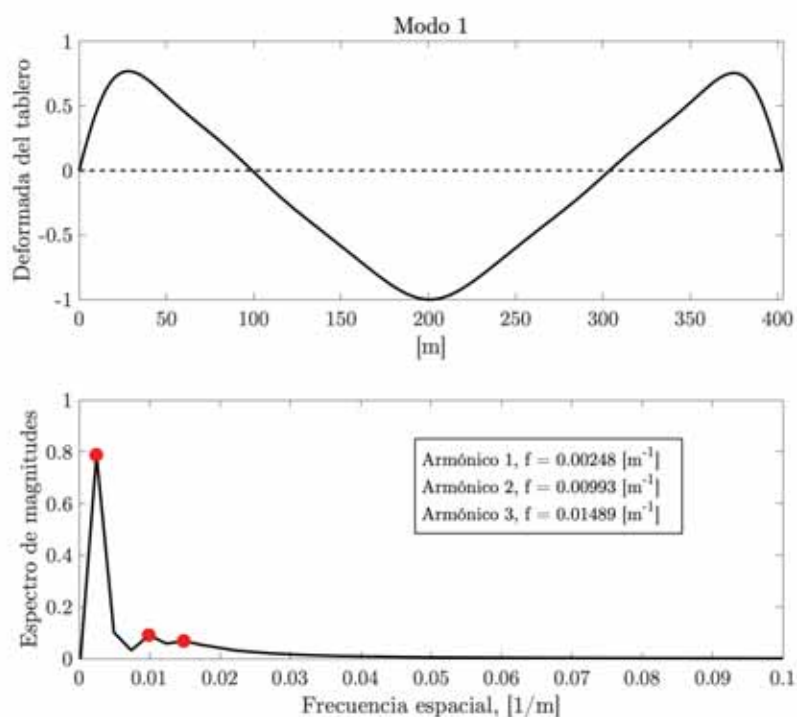


Figura 6.7: Cálculo de las frecuencias espaciales de la deformada modal para el cálculo de la frecuencia de excitación

### 6.2.3. Influencia de la modelización

Antes de realizar el análisis dinámico, se realiza un cálculo modal (figura B.6) para verificar la imposición de las condiciones de contorno y de vinculación pila-tablero y validar a estima las deformadas modales. Asimismo, en el anejo se presenta un

estudio de líneas de influencia estáticas y series temporales dinámicas de diferentes desplazamientos y esfuerzos en los puntos de referencia de la estructura a diferentes velocidades de tránsito.

En las figuras del estudio paramétrico se representan los factores de impacto, definidos como el máximo de la respuesta dinámica dividido del máximo de la respuesta estática:

$$FI = \frac{\max[z_d(t)]}{\max[z_e(t)]} \quad (6.5)$$

Dónde FI es el factor dinámico,  $z_d(t)$  es la serie temporal dinámica del desplazamiento o esfuerzo  $z$  y  $z_e(t)$  es la respuesta temporal estática.

En la primera aplicación se realiza un cálculo a velocidad creciente del FLM2-2, hasta 150 km/h con un paso de 10 km/h con el fin de comparar las modelizaciones por fuerzas y cargas suspendidas. Para ello se han realizado de 30 cálculos de dinámicos en los que el paso de tiempo se adapta automáticamente para respetar la condición de Courant sin penalizar en exceso el tiempo de análisis. Los cálculos se realizan en paralelo en un ordenador con un procesador de 4 núcleos a 2,2 GHz y una memoria RAM de 16 Gb, y el tiempo total para la finalización de la presente aplicación fue de alrededor de 20 minutos.

Los resultados de los factores de impacto en desplazamientos, esfuerzos en función de la velocidad de tránsito se sintetizan en la figura 6.8. Del examen de la respuesta dinámica de la estructura se puede afirmar que los factores de impacto obtenidos a través de las modelizaciones por fuerzas y masas suspendidas con y sin rugosidad son prácticamente idénticos. En el caso de que el objetivo del estudio dinámico sea conocer la respuesta de la estructura, una modelización por fuerzas móviles daría resultados satisfactorios en el rango usual de velocidades de tránsito. Sin embargo, si el interés del estudio es la respuesta de los vehículos, el paso a una modelización más compleja de tipo masas suspendidas o sistemas multicuerpo es indispensable.

Del estudio de los factores de impacto se aprecian por un lado que los desplazamientos en cabeza de pilas y en el centro de luz están íntimamente relacionados con los

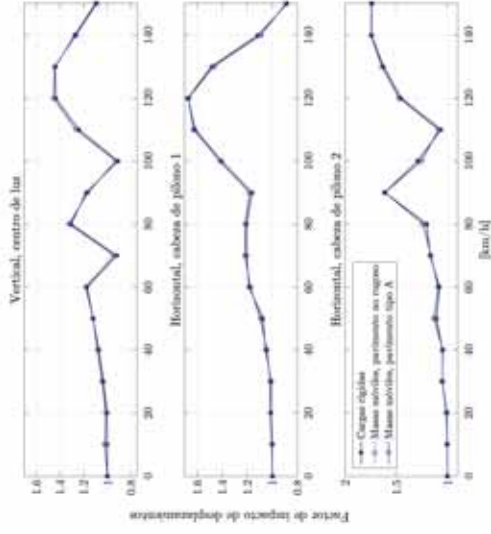


momentos flectores en la base de las pilas y en el centro de luz y con los axiles de los tirantes extremos. Sin embargo, el examen de los factores de impacto de los tirantes más próximos a la pila (15 y 46) pone de manifiesto que no siguen una tendencia marcada por los desplazamientos globales, puesto que en el comportamiento de estos tirantes influyen más fenómenos locales como la vinculación entre la pila y el tablero próximos o la distancia al tirante más proximo. En los tirantes centrales próximos a las pilas, la cercanía al punto de apoyo del tablero con la pila y la verticalidad de los mismos hacen que en la configuración de base estudiada sean muy poco sensibles a eventos dinámicos.

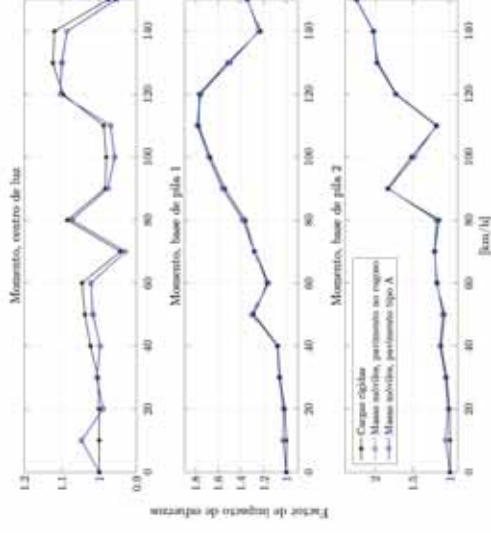
El estudio de los factores de impacto en desplazamientos y en esfuerzos muestra una asimetría en la respuesta dinámica entre las pilas uno y dos. Este fenómeno se justifica por el hecho de que las condiciones de apoyo de la estructura no son simétricas y por la dirección de avance de los vehículos, que condiciona el problema dinámico de propagación de ondas transversales.

Estas ondas de cortante, avanzando con una celeridad mayor que la velocidad de tránsito de los vehículos, acentúan los factores de impacto en la pila más alejada al punto de entrada al puente de los vehículos. Se observa que los factores de impacto máximos en las velocidades de estudio no exceden el valor de 1,8 ni en desplazamientos ni en esfuerzos. Los factores de impactos máximos globales se obtienen en el entorno de 120 km/h, lo que se corresponde con una velocidad adimensional de 0,25, lo que refuerza el estudio realizado por [Yang et al. \(2004\)](#) en vigas isostáticas. El valor máximo del factor de impacto del momento flector en centro de luz es inferior al factor de impacto del desplazamiento vertical, aunque la tendencia de la curva es similar. Asimismo, los momentos flectores en la base de pilas están íntimamente ligados a sus desplazamientos asociados en cabeza. De la misma manera, los factores de impacto de los axiles en los tirantes extremos dependen en gran medida de los desplazamientos en cabeza de las pilas y la amplificación dinámica a velocidades de tránsito usuales alcanza valores elevados.

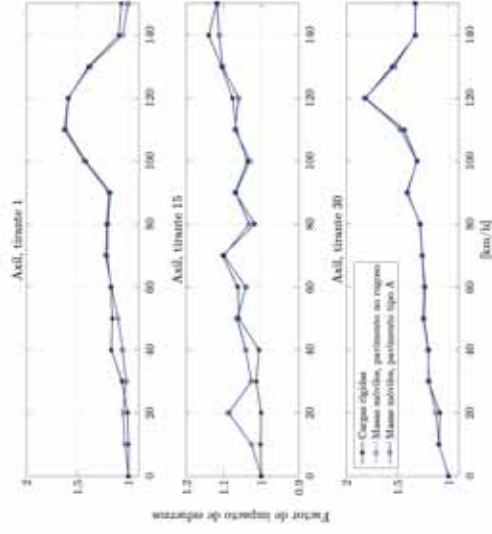
Influencia de la modelización, cargas y masas suspendidas



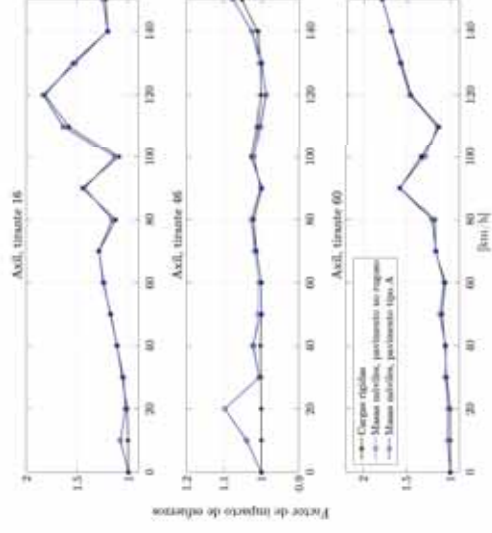
(a) Factor de desplazamientos



(b) Factor de impacto del momento flector en centro de luz y base de pilas



(c) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno



(d) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno según diferentes métodos de cálculo

### 6.3. Influencia de la rugosidad del firme

Uno de los parámetros que puede ser introducido en el análisis dinámico al considerar una modelización por masas suspendidas es la rugosidad del firme al imponer la condición de contacto rueda-pavimento según se desarrolló en el capítulo 3. Se han generado pavimentos rugosos según las técnicas de superposición de armónicos de amplitud controlada por las funciones de densidad espectral de la norma ISO 8608 y fase aleatoria, figura 6.9.

Se han realizado cuatro modelizaciones (masas suspendidas sin rugosidad, sobre pavimento muy bueno o tipo A, bueno o tipo B y adecuado o tipo C) en las que se realizan análisis dinámicos a velocidad creciente entre 10 y 150 km/h, lo que implica 60 simulaciones y un tiempo de cálculo aproximado de cuarenta minutos.

De los resultados mostrados en la figura 6.10 muestran que la respuesta dinámica global de la estructura no se ve afectada por la rugosidad del firme. Las mayores diferencias en los factores de impacto obtenidos se producen en los tirantes más verticales y próximos a las pilas cuyo comportamiento está menos influenciado por el comportamiento global de la estructura.

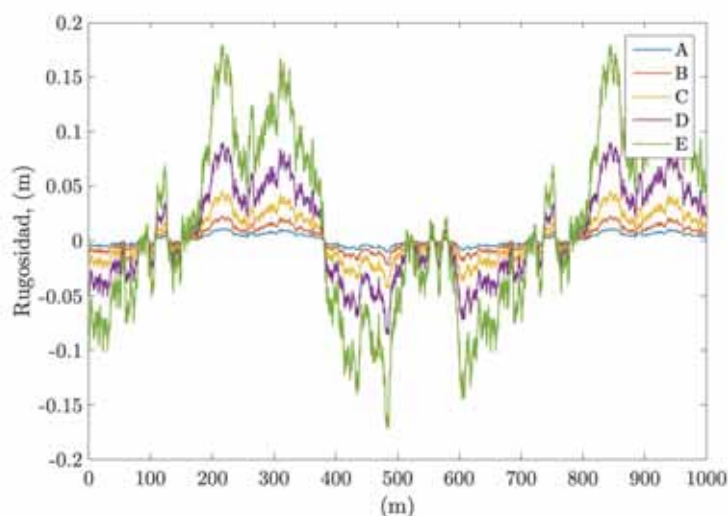


Figura 6.9: Representación espacial de los perfiles de rugosidad generados

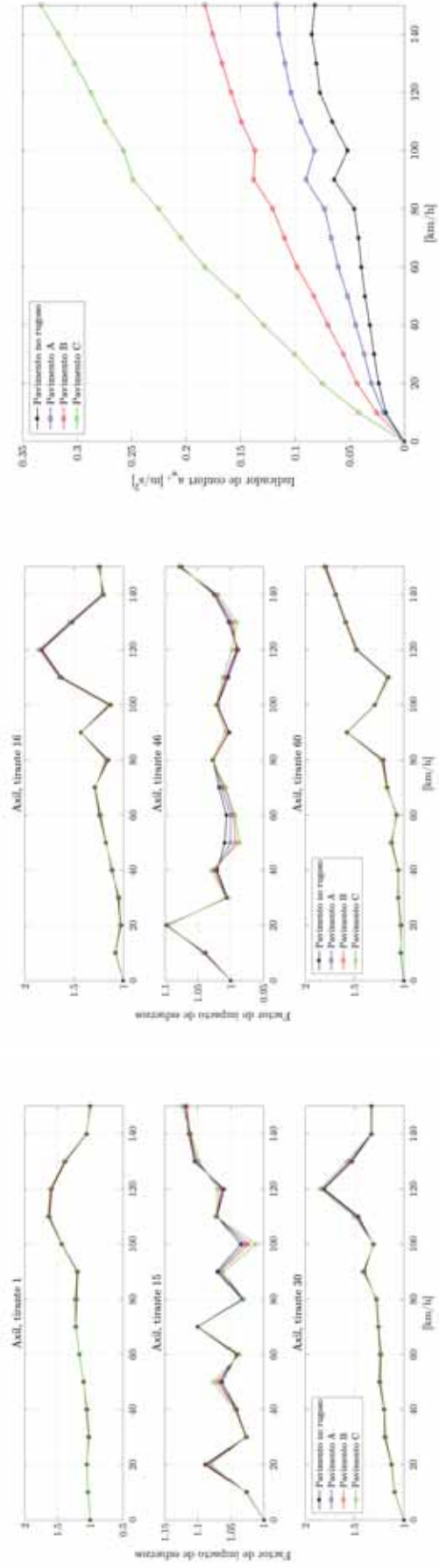
Los efectos de la rugosidad del firme son claros en la respuesta dinámica del vehículo. En la figura 6.10e se denomina indicador de confort (o más bien indicador de no confort), al valor medio cuadrático de la serie temporal que resulta de aplicar un filtro de tipo  $W_k$  a la serie de aceleraciones verticales en cabina. La misión del filtro, propuesto en la norma ISO 2631 *Evaluation of human exposure to whole-body vibration*, es ponderar las frecuencias de las aceleraciones en función de su nocividad para el organismo humano.

Es importante tener en cuenta que el valor del indicador de confort es sólo aproximado, pues para la obtención de valores más precisos se debe realizar una modelización más compleja del vehículo, que incluya todos los grados de libertad y la consideración precisa de las propiedades visco-elásticas de las suspensiones primaria y secundaria. Asimismo, se debe considerar el ruido ambiental presente en las series de aceleraciones reales motivado por fenómenos de naturaleza aleatoria como la turbulencia del viento o el tráfico existente en la estructura.

### Influencia de la rugosidad del firme



(a) Factor de desplazamientos



(c) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno (d) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno (e) Indicador del confort de tránsito  
 Figura 6.10: Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según diferentes rugosidades de firme

## 6.4. Estudio del efecto de la masa del vehículo y del espaciamiento entre vehículos

El estudio de la dinámica de los vehículos es una disciplina que está muy ligada al problema de interacción vehículo-estructura y resulta indispensable para conocer la respuesta de los vehículos. Sin embargo, pese a la importancia de parámetros como las rigideces y amortiguamientos de la suspensión en la respuesta del vehículo, su estudio detallado se sale del marco del documento. En este caso, los parámetros estudiados son la masa del vehículo y el espaciamiento entre vehículos, factores que sí tienen una repercusión importante en la respuesta de la estructura.

El modelo de vehículo escogido se representa en la figura 6.11 y se realiza un análisis por fuerzās y por masas suspendidas sobre pavimento rugoso de tipo A.

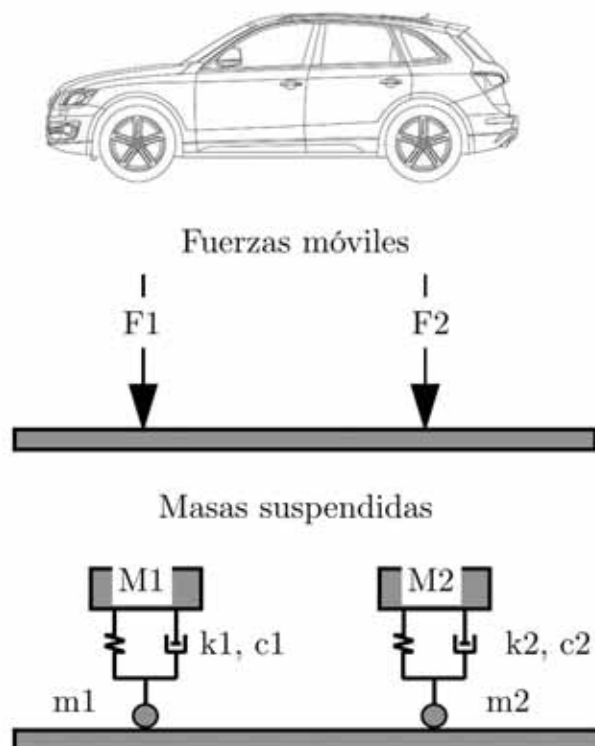


Figura 6.11: Modelo de vehículo utilizado

### 6.4.1. Efecto de la masa del vehículo

Los parámetros del vehículo estudiado se muestran en el cuadro 6.5 en el que se hace variar la masa entre 200 kg y 100 t. En total se calculan veinte valores de masas diferentes pasando a velocidades entre 10 y 150 km/h. Considerando que se modelizan mediante fuerzas y cargas suspendidas sobre pavimento rugoso, se realizan 600 simulaciones dinámicas que implican un tiempo de cálculo de aproximadamente 7 horas.

Del examen de las figuras 6.12, 6.13 y 6.14 se pone de manifiesto que los factores de impacto obtenidos a partir del modelo de masas suspendidas se mantienen constantes al variar la masa, generándose una superficie a partir de la traslación de la curva de factores de impacto según el eje de masas. Las líneas negras de masa constante en la superficie representan los puntos calculados por el modelo.

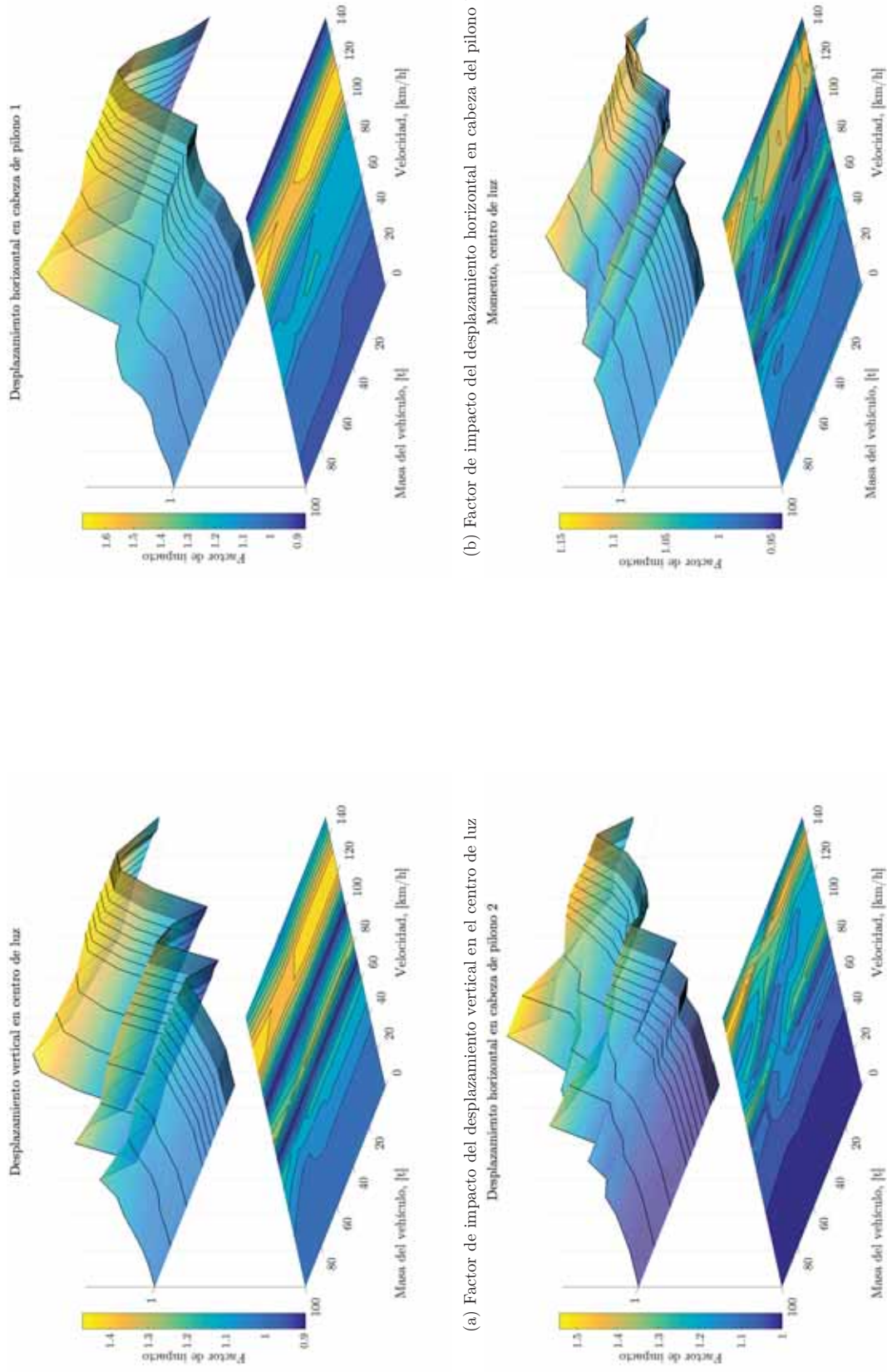
El estudio de la figura 6.14e muestra la sensibilidad de los vehículos ligeros (en el rango de masas de las motocicletas) a las vibraciones. Se aprecia cómo el vehículo de 200 kg de masa alcanza, a velocidades usuales de circulación, niveles de aceleración rms filtrada del entorno a  $1,2 m/s^2$ , lo que según la norma ISO 2631 se corresponde con un nivel muy bajo de confort. Los vehículos más pesados no parecen ser sensibles a las vibraciones al aumentar su masa.

Parámetro	Unidad	Modelo de vehículo
F1	[kN]	$M/(2 \cdot 9,81)$
F2	[kN]	$M/(2 \cdot 9,81)$
M1	[t]	$0,475 \cdot M$
M2	[t]	$0,475 \cdot M$
m1	[t]	$0,025 \cdot M$
m2	[t]	$0,025 \cdot M$
k1	[kN/m]	200
k2	[kN/m]	200
c1	[kN.s/m]	7
c2	[kN.s/m]	7
d1	[m]	3

Cuadro 6.5: Propiedades del vehículo en función de la masa total, M



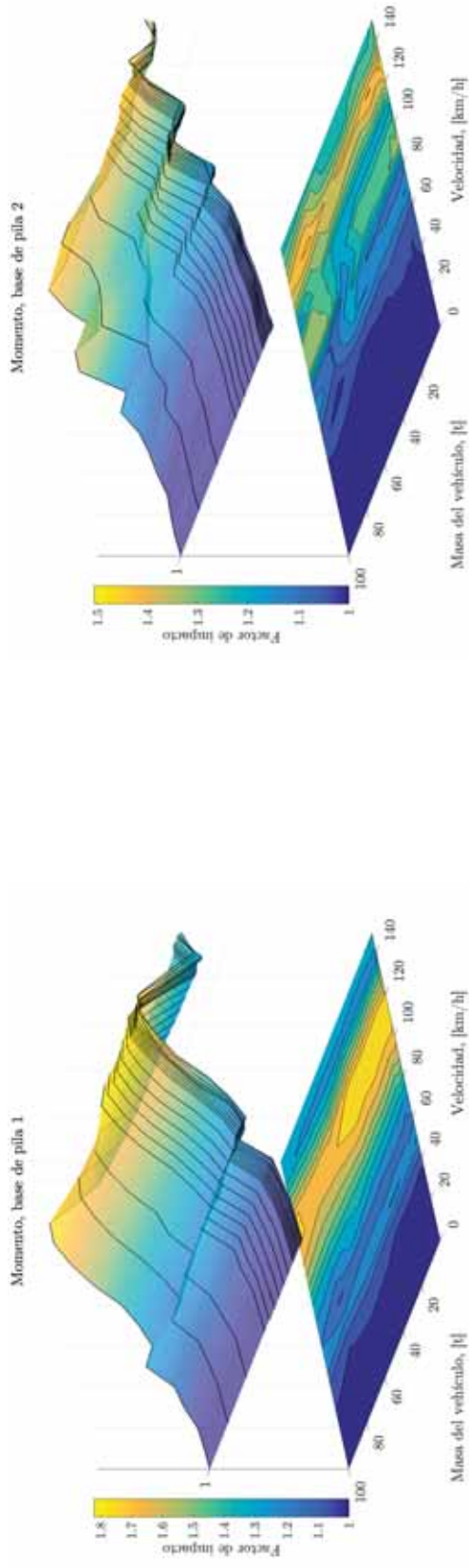
### Efecto de la masa del vehículo, (1/3)



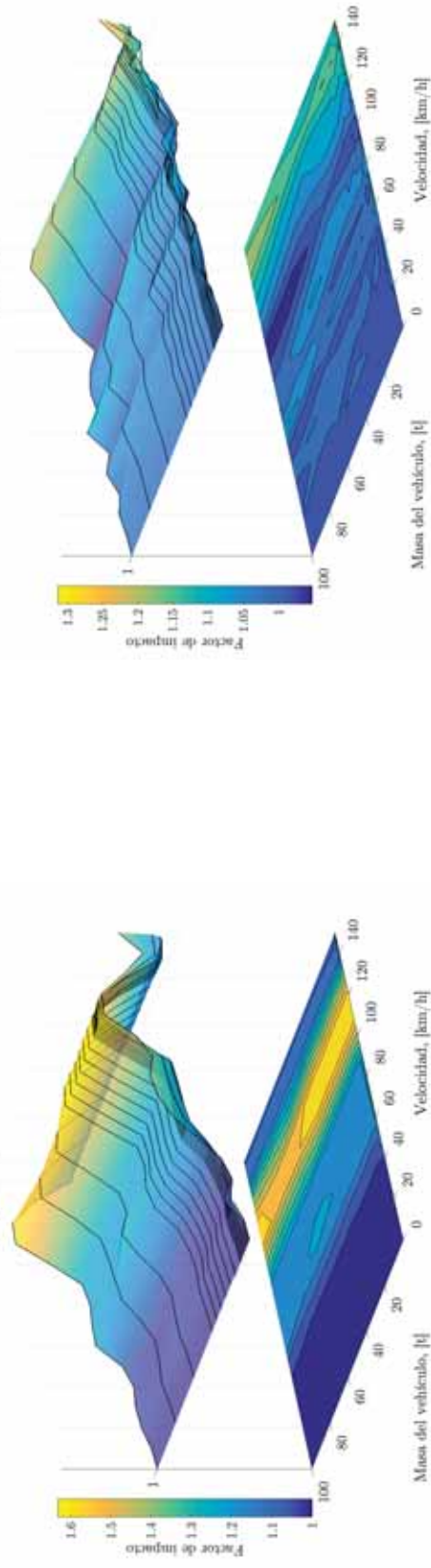
(c) Factor de impacto del desplazamiento horizontal en cabeza del pilono 2  
Figura 6.12: Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura a diferentes velocidades según la masa del vehículo, (1/3)



### Efecto de la masa del vehículo, (2/3)



(a) Factor de impacto del momento flector en base de pila 1  
Axil, tirante 1



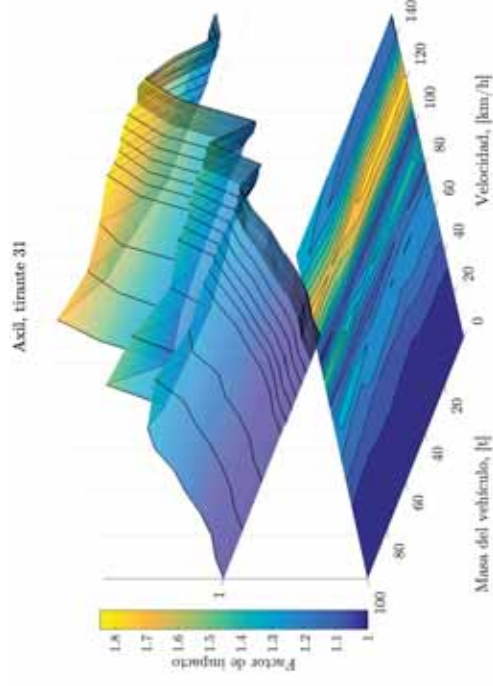
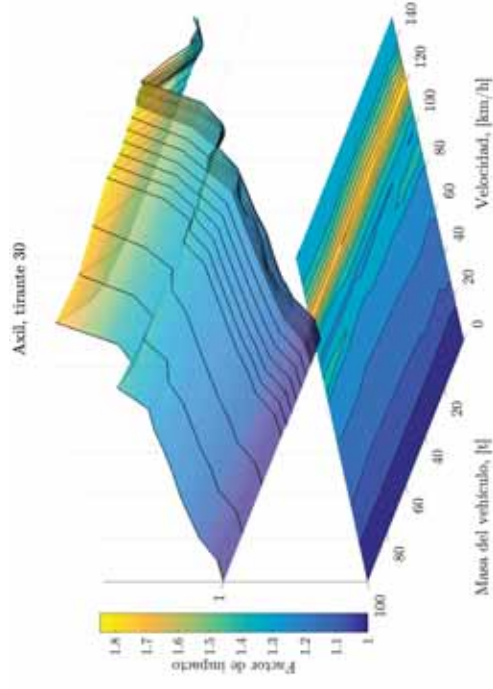
(b) Factor de impacto del momento flector en base de pila 2  
Axil, tirante 15

(c) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 1

(d) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 15

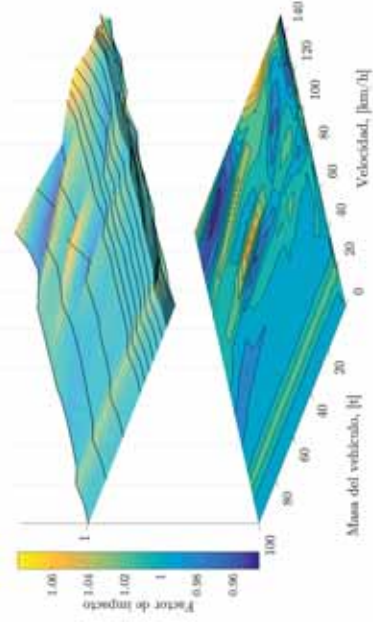
Figura 6.13: Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura a diferentes velocidades según la masa del vehículo, (2/3)

Efecto de la masa del vehículo, (3/3)



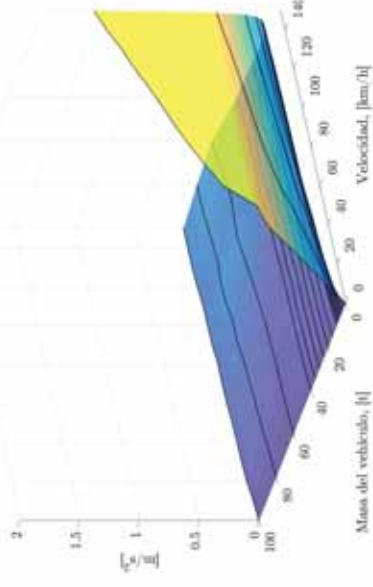
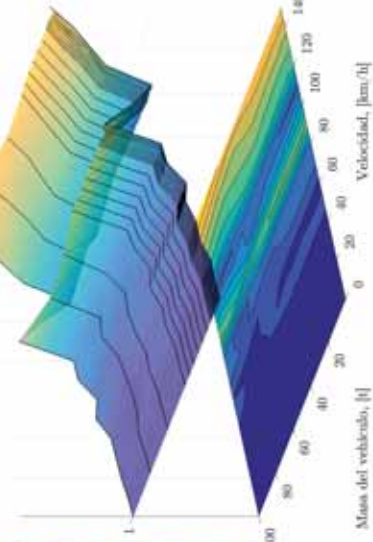
(a) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 30

(b) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 31



(c) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 46

(d) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 60



(e) Aceleración vertical rms en cabina filtrada, ISO 2631

(c) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 46

(d) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 60

(e) Aceleración vertical rms en cabina filtrada, ISO 2631

Figura 6.14: Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura a diferentes velocidades según la masa del vehículo, (3/3)

Otro efecto interesante resulta del cálculo de la diferencia relativa entre los factores de impacto de la flecha vertical en centro de luz calculados por la modelización de cargas y masas suspendidas, figura 6.15. En esta imagen se muestran con puntos los factores de impacto calculados, estando el resto de puntos de las líneas de nivel obtenidos por interpolación.

Se puede apreciar cómo la diferencia relativa entre la modelización por fuerzas y masas suspendidas es prácticamente nula si la masa del vehículo es inferior a 30 t. Sin embargo, para vehículos de masas superiores, las diferencias entre las modelizaciones crecen de manera oscilante llegando a alcanzarse diferencias relativas en el entorno del 9%. Esto se debe fundamentalmente a que al considerar la interacción vehículo-estructura mediante el modelo de masas suspendidas (lo que implica la actualización de las matrices de la estructura con las del vehículo en cada paso de tiempo), un vehículo pesado puntual atravesando la estructura llega a hacer variar significativamente los modos propios del sistema acoplado vehículo-estructura. Por otro lado, las propiedades modales de la estructura permanecen inalteradas en una modelización por fuerzas móviles.

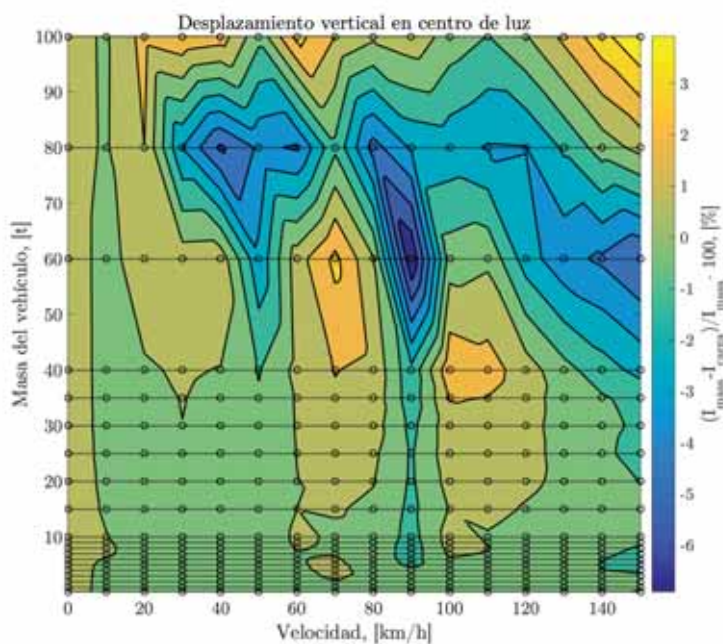


Figura 6.15: Diferencia relativa entre la modelización del vehículo por masas y cargas móviles en el factor de impacto del desplazamiento vertical en centro de luz

### 6.4.2. Influencia del espaciamiento entre vehículos

Uno de los parámetros que puede inducir resonancias es el paseo de repetido de vehículos. Este parámetro resulta crítico en el tráfico ferroviario donde por la naturaleza de los vehículos, las cargas actúan con espaciamiento constante igual a la distancia entre bogies. En puentes de carretera, la naturaleza aleatoria de las cargas cancela, en la mayoría de los casos, las vibraciones producidas por el paso repetitivo de vehículos. Sin embargo, en determinadas situaciones de tráfico, sí se pueden dar patrones de vehículos circulando a espaciamiento prácticamente constante y es por ello que se incluye este caso en el análisis.

El modelo de vehículo considerado en el análisis es el representado en la figura 6.11 y sus propiedades viscoelásticas se recogen en la tabla 6.5. En este caso, la masa total del vehículo se ha considerado igual a 2 toneladas. Se modeliza por tanto un tren de cargas formado por cinco vehículos ligeros en el que se hace variar su espaciamiento, definido como la distancia entre el eje trasero del vehículo delantero al eje delantero del vehículo trasero.

Se considera un espaciamiento entre vehículos que varía entre 0 y 210 metros. En este caso, la duración del análisis dinámico está limitada por la salida del tercer vehículo del convoy, pues es en éste en el que se evalúan las aceleraciones en cabina para el cálculo del indicador de confort. A pesar de no esperar a que todo el tren de cargas salga del puente para finalizar el evento dinámico, el coste computacional de las simulaciones que se muestran en las figuras 6.17 y 6.18 es considerable, pues se analizan 28 espaciamientos de vehículo para cada uno de los cuales se calculan 15 velocidades crecientes hasta 150 km/h. Los vehículos se modelizan mediante fuerzas y masas suspendidas sobre pavimento A, lo que da un total de 840 simulaciones dinámicas, lo que llevó a un tiempo total de cálculo de más de 24 horas.

En las figuras siguientes se muestran los mapas de isolíneas de factor de impacto de desplazamientos y esfuerzos en función de la velocidad de tránsito y del espaciamien-

to de vehículos. La superficie se ha conseguido mediante interpolación de la malla de puntos de cálculo que se representa mediante círculos unidos por horizontales de distancia constante.

Los resultados del análisis son completamente satisfactorios y se ajustan al comportamiento desarrollado por [Yang et al. \(2004\)](#) en su estudio analítico de vigas isostáticas sometidas a cargas puntuales móviles equiespaciadas. De este trabajo de investigación se extrae la condición de resonancia:

$$\eta = \frac{d}{2Ln}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.6)$$

Dónde  $\eta$  es la velocidad adimensional,  $d$  es el espaciamiento entre vehículos y  $L$  es la distancia entre puntos de inflexión o  $1/(2\bar{f}_1^*)$ , siendo  $\bar{f}_1^*$  la frecuencia espacial de la primera deformada modal.

Introduciendo la frecuencia espacial de la primera deformada modal, detallada en el inicio de esta sección, la condición de resonancia se puede reescribir de la manera siguiente:

$$d = 2Ln \frac{c\bar{f}_1^*}{f_1} \rightarrow d = \frac{nc}{f_1} \quad (6.7)$$

Dónde  $c$  es la velocidad dimensional y  $f_1$  la primera pulsación propia de la estructura.

Por otro lado, el fenómeno de cancelación se produce cuando la excitación de las  $N-1$  ruedas anteriores se cancela y la respuesta dinámica residual es nula, incluso sin amortiguamiento. La condición de cancelación es:

$$\eta = \frac{1}{2n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.8)$$

Esta condición penaliza más a bajas velocidades debido al aumento del denominador, lo que hace que no se manifiesten amplificaciones significativas por efecto del paso repetitivo de vehículos a velocidades en capacidad.



Las condiciones de cancelación y resonancia de vigas isostáticas resultan válidas en los factores de impacto de desplazamientos y esfuerzos globales, entendiéndose por ello a aquellos que están condicionados por el primer modo de la estructura (desplazamiento vertical y momento en centro de luz, desplazamientos en cabeza de pilonos y momento en la base y axiles en tirantes extremos). Sin embargo, en lo que se refiere a los tirantes más verticales, su comportamiento no se rige por el primer modo y no se cumplen, por tanto, las condiciones de resonancia y cancelación, como se muestra en las figuras 6.18d y 6.18e.

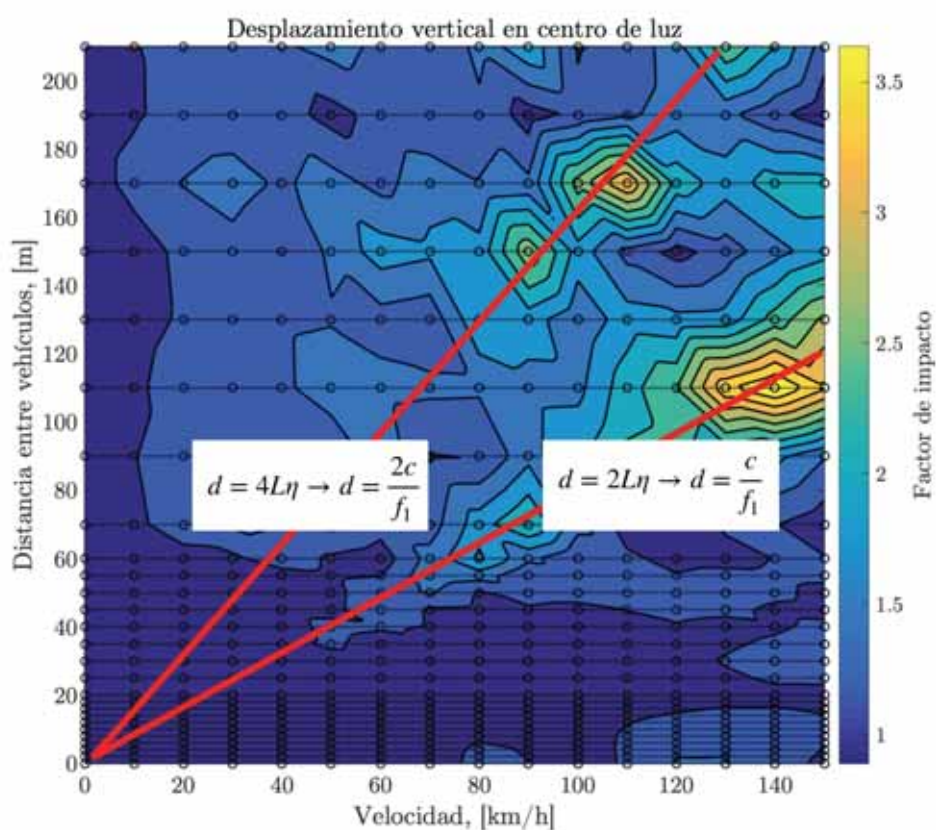


Figura 6.16: Concición de resonancia en el paseo de varios vehículos equiespaciados

Efecto del espaciamiento entre vehículos (1/2)

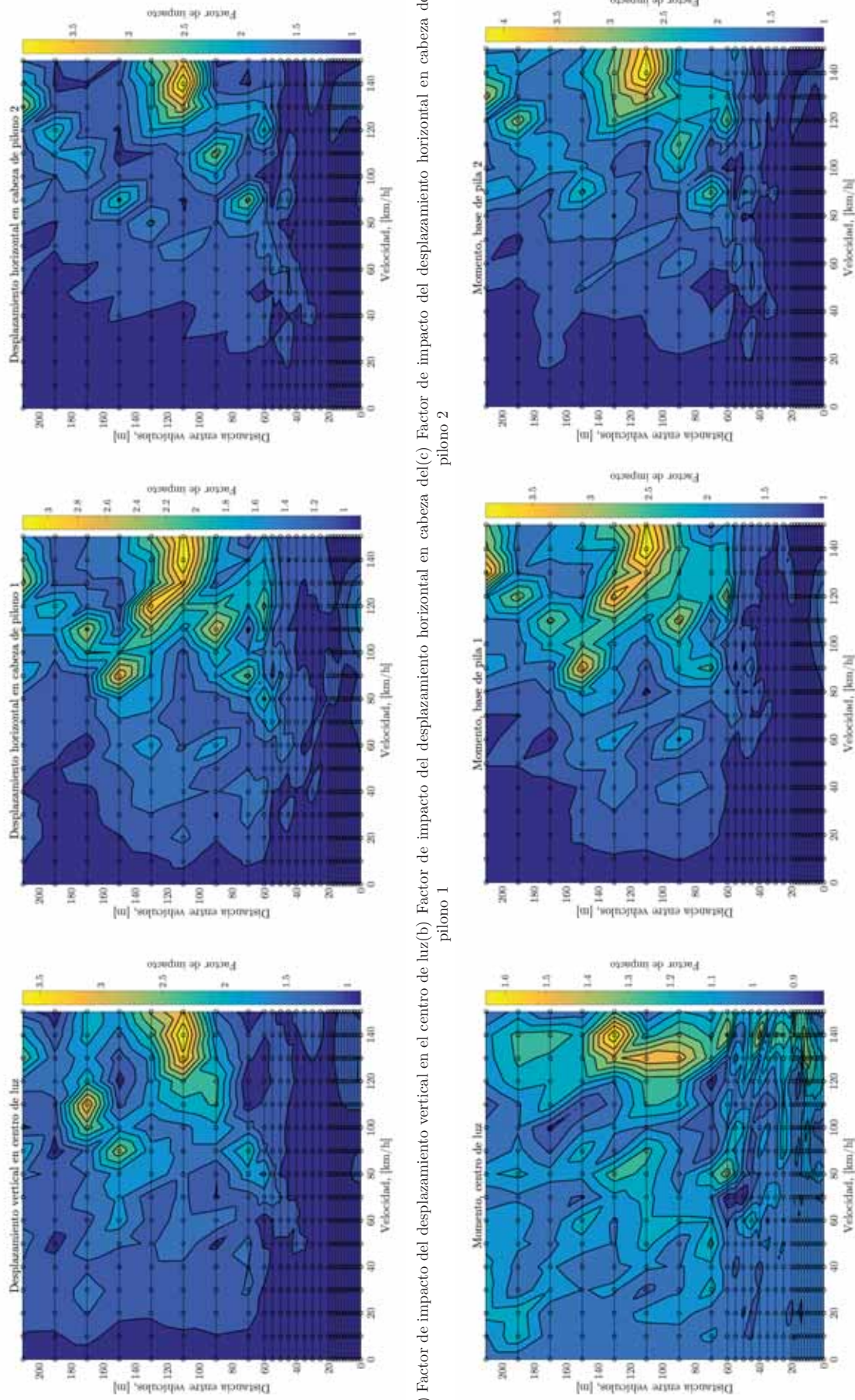
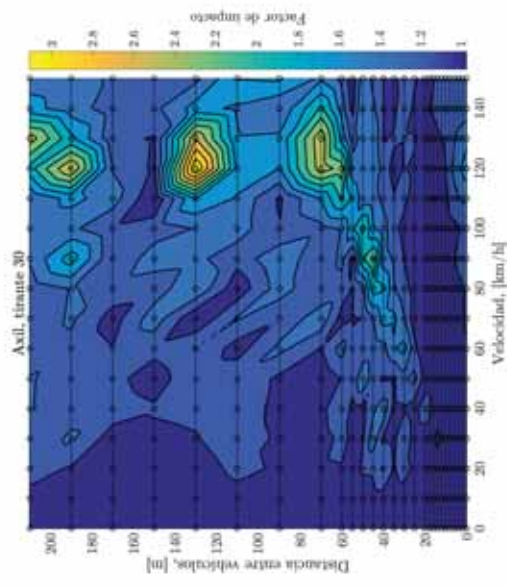
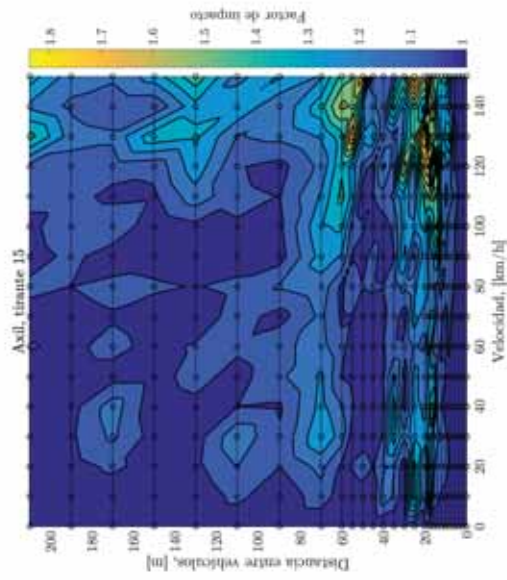
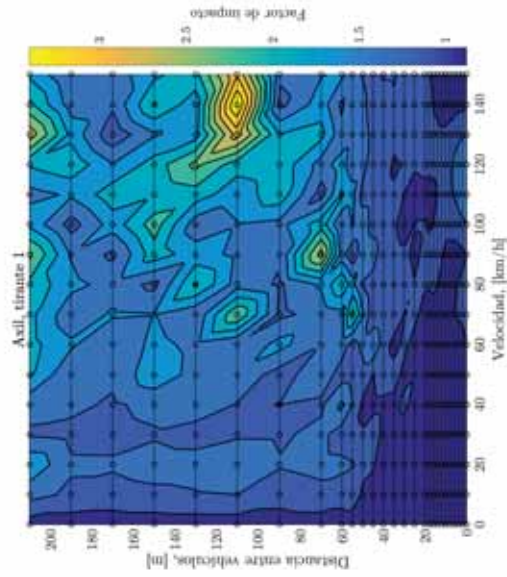


Figura 6.17: Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según el espaciamiento entre vehículos, (1/2)



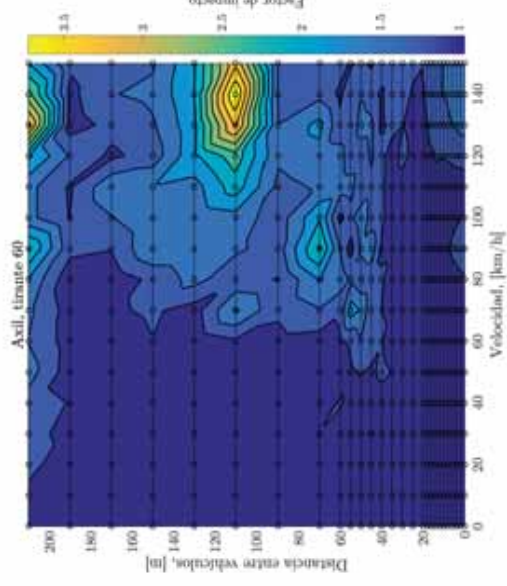
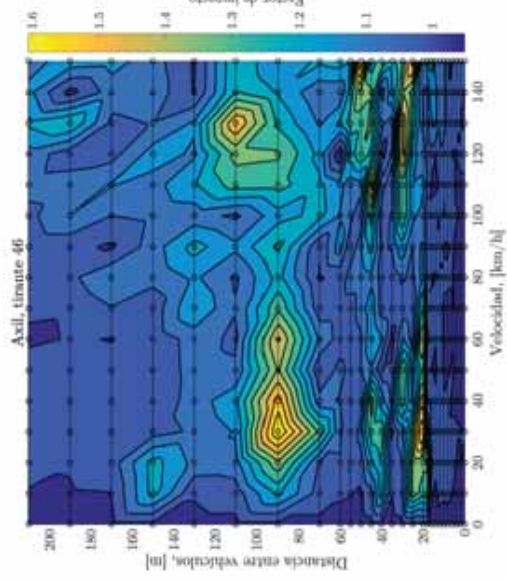
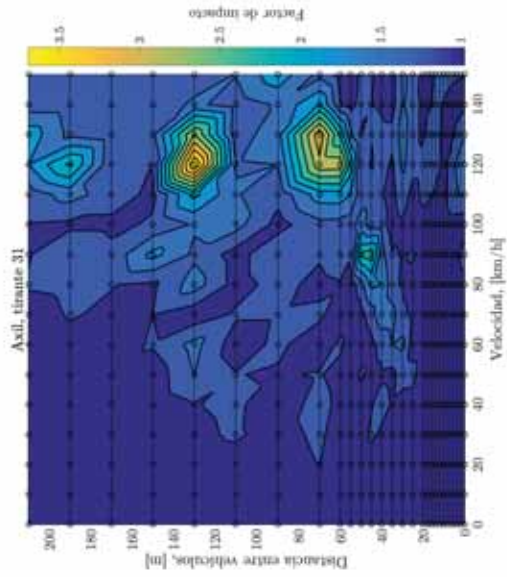
### Efecto del espaciamiento entre vehículos (2/2)



(a) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 1

(b) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 15

(c) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 30



(d) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 31

(e) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 46

(f) Factor de impacto del esfuerzo axil en el tirante 60

Figura 6.18: Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según el espaciamiento entre vehículos, (2/2)



En lo que se refiere al grado de confort, el hecho de medir en el vehículo intermedio del tren de carga hace que las aceleraciones en cabina sean superiores al caso en el que se estudio un vehículo aislado. Esto es motivado por la puesta en movimiento previa de la estructura por el tráfico existente. No se aprecian patrones significativos con respecto al espaciamiento entre vehículos a bajas velocidades. Sin embargo, a velocidades superiores a 50 km/h, los mayores niveles de aceleración en cabina se produce cuando los vehículos están más próximos, disminuyendo progresivamente hasta que la distancia de entre los vehículos supera los 90 metros. A partir de esta distancia, la influencia del efecto vehículo-estructura-vehículo parece desvanecerse y los niveles de aceleraciones en cabina no dependen de la distancia entre vehículos.

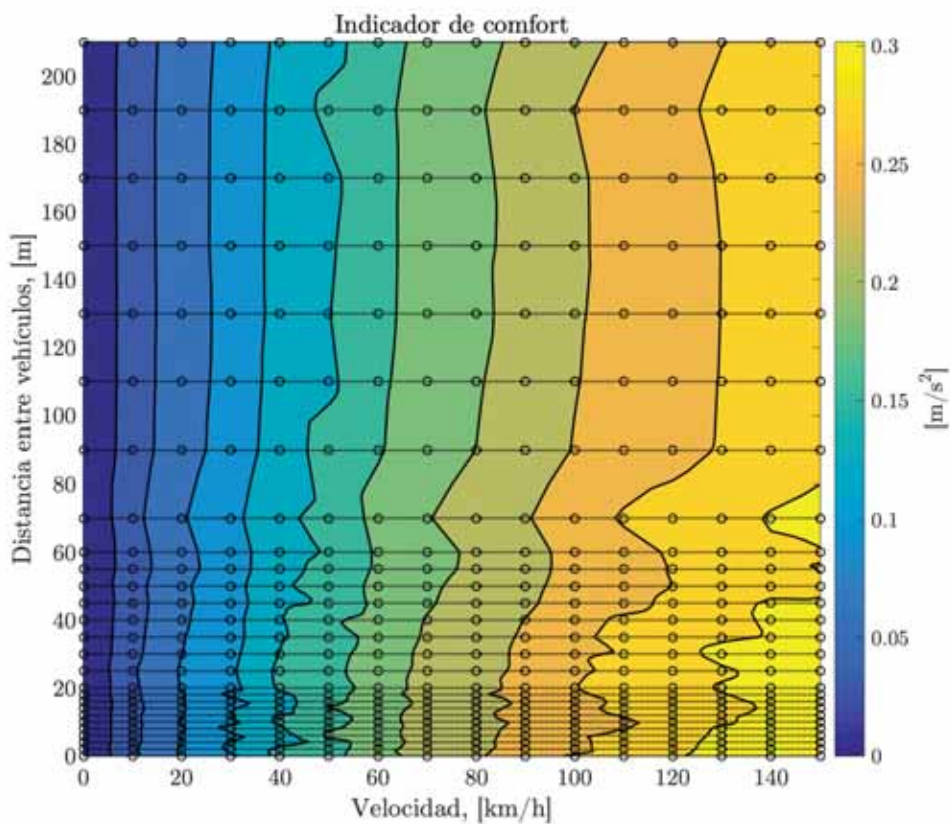


Figura 6.19: Aceleración vertical rms filtrada en cabina

## 6.5. Influencia de la rigidez del tablero y de la configuración transversal del sistema de atirantamiento

En esta sección se comparan seis modelos de puentes atirantados diferentes sobre el esquema de apoyos del modelo de base. Los seis modelos difieren en la inercia del tablero y en el sistema de atirantamiento transversal, simple o doble. Los diferentes esquemas resistentes se muestran en la figura 6.20 y se corresponden a tipologías frecuentemente utilizadas en el proyecto de puentes atirantados.

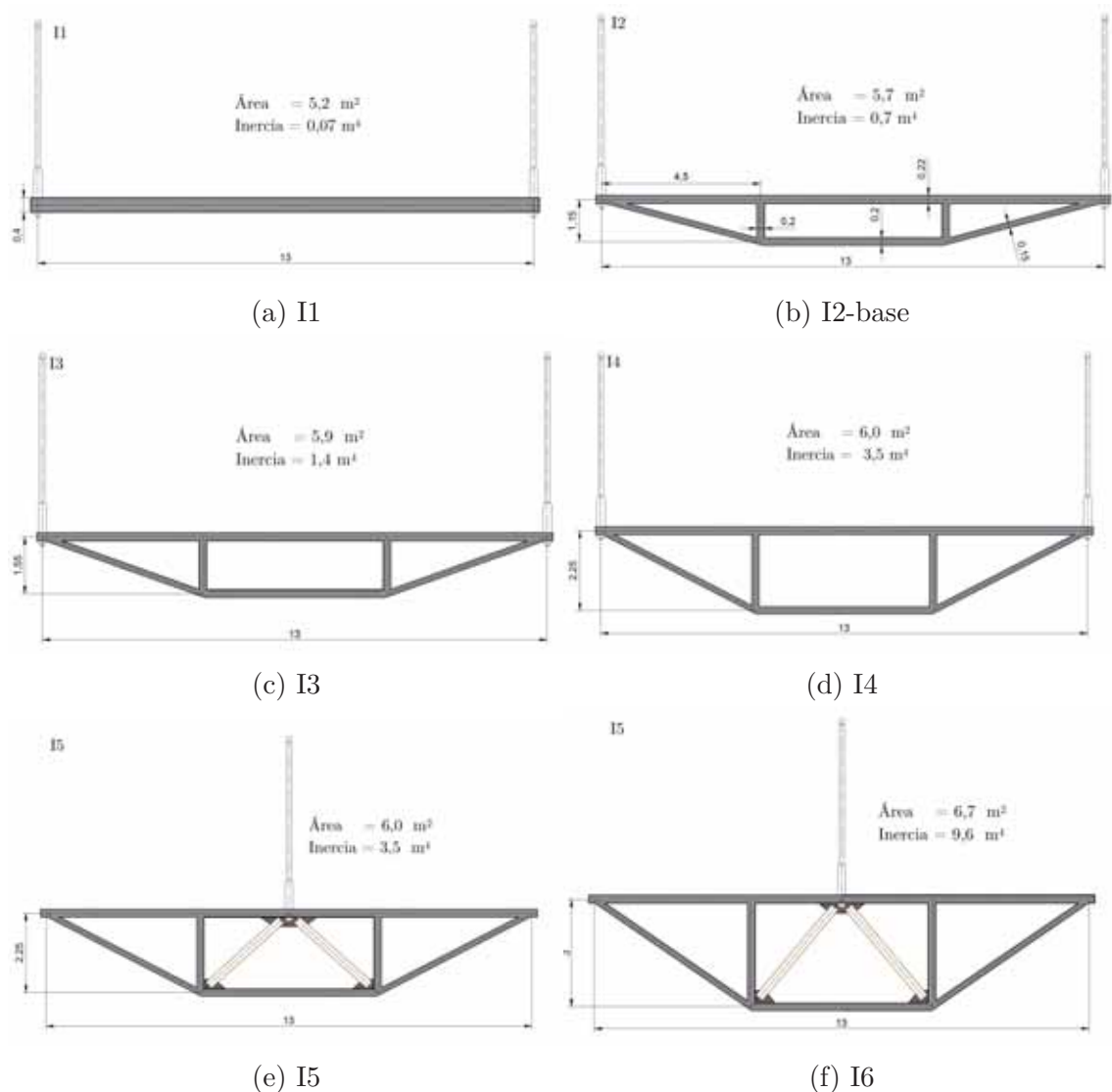


Figura 6.20: Secciones transversales estudiadas, cotas en metros

La configuración I1 se corresponde con una tipología de losa atirantada, frecuentemente utilizada por el reputado proyectista alemán Jörg Schlaich. La escasa rigidez a flexión y a torsión del tablero acentúan la dependencia del sistema de atirantamiento, su esbeltez  $h/L$  es igual a 500. Por otro lado las configuraciones I2, I3 e I4 aumentan progresivamente de canto, manteniendo el sistema de atirantamiento doble en transversal. Respectivamente sus esbelteces varían de  $1/170$ ,  $1/130$  a  $1/90$ . La sección I5 tiene las mismas características resistentes que las sección I4, pero sólo varía el sistema de atirantamiento, que en este caso es de tipo central, pues su inercia en flexión y torsión lo permite. Asimismo, se disponen rigidizadores para transmitir las cargas a la parte inferior de las almas de la sección. La configuración I6 presenta un canto de 3 metros, lo que se corresponde con una esbeltez de  $1/66$ .

Los modos propios de las diferentes configuraciones se presentan en el anejo. Los resultados se muestran en función de la velocidad adimensional, pues las características modales de las tipologías estudiadas es diferente.

En primer lugar, en la figura 6.21 se muestra la comparación entre las configuraciones con atirantamiento doble frente al tránsito de un vehículo pesado de tipo FLM2-2. En general, en los puntos más alejados del vehículo en el sentido de la marcha, los factores de impacto son mayores cuanto menor es la rigidez de la estructura. De este modo los factores de impacto de desplazamientos de la pila 2, el momento en la base de la pila 2 y los factores de impacto de axiles en tirantes 31, 46 y 60 crecen con la esbeltez de la sección. Se manifiesta de nuevo la asimetría en la respuesta dinámica motivada por la velocidad de propagación de ondas de flexión por el tablero.

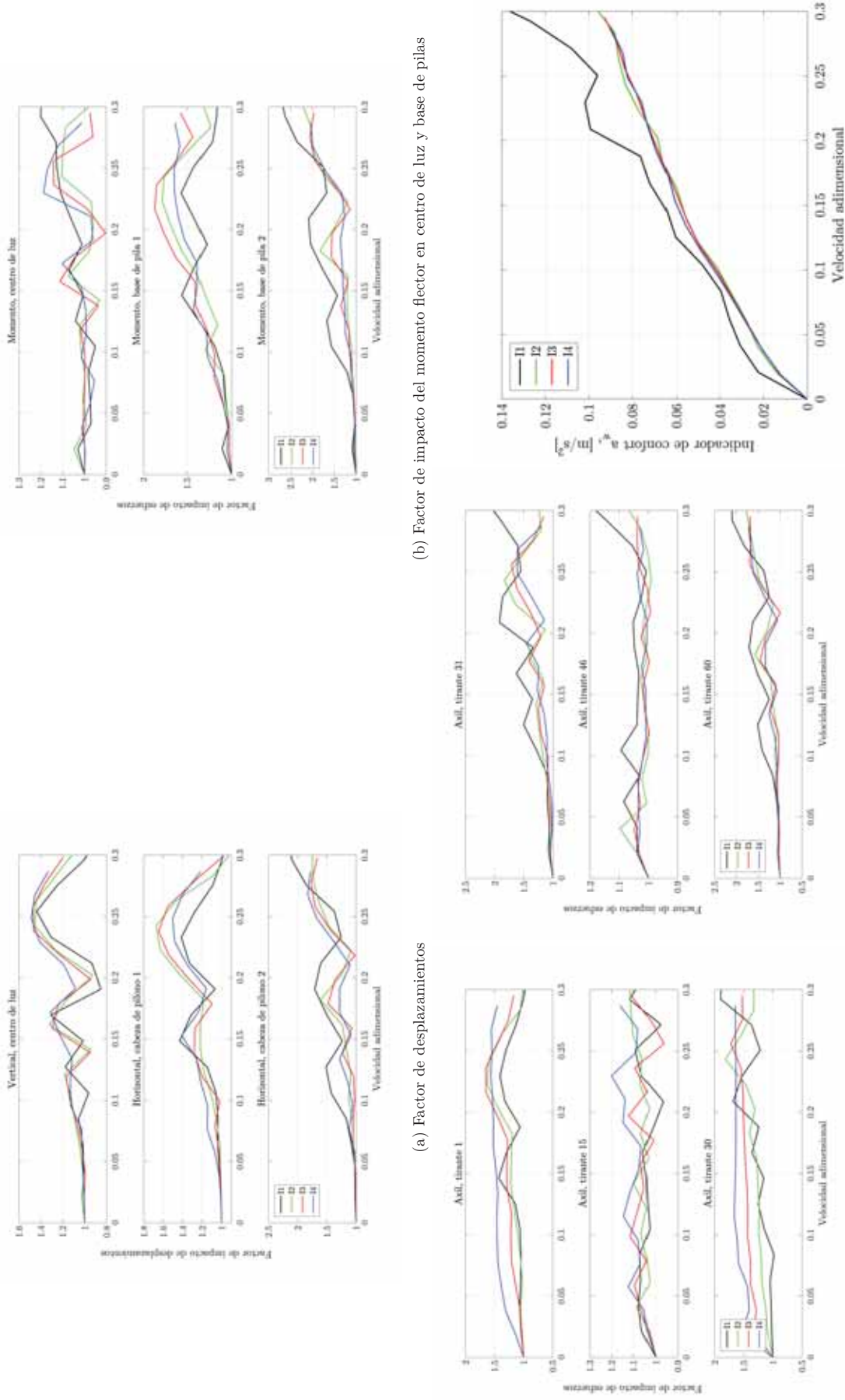
Por otro lado, los resultados en la primera mitad del puente en el sentido de la marcha ponen en evidencia que, contrariamente a lo que intuitivamente uno podría pensar, los factores de impacto de axiles crecen también con la rigidez del tablero. En cuanto a desplazamientos verticales y flecha en el centro de luz, no se aprecian tendencias que pongan de manifiesto la vulnerabilidad de ninguna de las configuraciones.

En lo que se refiere a la estimación del confort de tránsito en la cabina del vehículo, los resultados evidencian la gran vulnerabilidad a las vibraciones de la configuración I1, la más flexible. Los niveles de aceleración rms filtrada alcanzan valores de  $0,14 m/s^2$  a la velocidad adimensional de 0,3 (unos 150 km/h) lo que supera en más de un 64 % a los valores de aceleración de las configuraciones más rígidas.

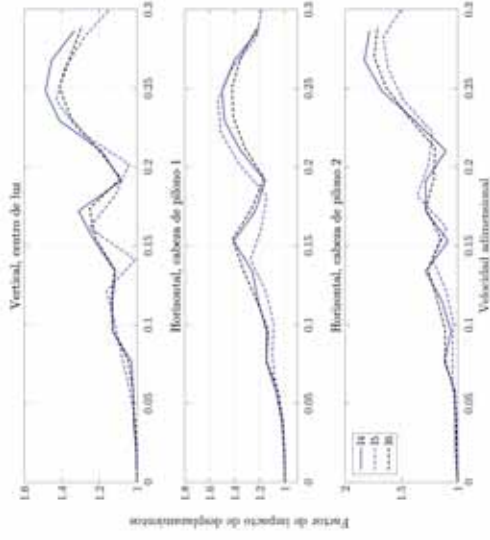
En la figura 6.22 se comparan las configuraciones I4, I5 e I6. La única diferencia entre las I4 y la I5 es el sistema de atirantamiento, siendo simple en la I5. Es importante remarcar que un efecto a considerar sería la torsión por la excentricidad de las cargas y el reparto transversal de cargas en la sección, íntimamente relacionado con la configuración transversal del sistema de atirantamiento. Sin embargo el modelo desarrollado no tiene implementado este grado de libertad, y la diferencia efectiva entre las modelizaciones I4 e I5 es la rigidez a axil de los elementos barra que modelizan los tirantes.

Del estudio de los factores de impacto y de las vibraciones verticales en cabina, no se revelan diferencias significativas entre las secciones I4, I5 e I6. Este hecho lleva a pensar que la modelización plana adoptada, sin tener en cuenta la torsión, ni la repartición transversal de cargas en el tablero no es la más aconsejada para realizar la comparación de estas secciones. Asimismo, la relación de rigidez a axil entre el sistema de atirantamiento y el sistema pila-tablero no influye drásticamente en la respuesta de la estructura, en el rango de valores estudiado.

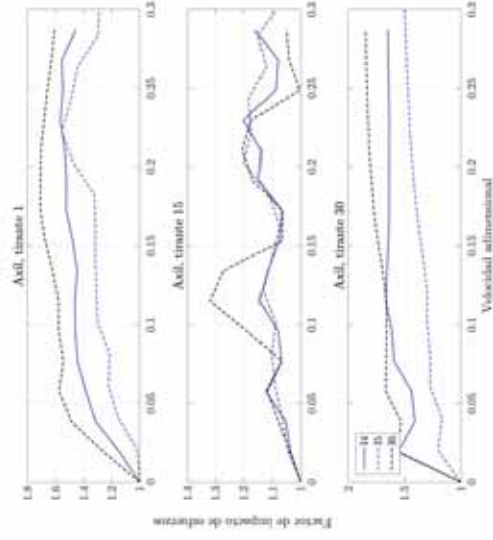
### Influencia de la rigidez del tablero



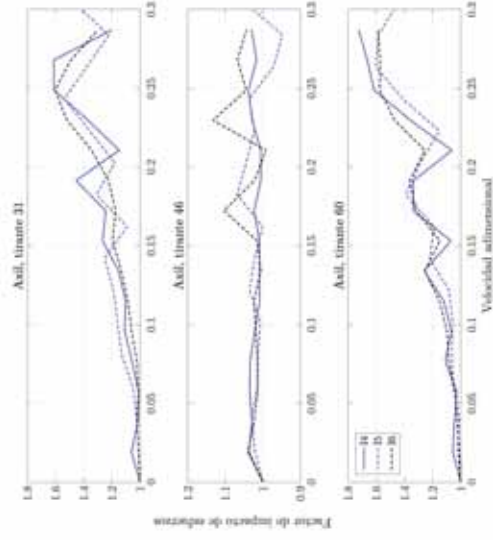
### Influencia de la configuración transversal del sistema de atirantamiento



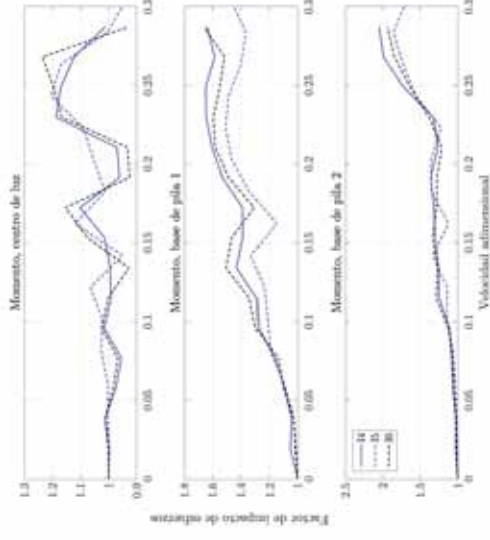
(a) Factor de desplazamientos



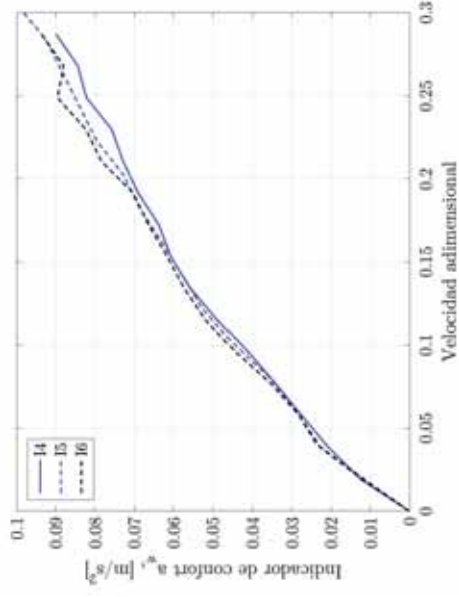
(c) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno



(d) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno



(b) Factor de impacto del momento flector en centro de luz y base de pilas



(e) Indicador del confort de tránsito  
 Figura 6.22: Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según diferentes rigideces del tablero y configuraciones transversales del sistema de atirantamiento

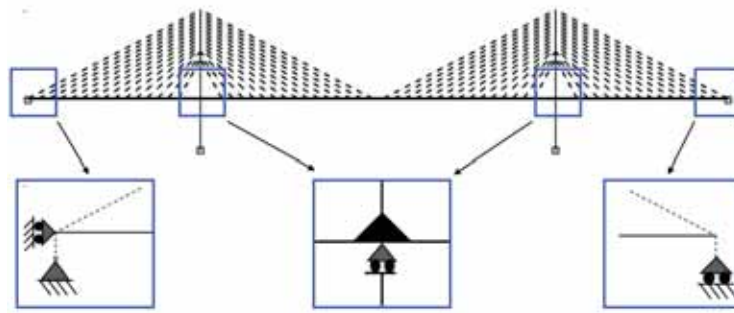


## 6.6. Influencia de la vinculación pila-tablero

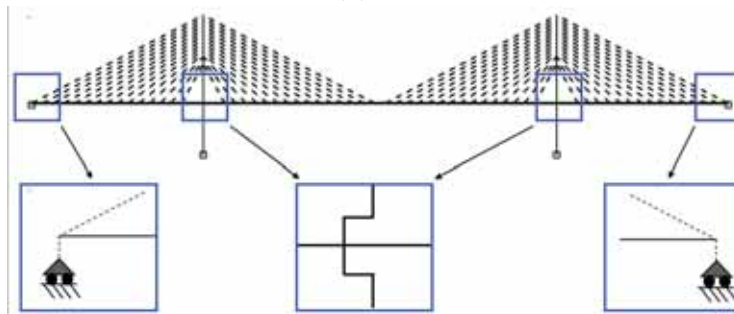
Una de las singularidades de los puentes atirantados es la configuración resistente del nudo de unión entre la pila, el pilono y el tablero. Existen diferentes vinculaciones en el proyecto que van asociadas a unas relaciones de rigideces específicas entre pilonos, tablero y pila [Virlogeux \(2017\)](#), [Rodado López \(1999\)](#) y [Duviard \(2018\)](#). Para estudiar de manera aislada la influencia de las distintas configuraciones de la unión tablero-pila-pilono en el comportamiento global de la estructura, se parte del modelo de base y se le aplican las diferentes condiciones de contorno mostradas en la figura 6.23.

La configuración V1 se corresponde con un esquema en el que el pilono está rígidamente unido al tablero y éste apoya simplemente en la pila, que aporta únicamente la reacción vertical. El puente dispone de un punto fijo longitudinal en el estribo izquierdo. En la configuración V2, no existe una transmisión de esfuerzos entre la pila y el tablero en el nodo de encuentro. El tablero se cruza con la pila y las cargas verticales de las sobrecargas se dirigen hacia las pilas mediante el sistema de atirantamiento. Así mismo, no existe un punto fijo longitudinal material en el puente, siendo el sistema de atirantamiento el encargado de coaccionar el desplazamiento longitudinal del tablero. Este hecho origina que el primer modo propio no sea vertical sino longitudinal, condicionando así el comportamiento del puente.

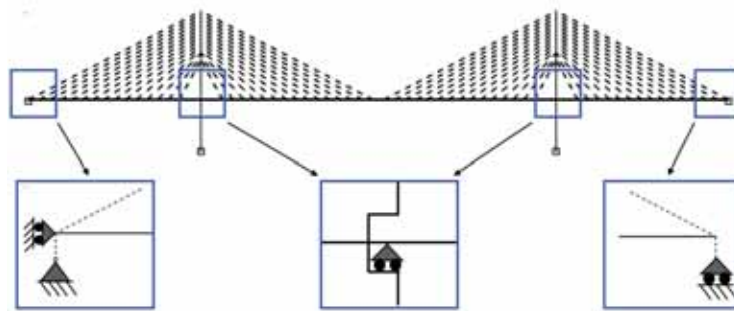
El modelo V3 se corresponde con la configuración de base en la que en el nudo de unión pila-tablero, sólo el cortante vertical es transmitido por el tablero hacia la pila y la pila-pilono están unidos rígidamente. El punto fijo material del puente se encuentra en el estribo izquierdo. La configuración V4 se corresponde con un nudo completamente rígido de unión pila-pilono-tablero, disponiendo, en este caso, un punto fijo material en el estribo izquierdo. Los modos propios de las diferentes modelizaciones se presentan en el anejo.



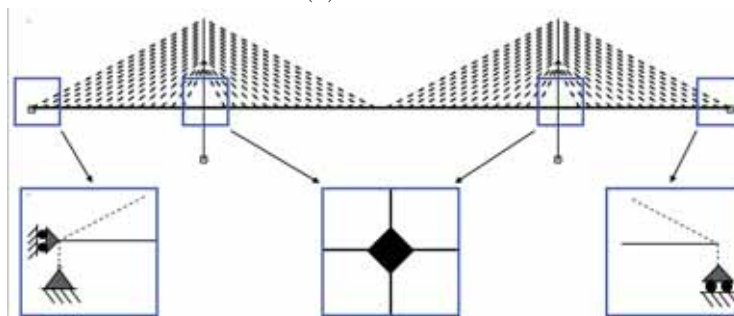
(a) V1



(b) V2



(c) V3-base



(d) V4

Figura 6.23: Vinculaciones pila-tablero estudiadas



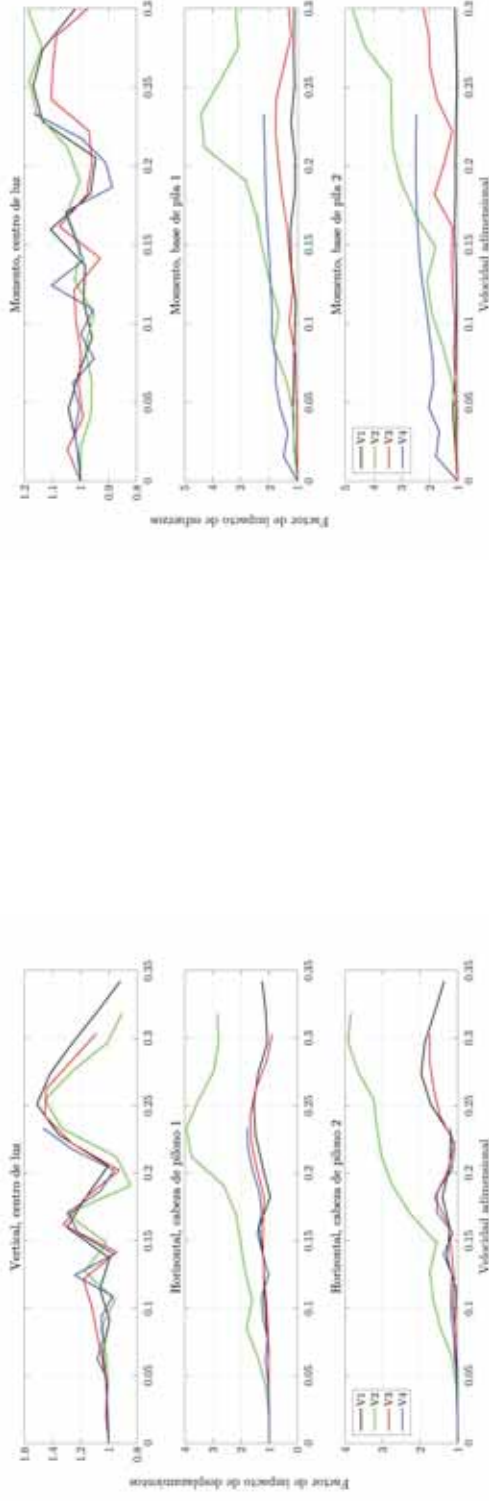
## **Influencia de la vinculación pila-tablero**

En la figura 6.24 se muestran los diferentes parámetros característicos de la respuesta dinámica de las configuraciones V1-V4. Del estudio de los factores de impacto en desplazamientos, resulta significativa la magnificación de los desplazamientos en cabeza de pilonos de la configuración V2, lo que es consecuencia de la ausencia de un punto fijo longitudinal, lo que hace concentrar traslacionalidad del puente en las pilas. En cuanto a flechas en centro de luz, no se aprecian grandes diferencias en las cuatro configuraciones y los factores de impacto se encuentran dentro del rango esperado.

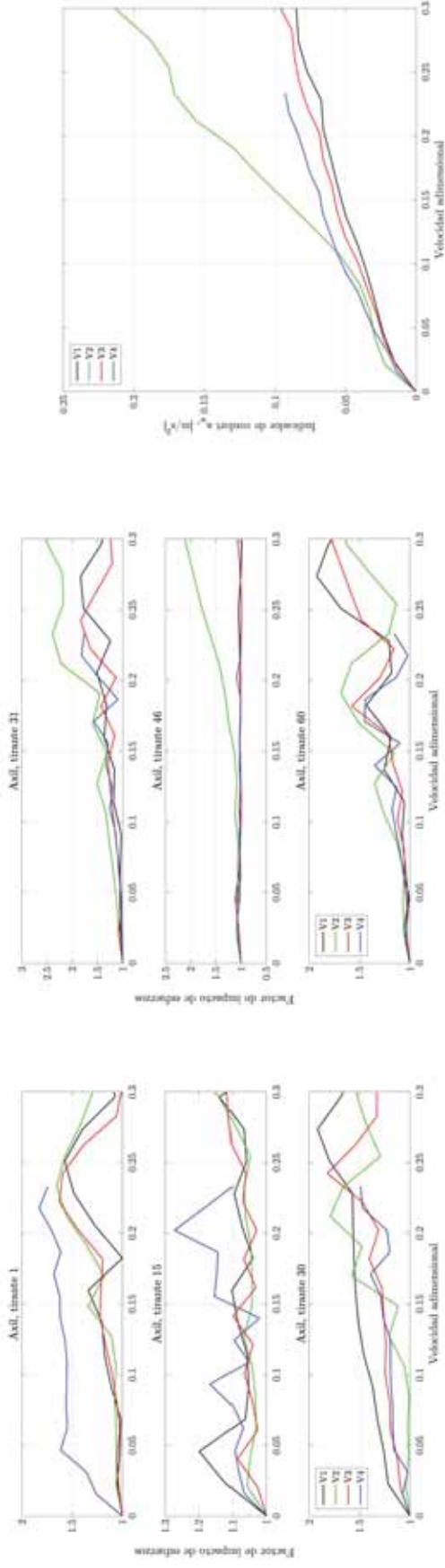
Por otro lado, en lo relativo a factores de impactos de momentos en base de pilas, la configuración más sensible sigue siendo la V2 por la ausencia del punto fijo material. En lo que se refiere a la configuración V1, es importante remarcar que el momento en base de pila se corresponde en realidad con el momento en el nudo de unión pilono-tablero, puesto que bajo acciones de tráfico las pilas no transmiten momento a la cimentación.

En lo que se refiere a factores de impacto de esfuerzos axiales, las configuraciones (V2 y V4) se muestran cómo las más vulnerables, pues alcanzan factores de impacto significativamente más importantes. Se pone de manifiesto la asimetría en la respuesta dinámica de las dos mitades del puente.

Finalmente, el resultado más llamativo es la estimación del grado de confort de tránsito. En este caso, la configuración V2 se presenta cómo la menos confortable desde el punto de vista del pasajero, al llegar a duplicar los niveles de aceleración rms filtrada en la velocidades usuales de circulación.



(a) Factor de desplazamientos



(b) Factor de impacto del momento flector en centro de luz y base de pilas

(c) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno (d) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno (e) Indicador del confort de tránsito  
 Figura 6.24: Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según diferentes vinculaciones entre la pila y el tablero

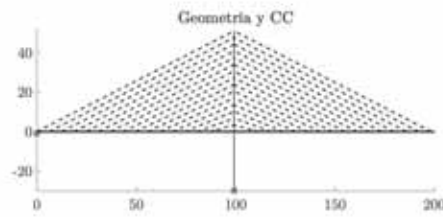
## 6.7. Influencia de la configuración longitudinal del sistema de atirantamiento

La configuración longitudinal del sistema de atirantamiento hace referencia a la disposición de los cables en arpa, semi-arpa y abanico. La configuración en arpa se corresponde con una disposición paralela de los cables, lo que hace que los cables más próximos a las pilas sean menos eficaces frente a cargas gravitacionales al perder verticalidad. En el extremo opuesto se encuentra una disposición en abanico en la que los cables no son paralelos y se concentran en la parte superior del pilono. En este caso, el ángulo con la horizontal cambia, ganando verticalidad al acercarse a la pila. Esta disposición minimiza las tensiones estáticas en los cables más próximos a la pila y por lo tanto las compresiones en el tablero. En la mayoría de las ocasiones, la ejecución geométrica de una configuración en abanico resulta imposible, con lo que se suele recurrir a configuraciones intermedias como la semi-arpa. Las condiciones de apoyos en este estudio se mantienen iguales a las del modelo base y el cálculo modal de los casos tratados se recoge en el anejo.

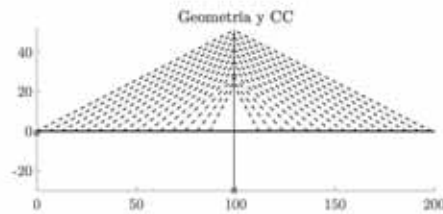
Del estudio de los parámetros característicos de la respuesta dinámica en la figura 6.26 se observa que los factores de impacto de desplazamientos en cabeza de pilonos y en el centro de luz, en la disposición en arpa, son inferiores al resto de configuraciones. La distribución de la carga que viaja por los tirantes a lo largo del fuste de los pilonos, minimiza la flexión y por consiguiente la deformabilidad vertical del tablero. Este efecto se pone igualmente de manifiesto en los factores de impacto del momento flector en centro de luz y en la base de las pilas, que alcanzan valores más bajos en el caso de la configuración en arpa.

Las conclusiones anteriores se aplican a los factores de impacto de los axiles en tirantes extremos, al ser dependientes de la deformabilidad de las pilas. Al igual que ocurría con los desplazamientos, la configuración en arpa es la menos sensible a eventos dinámicos en tirantes extremos. Sin embargo, en los tirantes más cortos, la

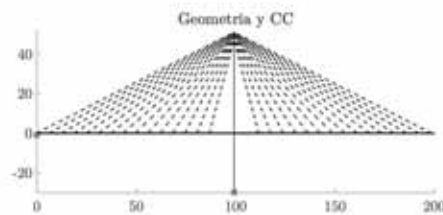
magnificación dinámica en esta configuración supera en más de un 50% los factores de impacto de las disposiciones en semi-arpa o abanico, lo que se explica por de la escasa eficiencia de los tirantes próximos a la pila frente a cargas verticales. Finalmente, en lo que se refiere al confort de tránsito, no se aprecian diferencias notables en las configuraciones estudiadas.



(a) Arpa



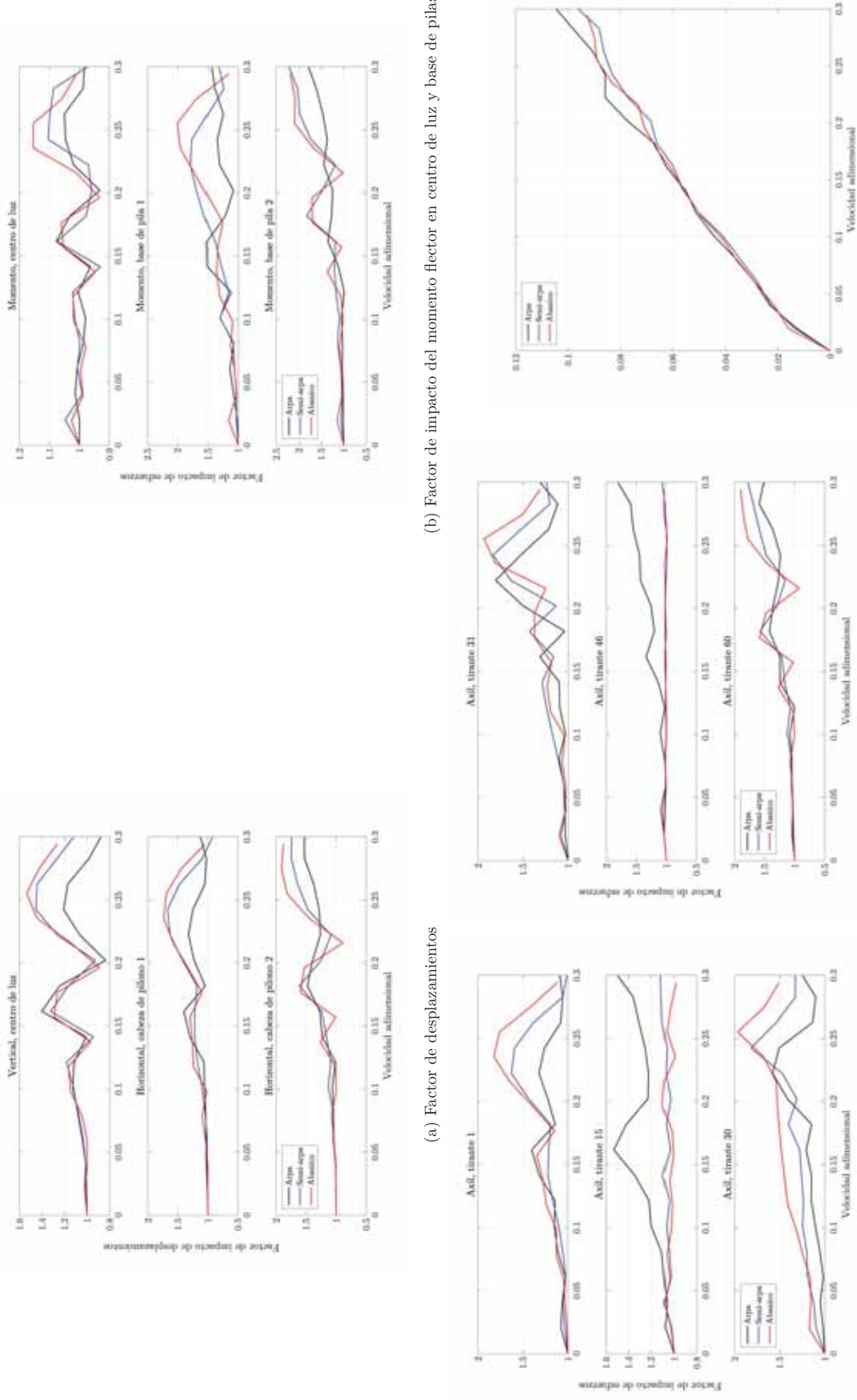
(b) Semi-arpa



(c) Abanico

Figura 6.25: Detalle de un vano de las diferentes configuraciones longitudinales de tirantes estudiadas

### Influencia de la configuración longitudinal del sistema de atirantamiento



(a) Factor de desplazamientos (b) Factor de impacto del momento flector en centro de luz y base de pilas (c) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno (d) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno (e) Indicador del confort de tránsito

Figura 6.26: Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base según diferentes configuraciones longitudinales del sistema de atirantamiento



# 7

## Conclusiones

### 7.1. Respecto al modelo de cálculo desarrollado

El código implementado en el entorno Matlab/Octave ha sido ampliamente validado mediante soluciones analíticas en casos simples y mediante el programa Sofistik en configuraciones más complejas. El modelo se muestra competitivo, alcanzando un desempeño en tiempo de cálculo similar al programa utilizado en la validación. Este modelo simple, pese a no ser innovador con respecto a lo ya existente, demuestra la comprensión del problema estudiado y su materialización en una herramienta sencilla, pero eficaz y generalizable; pues basta con introducir nuevas definiciones de matrices de rigidez elementales para la resolución, por ejemplo, de un problema en tres dimensiones. Así mismo, aunque la licencia educativa del programa comercial caduque, en el caso de que la valoración de este TFM sea favorable, el código simple y las lecciones aprendidas durante su elaboración no perecerán.

Por otro lado, la generalidad del programa permite futuros desarrollos que incluyan la implementación de elementos tridimensionales (lineales, superficiales o volúmenes), la modelización de los efectos aeroelásticos y turbulentos del viento, la interacción suelo-estructura mediante el acoplamiento a un modelo de elementos frontera (BEM) que reproduzca el terreno de cimentación, ... . Así mismo, un desarrollo conjunto de todas las interacciones posibles en el marco de un programa abierto y general, permitiría la introducción del diseño probabilístico de estructuras, al igual que se hace en obras. De este modo, la variabilidad de las acciones y las hipótesis sobre el comportamiento de la estructura y de la cimentación serían considerados no mediante

coeficientes semi-probabilísticos, sino mediante su verdadera ley de de probabilidades. La combinación de este modelo, con un generador estocástico apropiado de las variables de diseño, permitiría realizar un análisis probabilístico de la estructura, considerando así toda la variabilidad tanto en valores de acciones y materiales como en combinaciones.

### **7.2. Respecto a la respuesta dinámica de los diferentes sistemas estudiados**

En el estudio paramétrico realizado en puentes atirantados, se extraen las siguientes conclusiones respecto del comportamiento de la estructura:

1. Del análisis de la influencia de la rugosidad del firme se comprueba que la respuesta de la estructura es independiente de éste.
2. Los efectos inerciales del paso aislado de un vehículo comienzan a ser importantes cuando el peso total del mismo supera las 40 toneladas. A partir de eso valor, se aprecian diferencias superiores al 6 % en los factores de impacto calculados mediante el modelo de cargas y masas móviles. Si el modelo es elástico y lineal, el hecho de aumentar la masa del vehículo no influye de manera relevante en la respuesta de la estructura.
3. El efecto del paso de vehículos equiespaciados obedece, globalmente, a las condiciones de resonancia y cancelación estudiadas por [Yang et al. \(2004\)](#). Sin embargo, se aprecian fenómenos locales en elementos cuya respuesta no depende del primer modo, como en los tirantes más verticales próximos a la pila. Pese a que la repetición de cargas equiespaciadas es poco probable debido al carácter aleatorio del tráfico de carretera, existen algunos niveles de servicio en los que sí podría ser posible.
4. Considerando la variación de la inercia del tablero, la asimetría de la respuesta producida por la propagación de ondas de cortante complica la interpretación de los resultados. En general, en los puntos del puente más alejados del vehículo en el sentido de la marcha (mitad derecha del puente en este caso), muestran



factores de impacto de esfuerzos y desplazamientos que crecen con la esbeltez del puente, siendo la sección en losa aligerada la más vulnerable a eventos dinámicos. En lo que se refiere a la primera mitad del puente, los factores de impacto son mayores cuanto mayor es el canto de la sección. Pese a ello, los factores de impacto en desplazamientos y esfuerzos en la mitad derecha del puente alcanzan valores superiores a los de la otra mitad, con lo que las soluciones esbeltas son las más vulnerables.

5. El modelo de cálculo empleado, al no tener implementado el grado de libertad de torsión, no es adecuado para representar la influencia de la configuración transversal del sistema de atirantamiento.
6. Del estudio de la vinculación pila tablero, se pone de manifiesto que la ausencia de un punto fijo material en el puente magnifica los factores de impacto de desplazamientos y esfuerzos al concentrar la traslacionalidad de la estructura en las pilas.
7. En lo que se refiere a la configuración longitudinal del sistema de atirantamiento, los factores de impacto de desplazamientos y esfuerzos de la configuración en arpa, a excepción de los tirantes más verticales, son inferiores a la configuración en abanico y semi-arpa. La distribución de la carga que viaja por los tirantes a lo largo del fuste de los pilonos, minimiza la flexión y por consiguiente la deformabilidad vertical del tablero y los factores de impacto observados.

Por otro lado, de la aplicación de la norma ISO 2631 a la serie temporal de aceleraciones verticales registradas en los vehículos, se obtienen las siguientes conclusiones referidas al confort de tránsito:

1. El estado del pavimento influye de manera notable en la respuesta del vehículo, que llega a multiplicar por cinco el nivel de aceleraciones que sufre entre un pavimento en perfecto estado y un pavimento en estado medio de conservación, en las velocidades usuales de circulación.
2. Del estudio de la influencia de la masa de los vehículos, se observa que los vehículos ligeros en el rango de masas de las motocicletas son extremadamente sensibles a las vibraciones, alcanzando valores de  $a_w$  de  $1,2 m/s^2$  en el rango

de velocidades usuales, lo que equivale a un nivel de confort muy bajo.

3. La separación de los vehículos en su respuesta en aceleraciones comienza a ser relevante a partir de una velocidad de 50 km/h cuando los vehículos están próximos. Sin embargo, cuando la distancia de los vehículos supera la mitad del vano central, la influencia de la interacción vehículo-estructura-vehículo comienza a ser despreciable.
4. Se aprecia un detrimento considerable del nivel de confort de tránsito en secciones de tipo losa aligerada, en los que los niveles de aceleración en cabina alcanzan valores un 64 % superiores a secciones menos esbeltas. En secciones tipo cajón, no se aprecia dependencia del canto de la sección con respecto al nivel de confort de tránsito.
5. En lo referido a la configuración longitudinal del sistema de atirantamiento, las configuraciones en arpa, semi-arpa y abanico estudiadas no muestran diferencias significativas con respecto a las aceleraciones verticales medidas en los vehículos

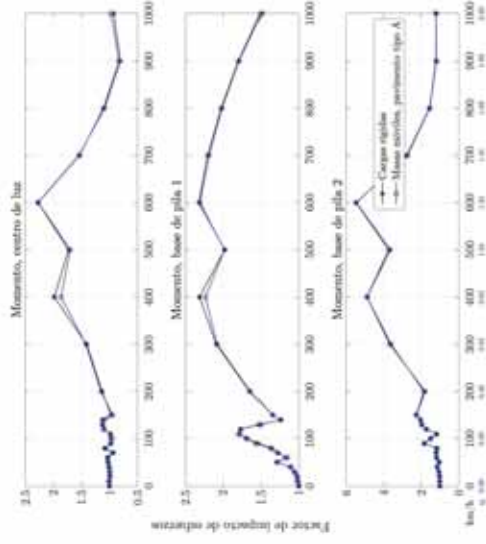
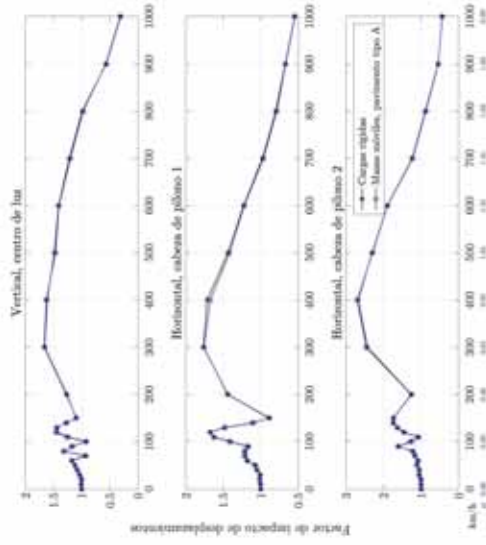
### 7.3. Posibles mejoras y líneas de trabajo

Una adición interesante al modelo sería el grado de libertad de torsión o incluso el modelado 3D de elementos lineales poder para considerar la excentricidad de las cargas y estudiar rigurosamente la influencia de la configuración trasversal del sistema de atirantamiento. Por otro lado, el modelo considera un comportamiento elástico lineal de la estructura, una generalización posible consistiría en modelar las no-linealidades geométricas, bien sea desde un estado pretensado-inicial según la teoría lineal de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones (efectos  $P-\delta$ ) o mediante un cálculo no-lineal geométrico completo. Las no-linealidades materiales a nivel de la estructura resultarían interesantes en el caso de que se modelen convoyes excepcionales de carga y estados últimos para bien apreciar la redistribución plástica de esfuerzos. Sin embargo, la consideración rigurosa de las no-linealidades implica la utilización de métodos de Newton acoplados al algoritmo de integración numérica, lo que complica enormemente el análisis y su convergencia.

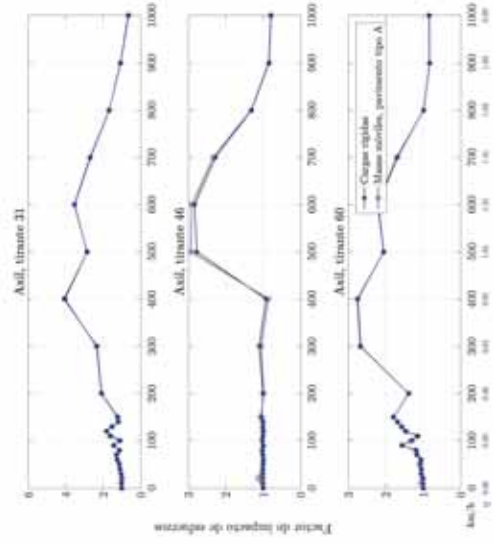
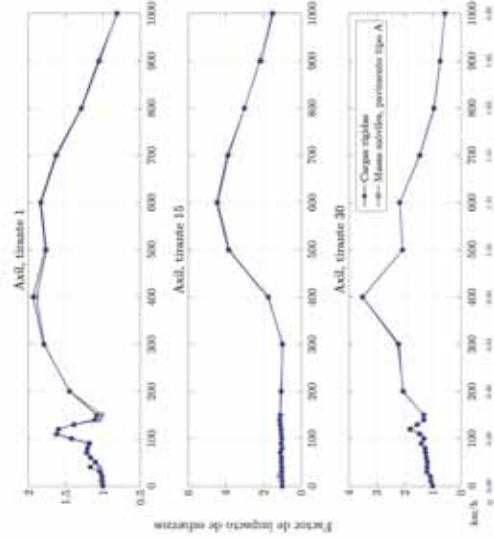
Por otro lado, este estudio se ha limitado a unas condiciones de contorno fijas, de tipo Neumann-Dirichlet despreciando el efecto del terreno. Sin embargo, en problemas dinámicos esto implica que la energía de las ondas que se propagan es reflejada íntegramente hacia el interior del dominio, cuando en realidad sería parcialmente refractada hacia el terreno de cimentación. La modelización del terreno ayudaría, por tanto, a disipar parte de la energía de las ondas generadas por el paso de vehículos gracias al amortiguamiento material o intrínseco y radiativo. Para modelizar el efecto del terreno, una posible mejora sería el acoplamiento del modelo desarrollado con un modelo BEM de elementos frontera.

Los trenes de ultra-alta-velocidad (UHS por sus siglas en inglés), generarían fuerzas dinámicas extraordinarias en las estructuras que los soportan. En el caso de los innovadores trenes Hyperloop/Transpod, Musk (2013), diseñados para circular a velocidades superiores a 1000 km/h, inducirían sobre-esfuerzos dinámicos en sus estructuras portantes que superan ampliamente el los valores de factores impactos habituales. En el caso de la generalización de esta tecnología, un estudio minucioso de las distintas configuraciones estructurales debe ser llevado a cabo para garantizar la seguridad y la viabilidad de los futuros proyectos. A modo de ejemplo, se muestra en la figura 7.1 los factores de impacto en la configuración de base sometida a una masa móvil que viaja entre 0 y 1000 km/h, lo que permite alcanzar una velocidad adimensional de prácticamente dos en la configuración de base y obtener una curva de impactos similar a la propuesta por Fryba (1987) para vigas isostáticas.

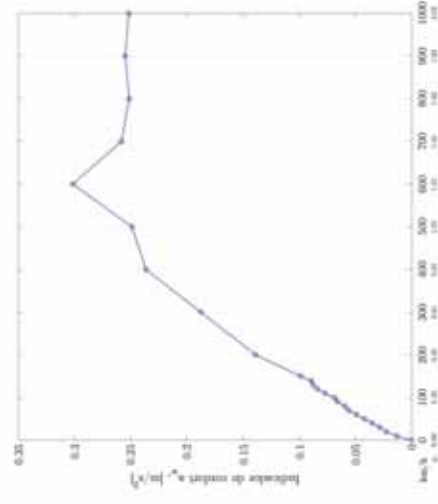
Modelo de base a altas velocidades



(a) Factor de desplazamientos



(b) Factor de impacto del momento flector en centro de luz y base de pilas



(c) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila uno

(d) Factor de impacto del axil en tirantes extremos de la pila dos

Figura 7.1: Caracterización de la respuesta dinámica de la estructura y de los vehículos en modelo de base a altas velocidades

# Bibliografía

- Akbarian, M. (2012). *Model based pavement-vehicle interaction simulation for life cycle assessment of pavements*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Au, F., Cheng, Y., Cheung, Y., and Zheng, D. (2001). On the determination of natural frequencies and mode shapes of cable-stayed bridges. *Applied Mathematical Modelling*, 25(12):1099–1115.
- Biggs, J. M. (1964). *Introduction to structural dynamics*. McGraw-Hill College.
- Bleyer, J. (2018). *Éléments finis pour le génie civil, Notes du cours*. École Nationale des Ponts et Chaussées.
- Brancaleoni, F., Petrangeli, M., and Villatico, C. (1987). Train structure interaction in railway cable stayed bridge dynamics. In *Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok*.
- Brocato, M. (2017). *Conception des structures élastiques, Notes du Cours*. École Nationale des Ponts et Chaussées.
- Bruno, D., Greco, F., and Lonetti, P. (2008). Dynamic impact analysis of long span cable-stayed bridges under moving loads. *Engineering structures*, 30(4):1160–1177.
- Camara, A., Nguyen, K., Ruiz-Teran, A., and Stafford, P. (2014). Serviceability limit state of vibrations in under-deck cable-stayed bridges accounting for vehicle-structure interaction. *Engineering Structures*, 61:61–72.
- Chatterjee, P., Datta, T., and Surana, C. (1994). Vibration of continuous bridges under moving vehicles. *Journal of Sound and Vibration*, 169(5):619–632.
- Cheng, F. Y. (2017). *Matrix analysis of structural dynamics: applications and earthquake engineering*. CRC Press.
- Chopra, A. K. (2001). *Dynamics of structures: Theory and applications*.
- Chung, J. and Hulbert, G. (1993). A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method. *Journal of applied mechanics*, 60(2):371–375.
- Clough, R. W. and Penzien, J. (1975). *Dynamics of structures*. Computers & Structures.

- Cooley, J. W. and Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90):297–301.
- Duviard, M et Combault, J. (2018). *Projet de pont, notes du cours*. École Nationale des Ponts et Chaussées.
- Eisenberger, M. and Yankelevsky, D. Z. (1985). Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation. *Computers & structures*, 21(6):1355–1359.
- Elnashar, G. A. (2017). *Modeling and Analysis of Pavement-Vehicle Interaction Dynamics for Pavement Distress Prediction*. PhD thesis, Concordia University.
- Fleming, J. F. and Egeseli, E. A. (1980). Dynamic behaviour of a cable-stayed bridge. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 8(1):1–16.
- Frýba, L. (1987). Dynamic interaction of vehicles with tracks and roads. *Vehicle System Dynamics*, 16(3):129–138.
- Garg, V. (2012). *Dynamics of railway vehicle systems*. Elsevier.
- Genin, J., Ginsberg, J., and Ting, E. (1975). A complete formulation of inertial effects in the guideway-vehicle interaction problem. *Journal of Sound and Vibration*, 38(1):15–26.
- González de Cangas, J. R. and Samartín Quiroga, A. F. (1999). *Cálculo de estructuras*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- Huang, D. and Wang, T.-L. (1992). Impact analysis of cable-stayed bridges. *Computers & Structures*, 43(5):897–908.
- Inglis, E. (1934). A mathematical treatise on vibration in railway bridges.
- Kahan, M. (2018). *Dynamique stochastique et aérodynamique, Notes du cours*. École Nationale des Ponts et Chaussées.
- Karoumi, R. (2000). Modeling of cable-stayed bridges for analysis of traffic induced vibrations. In *Proc., IMAC-XVIII Conf. on Structural Dynamics*, pages 842–848.
- Li, Y., Dong, S., Bao, Y., Chen, K., and Qiang, S. (2015). Impact coefficient analysis of long-span railway cable-stayed bridge based on coupled vehicle-bridge vibration. *Shock and Vibration*, 2015.
- Lowan, A. N. (1935). Liv. on transverse oscillations of beams under the action of moving variable loads. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 19(127):708–715.
- Madrazo-Aguirre, F., Ruiz-Teran, A. M., and Wadee, M. A. (2015). Dynamic behaviour of steel–concrete composite under-deck cable-stayed bridges under the action of moving loads. *Engineering Structures*, 103:260–274.
- Manual, V. (2014). Sofistik ag.

- Menn, C. (2012). *Prestressed concrete bridges*. Birkhäuser.
- Musk, E. (2013). Hyperloop alpha. *SpaceX: Hawthorne, CA, USA*.
- Noguera, J. M. O. (2016). *Estudio de la respuesta dinámica transversal de viaductos altos de líneas de ferrocarril de alta velocidad bajo la acción de las cargas de uso*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid.
- Pecker, A. (2017). *Dynamique des structures et des ouvrages, Notes du cours*. École Nationale des Ponts et Chaussées.
- Pecker, A. (2018). *Dynamique avancée des constructions, Notes du cours*. École Nationale des Ponts et Chaussées.
- Peña, J. and Ramos, O. R. (2018). *Estudio dinámico del puente de Rande*. Apia XXI.
- Prévost, J. H. (2015). *Matrix structural analysis, course notes*. Princeton University.
- Rodado López, J. (1999). *Comportamiento y optimización de puentes atirantados continuos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid.
- Sánchez, P. A. (2013). *Efectos Dinámicos Laterales en Vehículos y Puentes Ferroviarios sometidos a la Acción de Vientos Transversales*. PhD thesis, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid.
- Scalzi, J. B. and Podolny, W. (1976). *Construction and design of cable-stayed bridges*. Wiley-Interscience.
- Song, M., Cao, D., and Zhu, W. (2016). Dynamic analysis of a cable-stayed bridge subjected to a continuous sequence of moving forces. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(12):1687814016681721.
- Stokes, S. G. G. (1849). *Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges*. Printed at the Pitt Press by John W. Parker.
- Sun, L. (2003). Simulation of pavement roughness and iri based on power spectral density. *Mathematics and computers in simulation*, 61(2):77–88.
- Taheri, M. R., Ting, and C, E. (1990). Dynamic response of plates to moving loads: finite element method. *Computers & structures*, 34(3):509–521.
- Timoshenko, S. (1922). Vibrations of beams under moving pulsating forces. *Phil. Mag*, 43:101.
- Timoshenko, S. (1955). *Vibration problems in engineering*.
- Tyan, F., Hong, Y.-F., Tu, S.-H., and Jeng, W. S. (2009). Generation of random road profiles. *Journal of Advanced Engineering*, 4(2):1373–1378.
- Virlogeux, M. (2017). *Conception et construction des ponts, notes du cours*. École Nationale des Ponts et Chaussées.

- Walther, R. (1999). *Cable stayed bridges*. Thomas Telford.
- Willis, R. (1849). *Report of the Commissioners Appointed to Inquire Into the Application of Iron to Railway Structures...* William Clowes and sons.
- Wilson, J. and Barbas, S. (1980). Responses of continuous, elastically supported beam guideways to transit loads. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 102(4):247–254.
- Yang, F. and Fonder, G. (1996). An iterative solution method for dynamic response of bridge-vehicles systems. 25:195 – 215.
- Yang, F. and Fonder, G. A. (1998). Dynamic response of cable-stayed bridges under moving loads. *Journal of engineering mechanics*, 124(7):741–747.
- Yang, Y. and Lin, C. (2005). Vehicle–bridge interaction dynamics and potential applications. *Journal of sound and vibration*, 284(1-2):205–226.
- Yang, Y.-B., Yau, J., and Wu, Y.-S. (2004). *Vehicle–bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways*. World Scientific.
- Yau, J. and Yang, Y. (2004). Vibration reduction for cable-stayed bridges traveled by high-speed trains. *Finite elements in analysis and design*, 40(3):341–359.



# A

## Cálculo Matricial de estructuras

El Cálculo Matricial de estructuras es confundido con el Método de los Elementos Finitos en el caso de vigas, si bien el método matricial es anterior en el tiempo al MEF, comparten en la aplicación práctica muchos puntos comunes. Sin embargo, a pesar de la similitud en aplicación, conceptualmente son dos maneras de enfocar el problema distintas.

En el caso del cálculo matricial, debido a la posibilidad de conocer la solución exacta a problemas de vigas bajo distintas hipótesis de carga, se pueden formular matrices de rigidez mediante el método directo. Cada término  $k_{ij}$  de la matriz  $\underline{K}$  se obtiene aplicando su definición: *fuerza que es necesaria aplicar al gdl  $i$  para obtener un desplazamiento unitario en el gdl  $j$  y nulo en el resto y por el principio de reciprocidad de Maxwell-Betti, fuerza necesaria aplicar en el grado de libertad  $j$  para obtener un desplazamiento unitario en el gdl  $i$  y nulo en el resto.*

En el caso del MEF, tras una discretización por elementos del dominio de estudio, se busca aproximar la solución en desplazamientos de la ecuación a resolver mediante una interpolación de los desplazamientos en los nodos de los elementos. El campo de desplazamientos óptimo de la solución EF se obtiene, en el caso de la elasticidad, mediante la aplicación del PTV, siendo esa solución EF la que de entre el conjunto de las funciones representables por las funciones de interpolación elegidas, minimizan el funcional energía potencial del sistema. Es por ello que si la solución exacta esta contenida en el conjunto de funciones de interpolación elegidas, la formulación EF y la matricial coinciden.

A título de ejemplo, se muestra en las secciones siguientes, la aplicación del método directo a algunos casos ligados al presente estudio.

## A.1. Método matricial, caso estático de una viga Navier-Bernoulli

De la ecuación general de vigas sometidas a axil y flexión deducida anteriormente, si se desprecian los términos inerciales, se llega a la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= -f_x \\ EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} &= f_y \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Cuyas soluciones homogéneas son de la forma:

$$\begin{aligned} u(x) &= Bx + C \\ v(x) &= A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

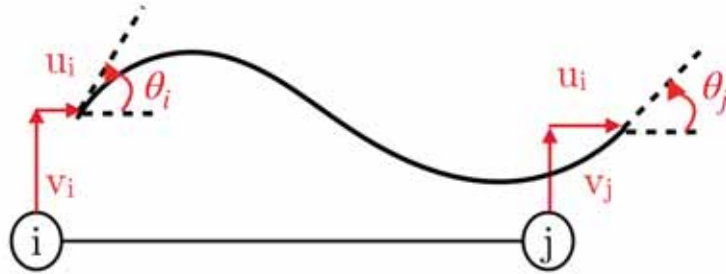


Figura A.1: Grados de libertad de la línea elástica

Para la obtención de los coeficientes de la matriz de rigidez, se aplica su definición. Debido al comportamiento desacoplado en axil y flexión en el caso de pequeños desplazamientos, se puede proceder de manera independiente en el análisis. En primer lugar se obtiene la línea elástica para un desplazamiento unitario (por ejemplo la flecha en el extremo inicial) y nulo el resto. Las condiciones de contorno serían:

$$v(0) = 1; \quad v'(0) = 0; \quad v(L) = 0; \quad v'(L) = 0$$

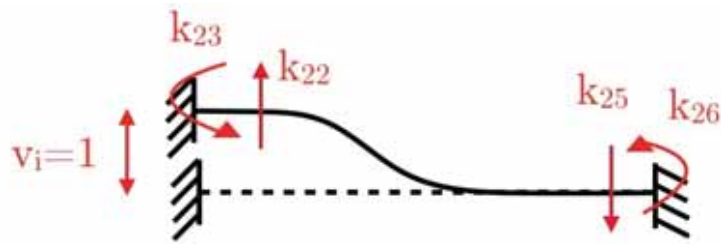


Figura A.2: Reacciones de empotramiento frente a un desplazamiento unitario vertical del primer nodo

Con esas cuatro condiciones se obtendrían los coeficientes  $A_i$  de la línea elástica. Y los esfuerzos  $V_i$ ,  $M_i$ ,  $V_j$  y  $M_j$  asociados al movimiento unitario correspondiente, se obtendrían por derivación de la línea elástica, a partir de la ley de comportamiento, de la manera siguiente:

$$k_{22} = V_i = -EIv'''(0); \quad k_{23} = M_i = -EIv''(0);$$

$$k_{25} = V_j = -EIv'''(L); \quad k_{26} = M_j = -EIv''(L)$$

En lo referido al esfuerzo axial se procede de una manera similar. Repitiendo el proceso en todos los grados de libertad, se obtiene la matriz de rigidez.

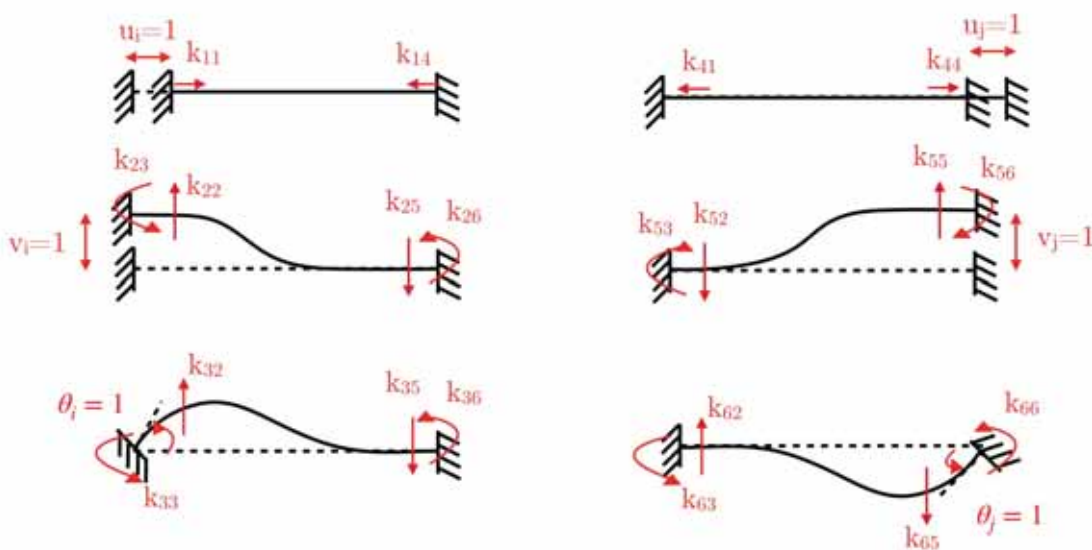


Figura A.3: Reacciones de empotramiento frente a desplazamientos unitarios en los extremos

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix}}_F = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ & & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ & \text{sim} & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ & & & & & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}}_U \quad (\text{A.3})$$

## A.2. Caso dinámico de la viga Navier-Bernoulli

En el caso dinámico, la consideración de los efectos inerciales longitudinales y transversales, despreciando el amortiguamiento, conduce a la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= -f_x \\
EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} &= f_y
\end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Resolviendo la parte homogénea de las ecuaciones precedentes mediante una técnica de separación de variables, en una función temporal y una función espacial (modo propio), se obtienen las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= g(t) \cdot \phi_u(x) = [E \text{sen}(w_u t) + F \text{cos}(w_u t)] \cdot [B_1 \text{sen}(kx) + B_2 \text{cos}(kx)] \\
v(x, t) &= f(t) \cdot \phi_v(x) = [C \text{sen}(w_v t) + D \text{cos}(w_v t)] \cdot [A_1 \text{sen}(ax) + A_2 \text{cos}(ax) + \\
&\quad + A_3 \text{senh}(ax) + A_4 \text{cosh}(ax)]
\end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Un método de resolución de la ecuación dinámica de una estructura es el de la rigidez dinámica (Cheng, 2017). Este método se basa en la obtención de los modos propios exactos de una estructura, considerada como un medio continuo, mediante el ensamblaje de matrices de rigidez dinámica elementales. Una vez creada la matriz de rigidez dinámica global de la estructura, la resolución del problema de valores propios generalizado conduce a la obtención de modos propios y deformadas modales *exactos* (sin recurrir a métodos aproximados de condensación de masa o elementos finitos). A partir de los modos propios y deformadas modales, se obtiene por descomposición modal, la respuesta de una estructura frente a un estado de cargas concreto.

La formación de la matriz de rigidez dinámica se realiza aplicando las mismas técnicas citadas anteriormente a la solución espacial ( $\phi_u(x)$  y  $\phi_v(x)$ ) de la ecuación

homogénea, lo que conduce a la matriz siguiente:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & 0 & 0 \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ sim & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Dónde los coeficientes  $k_{ij}$  son:

$$\begin{aligned} k_{11} &= E Ak \cot(kL) \\ k_{14} &= -E Ak \operatorname{cosec}(kL) \\ k_{22} &= \frac{-\cos(\mu) \operatorname{senh}(\mu) - \operatorname{cosh}(\mu) \operatorname{sen}(\mu)}{G} \left(\frac{\mu}{L}\right)^2 \\ k_{23} &= \frac{\operatorname{senh}(\mu) \operatorname{sen}(\mu)}{G} \left(\frac{\mu}{L}\right) \\ k_{25} &= \frac{-\operatorname{senh}(\mu) - \operatorname{sen}(\mu)}{G} \left(\frac{\mu}{L}\right)^2 \\ k_{26} &= \frac{\operatorname{cosh}(\mu) - \cos(\mu)}{G} \left(\frac{\mu}{L}\right) \\ k_{33} &= \frac{\operatorname{senh}(\mu) \cos(\mu) - \operatorname{cosh}(\mu) \operatorname{sen}(\mu)}{G} \\ k_{35} &= \frac{\operatorname{cosh}(\mu) - \cos(\mu)}{G} \left(\frac{\mu}{L}\right) \\ k_{36} &= \frac{\operatorname{sen}(\mu) - \operatorname{senh}(\mu)}{G} \\ k_{44} &= E Ak \cot(kL) \\ k_{55} &= \frac{-\cos(\mu) \operatorname{senh}(\mu) - \operatorname{cosh}(\mu) \operatorname{sen}(\mu)}{G} \left(\frac{\mu}{L}\right)^2 \\ k_{56} &= \frac{\operatorname{senh}(\mu) \operatorname{sen}(\mu)}{G} \left(\frac{\mu}{L}\right) \\ k_{66} &= \frac{\operatorname{senh}(\mu) \cos(\mu) - \operatorname{cosh}(\mu) \operatorname{sen}(\mu)}{G} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Dónde  $k = \sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EA}}$ ,  $\mu = aL$ ,  $a^4 = \rho A \omega^2 / (EI)$  y  $G = \frac{(\operatorname{cosh}(\mu) \cos(\mu) - 1)L}{\mu EI}$

Es importante tener en cuenta que la modelización por medio de la matriz de rigidez dinámica contiene, debido a la propia formulación que conduce a su obtención, las propiedades de rigidez y masa de la viga. Por ello la solución del problema de vibraciones libres en el caso de estructuras intraslacionales (arriostradas lateralmente) se realiza con la ayuda de las técnicas clásicas de diagonalización, directamente aplicadas a la matriz  $\underline{\underline{K}}$ .

Sin embargo cuando se trata de estructuras traslacionales, se movilizan unas fuerzas inerciales debidas al movimiento de sólido rígido del grupo cotraslacional que deben

ser consideradas. La ecuación dinámica de vibraciones libres se escribe, por tanto:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M})\underline{D} = 0 \quad (\text{A.8})$$

La solución no trivial se obtiene anulando el determinante:

$$\det(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Esta operación conduce a las frecuencias de vibración cuyos autovectores normalizados se corresponden con los modos propios de la estructura. La anulación de este determinante conduce a una ecuación trascendente que no tiene solución analítica para la mayor parte de las estructuras, con lo que se realiza numéricamente. Una vez obtenidas las frecuencias propias, se calculan los modos propios sustituyendo en la matriz de rigidez dinámica y para calcular la respuesta de una estructura frente a una carga dinámica, basta con aplicar la técnica de descomposición modal.

### A.3. Caso estático de la viga sobre apoyos elásticos

La matriz de rigidez exacta de la viga Navier-Bernoulli sobre cimentación elástica tipo Winkler fue tratada por primera vez por (Eisenberger and Yankelevsky, 1985). La ecuación diferencial de la elástica es la siguiente:

$$EI \frac{\partial^4 v(x)}{\partial x^4} + kv(x) = f_y \quad (\text{A.10})$$

La solución de la parte homogénea de la ecuación anterior es de la forma siguiente:

$$v(x) = ch(ax) [A \cos(ax) + B \sin(ax)] + sh(ax) [C \cos(ax) + D \sin(ax)] \quad (\text{A.11})$$

Dónde el parámetro  $a$  es:

$$a = \left( \frac{k}{4EI} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Con ello se obtiene la matriz de rigidez exacta de una viga NB sobre cimentación elástica tipo Winkler:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & 0 & 0 \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ sim & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Dónde los coeficientes  $k_{ij}$  son:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= EA/l \\
 k_{14} &= -EA/l \\
 k_{22} &= \frac{k \cos(al) \sinh(al) + \cos(al) \sin(al)}{a \sinh^2(al) - \sin^2(al)} \\
 k_{23} &= \frac{k \sinh^2(al) + \sin^2(al)}{2a^2 \sinh^2(al) - \sin^2(al)} \\
 k_{25} &= -\frac{k \sinh(al) \cos(al) + \cosh(al) \sin(al)}{a \sinh^2(al) - \sin^2(al)} \\
 k_{26} &= \frac{k \sinh(al) \sin(al)}{a^2 \sinh^2(al) - \sin^2(al)} \\
 k_{33} &= \frac{k \sinh(al) \cosh(al) - \sin(al) \cos(al)}{2a^3 \sinh^2(al) - \sin^2(al)} \\
 k_{35} &= \frac{k \sinh(al) \sin(al)}{a^2 \sinh^2(al) - \sin^2(al)} \\
 k_{36} &= \frac{k \cosh(al) \sin(al) - \sinh(al) \cos(al)}{2a^3 \sinh^2(al) - \sin^2(al)} \\
 k_{44} &= EA/l \\
 k_{55} &= \frac{k \cos(al) \sinh(al) + \cos(al) \sin(al)}{a \sinh^2(al) - \sin^2(al)} \\
 k_{56} &= -\frac{k \sinh^2(al) + \sin^2(al)}{2a^2 \sinh^2(al) - \sin^2(al)} \\
 k_{66} &= \frac{k \sinh(al) \cosh(al) - \sin(al) \cos(al)}{2a^3 \sinh^2(al) - \sin^2(al)}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

#### A.4. Caso dinámico de la viga sobre apoyos elásticos

En el caso de la matriz de rigidez dinámica de la viga EB sobre apoyos elásticos, tras la descomposición en de la ecuación de gobierno en una solución espacial y otra temporal, se llega a una ecuación diferencial del mismo tipo que en el caso de una viga EB considerando los efectos inerciales. Los coeficientes de la matriz de rigidez dinámica son coincidentes a excepción del parámetro  $a$ , que vale en este caso:

$$a^4 = \frac{\rho A w^2}{EI} - \frac{k}{EI}$$





# B

## Verificación del comportamiento del modelo base

### B.1. Calibración de la rigidez de la retenida

Del estudio de la respuesta dinámica del puente con condiciones de contorno rígidas, se ha observado que la condición de apoyo fijo en los estribos controlaba en exceso la deformabilidad del conjunto. Para simular una condición más realista, se ha modelizado un puente atirantado de cinco vanos para así fijar el límite inferior de la rigidez vertical de la retenida. El valor de la rigidez vertical encontrado es igual a 5 MN/m, con lo que la rigidez de la retenida del puente atirantado a tres vanos está limitado inferiormente a ese valor. Finalmente se ha optado por dotar a la cimentación de los estribos de una rigidez vertical intermedia de 10 MN/m.

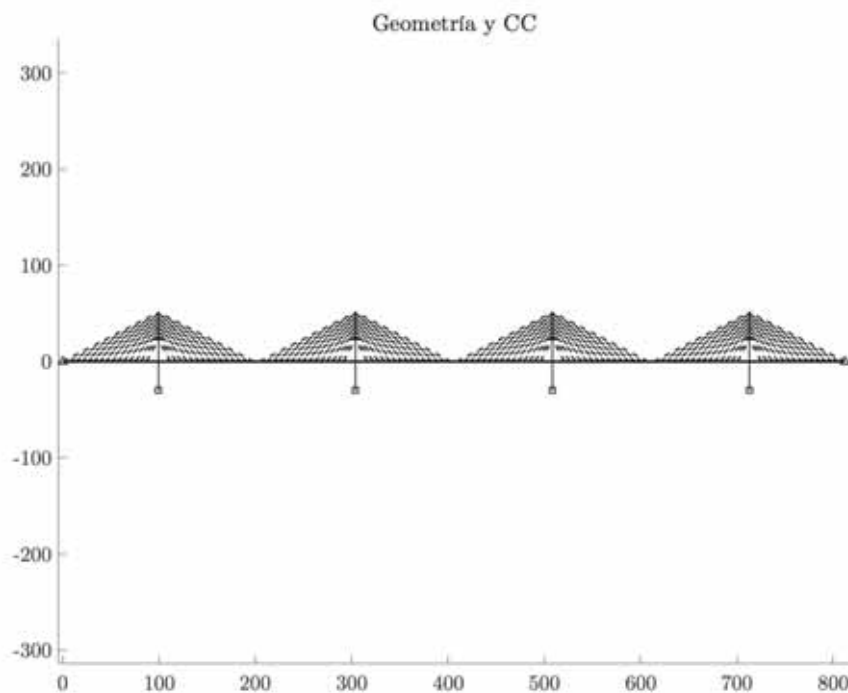


Figura B.1: Modelo de cinco vanos

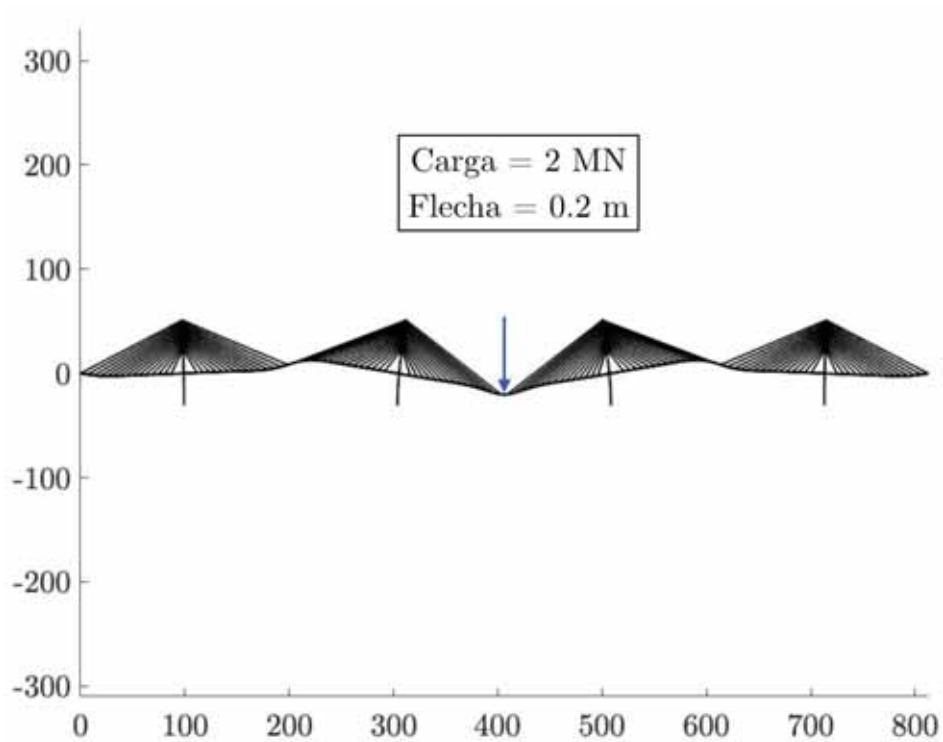


Figura B.2: Deformada del modelo de cinco vanos al cargar el centro de luz del vano intermedio

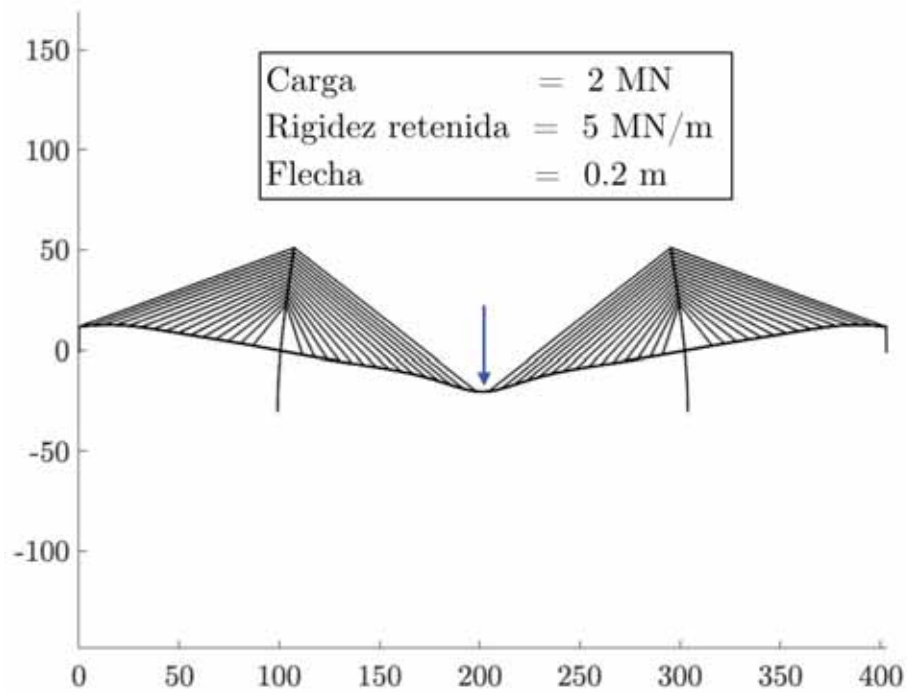


Figura B.3: Deformada del modelo calibrado de tres vanos al cargar el centro de luz del vano intermedio

B. Verificación del comportamiento del modelo base

---

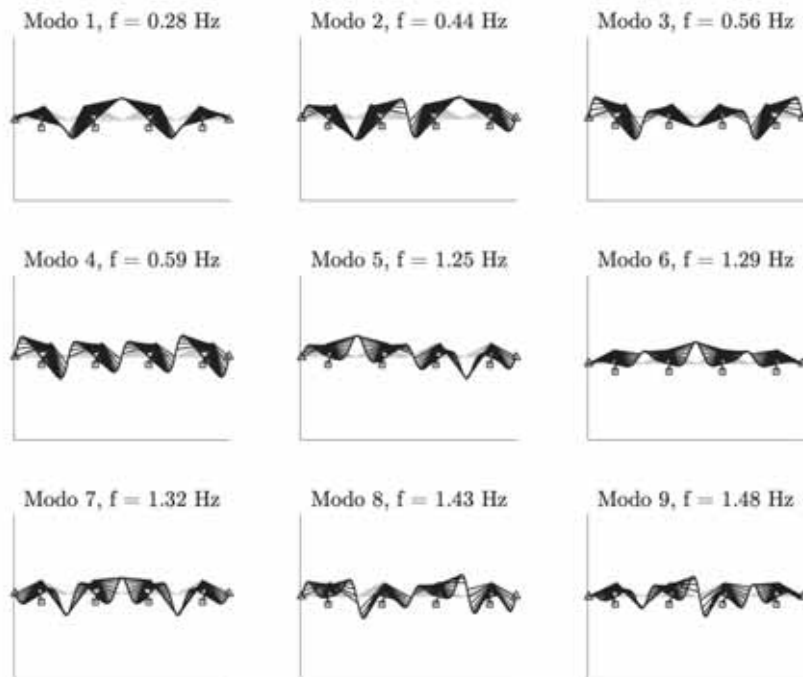


Figura B.4: Cálculo modal del modelo de cinco vanos

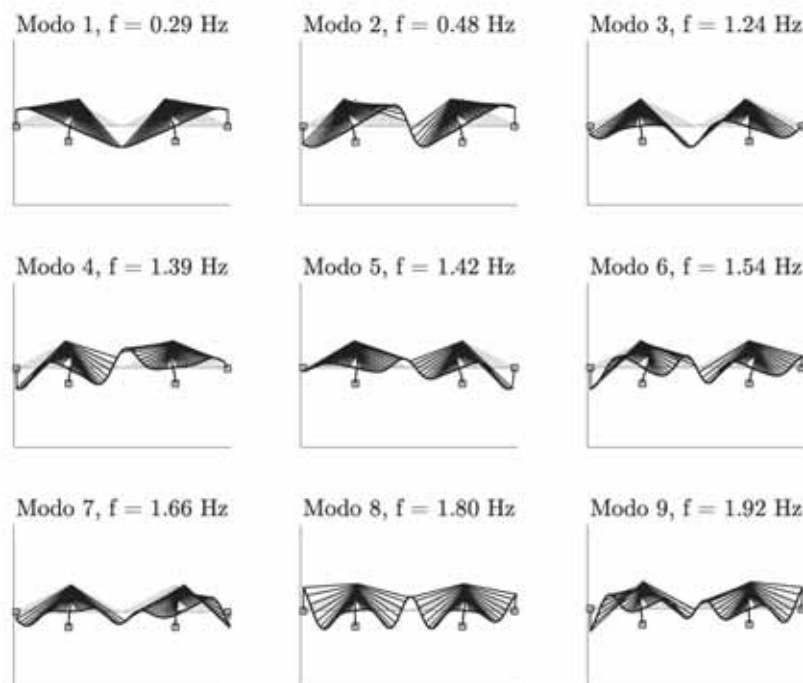
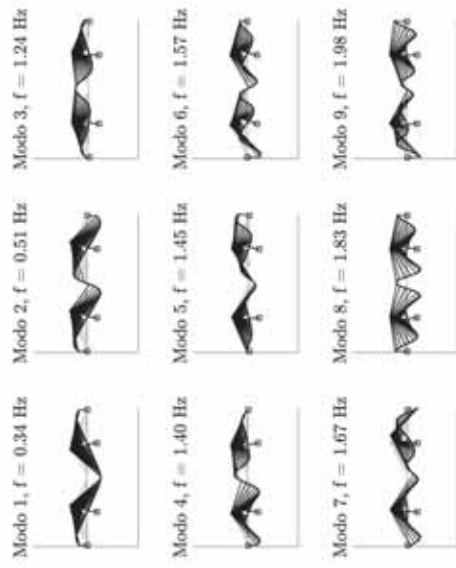


Figura B.5: Cálculo modal del modelo calibrado de tres vanos

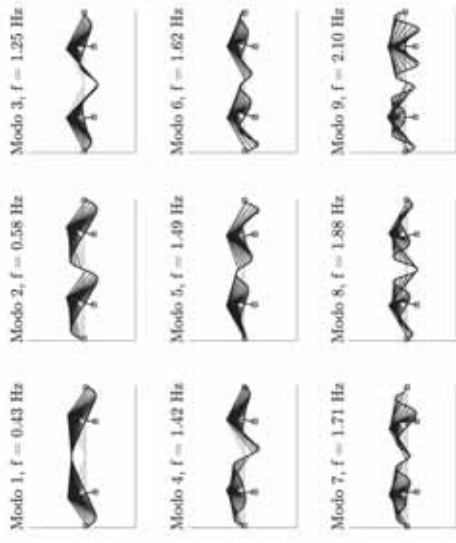
## **B.2. Análisis de la influencia de la rigidez en la retenida**



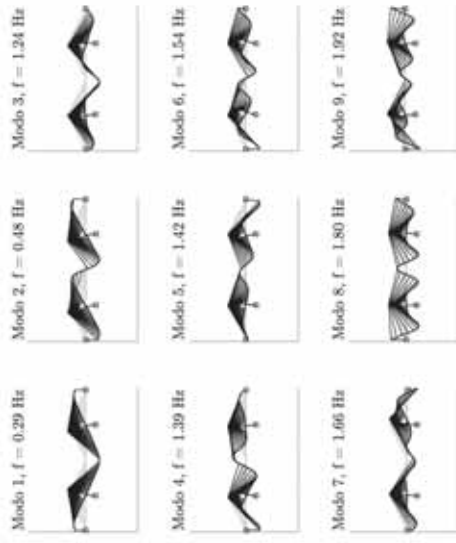
(a)  $k_r = \infty$  MN/m



(c)  $k_r = 10$  MN/m



(b)  $k_r = 50$  MN/m



(d)  $k_r = 5$  MN/m

Figura B.6: Modos propios según diferentes rigideces verticales en la retenida

B. Verificación del comportamiento del modelo base

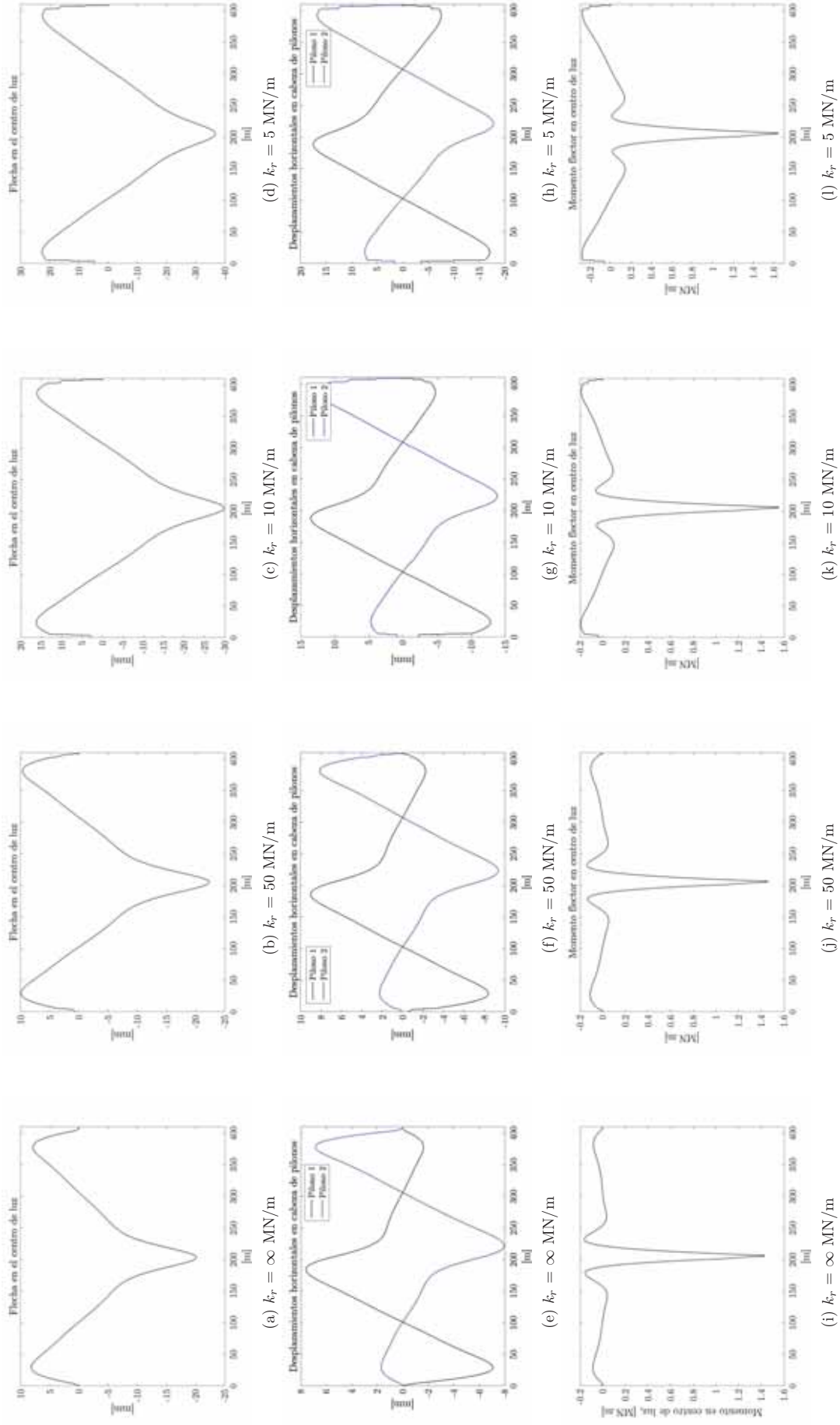


Figura B.7: Influencia de la rigidez vertical de la retenida en desplazamientos y esfuerzos

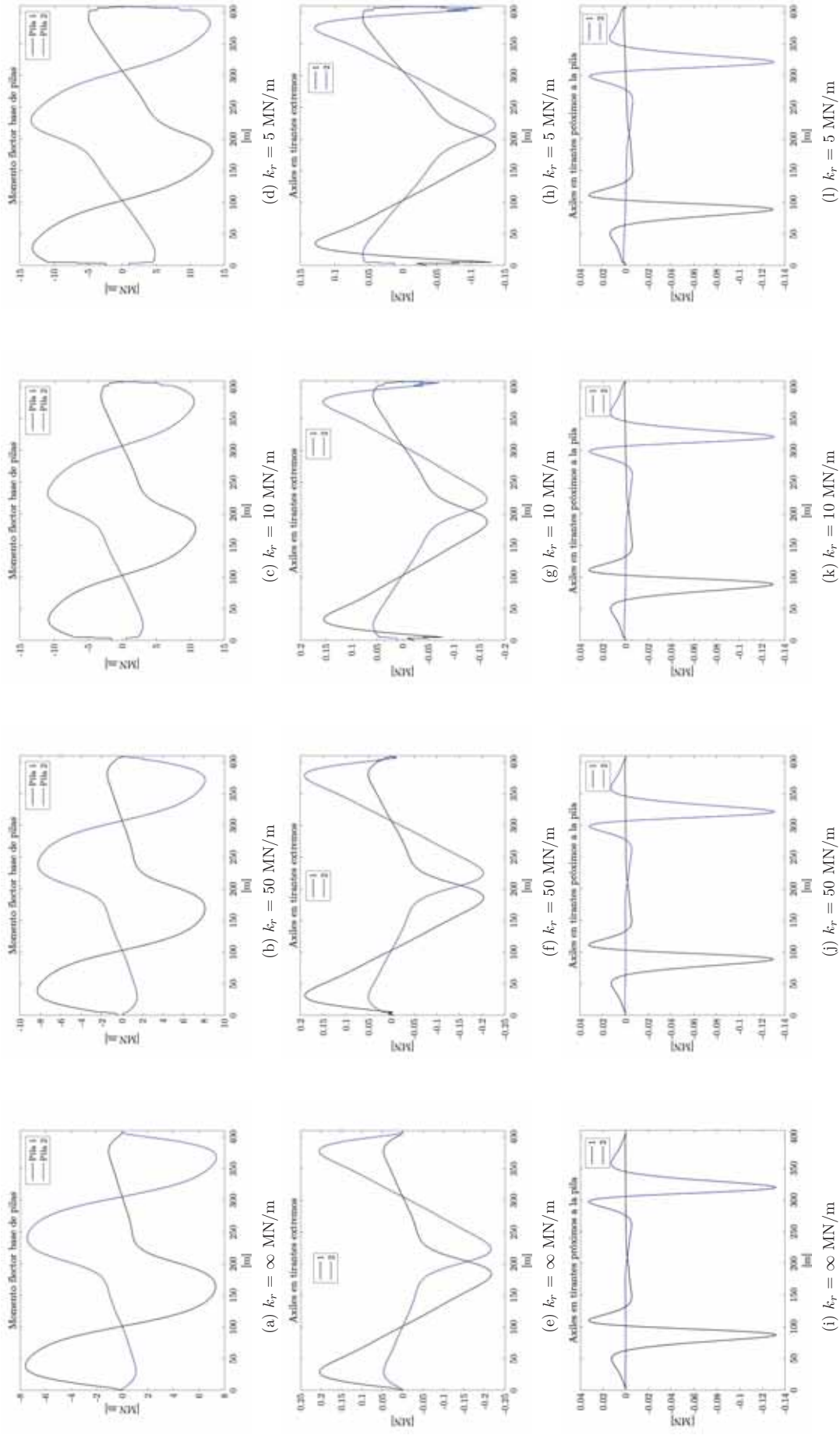
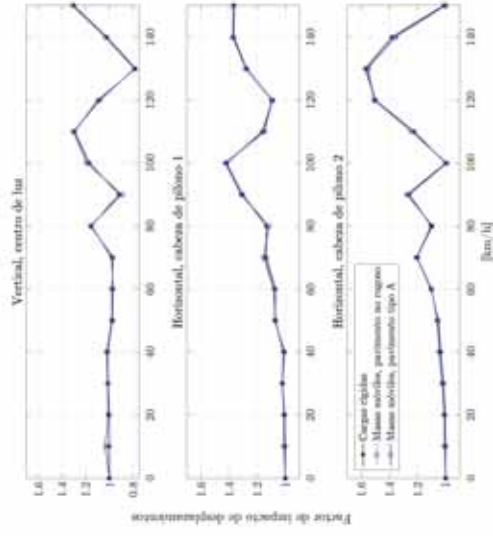
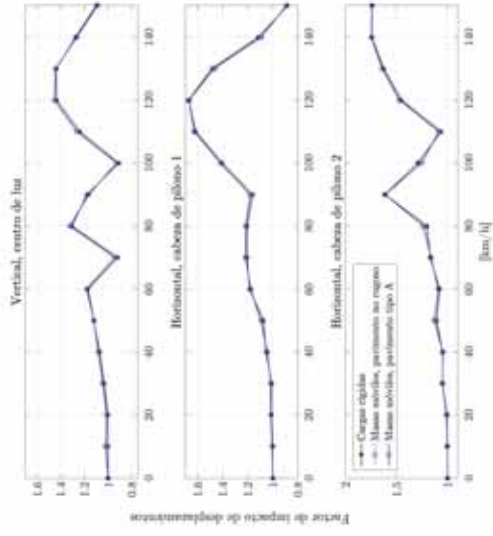


Figura B.8: Influencia rigidez vertical de la retenida en esfuerzos

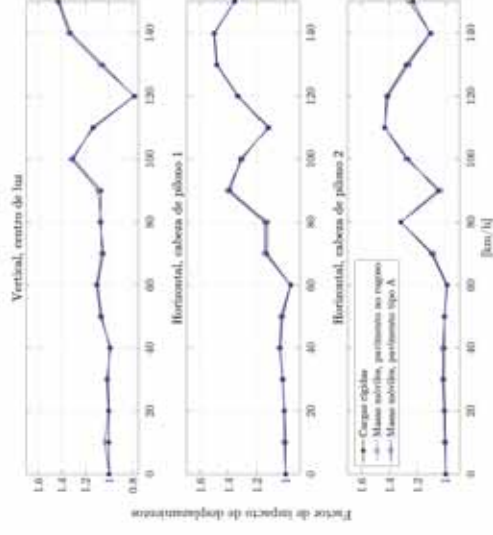
B. Verificación del comportamiento del modelo base



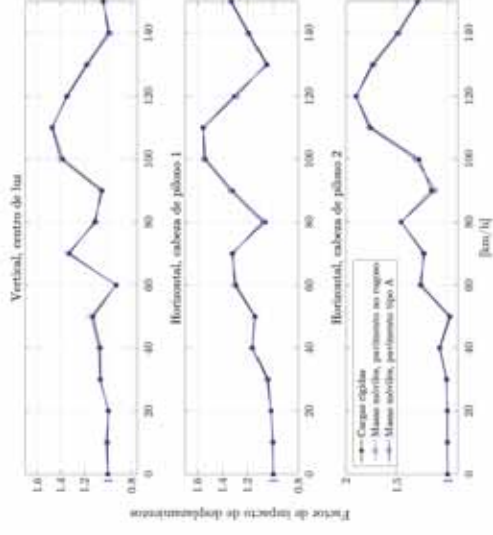
(a)  $k_r = \infty \text{ MN/m}$



(b)  $k_r = 10 \text{ MN/m}$



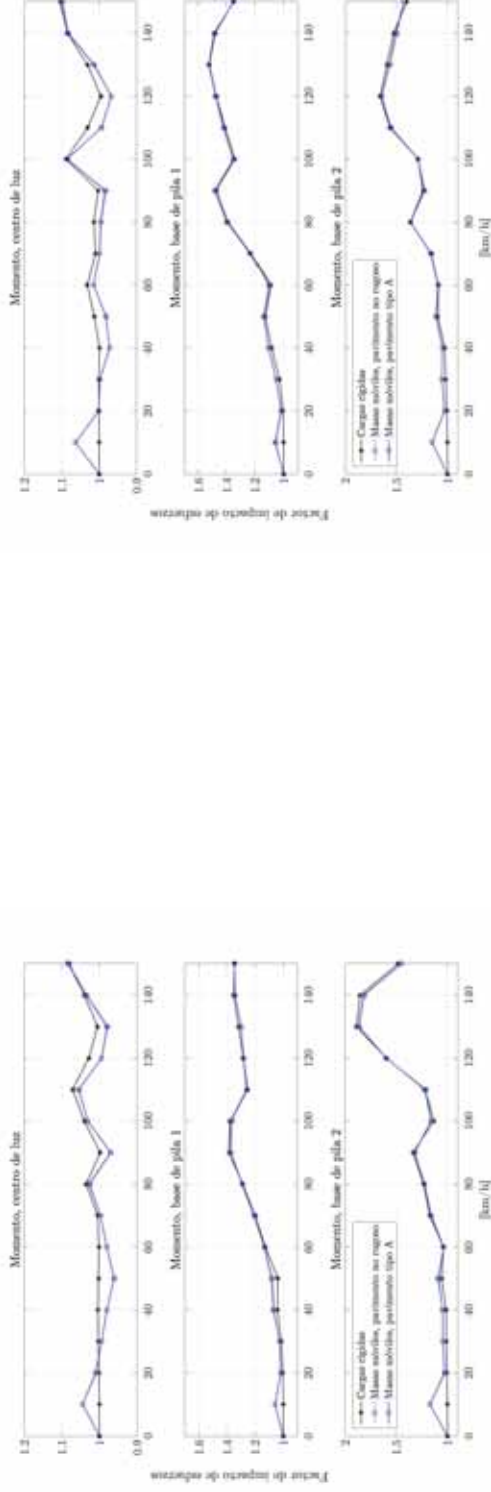
(c)  $k_r = 5 \text{ MN/m}$



(d)  $k_r = 5 \text{ MN/m}$   
 Figura B.9: Influencia rigidez vertical de la retenida en el factor de impacto de desplazamientos en el centro de luz y en cabeza de pilonos

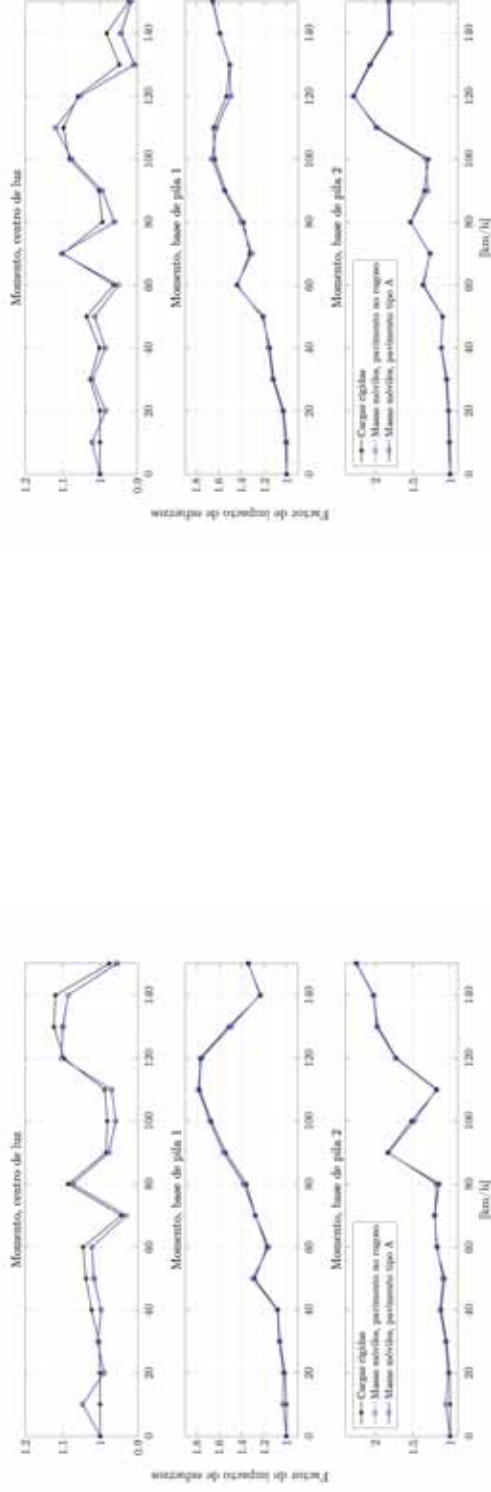


B. Verificación del comportamiento del modelo base



(a)  $k_r = \infty \text{ MN/m}$

(b)  $k_r = 50 \text{ MN/m}$

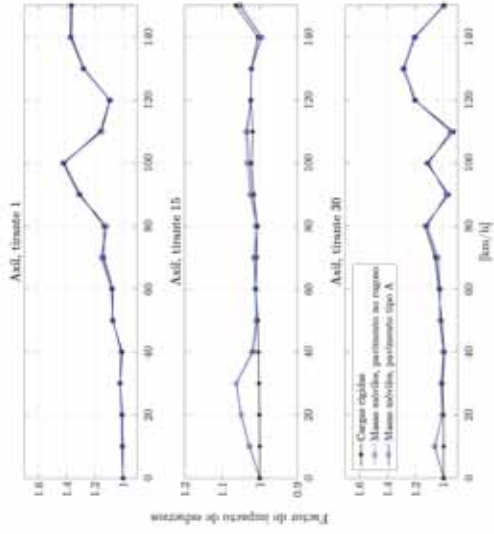


(c)  $k_r = 10 \text{ MN/m}$

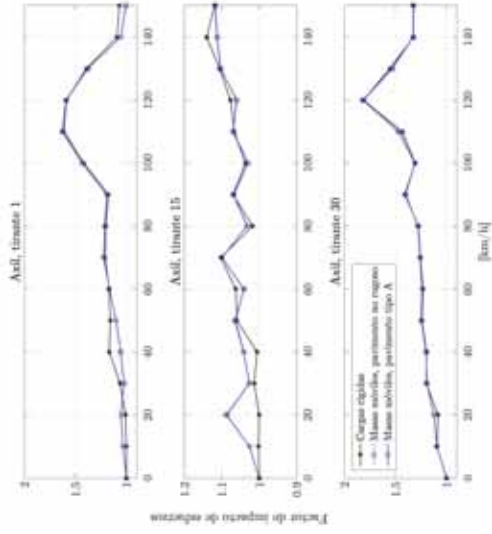
(d)  $k_r = 5 \text{ MN/m}$

Figura B.10: Influencia rigidez vertical de la retenida en el factor de impacto del momento flector en centro de luz y en la base de pilas

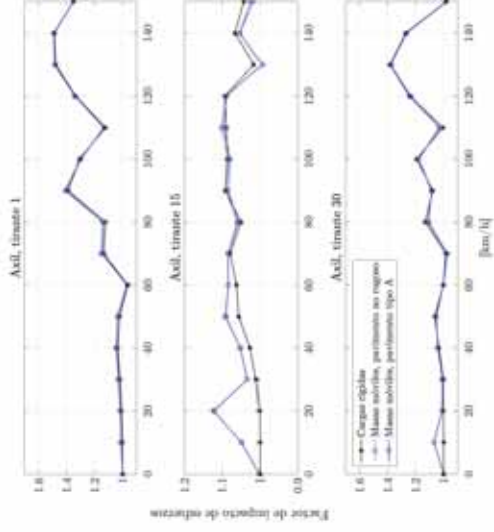
B. Verificación del comportamiento del modelo base



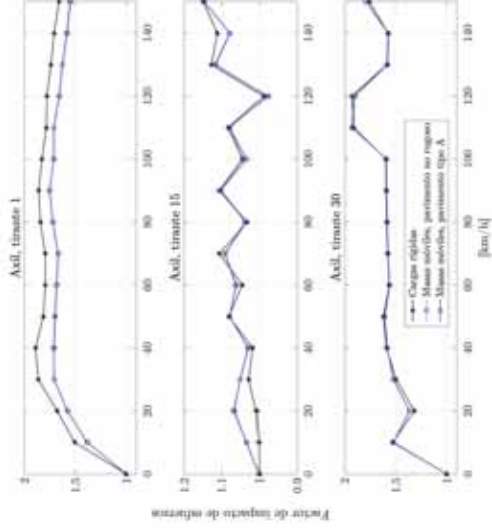
(a)  $k_r = \infty$  MN/m



(c)  $k_r = 10$  MN/m



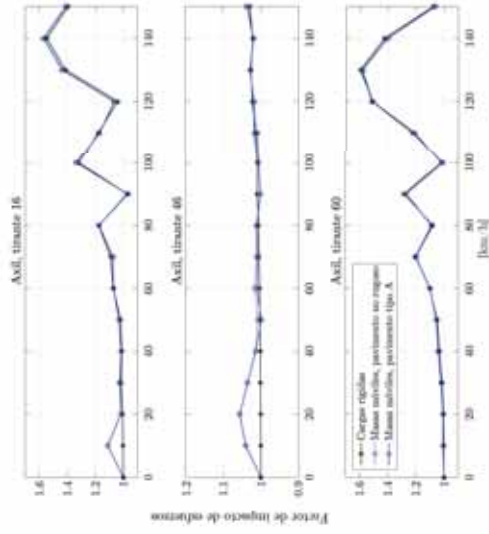
(b)  $k_r = 50$  MN/m



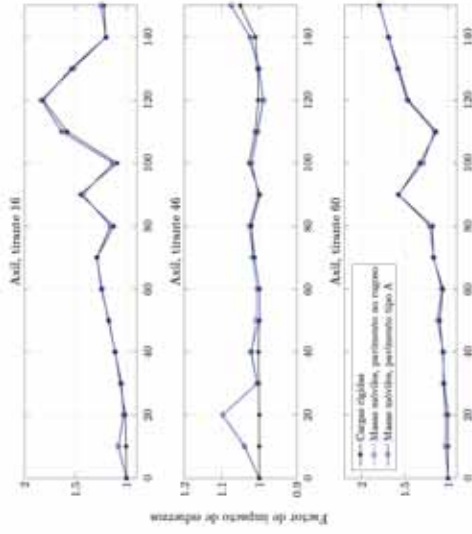
(d)  $k_r = 5$  MN/m

Figura B.11: Influencia rigidez vertical de la retenida en el factor de impacto del esfuerzo axil en tirantes de la pila uno

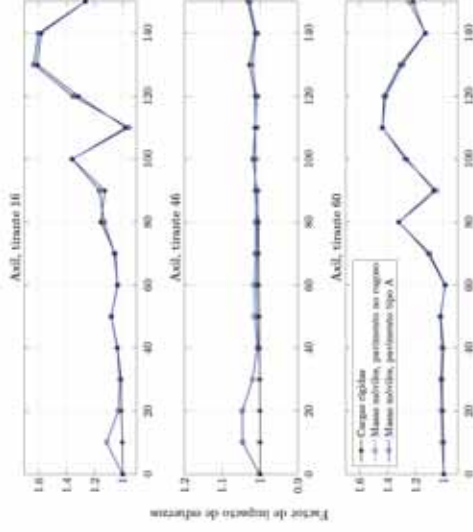
B. Verificación del comportamiento del modelo base



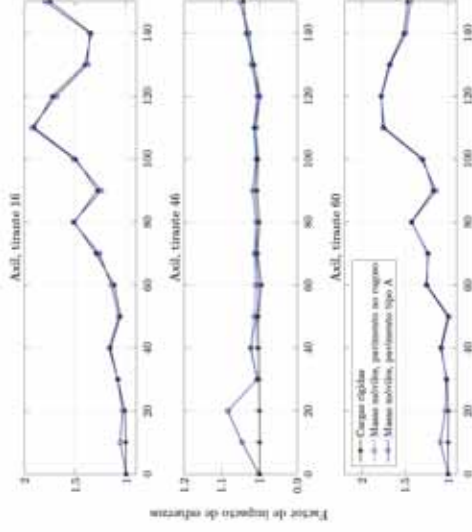
(a)  $k_r = \infty$  MN/m



(c)  $k_r = 10$  MN/m



(b)  $k_r = 50$  MN/m



(d)  $k_r = 5$  MN/m

Figura B.12: Influencia rigidez vertical de la retenida en el factor de impacto del esfuerzo axil en tirantes de la pila dos

En las figuras anteriores de los factores de impacto según la rigidez de la retenida se aprecia que las curvas son prácticamente idénticas y que la variación es un escalado del eje de abscisas. Esto es debido a que del estudio dimensional del problema, uno de los parámetros clave es la velocidad adimensional que es el cociente entre la frecuencia de excitación y el primer modo vertical de la estructura. Al hacer variar la rigidez de la retenida, se hace variar la velocidad adimensional, lo que origina un escalado del eje de abscisas si éste tiene dimensiones de velocidad. Por lo tanto, cuánto más flexible es la estructura, mayor será la velocidad adimensional para una misma velocidad y más información estará contenida en la curva de factores de impacto.

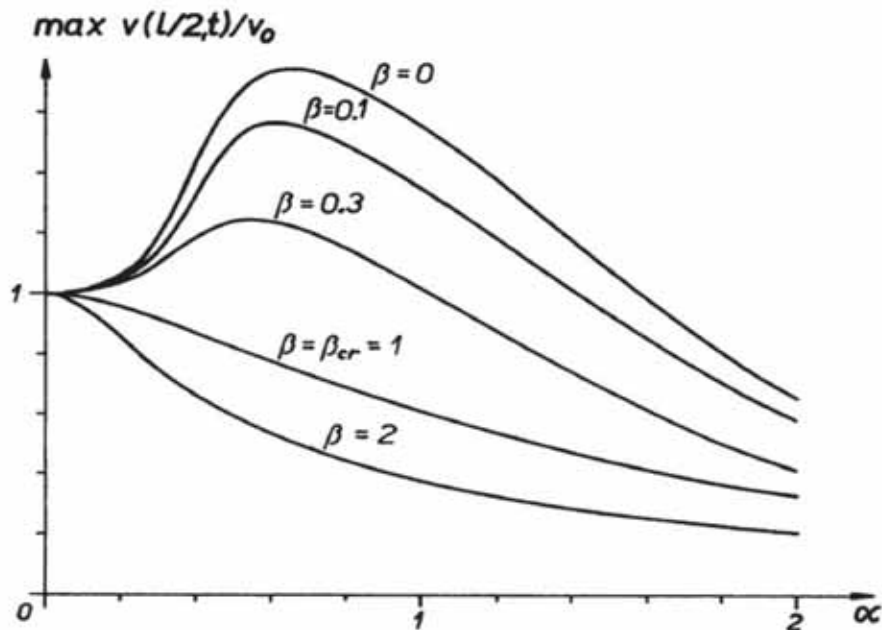


Figura B.13: Factor de impacto en función de la velocidad adimensional en una viga isostática. Fuente: Fryba (1987)

### B.3. Algunas evoluciones temporales de desplazamientos y esfuerzos en el modelo de base

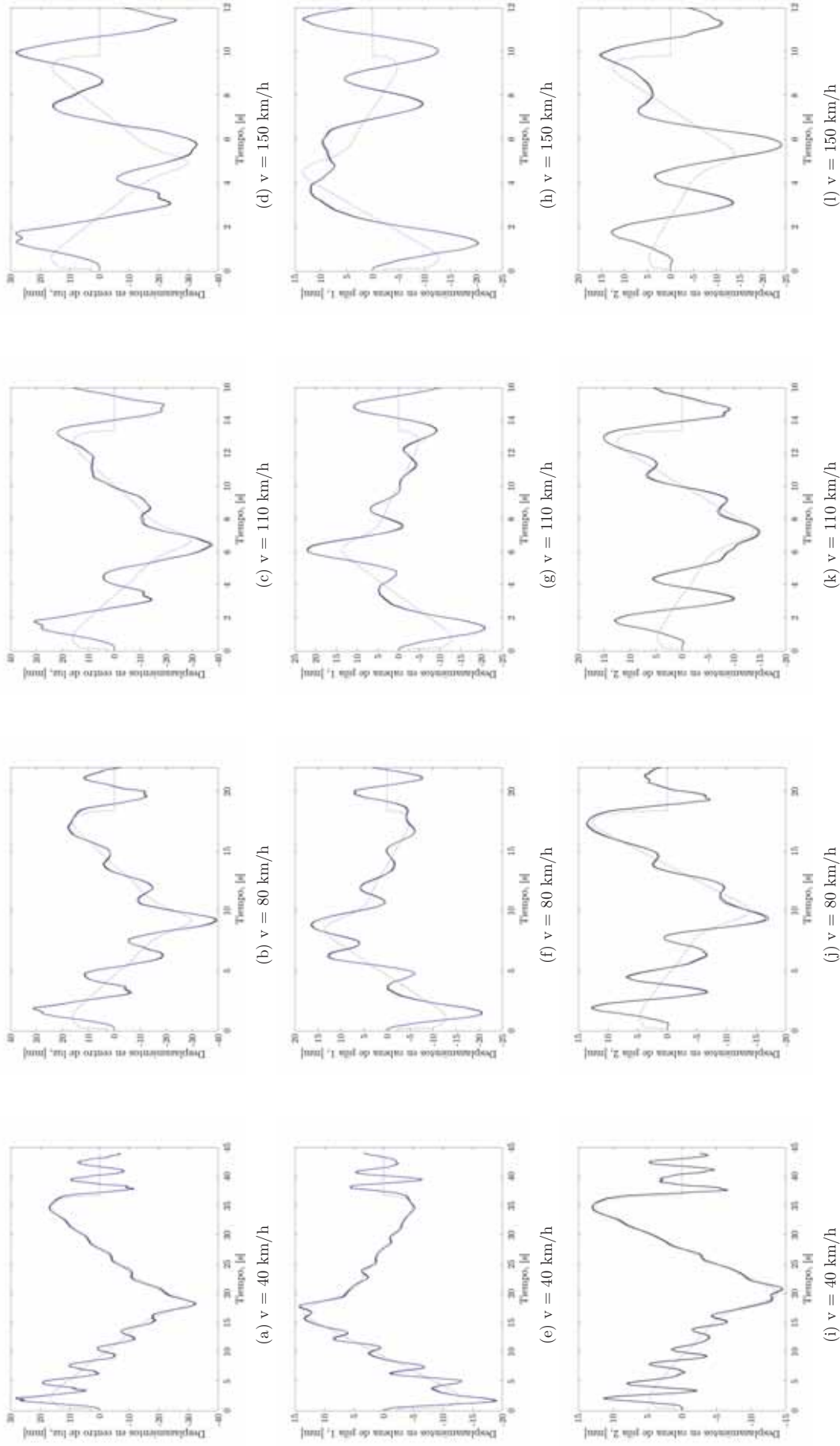


Figura B.14: Series temporales de desplazamientos. En trazo negro discontinuo el cálculo estático, en negro continuo el modelo de cargas móviles, en trazo azul discontinuo el modelo de cargas suspendidas sin rugosidad y en trazo azul continuo se representa el modelo de masas suspendidas sobre pavimento tipo A

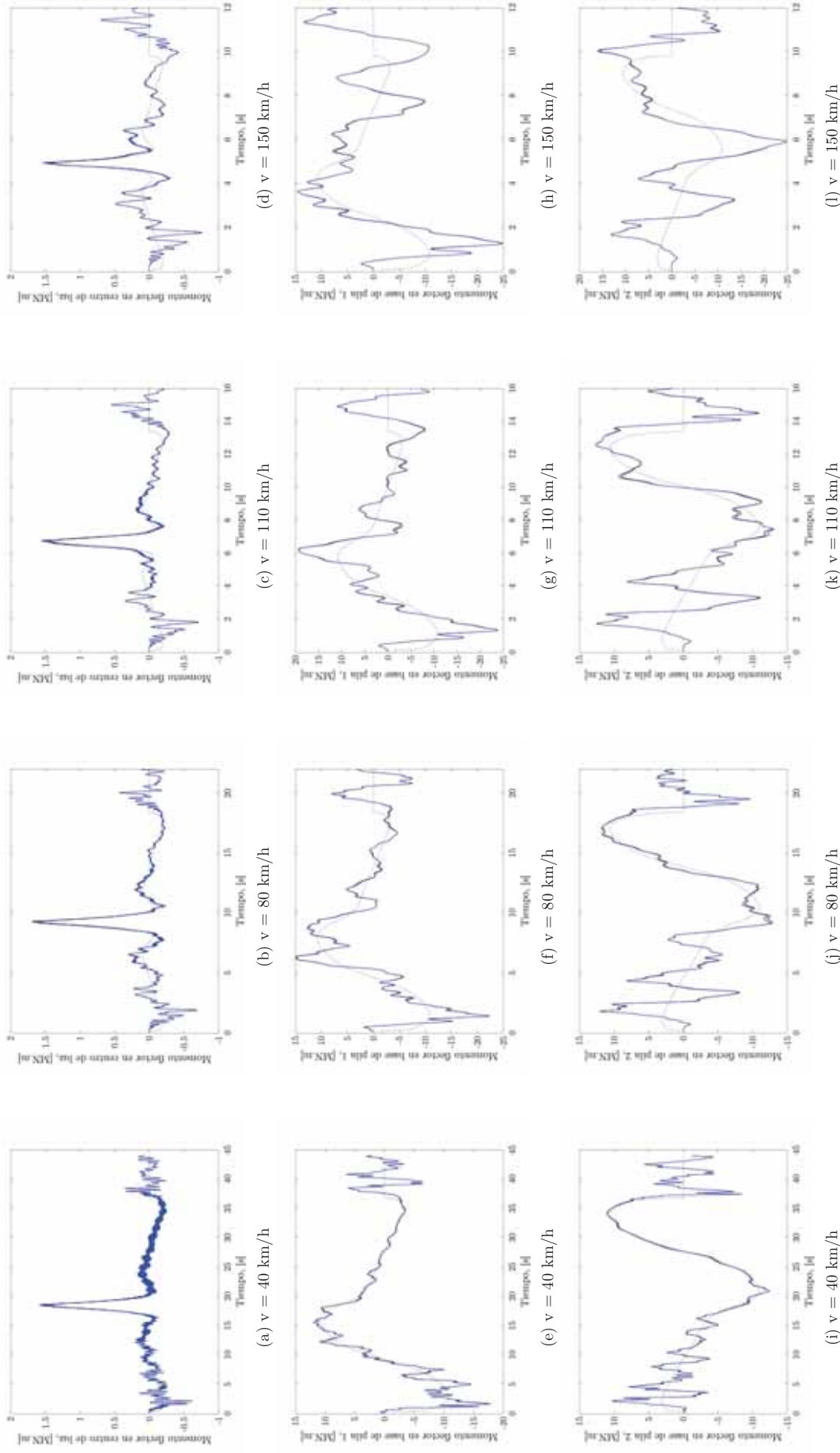


Figura B.15: Series temporales de esfuerzos (1/4). En trazo negro discontinuo el cálculo estático, en negro continuo el modelo de cargas móviles, en trazo azul discontinuo el modelo de cargas suspendidas sin rugosidad y en trazo azul continuo se representa el modelo de masas suspendidas sobre pavimento tipo A



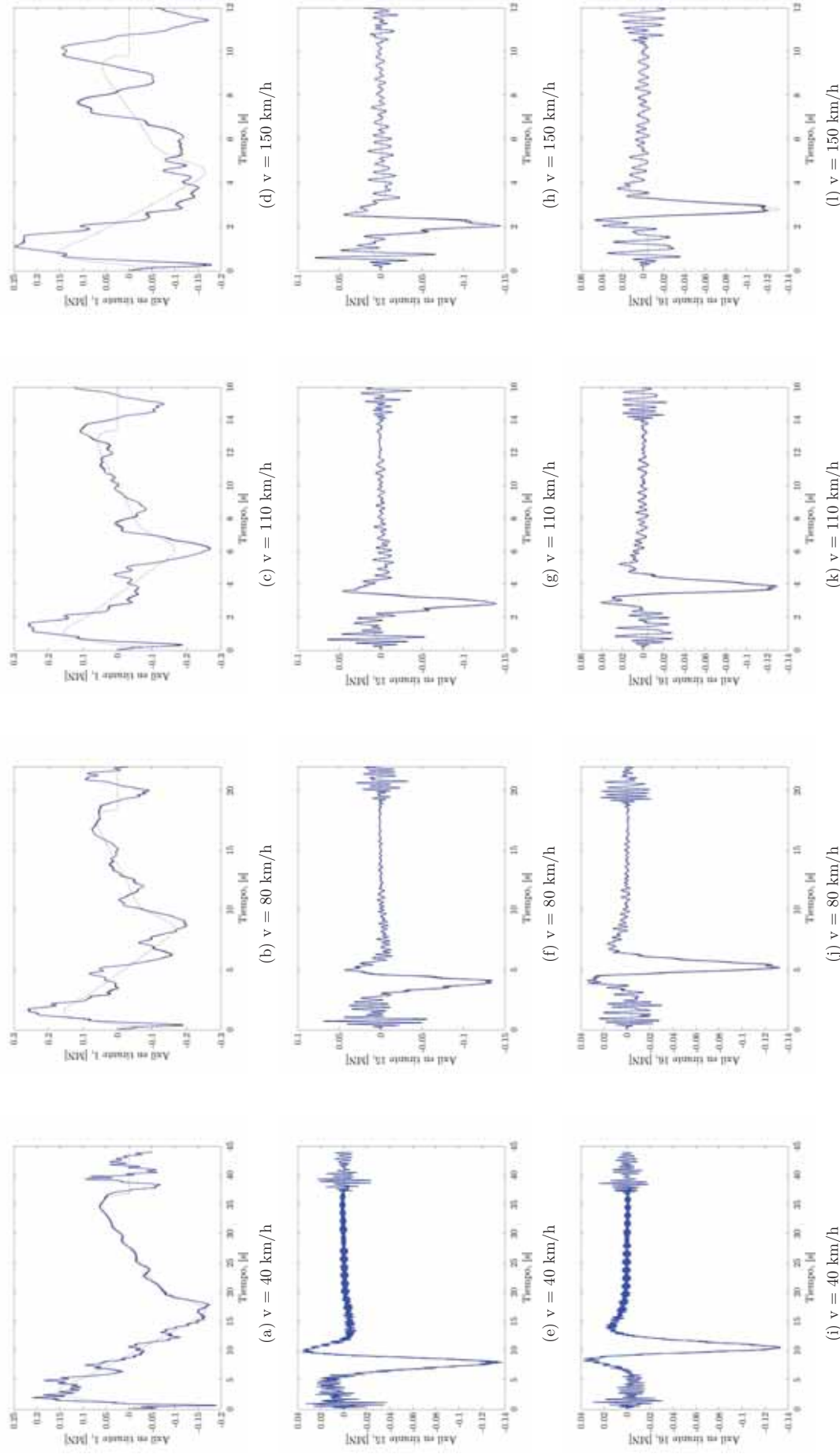


Figura B.16: Series temporales de esfuerzos (2/4). En trazo negro discontinuo el cálculo estático, en negro continuo el modelo de cargas móviles, en trazo azul discontinuo el modelo de cargas suspendidas sin rugosidad y en trazo azul continuo se representa el modelo de masas suspendidas sobre pavimento tipo A

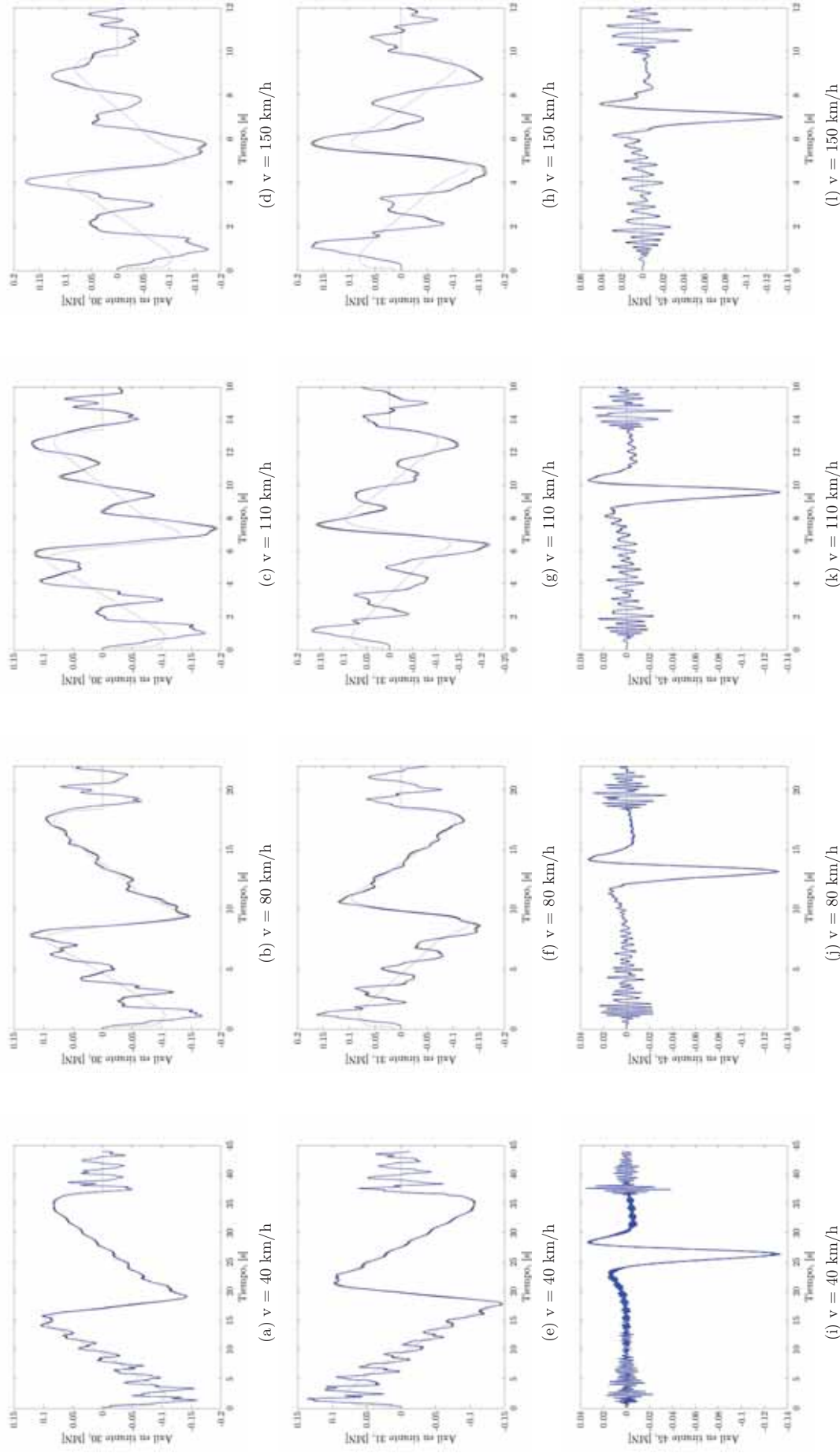


Figura B.17: Series temporales de esfuerzos (3/4). En trazo negro discontinuo el cálculo estático, en negro continuo el modelo de cargas móviles, en trazo azul discontinuo el modelo de cargas suspendidas sin rugosidad y en trazo azul continuo se representa el modelo de masas suspendidas sobre pavimento tipo A



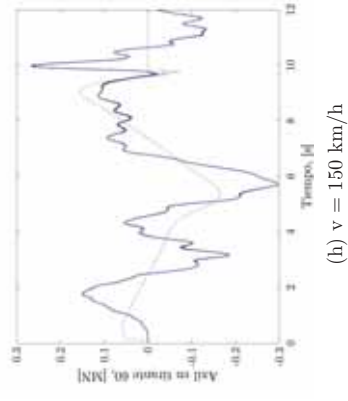
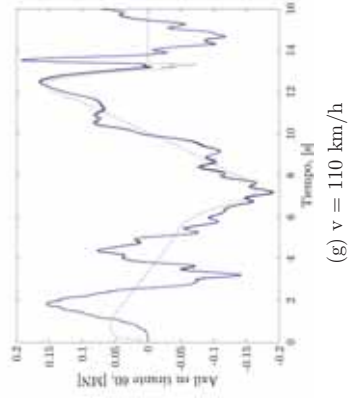
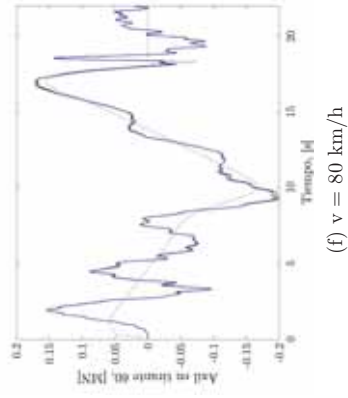
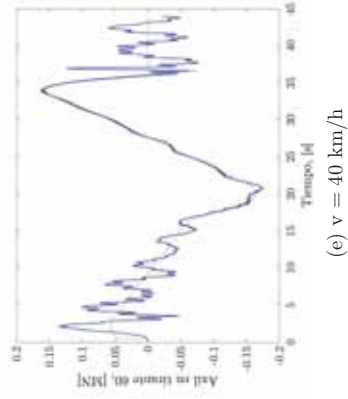
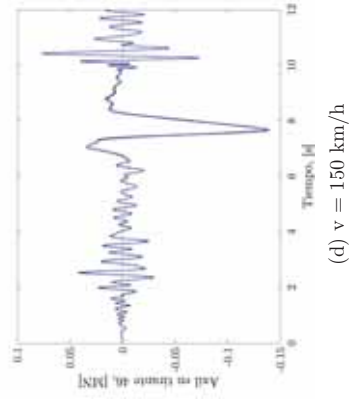
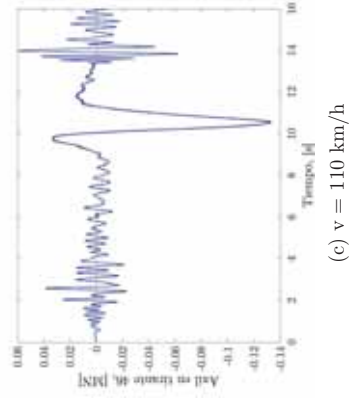
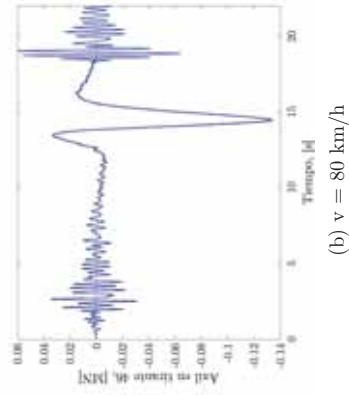
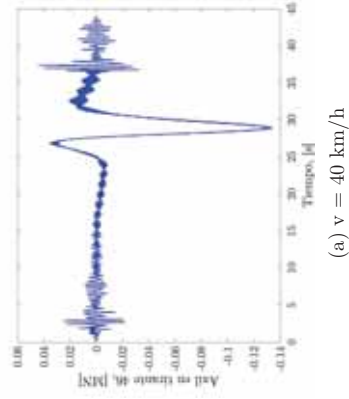


Figura B.18: Series temporales de esfuerzos (4/4). En trazo negro discontinuo el cálculo estático, en trazo azul discontinuo el modelo de cargas móviles, en trazo azul continuo el modelo de cargas suspendidas sin rugosidad y en trazo azul continuo se representa el modelo de masas suspendidas sobre pavimento tipo A

B. Verificación del comportamiento del modelo base

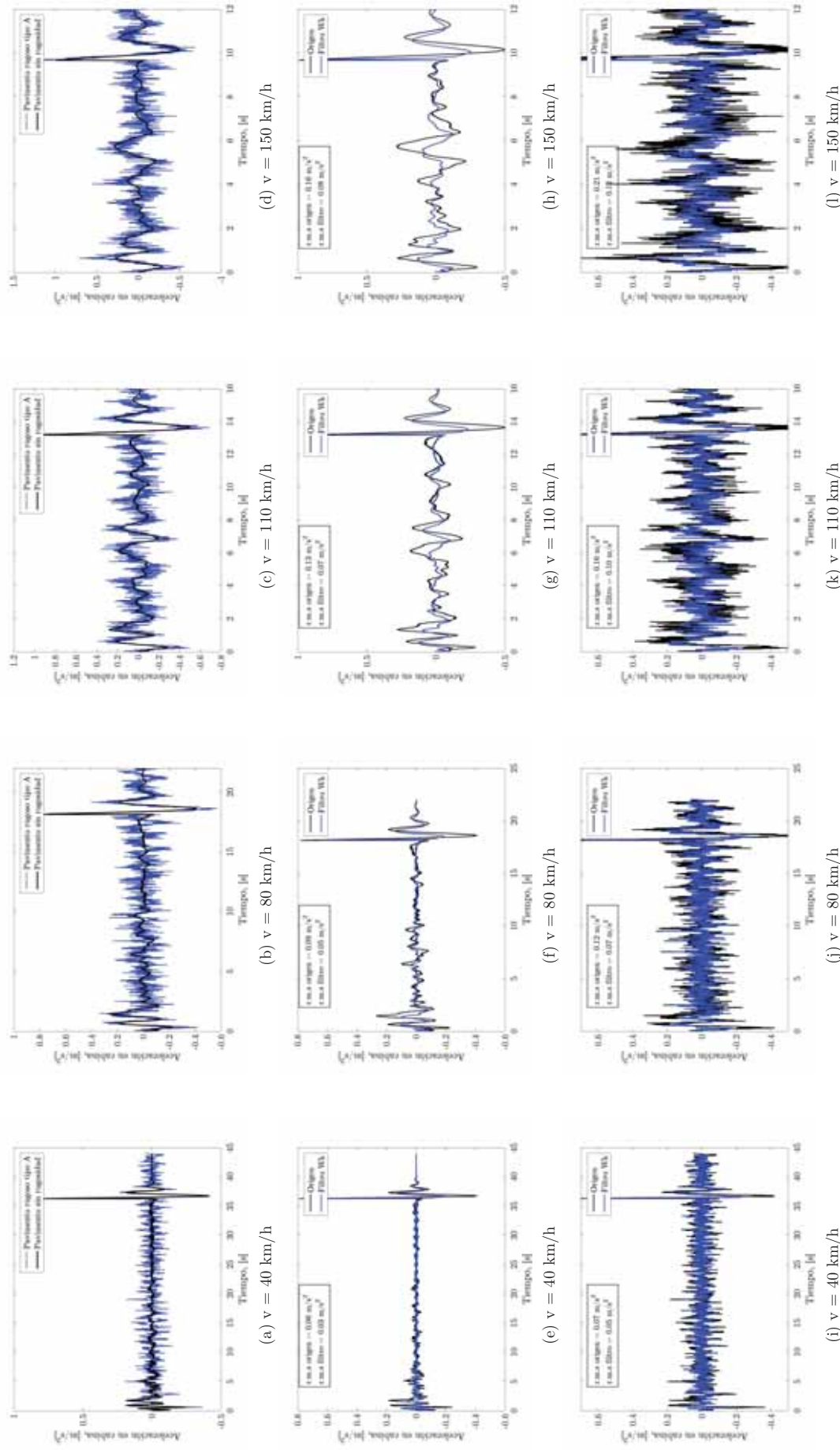
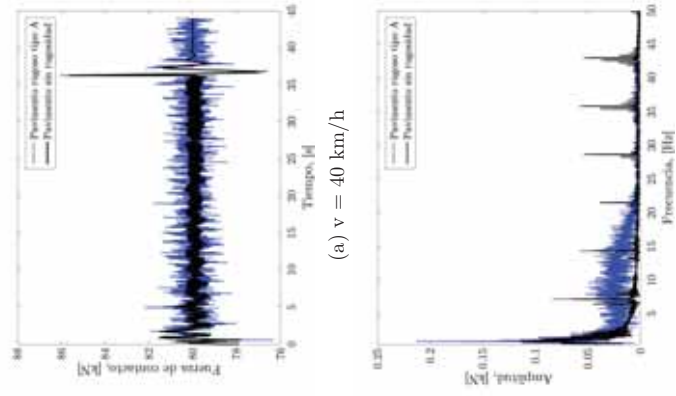
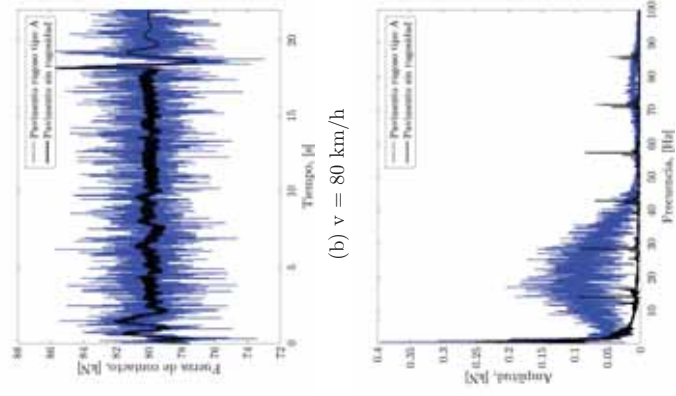


Figura B.19: Series temporales de aceleraciones verticales en cabina. En la primera fila se muestran las aceleraciones obtenidas de los modelos sin rugosidad y sobre pavimento de tipo A, en la segunda se muestra el filtrado propuesto por la norma ISO 2631 en las aceleraciones del modelo no rugoso y en la tercera fila se muestra el filtrado en las aceleraciones del modelo sobre pavimento A



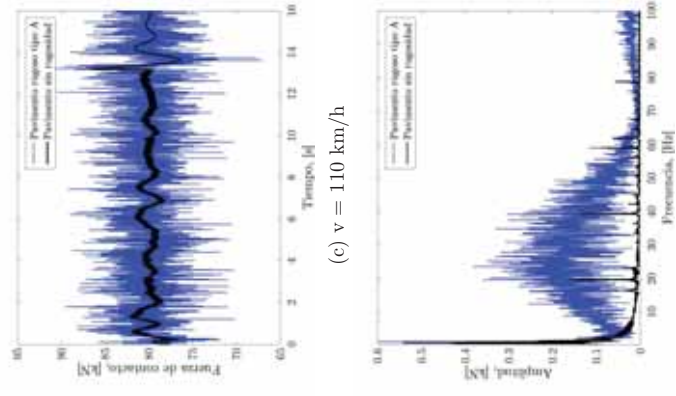
(a)  $v = 40$  km/h

(e)  $v = 40$  km/h



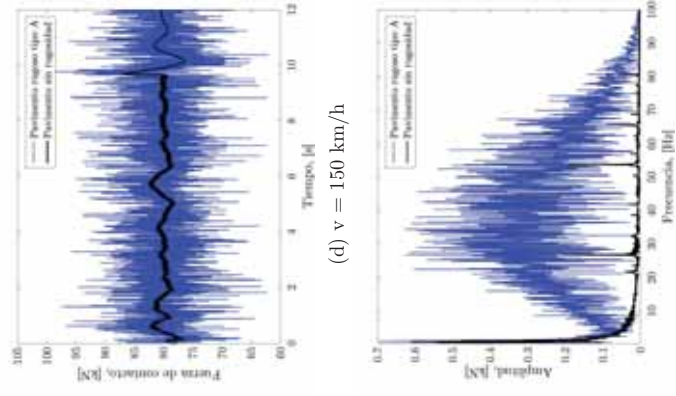
(b)  $v = 80$  km/h

(f)  $v = 80$  km/h



(c)  $v = 110$  km/h

(g)  $v = 110$  km/h



(d)  $v = 150$  km/h

(h)  $v = 150$  km/h

Figura B.20: Series temporales de la fuerza de contacto dinámica ejercida por el eje de la cabina en la primera fila. En la segunda fila se muestra la transformada de Fourier de las series temporales (espectro de amplitudes).

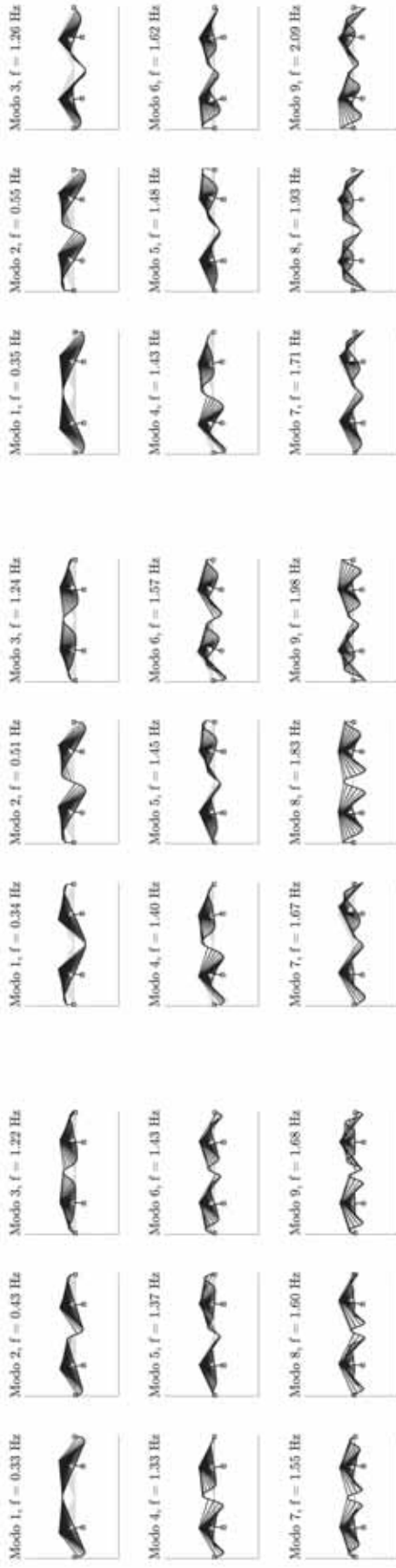


# C

## Análisis modal de las diferentes configuraciones estudiadas



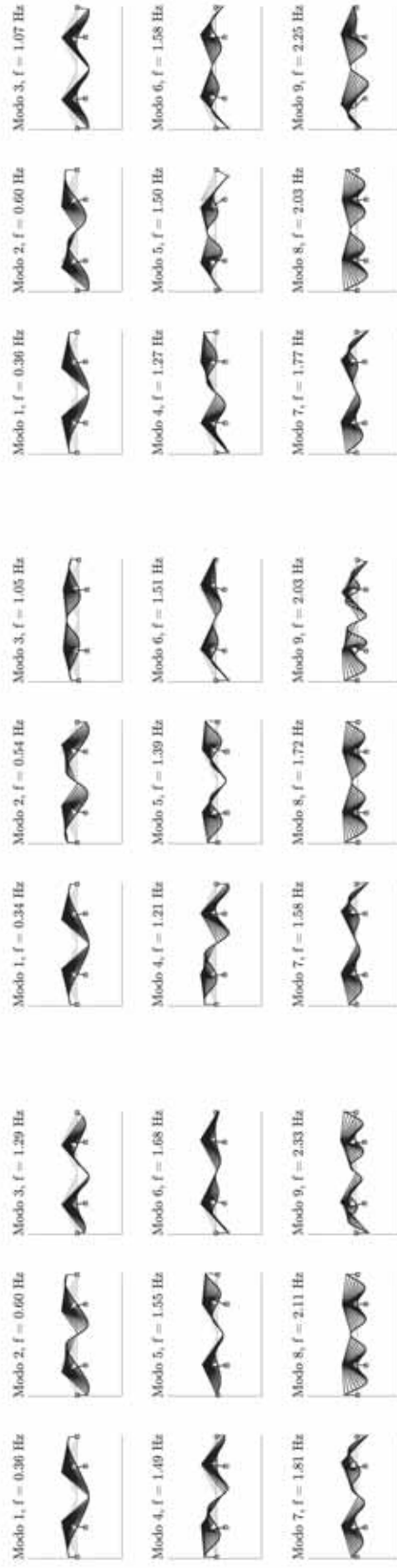
### C.1. Variación de la inercia del tablero y de la configuración trasversal del sistema de atirantamiento



(a) I1

(b) I2

(c) I3



(d) I4

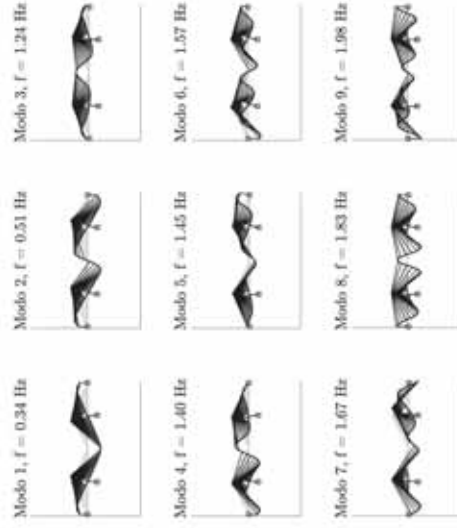
(e) I5  
XXXI

(f) I6

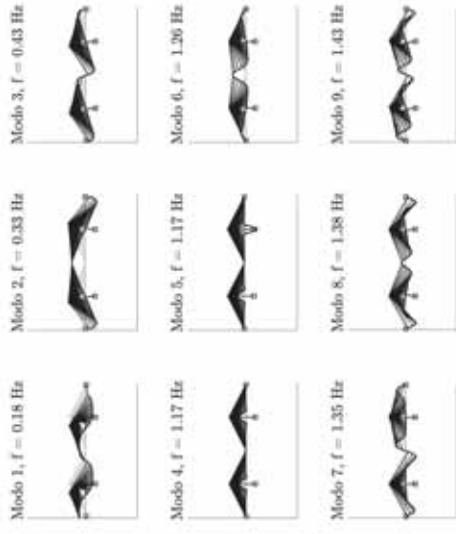
## C.2. Variación de la vinculación pila-tablero



(a) V1



(c) V3



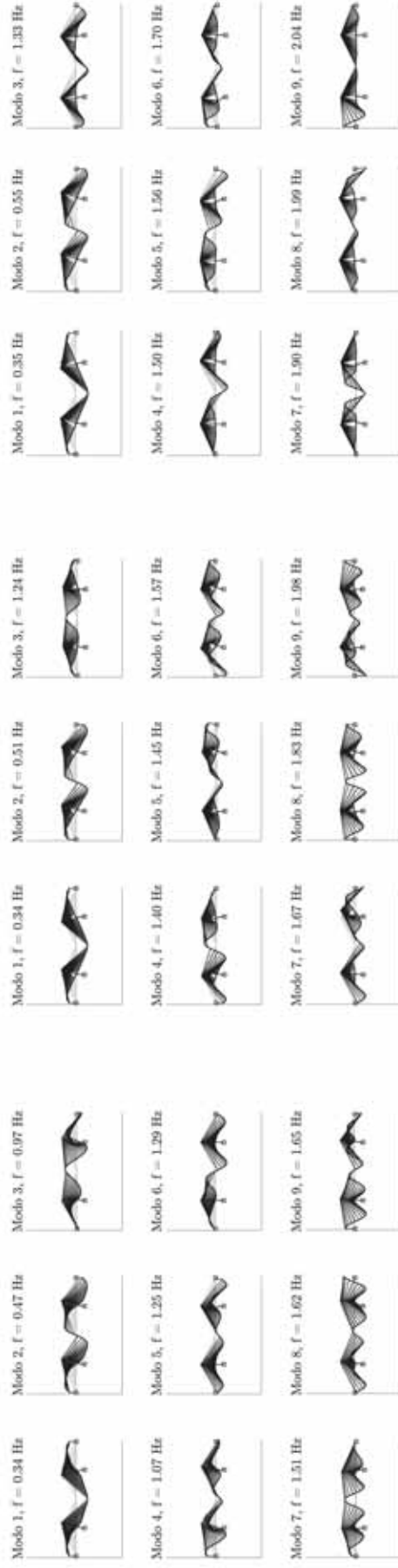
(b) V2



(d) V4



### C.3. Variación de la configuración longitudinal del sistema de atirantamiento



(a) Arpa

(b) Semi-arpa

(c) Abanico

Figura C.3: Modos propios de las diferentes configuraciones estudiadas (3/3)