



GURU PEMBELAJAR MODUL MATEMATIKA SMP

KELOMPOK KOMPETENSI A

KARAKTERISTIK SISWA SMP DAN BILANGAN

Kata Sambutan

Peran guru profesional dalam proses pembelajaran sangat penting sebagai kunci keberhasilan belajar siswa. Guru profesional adalah guru yang kompeten membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan pendidikan yang berkualitas. Hal tersebut menjadikan guru sebagai komponen yang menjadi fokus perhatian pemerintah pusat maupun pemerintah daerah dalam peningkatan mutu pendidikan terutama menyangkut kompetensi guru.

Pengembangan profesionalitas guru melalui program Guru Pembelajar merupakan upaya peningkatan kompetensi untuk semua guru. Sejalan dengan hal tersebut, pemetaan kompetensi guru telah dilakukan melalui uji kompetensi guru (UKG) untuk kompetensi pedagogik profesional pada akhir tahun 2015. Hasil UKG menunjukkan peta kekuatan dan kelemahan kompetensi guru dalam penguasaan pengetahuan. Peta kompetensi guru tersebut dikelompokkan menjadi 10 (sepuluh) kelompok kompetensi. Tindak lanjut pelaksanaan UKG diwujudkan dalam bentuk pelatihan guru paska UKG melalui program Guru Pembelajar. Tujuannya untuk meningkatkan kompetensi guru sebagai agen perubahan dan sumber belajar utama bagi peserta didik. Program Guru Pembelajar dilaksanakan melalui pola tatap muka, daring penuh (*online*), dan daring kombinasi (*blended*) tatap muka dengan *online*.

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK), Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Kelautan Perikanan Teknologi Informasi dan Komunikasi (LP3TK KPTK) dan Lembaga Pengembangan dan Pemberdayaan Kepala Sekolah (LP2KS) merupakan Unit Pelaksana Teknis di lingkungan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan yang bertanggung jawab dalam mengembangkan perangkat dan melaksanakan peningkatan

kompetensi guru sesuai bidangnya. Adapun perangkat pembelajaran yang dikembangkan tersebut adalah modul untuk program Guru Pembelajar tatap muka dan Guru Pembelajar online untuk semua mata pelajaran dan kelompok kompetensi. Dengan modul ini diharapkan program Guru Pembelajar memberikan sumbangan yang sangat besar dalam peningkatan kualitas kompetensi guru.

Mari kita sukseskan program Guru Pembelajar ini untuk mewujudkan Guru Mulia Karena Karya.

Jakarta, Maret 2016

Direktur Jenderal,



Sumarna Surapranata

NIP. 195908011985031002



GURU PEMBELAJAR

MODUL MATEMATIKA SMP

KELOMPOK KOMPETENSI A

PEDAGOGIK

KARAKTERISTIK SISWA SMP

**DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
2016**

Penulis:

1. Dr. Drs., Sugiman, M.Si.
08122786314, sugiman_uny@yahoo.com
2. Dr. Sumardiyono, M.Pd.
081328516171, smrdyn2007@gmail.com
3. Marfuah, S.Si., M.T.
085875774483, marfuah@p4tkmatematika.org

Penelaah:

1. Prof. Dr., Nanang Priatna, M.Pd.
08122356350, nanang_priatna@yahoo.com
2. Yogi Anggraena, M.Si.
082345678219, yogi_anggraena@yahoo.com
3. Dra. Sri Wardhani
08122766683, wardhani.p4tkm@yahoo.com

Ilustrator:

R.Haryo Jagad P

Copyright © 2016

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengcopy sebagian atau keseluruhan isi buku ini untuk kepentingan komersial tanpa izin tertulis dari Kementerian Pendidikan Kebudayaan.

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan output dan outcome pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016
Kepala PPPPTK Matematika,



Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.
NIP. 196002241985032001

Daftar Isi

KATA PENGANTAR.....	III
DAFTAR ISI.....	V
DAFTAR GAMBAR.....	VII
DAFTAR TABEL.....	IX
PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang	1
B. Tujuan.....	2
C. Peta Kompetensi	2
D. Ruang Lingkup	2
E. Saran Cara Penggunaan Modul	2
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1 PERKEMBANGAN SISWA	5
A. Tujuan.....	5
B. Indikator Pencapaian Kompetensi	5
C. Uraian Materi.....	5
1. Perkembangan Fisik Siswa	6
2. Perkembangan Emosi Siswa	7
3. Perkembangan Sosial Siswa.....	9
4. Perkembangan Kepribadian Siswa	12
5. Perkembangan Intelektual Siswa	15
6. Perkembangan Moral Siswa.....	18
D. Aktivitas Pembelajaran	21
E. Latihan.....	23
F. Rangkuman.....	24
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut	24
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2 POTENSI DAN KESIAPAN SISWA.....	25
A. Tujuan.....	25
B. Indikator Pencapaian Kompetensi	25
C. Uraian Materi.....	25
1. Siswa Berbakat Matematika.....	25

Daftar Isi

2. Kesiapan Belajar Siswa.....	29
D. Aktivitas Pembelajaran.....	33
E. Latihan.....	33
F. Rangkuman.....	34
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut.....	35
KEGIATAN PEMBELAJARAN 3 KESULITAN BELAJAR SISWA.....	37
A. Tujuan.....	37
B. Indikator Pencapaian Kompetensi.....	37
C. Uraian Materi.....	37
1. Pengertian Kesulitan Belajar.....	37
2. Macam Kesulitan Belajar.....	38
3. Ketidakmampuan Belajar (<i>Learning Dissability</i>).....	39
4. Kesulitan Belajar Matematika.....	43
5. Faktor Penyebab Kesulitan Belajar.....	44
6. Diagnostik Kesulitan Belajar.....	45
D. Aktivitas Pembelajaran.....	46
E. Latihan.....	48
F. Rangkuman.....	48
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut.....	49
Kunci Jawaban Latihan.....	51
Evaluasi.....	53
PENUTUP.....	57
DAFTAR PUSTAKA.....	59
GLOSARIUM.....	61

Daftar Gambar

Gambar 1 Ekspresi 6 emosi dasar dari Paul Eckman(ocw.mit.edu).....	8
Gambar 2 Ilustrasi APD(http://ldaamerica.org).....	40
Gambar 3 Ilustrasi Dyscalculia(http://ldaamerica.org)	40
Gambar 4 Ilustrasi <i>Dysgraphia</i> (http://ldaamerica.org).....	41
Gambar 5 Ilustrasi Dyslexia(http://ldaamerica.org)	41



Daftar Gambar

Daftar Tabel

Tabel 1 Indikator Kesiapan Fisik Siswa	30
Tabel 2 Indikator Kesiapan Psikis Siswa.....	31



Daftar Tabel

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Masa pertumbuhan siswa di usia SMP/MTs merupakan masa remaja, suatuperalihan dari anak-anak ke dewasa. Pada masa yang singkat ini, siswa mengalami perkembangan secara signifikan dalam hidupnya, bukan hanya pada fisik, namun juga emosi, sosial, perilaku, intelektual, dan moral. Banyak masalah dan benturan yang mungkin terjadi selama proses pertumbuhan dan perkembangannya. Sehingga agar remaja dapat tumbuh secara optimal maka dibutuhkan dukungan dan kesempatan pada dirinya untuk mengembangkan diri dengan disertai pendampingan dari orang dewasa yang peduli terhadap dirinya (Santrock, 2011). Guru sebagai orang dewasa terdekat setelah keluarga diharapkan dapat mendukung siswa dalam melalui proses perkembangan ini.

Di sisi lain, setiap siswa dilahirkan dengan membawa potensi. Tanpa adanya potensi tersebut, maka mustahil manusia akan mampu menjalani kehidupan yang akan dilalui yang penuh dengan tantangan, cobaan, dan halangan. Selain potensi keimanan, setiap manusia dianugrahi potensi indrawi dan tubuh atau raga secara umum, lalu potensi akal pikiran serta potensi rasa. Terkait pendidikan matematika, merupakan tugas guru matematika untuk dapat menggali dan mengidentifikasi potensi siswa guna memperlancar terjadinya proses pembelajaran.

Guru diharapkan memiliki wawasan mengenai karakteristik siswa, cara-cara menangani masalah, mengenali potensi siswa dalam belajar matematika, mengidentifikasi kesulitan belajar siswa dan cara mengatasinya sehingga dapat dimanfaatkan dalam mendukung pencapaian tujuan pembelajaran. Pengetahuan guru mengenai karakteristik siswa merupakan salah satu kompetensi pedagogis seperti yang dinyatakan dalam Peraturan Menteri Pendidikan Nasional No.16 tahun 2007, yaitu kompetensi inti guru: "Menguasai karakteristik peserta didik dari aspek fisik, moral, spiritual, sosial, kultural, emosional, dan intelektual".

Berlatar belakang dan dengan rasional di atas, maka modul ini disusun sebagai bentuk fasilitasi bagi guru guna meningkatkan wawasannya mengenai karakteristik siswa, permasalahan siswa, potensi siswa, dan kesulitan belajar siswa beserta cara mengatasinya.

B. Tujuan

Modul ini disusun adalah untuk menjadi bahan belajar bagi guru atau bahan ajar pendamping bagi fasilitator terkait materi karakteristik siswa dalam program Guru Pembelajar. Tujuan belajar yang akan dicapai adalah memahami perkembangan emosi, sosial, perilaku, dan intelektual siswa, menganalisis potensi siswa dalam belajar matematika, mengidentifikasi kesiapan belajar matematika siswa, dan menjelaskan kesulitan belajar matematika siswa beserta cara mengatasinya.

C. Peta Kompetensi

Kompetensi yang dipelajari dalam modul ini meliputi kompetensi inti yang kemudian dijabarkan dalam Kompetensi Guru Mata Pelajaran, yakni:

Kompetensi Inti:

1. Menguasai karakteristik siswa dari aspek fisik, moral, spiritual, sosial, kultural, emosional, dan intelektual.

Kompetensi Guru Mata Pelajaran:

- 11.1 Memahami karakteristik siswa usia SMP/MTs yang berkaitan dengan aspek fisik, intelektual, sosial-emosional, moral, spiritual, dan latar belakang sosial-budaya.
- 1.2 Mengidentifikasi potensi siswa dalam pelajaran yang diampu
- 1.3 Mengidentifikasi bekal ajar awal siswa dalam mata pelajaran yang diampu
- 1.4 Mengidentifikasi kesulitan belajar siswa dalam mata pelajaran yang diampu

D. Ruang Lingkup

Ruang lingkup materi dalam modul ini meliputi:

1. Perkembangan Emosi, Sosial, dan Intelektual Siswa
2. Potensi dan Kesiapan Siswa dalam Belajar Matematika
3. Kesulitan Belajar Siswa

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Berikut ini beberapa saran dalam cara penggunaan dan pemanfaatan modul.

1. Bacalah modul ini secara runtut, dimulai dari Bab Pendahuluan hingga Evaluasinya.
2. Lakukan semua aktivitas belajar yang terdapat pada modul.
3. Materi di dalam modul lebih bersifat ringkas dan padat, sehingga dianjurkan untuk menelusuri literatur lain yang relevan.
4. Setelah melakukan aktivitas belajar, kerjakan latihan dan/atau tugas yang ada. Cocokkan jawaban Anda dengan kunci dan petunjuk jawaban.
5. Lakukan refleksi berdasarkan proses belajar yang telah dilakukan dan penyelesaian latihan/tugas. Bagian rangkuman dapat dijadikan modal dalam melakukan refleksi. Hasil refleksi yang dapat terjadi antara lain ditemukan beberapa bagian yang harus direview dan dipelajari kembali, ada bagian yang perlu dipertajam atau dikoreksi, dan lain-lain.
6. Setelah mendapatkan hasil refleksi, rencanakan dan lakukan tindak lanjut yang relevan baik dalam maupun di luar sesi program guru pembelajar.

Kegiatan Pembelajaran 1

Perkembangan Siswa

A. Tujuan

Setelah melaksanakan Kegiatan Pembelajaran ini, diharapkan guru dapat menambah wawasan mengenai perkembangan emosi, sosial, dan intelektual siswa disertai implikasinya pada pendidikan matematika.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Guru dapat:

1. menjelaskan perkembangan emosi siswa secara deskriptif.
2. menjelaskan perkembangan sosial siswa secara deskriptif.
3. menjelaskan perkembangan intelektual siswa secara deskriptif.

C. Uraian Materi

Istilah *adolescence* atau remaja berasal dari kata latin "*adolescere*" yang berarti "tumbuh" atau "tumbuh menjadi dewasa". Lazimnya masa remaja dianggap mulai pada saat seorang anak secara seksual menjadi matang dan berakhir saat ia mencapai usia matang secara hukum.

Hurlock (1980) membagi masa remaja menjadi dua bagian yaitu masa remaja awal dan masa remaja akhir. Masa remaja awal berlangsung sekitar usia 13 hingga 16 atau 17 tahun, dan masa remaja akhir bermula dari usia 16 atau 17 sampai 18 tahun, yaitu usia matang secara hukum. Dengan demikian masa remaja akhir merupakan periode yang sangat singkat. Umur 17 tahun dapat disebut sebagai garis batas antara masa remaja awal dan masa remaja akhir.

Sementara itu, Santrock (2011) membatasi masa remaja sebagai periode transisi perkembangan yang dimulai sekitar usia 10 hingga 12 tahun, dan berakhir pada usia 18 hingga 22 tahun. Berdasar dua pendapat di atas, secara general siswa SMP dikelompokkan pada masa remaja, walaupun mungkin terdapat kasus-kasus siswa SMP tertentu yang masih berada pada masa puber atau justru telah memasuki masa dewasa awal.

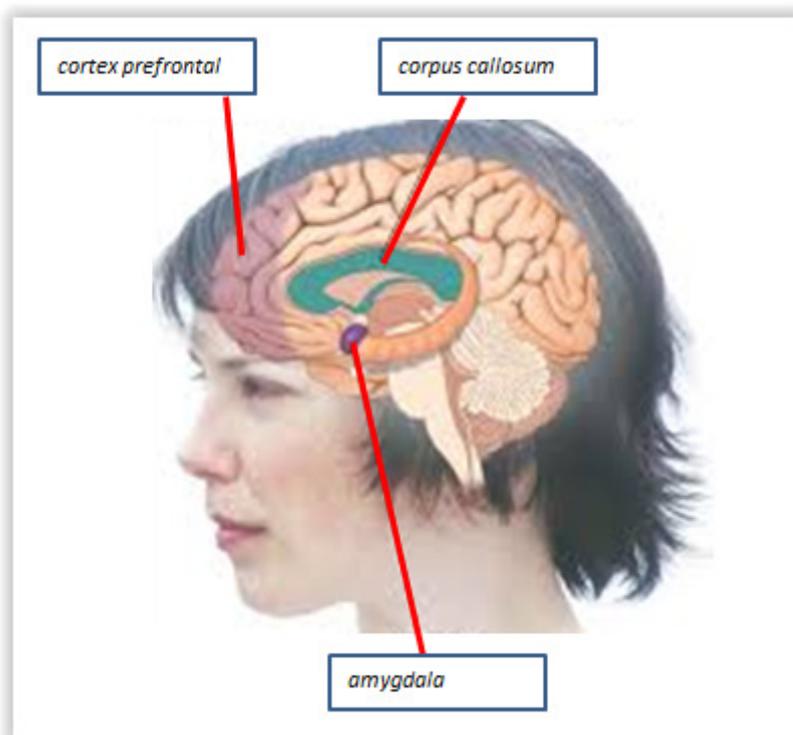
Kegiatan Pembelajaran 1

Perkembangan siswa yang sangat mendukung keberhasilan proses pembelajaran meliputi perkembangan fisik, emosi, kepribadian, sosial, moral dan intelektual . Dengan memahami ketiga jenis perkembangan ini, guru bisa memanfaatkannya secara produktif dalam kegiatan belajar matematika yang diampu.

1. Perkembangan Fisik Siswa

Perkembangan fisik siswa terjadi secara eksternal dan internal. Secara eksternal meliputi perubahan tinggi badan, berat badan, komposisi tubuh, organ dan ciri-ciri seks sekunder.

Secara internal meliputi sistem pencernaan, peredaran darah, pernapasan, endokrin, jaringan tubuh, dan jaringan otak. Hal menarik dari perkembangan otak pada usia remaja adalah terjadinya perubahan struktur yang signifikan.



Corpus callosum, yakni serabut optik yang menghubungkan hemisphere otak sebelah kiri dengan sebelah kanan, semakin tebal pada masa remaja sehingga meningkatkan kemampuan remaja dalam memroses informasi. Selain itu, Charles Nelson pada Santrock (2011) mengungkapkan **amygdala** berkembang lebih awal dari **cortex prefrontal**. Amygdala adalah bagian otak tempat emosi seperti rasa marah.

Sementara cortex prefrontal adalah bagian lobus depan yang bertugas penalaran, pengambilan keputusan, dan kendali diri. Hal ini diinterpretasikan bahwa sebagian remaja mampu mengalami emosi yang sangat kuat namun karena cortex prefrontal mereka belum cukup berkembang, seolah-olah mereka memiliki rem yang lemah untuk mengendalikannya.

Pada masa remaja dengan energi fisik yang cukup berlimpah, tidak sedikit siswa SMP yang cenderung bosan dengan aktivitas yang hanya duduk atau melakukan aktivitas yang sama dalam periode waktu yang panjang. Alih-alih membendung energi mereka, lebih baik diarahkan ke aktivitas yang positif.

Kurikulum pendidikan yang menyertakan jam olahraga secara teratur diharapkan dapat mendukung perkembangan remaja ke arah yang positif. Aktivitas lain yang mendukung perkembangan fisik remaja seperti kegiatan pramuka, ekstra kurikuler fisik, *outbond*, dan lain-lain dapat dijadwalkan secara teratur oleh sekolah.

Pembelajaran matematika dengan pendekatan *active learning*, *game-based learning*, atau aktivitas lain yang mengkomodir kinestetik siswa dapat dikembangkan untuk menciptakan suasana pembelajaran yang menyenangkan. Selain itu, pembelajaran matematika di luar ruangan (*mathematics outdoor*) dapat menjadi opsi guru matematika untuk menyisipkan aktivitas fisik.

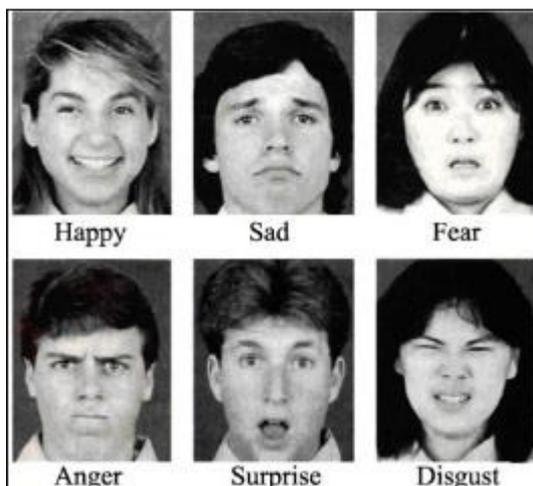
2. Perkembangan Emosi Siswa

Kata “emosi” berasal dari bahasa Inggris “emotion” yang pertama kali muncul di tahun 1579, saat diadaptasi dari bahasa Perancis *émouvoir*, yang artinya “untuk menggerakkan”. Kata “emosi” tidak selalu berarti negatif, kata ini hanya menggambarkan salah satu sifat manusia, bisa bersifat baik, bisa pula bersifat buruk.

Pengertian emosi berbeda dengan fenomena psikologis lainnya seperti temperamen, kepribadian, motivasi, suasana hati (*mood*), atau perasaan (*feeling*). Pada beberapa definisi emosi, perasaan termasuk bagian dari emosi. Walaupun demikian, pengertian emosi termasuk kompleks, sehingga definisi emosi sangat beragam dalam pengertian modern. Hal ini juga dikarenakan emosi bersifat abstrak dan banyak yang berdasarkan pada cara pandang atau teori yang berbeda-beda. Beberapa definisi fokus pada sisi dalam emosi yaitu pengalaman seseorang,

Kegiatan Pembelajaran 1

beberapa definisi fokus pada sisi luar emosi yaitu ekspresi atau manifestasi tubuh. William James terkenal dengan definisi emosi sebagai gairah fisik. Sementara Antonio Damasio, misalnya, sudah memisahkan antara emosi dan perasaan (*feeling*), dimana emosi merupakan representasi perubahan fisik sementara perasaan adalah persepsi mental oleh pikiran. (Scherer, 2012: 195).



Gambar 1 Ekspresi 6 emosi dasar dari Paul Eckman(ocw.mit.edu)

Macam atau jenis emosi sangat beragam, namun oleh beberapa ahli telah dikelompokkan ke dalam beberapa jenis emosi. Watson, John B. sebagai salah seorang behavioris, pada tahun 1917 pernah menyatakan bahwa emosi pada diri manusia sejak lahir ada 3 macam: takut (*fear*), marah (*rage*), dan cinta (*love*). Tahun 1972, psikolog Paul Eckman menyarankan enam (6) emosi dasar manusia: takut (*fear*), muak (*disgust*), marah (*anger*), terkejut (*surprise*), senang (*happiness*), dan sedih (*sadness*). Ahli lain, Robert Plutchik, membagi menjadi 8 emosi dasar, yaitu: takut (*fear*), marah (*anger*), sedih (*sadness*), senang (*joy*), muak/Jijik (*disgust*), rasa percaya (*trust*), antisipasi (*anticipation*), dan terkejut (*surprise*).

Secara umum masa remaja dianggap sebagai periode “badai dan tekanan” (*storm and drung*), yaitu suatu masa dimana ketegangan emosi meningkat sebagai akibat dari perubahan fisik dan kelenjar hormonal para remaja. Remaja seringkali mudah marah, mudah dirangsang, emosinya cenderung meledak, dan tidak berusaha mengendalikan perasaannya karena emosi remaja lebih kuat dan lebih menguasai diri mereka dari pada perilaku yang realistis.

Biehler menemukan ciri-ciri emosional remaja yang berusia 12 s.d 15 tahun sebagai berikut (Sunarto& Agung, 2002:155): (1) siswa cenderung banyak murung dan tidak dapat diterka, (2) siswa mungkin bertingkah laku kasar untuk menutupi kekurangan dalam hal rasa percaya diri, (3) ledakan-ledakan kemarahan sangat mungkin terjadi, (4) siswa cenderung tidak toleran terhadap orang lain dan membenarkan pendapatnya sendiri yang disebabkan kurangnya rasa percaya diri, dan (5) siswamulai mengamati orang tua dan guru-guru mereka secara lebih obyektif.

Untuk mencapai kematangan emosi, remaja harus belajar memperoleh gambaran tentang situasi yang dapat menimbulkan reaksi emosional. Adapun caranya adalah dengan membicarakan pelbagai masalah pribadinya dengan orang lain. Keterbukaan, perasaan, dan masalah pribadi dipengaruhi sebagian oleh rasa aman dalam hubungan sosial dan sebagian oleh tingkat kesukaannya pada “orang sasaran” (Hurlock, 2002:213).

Berdasarkan pendapat James C. Coleman (Sukmadinata, 2005), ada beberapa cara untuk mengelola emosi yang konstruktif, yaitu: (1) bangkitkan rasa humor dan kenyamanan, (2) berorientasi pada kenyataan; agar memperoleh emosi yang positif, siswa remaja dibina untuk selalu berpijak pada kenyataan, dan (3) pupuk emosi positif dan kurangi emosi negatif.

3. Perkembangan Sosial Siswa

Perkembangan sosial seseorang berlangsung sejak masa bayi baru lahir hingga akhir hayatnya. Menurut Bruno (1987) perkembangan sosial merupakan proses pembentukan konsep diri seseorang dalam bermasyarakat, baik dalam kehidupan lingkungan keluarga, budaya, bangsa maupun dalam lingkungan yang lebih luas lagi. Salah satu tokoh yang menjadi rujukan dalam pembahasan mengenai perkembangan sosial adalah Erik Erikson. Erikson memperluas teori psikodinamika dan psikoanalisis milik Freud dengan menambahkan dasar teorinya mengenai tahap perkembangan sosial, penekanan pada identitas serta perluasan metodologi.

Dalam bukunya “*Childhood and Society*” (1963), Erikson mengurutkan delapan tahap secara terpisah mengenai perkembangan ego dalam perkembangan sosial, yang dikenal dengan “Delapan Tahap Perkembangan Manusia”. Lima tahap yang pertama adalah:

Kegiatan Pembelajaran 1

- a. Rasa percaya vs tidak percaya (*Trust vs mistrust*)(0-18 bulan); tahap ini berhubungan dengan perasaan nyaman kepercayaan dasar terhadap dunia ini. Sosok Ibu biasanya adalah orang penting dalam dunia sang bayi. Dia adalah orang yang harus memuaskan kebutuhan bayi tersebut akan makanan dan kasih sayang. Apabila sosok Ibu tersebut tidak konsisten atau menolak, maka hal tersebut akan menjadi sumber kekecewaan bagi bayi.
- b. Otonom vs keraguan (*Autonomy vs doubt*) (Usia 18 bulan - 3 tahun); anak-anak dalam usia ini tidak lagi ingin bergantung seluruhnya pada orang lain. Anak-anak akan berusaha meraih otonomi atas perilakunya. Orang tua harus fleksibel dengan memberikan kesempatan kepada anak untuk mengerjakan sendiri segala sesuatu, juga senantiasa hadir untuk menuntun mereka dalam membentuk rasa otonom. Orang tua yang terlalu ketat dan membatasi ruang gerak anak, akan mengakibatkan munculnya rasa ketidakberdayaan dan ketidakmampuan, yang selanjutnya akan melahirkan rasa malu dan keraguan akan kemampuan dalam diri anak.
- c. Rasa inisiatif vs rasa bersalah (*Initiatif vs guilt*) (Usia 3-6 tahun); anak pada usia ini memiliki rasa inisiatif yang makin besar yang dapat didorong oleh orang tua maupun orang dewasa lain yang berada dalam lingkungan sehari-hari anak. Mereka mulai belajar bertanggung jawab atas diri mereka sendiri. Pengembangan rasa tanggung jawab ini akan menumbuhkan inisiatif, yang memungkinkan mereka untuk berlari, melompat, bermain, melempar dan sebagainya. Namun, jika anak tidak diberi kepercayaan atau bahkan diberikan hukuman atas upaya atau inisiatif yang dilakukannya, maka hal tersebut akan dapat menimbulkan rasa bersalah.
- d. Membuat vs minder (*Industry vs inferiority*) (Usia 6-12 tahun); pada tahap ini, anak-anak mulai ingin membuat sesuatu. Keberhasilan seorang anak dalam membuat sesuatu yang sesuai dengan standar yang diinginkan akan menumbuhkan rasa puas dan bangga. Akan tetapi, kegagalan atau ketidakmampuan dalam mengikuti suatu standar akan menciptakan citra diri yang negatif dan perasaan minder.
- e. Identitas vs peranan (*Identity vs role confusion*)(Usia 12-18 tahun); seseorang mulai dihadapkan pada kondisi pencarian identitas diri dalam kehidupannya.

Pertanyaan “siapa saya” menjadi penting selama masa remaja. Pada tahap ini pengaruh lingkungan sekolah semakin besar bagi perkembangan sosial siswa. Dalam hal ini, kondusif-tidaknya lingkungan yang dihadapi anak di sekolah akan membantu siswa dalam perkembangan sosialnya ke arah positif. Kondusif-tidaknya lingkungan sekolah tersimpul dalam interaksi antara guru dengan siswa, siswa dengan siswa, keteladanan perilaku guru, dan kualitas atau kepakaran guru dalam melaksanakan tugas profesionalnya sehingga dapat menjadi model bagi siswa yang sedang berada pada masa remaja.

Teori Erikson menekankan peran lingkungan dalam menyebabkan krisis maupun dalam menentukan cara mengatasi krisis psikososial tersebut (Slavin, 2006: 51). Jika lingkungan sosial siswa memberikan respon positif terhadap perilaku seseorang, maka krisis psikososial dapat teratasi dengan baik sehingga perkembangan sosialnya akan bergerak ke arah positif. Sebaliknya, jika lingkungan sosial seseorang memberikan respon negatif, maka seseorang tidak mampu mengatasi krisis psikososial yang dihadapinya, sehingga perkembangan sosialnya akan bergerak ke arah negatif.

Pada usia 6 – 18 tahun perkembangan sosial siswa sangat banyak dipengaruhi oleh lingkungan sekolah. Selanjutnya menurut teori perkembangan sosial yang dikemukakan Erikson (1963), siswa usia SMP berada pada tahap perkembangan *identity vs role confusion*. Pada tahap ini siswa berada pada tahapan mencari identitas dirinya, mulai ingin tampil memegang peran-peran sosial di masyarakat tapi belum bisa mengatur dan memisahkan tugas dalam peran-peran yang berbeda. Guru dapat menerapkan teori perkembangan sosial ini dengan cara memberikan contoh atau tauladan yang baik bagi siswanya. Disaat siswa mencari identitas dirinya, ia dapat meniru sosok gurunya. Selain itu secara sosial mereka belum bisa menempatkan atau menerapkan ilmu yang didapat secara tepat sesuai kadar dan peranannya. Jadi, guru perlu menjelaskan ilmu/materi bukan hanya sekedar teorinya, tetapi harus menyangkut pengaplikasian ilmu yang tepat, khususnya dalam mata pelajaran matematika.

Untuk dapat membantu perkembangan sosial siswa SMP secara maksimal, seorang guru matematika dapat menggunakan strategi pembelajaran yang bersifat demokratis dengan menerapkan model bimbingan bagi siswa, baik secara individu

Kegiatan Pembelajaran 1

maupun kelompok. Misalnya: melalui kegiatan pembelajaran pada materi geometri, siswa diberikan arahan dan bimbingan untuk menyadari kehadiran matematika dalam kehidupan sehari-hari. Guru dapat menggunakan contoh benda-benda geometris yang konkret dan berada disekitar siswa seperti: permukaan meja, papan tulis, jendela, almari, bola volly, dan sebagainya. Melalui aktivitas pembelajaran tersebut, siswa membangun pengetahuan dengan senantiasa menyadari akan pentingnya materi bagi kehidupannya.

Disamping itu, melalui kegiatan diskusi dalam kelompok, siswa juga diarahkan untuk bertukar pikiran dan mengemukakan pendapatnya. Melalui kegiatan ini, siswa diberikan bimbingan dan arahan untuk senantiasa bertanggung jawab atas pendapatnya serta saling menghargai perbedaan pendapat satu sama lain. Di lain pihak, pembelajaran yang hanya difokuskan pada penguasaan teori, maka akan timbul kebingungan dalam diri siswa akan posisi dan peran dirinya dalam mempelajari materi tersebut.

4. Perkembangan Kepribadian Siswa

Santrock (2014) menuliskan terdapat lima hal yang menjadi faktor kepribadian pada diri remaja dan diakronimkan menjadi OCEAN. Faktor tersebut adalah:

O	<i>Openness</i> (keterbukaan) <ul style="list-style-type: none">• Apakah lebih menyukai hal rutin atau suka mencoba hal baru?• Apakah lebih menyukai hal praktis atau imajinatif?• Apakah lebih memilih hal formal atau kebebasan?
C	<i>Conscientiousness</i> (kehati-hatian) <ul style="list-style-type: none">• Apakah cenderung berhati-hati atau ceroboh?• Apakah cenderung disiplin atau selalu spontan?• Apakah penuh perencanaan atau sebaliknya?
E	<i>Extraversion</i> (supel) <ul style="list-style-type: none">• Apakah mudah bersosialisasi atau sebaliknya?• Apakah sering bercanda atau cenderung diam?• Apakah cenderung mengasihi atau dikasihi?
A	<i>Agreeableness</i> (keramahan)

	<ul style="list-style-type: none"> • Apakah cenderung berhati lembut atau keras hati? • Apakah mudah mempercayai orang lain atau justru mencurigai? • Apakah mudah bekerjasama atau justru sebaliknya?
N	<p><i>Neuroticism</i> (kestabilan emosi)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Apakah cenderung tenang atau selalu cemas? • Apakah menghargai diri sendiri atau mengasihani diri sendiri? • Apakah selalu mantap atau penuh kegamangan?

Anda dipersilahkan mengkaji literatur lain mengenai faktor-faktor kepribadian yang tentu mungkin berbeda. Misal, Lee dan Ashton pada Santrock (2014) menambahkan satu faktor selain lima faktor di atas, yakni *honesty-humility* (kejujuran dan kerendahan hati).

Perkembangan kepribadian siswa yang berimplikasi pada hal-hal berikut dalam pembelajaran.

- a. Penanaman nilai religius dan moral dalam setiap pertemuan pembelajaran penting dilakukan agar kepribadian siswa berkembang ke arah positif. Berbagai permasalahan remaja yang muncul seiring perkembangan jaman seperti perkelahian antar remaja, narkoba, pornografi, dan lain-lain dipercaya salah satunya disebabkan oleh lemahnya nilai religius dan moral yang diterima siswa dari lingkungan sekitarnya.
- b. Pemahaman diri remaja tentangdirinya sendiribelum stabil dan terus berubah. Remaja cenderung sangatsensitif terhadap kritikpribadi. Sebagai implikasinya, guru diharapkan berusaha mengenal siswa di kelas yang diampunya sebaik mungkin pada setiap awal tahun pembelajaran. Guru sebaiknya memahami kombinasi unik masing-masing siswa dari kemampuan maupun gaya belajarnya. Selanjutnya, dalam setiap pembelajaran selalu sisipkan pesan positif tentang diri mereka sendiri misal dengan sanjungan atau cita-cita masa depan. Hal ini diharapkan dapat meningkatkan *self-efficacy* siswa. *Self-efficacy* adalah keyakinan bahwa seseorang dapat menguasai situasi dan memberikan hasil yang menguntungkan. Albert Bandura pada Santrock (2011) menyatakan bahwa *self-*

Kegiatan Pembelajaran 1

efficacy merupakan faktor penting yang menentukan berhasil tidaknya siswa dalam pembelajaran.

- c. Siswa usia remaja memiliki rasa ingin tahu yang besar terhadap berbagai hal. Pemahaman mereka tentang dunia terus berkembang terhadap hal-hal yang dahulu mereka tidak pahami. Sebagai implikasinya, guru disarankan menyampaikan materi dikaitkan hal-hal kontekstual di kehidupan sehari-hari siswa. Gunakan rasa ingin tahu tersebut sebagai modal untuk melaksanakan pembelajaran dengan pendekatan *inquiry learning* atau *discovery learning*. Dalam proses pembelajaran, lakukan aktivitas yang menghubungkan antara apa yang telah mereka ketahui dengan apa yang akan mereka pelajari.
- d. Pada remaja, *autonomy* mereka tumbuh dengan mengekspresikan diri dan sering mempertanyakan otoritas orang lain terhadap dirinya. Terkait proses pembelajaran, mereka perlu memahami tujuan pembelajaran, kegiatan yang akan dilakukan, mengapa pembelajaran itu penting bagi mereka, dan sebagainya. Untuk itu pada proses pembelajaran matematika, penting bagi guru menginformasikan hal-hal tersebut di awal pembelajaran matematika untuk menjawab keingintahuan mereka.
- e. Melalui pendekatan yang tepat, pembelajaran matematika dapat menumbuhkan faktor *conscientiousness* pada remaja, yakni kepribadian yang disiplin, penuh perencanaan, dan teliti. Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan No 58 Tahun 2013 tentang Kurikulum bagi SMP/MTs mencantumkan bahwa salah satu manfaat belajar matematika adalah melatih cara berpikir yang sistematis, melatih menjadi individu yang cermat, teliti dan tidak ceroboh.
- f. Telah dibahas di atas, salah satu faktor kepribadian pada remaja adalah *extraversion* dimana remaja cenderung menyukai humor dan candaan. Guru dapat menyisipkan teka-teki, humor matematika, *ice breaking* yang mencairkan suasana kelas namun tetap sejalan dengan tujuan pembelajaran matematika. Dengan membuat suasana kelas menjadi pembelajaran yang menyenangkan (*joyful learning*), siswa akan lebih nyaman mengikuti proses pembelajaran.



- g. Pembelajaran dengan *cooperative learning* memiliki manfaat positif untuk mengembangkan faktor *agreeableness* pada kepribadian siswa. Kerjasama, memahami orang lain, memiliki simpati dan empati, merupakan sikap-sikap yang dapat dikembangkan dalam proses *cooperative learning*.

5. Perkembangan Intelektual Siswa

Perkembangan intelektual adalah proses perubahan kemampuan individu dalam berpikir. Membahas tentang perkembangan intelektual berarti membahas tentang perkembangan individu dalam berpikir atau proses kognisi atau proses mengetahui. Macam perkembangan intelektual siswa yang akan dikaji meliputi teori Piaget, SOLO, dan Van Hiele.

Menurut Piaget (Slavin, 2006) dalam perkembangan intelektual ada tiga hal penting yang menjadi perhatian, yaitu struktur, isi, dan fungsi. Struktur atau skemata (*schema*) merupakan organisasi mental yang merupakan hasil interaksi seseorang dengan lingkungan. Isi merupakan pola perilaku anak yang khas yang tercermin pada respon yang diberikannya terhadap berbagai masalah atau situasi yang dihadapinya. Fungsi adalah cara yang digunakan seseorang untuk membuat kemajuan intelektual. Menurut Piaget, perkembangan intelektual didasarkan pada dua fungsi yaitu organisasi dan adaptasi. Organisasi memberikan pada organisme

Kegiatan Pembelajaran 1

kemampuan untuk mengestimasi atau mengorganisasi proses-proses fisik atau psikologis menjadi sistem-sistem yang teratur dan berhubungan. Adaptasi terhadap lingkungan dilakukan melalui dua proses yaitu asimilasi dan akomodasi.

Asimilasi adalah proses kognitif dimana seseorang mengintegrasikan persepsi, konsep, ataupun pengalaman baru ke dalam skema atau pola yang sudah ada dalam pikirannya. Asimilasi dipandang sebagai suatu proses kognitif yang menempatkan dan mengklasifikasikan kejadian atau rangsangan baru dalam skema yang telah ada. Pengalaman yang baru itu bisa jadi sama sekali tidak cocok dengan skema yang telah ada. Dalam keadaan demikian orang akan mengadakan akomodasi. Akomodasi terjadi untuk membentuk skema baru yang cocok dengan rangsangan yang baru atau memodifikasi skema yang telah ada sehingga cocok dengan rangsangan itu. Bagi Piaget adaptasi merupakan suatu kesetimbangan antara asimilasi dan akomodasi. Bila dalam proses asimilasi seseorang tidak dapat mengadakan adaptasi terhadap lingkungannya maka terjadilah ketidakseimbangan (*disequilibrium*). Akibat ketidakseimbangan itu maka terjadilah akomodasi dan struktur kognitif yang ada akan mengalami perubahan atau munculnya struktur yang baru. Pertumbuhan intelektual ini merupakan proses terus menerus tentang keadaan ketidakseimbangan dan keadaan setimbang (*disequilibrium-equilibrium*). Tetapi bila terjadi kesetimbangan maka individu akan berada pada tingkat yang lebih tinggi daripada sebelumnya.

Piaget membagi perkembangan intelektual anak-anak dan remaja menjadi empat tahap, yaitu: sensori-motori, pra-operasional, operasional konkret, dan operasional formal. Piaget meyakini bahwa semua anak melewati tahap-tahap tersebut sesuai dengan tahapannya. Walaupun anak-anak yang berbeda melewati tahap-tahap tersebut dengan kecepatan yang berbeda-beda. Siswa SMP berada pada akhir tahap operasional konkret memasuki tahap operasional formal dengan karakteristik sebagai berikut.

- a. Tahap operasional konkret, yang terjadi pada usia 7-11 tahun. Ciri pokok perkembangan pada tahap ini, yaitu 1) anak sudah mulai menggunakan aturan-aturan yang jelas dan logis, dan ditandai adanya reversible dan kekekalan, 2) anak tidak perlu coba-coba dan membuat kesalahan karena anak sudah berfikir

dengan “kemungkinan”, dan 3) anak telah melakukan pengklasifikasian dan pengaturan masalah.

- b. Tahap operasional formal, yakni perkembangan intelektual yang terjadi pada usia 11-15 tahun. Pada tahap ini kondisi berfikir anak, yaitu: 1) bekerja secara efektif dan inovatif, 2) menganalisis secara kombinasi, 3) berfikir secara proporsional, dan 4) menarik generalisasi secara mendasar pada satu macam isi.

Biggs dan Collins (1982) menemukan teori *Structure of the Observed Learning Outcome* (SOLO) yaitu struktur hasil belajar yang teramati. Taksonomi SOLO digunakan untuk mengukur kemampuan siswa dalam merespon masalah yang diklasifikasikan menjadi lima level berbeda dan bersifat hirarkis yaitu: *prestructural*, *unistructural*, *multistructural*, *relational*, dan *extended-abstract*.

Siswa pada level *prestruktural* tidak dapat melakukan tugas yang diberikan atau melaksanakan tugas dengan data yang tidak relevan. Siswa pada level *unistruktural* dapat menggunakan satu penggal informasi dalam merespons suatu tugas (membentuk suatu data tunggal). Siswa pada level *multistruktural* dapat menggunakan beberapa penggal informasi tetapi tidak dapat menghubungkannya secara bersamasama (mempelajari data paralel). Siswa pada level *relational* dapat memadukan penggalan-penggalan informasi yang terpisah untuk menghasilkan penyelesaian dari suatu tugas. Siswa pada level *extended abstrak* dapat menemukan prinsip umum dari data terpadu yang dapat diterapkan untuk situasi baru (mempelajari konsep tingkat tinggi).

Perkembangan intelektual yang didasarkan pada teori Van Hiele menguraikan tahap-tahap perkembangan intelektual anak dalam geometri (Van de Walle, 2007). Berdasarkan hasil risetnya, Van Hiele melahirkan beberapa kesimpulan mengenai tahap-tahap perkembangan kognitif anak dalam memahami geometri. Menurut Van Hiele tiga unsur utama dalam pengajaran geometri yaitu waktu, materi pengajaran, dan metode pengajaran yang diterapkan. Jika ketiga unsur tersebut dapat ditata secara terpadu, maka akan dapat meningkatkan kemampuan berpikir anak kepada tingkatan berpikir yang lebih tinggi. Van Hiele menyatakan bahwa terdapat 5 tahap belajar anak dalam belajar geometri, yaitu

tahap pengenalan, tahap analisis, tahap pengurutan, tahap deduksi, dan tahap akurasi.

Level 0: Visualisasi (*visualization*). Pada tahap ini siswa mulai belajar mengenal suatu bangun geometri secara keseluruhan namun belum mampu mengetahui adanya sifat-sifat dari bangun geometri yang dilihatnya.

- a. Level 1: Analisis (*analysis*). Pada tahap ini siswa sudah mulai mengenal sifat-sifat yang dimiliki bangun geometri yang diamatinya. Namun, siswa belum mampu mengetahui hubungan yang terkait antar suatu benda geometri dengan benda geometri lainnya.
- b. Level 2: Deduksi informal (*informal deduction*). Pada tahap ini siswa sudah mampu mengetahui hubungan keterkaitan antar bangun geometri. Anak yang berada pada tahap ini sudah memahami pengurutan bangun geometri dan anak sudah dapat menarik kesimpulan secara deduktif. Tetapi belum mampu memberi alasan secara rinci.
- c. Level 3: Deduksi (*deduction*). Pada tahap ini anak sudah dapat menarik kesimpulan secara deduktif. Dalam tahap ini siswa sudah mampu menarik kesimpulan dari hal-hal yang bersifat umum menuju hal-hal yang bersifat khusus.
- d. Tahap Akurasi (*rigor*). Tahap akurasi merupakan tahap tertinggi dalam memahami geometri. Pada tahap ini anak sudah memahami betapa pentingnya ketepatan dari prinsip-prinsip dasar yang melandasi suatu pembuktian.

6. Perkembangan Moral Siswa

Dalam kamus filsafat dan psikologi, moral berarti perilaku yang secara oposisi akan selalu dihadapkan pada benar-salah atau baik-buruk. Kategorisasi tersebut bersandar dan berdasar pada norma-norma sosial. Dengan kata lain, moral merupakan ajaran mengenai baik dan buruk suatu perbuatan. (Sudarsono, 1993: 159). Secara ringkas, Gunarsa (2003) menyatakan moral adalah rangkaian nilai tentang berbagai macam perilaku yang harus dipatuhi.

Ini diperkuat oleh pengertian moral menurut kamus Merriam-Webster versi online, yang dinyatakan bahwa moral adalah "*proper ideas and beliefs about how to behave*

in a way that is considered right and good by most people".(ide-ide murni dan kepercayaan mengenai bagaimana berkelakuan yang dapat dianggap benar dan baik oleh kebanyakan orang).

Jadi, seseorang dikatakan bermoral (atau bermoral baik) jika ia bersikap dan bertindak sesuai dengan nilai-nilai yang diterima luas dan dijunjung tinggi oleh masyarakat.

Tahap-tahap perkembangan moral menurut John Dewey, yaitu:

- a. Tahap pramoral, ditandai bahwa anak belum menyadari keterikatannya pada aturan.
- b. Tahap konvensional, ditandai dengan berkembangnya kesadaran akan ketaatan pada kekuasaan.
- c. Tahap otonom, ditandai dengan berkembangnya keterikatan pada aturan yang didasarkan pada resiprositas.

Teori lain yang lebih detil dan berdasarkan hasil penelitian, dikemukakan oleh Lawrence Kohlberg. Teori Kohlberg dipengaruhi oleh teori perkembangan kognitif dari Jean Piaget dan berdasarkan pada penalaran moral dan berhubungan dengan keadilan yang dirasakan manusia.

Berikut ini tahap perkembangan moral manusia menurut Kohlberg.

- a. Tingkat Pra-Konvensional (*Preconventional/Premoral*)

Tingkat ini umumnya pada anak usia bayi hingga balita.

- 1) Tahap 1: Orientasi kepatuhan dan hukuman (*Obedience and punishment orientation*)

Anak memandang moral suatu tindakan berdasarkan hukuman yang diterimanya. Jika tidak dihukum, ia akan memandangnya boleh, namun jika dihukum maka perbuatan itu dianggap salah.

- 2) Tahap 2: Orientasi minat pribadi (*Naively egoistic orientation*)

Penalaran moral anak pada tahap berikutnya adalah apa untungnya buat saya? Pada tahap ini anak mulai kurang memberikan perhatian pada orang lain. Semua tindakan untuk melayani kebutuhan diri sendiri.

- b. Tingkat Konvensional (*Conventional/Role Conformity*)

Kegiatan Pembelajaran 1

Tingkat ini berlaku umumnya pada anak usia remaja.

- 1) Tahap 3: Orientasi keserasian interpersonal dan konformitas (*Good-boy/good-girl orientation*)

Pada tahap ini anak mulai mengetahui bahwa moral suatu tindakan ditentukan oleh konsekuensinya dalam hubungan dengan orang lain, dengan konsekuensi berupa rasa hormat, rasa terima kasih.

- 2) Tahap 4: Orientasi otoritas dan pemeliharaan aturan sosial (*Authority and social-order-maintaining orientation*)

Pada tahap ini anak memandang moral ditentukan oleh kepatuhan pada aturan sosial untuk memenuhi kebutuhan masyarakat (lebih dari kebutuhan pribadinya). Faktor celaan menjadi bagian yang signifikan dalam tahap ini.

c. Tingkat Pasca-Konvensional (*Postconventional/Self-Accepted Moral Principles*)

Tahap ini menuju pada pendewasaan, di mana anak mulai pada tingkat berprinsip. Setiap tindakannya dengan perspektif pribadi.

- 1) Tahap 5: Orientasi kontrak sosial (*Contractual/legalistic orientation*)

Pada tahap ini, anak memandang setiap individu memiliki pendapat dan nilai yang berbeda-beda, sehingga tidak ada pilihan yang pasti benar atau pasti salah. Moral setiap tindakan ditentukan oleh seberapa cenderung orang mematuhi keputusan mayoritas dan kompromi.

- 2) Tahap 6: Prinsip etika universal (*The morality of individual principles of conscience*)

Pada tahap ini, orang sudah mulai menilai baik buruknya tindakan berdasarkan prinsip etika yang berlaku universal. Seseorang selalu bertindak karena tindakan itu benar, bukan karena hukum yang berlaku, ada maksud pribadi, atau pun ada persetujuan sebelumnya.

Selanjutnya, berkaitan dengan cara pembelajaran moral atau meningkatkan moral siswa dalam pembelajaran, Paul Suparno, dkk (2002) mengemukakan ada empat model penyampaian pembelajaran moral yaitu:

- a. Model sebagai mata pelajaran tersendiri.
- b. Model terintegrasi dalam semua bidang studi.

- c. Model di luar pengajaran.
- d. Model gabungan.

Menurut Lickona (dalam Paul Suparno, dkk: 2002), terdapat tiga unsur dalam menanamkan nilai moral, yaitu antara lain:

a. Penalaranmoral

Penalaran moral sering juga disebut pengertian,pemahaman, pemikiran, atau pertimbangan moral.Hal ini merupakan aspek kognitif nilai moral.Ini perlu diajarkan dalam pendidikan moral kepada siswa, peran pendidik membantu mereka untuk memahami mengapa suatu tindakan perlu dilakukan atau tidak dilakukan.

b. Perasaan moral

Aspek ini menekankan pada kesadaran akan hal-hal yang baik dan tidak baik. Wujud kongkrit perasaan moral adalah perasaan mencintai kebaikan dan sikap empati terhadap orang lain. Karena itu guru perlu memahami, mengajarkan serta mengembangkan perasaan moral tersebut melalui sentuhan hati nurani dan pembiasaan sikap empati kepada siswa.

c. Tindakan moral

Kemampuan untuk melakukan keputusan dan perasaan moral kedalam perilaku atau tindakan nyata.Tindakan-tindakan moral ini harus difasilitasi agar muncul dan berkembang dalam pergaulan remaja/siswa, misalnya lewat kegiatan ekstrakurikuler.

D. Aktivitas Pembelajaran

AKTIVITAS 1

Pada aktivitas ini cermatilah dokumen Peraturan Menteri Pendidikan Nasional No 24 Tahun 2007 tentang Standar Sarana dan Prasarana untuk SD/MI, SMP/MTs dan SMA/MA.Jika Anda belum memiliki dokumen ini, silahkan mengunduhnya di Internet dengan memanfaatkan mesin pencari.Setelah Anda mencermatinya, diskusikanlah hal-hal berikut ini.

Kegiatan Pembelajaran 1

- Apakah semua standar yang ditetapkan di peraturan tersebut telah diterapkan sekolah Anda untuk mendukung perkembangan fisik siswa? Bagaimana pandangan Anda terkait standar ini?
- Standar apa yang belum dipenuhi? Mengapa? Apakah hal ini berdampak langsung pada perkembangan fisik siswa? Bagaimana solusi yang selama ini telah dilakukan? Apa usulan Anda untuk memperbaikinya di masa yang akan datang?

AKTIVITAS 2

Emosi takut memiliki tingkatan yang berbeda-beda, bahkan tingkatannya kontinu. Cobalah diskusikan mengenai emosi takut terhadap matematika atau pelajaran matematika atau guru matematika. Tulislah jenjang atau kadar “ketakutan” siswa dengan mendeskripsikan respon tingkah laku atau ekspresinya.

AKTIVITAS 3

Berilah satu contoh model/ strategi/ metode pembelajaran yang mendukung perkembangan sosial siswa menurut teori perkembangan sosial Erik Erikson! Berikan alasan mengapa Anda memilih model pembelajaran tersebut.

AKTIVITAS 4

Berikan contoh mengintegrasikan nilai religius/ spiritual pada beberapa topik matematika SMP.

Materi	Contoh nilai religius/ spiritual yang dapat diintegrasikan
Bilangan	
Aljabar	
Geometri	
Peluang	
Himpunan	

AKTIVITAS 5

Berilah satu contoh aktivitas pembelajaran pada materi aljabar SMP dengan memperhatikan aspek perkembangan intelektual siswa menurut Piaget.

AKTIVITAS 6

Carilah kasus-kasus yang tergolong pada tindakan amoral atau kurang bermoral di kalangan siswa (satu atau sekelompok siswa), baik berupa video maupun berita tertulis. Analisislah kemungkinan faktor penyebabnya dan alternatif bagaimana mencegah dan juga mengatasinya. Gunakan format seperti di bawah ini.

Aspek	Uraian
Deskripsi singkat kasus	
Faktor penyebab	
Cara pencegahannya	Melalui, Penalaran moral: Perasaan moral: Tindakan moral:
Cara penanggulangannya (menangani/ mengobatinya)	Melalui, Penalaran moral: Perasaan moral: Tindakan moral:

E. Latihan

Untuk memantapkan pemahaman Anda, jawablah beberapa pertanyaan di bawah ini.

1. Jelaskan perkembangan otak remaja dikaitkan dengan kemampuan remaja mengendalikan emosi.
2. Sebutkan 8 emosi dasar dari Plutchik dan jelaskan karakteristiknya!
3. Jelaskan pengertian perkembangan sosial siswa menurut Bruno!



4. Jelaskan perkembangan psikososial dari Erikson untuk siswa pada usia 12-18 tahun!
5. Jelaskan pengertian dari asimilasi dan akomodasi dalam teori Piaget!
6. Jelaskan tentang faktor OCEAN yang mempengaruhi kepribadian remaja.
7. Sebutkan level kemampuan intelektual pada taksonomi SOLO!

F. Rangkuman

Emosi terkait dengan perasaan, tetapi tidak sama dengan perasaan. Emosi bersifat kontinum, memiliki intensitas dan selalu berubah. Paling sedikit emosi memuat 3 komponen: penilaian subjektif (hasil penilaian seseorang terhadap rangsangan), respon fisiologis (perubahan kimia tubuh), dan respon ekspresi/tingkah laku. Yang tampak oleh orang lain adalah respon yang terakhir.

Perkembangan sosial merupakan proses pembentukan konsep diri seseorang dalam bermasyarakat, baik dalam kehidupan lingkungan keluarga, budaya, bangsa maupun dalam lingkungan yang lebih luas lagi. Perkembangan sosial terjadi dalam 8 tahap perkembangan psikososial.

Perkembangan intelektual adalah proses perubahan kemampuan individu dalam berpikir. Terdapat beberapa tahapan perkembangan intelektual, yang mempengaruhi kemampuan siswa dalam menerima atau mempelajari materi pelajaran tertentu, antara lain yang dikemukakan oleh Piaget, Biggs dan Collins (Taksonomi SOLO), dan Van Hiele.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Periksalah pemahaman Anda dengan materi yang disajikan dalam modul ini, serta cocokan hasil pengerjaan soal latihan dengan kunci jawaban. Jika Anda dapat memahami materi dan dapat menjawab sebagian besar soal latihan, maka Anda dapat melanjutkan mempelajari materi berikutnya. Namun jika tidak, silakan dipelajari kembali dan berdiskusi dengan teman sejawat untuk memantapkan pemahaman dan memperoleh kompetensi yang diharapkan.

Kegiatan Pembelajaran 2

Potensi Dan Kesiapan Siswa

A. Tujuan

Guru memiliki pengetahuan dan keterampilan dasar dalam mengidentifikasi siswa yang berbakat, khususnya yang memiliki bakat matematika, juga kesiapan siswa dalam mengikuti proses belajar matematika.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Guru dapat:

1. menjelaskan ciri-ciri siswa yang berpotensi dalam belajar matematika,
2. mengidentifikasi ciri atau gejala kesiapan belajar matematika siswa secara fisik, psikis, dan kognisi.

C. Uraian Materi

1. Siswa Berbakat Matematika

Bakat merupakan kemampuan bawaan atau potensi (*potential ability*) yang masih perlu pengembangan dan latihan lebih lanjut. Karena sifatnya yang masih potensial, bakat memerlukan ikhtiar pengembangan dan pelatihan secara serius dan sistematis agar dapat terwujud.

Elliott (2013) menulis beberapa pandangan atau pendapat yang salah terkait dengan siswa berbakat. Pandangan salah tersebut adalah: (1) Siswa yang berbakat adalah siswa dengan prestasi akademik tinggi, (2) semua siswa berbakat, (3) Siswa berbakat dapat bekerja dengan baik, dengan atau tanpa bimbingan guru, (4) siswa berbakat selalu berasal dari lingkungan orang yang dipandang berkecukupan, (5) belajar kelompok merupakan cara yang efektif untuk belajar bagi siswa yang berbakat, (6) siswa berbakat kesulitan bekerja dengan teman sebaya, dan (7) Siswa berbakat bersifat elitis atau eksklusif; memberikan perhatian ekstra kepada siswa berbakat, tidak berarti mereka menjadi lebih elitis, ini sama saja dengan memberi perlakuan ekstra kepada siswa yang lambat belajar.

Lebih lanjut, Elliott (2013) telah merangkum beberapa ciri-ciri siswa berbakat dalam hal akademik yaitu siswa yang memiliki kecenderungan dalam hal: (1) Berargumentasi dengan baik (pemikir yang ulung), (2) Belajar dengan cepat, (3) Memiliki perbendaharaan kata yang banyak, (4) Memiliki ingatan yang menakjubkan, (5) Memiliki perhatian yang tajam dan lama (pada kasus yang diminati), (6) Berperasaan sensitive, (7) Menunjukkan kesempurnaan, (8) Sensitif secara moral (menjunjung keadilan dan kejujuran), (9) Keingintahuan yang kuat, (10) Gigih dengan apa yang diminati, (11) Memiliki energi yang tinggi, (12) Kelihatan kurang sinergis dengan teman sebaya dan terbuka dengan orang dewasa, (13) Memiliki minat yang luas, (14) Memiliki selera humor yang tinggi, (15) Menjadi pengamat yang tekun, (16) Memiliki kreativitas tinggi, (17) Memiliki imajinasi yang menggelora, (18) Mahir dengan angka-angka, (19) Mudah mengingat dengan latihan yang singkat, (20) Mudah melihat pola, hubungan, atau pandangan berbeda, (21) Mudah memperluas ide, solusi, teori, atau penjelasan, (22) Memiliki respon yang unik dan tidak biasa, (23) Dapat bekerja independen, (24) Menunjukkan kebijaksanaan melampaui umurnya, (25) Bekerja lebih cepat, dan (26) Memiliki pertanyaan atau masalah yang berbeda

Siswa dengan bakat matematika luar biasa merupakan 2% hingga 3% dari populasi siswa di dunia (Miller (1990). Jika bakat matematika dengan karakteristiknya diukur sedikit di atas rata-rata kemampuan matematika, maka jumlahnya akan semakin bertambah. Barangkali di kelas setiap sekolah, terdapat siswa yang memiliki bakat matematika yang cukup tinggi. Di bawah ini dikemukakan beberapa pendapat dan hasil penelitian, terkait karakteristik siswa yang memiliki bakat matematika. Elliott (2013) menyatakan ciri-ciri siswa berbakat matematika adalah mereka mampu dalam hal: (1) Menyatakan masalah secara spontan, (2) Menangani data secara fleksibel, (3) Lancar menyampaikan ide, (4) Mampu mengorganisasi data, (5) Orisinal dalam menafsirkan, (6) Cepat belajar konsep yang baru, (7) Terampil mengobservasi dan mendalam, (8) Terampil membuat pertanyaan yang bermutu, (9) Memiliki pemahaman yang mendalam, (10) Memiliki pemecahan masalah yang unik dan (11) Mampu membuat kesimpulan dari suatu pola.

Adapun Johnsen (2011: 8) mengemukakan beberapa ciri siswa dengan bakat matematika adalah: (1) Tertarik pada analisis numeric, (2) Memiliki ingatan yang

baik terhadap bagian penting suatu masalah dan solusinya, (3) Menghargai solusi yang ekonomis, sederhana, dan jelas, (4) Memberi argumen secara efektif dan efisien, (5) Menyelesaikan masalah secara intuitif dengan pemahaman mendalam, (6) Dapat membalik urutan pada proses mental, (7) Mampu mengorganisasi data untuk menemukan pola dan hubungan, (8) Berimprovisasi dengan metode matematika, dan (9) Fleksibel dalam memecahkan masalah.

Sheffield dalam MCPS (2014) menyatakan siswa dengan kemampuan matematika yang tinggi, secara independen (mandiri) menunjukkan kemampuan dalam hal:

1. Menampakkan pemikiran matematis dan kesadaran yang tinggi akan informasi yang bersifat kuantitatif di sekitar mereka.
2. Berpikir logis dan simbolik mengenai kuantitatif, spasial, dan hubungan yang abstrak.
3. Merasakan, memvisualkan, dan menggeneralisasikan pola dan hubungan yang numerik maupun non-numerik.
4. Menalar secara analitik, deduktif, maupun induktif.
5. Membalik proses penalaran dan menukar metode dengan cara yang sistematis dan fleksibel.
6. Bekerja, berkomunikasi, dan mengecek konsep-konsep matematika dengan cara yang kreatif dan intuitif, baik secara verbal maupun tertulis.
7. Mentransfer hasil belajar ke dalam situasi yang baru.
8. Merumuskan penyelidikan masalah matematika yang memperluas atau menerapkan konsep.
9. Tetap bertahan dalam penyelidikan untuk mencari solusi dari tugas yang kompleks, kabur atau belum jelas.
10. Mengorganisasi informasi dan data dalam cara yang bervariasi dan mengabaikan data yang tidak relevan.
11. Menangkap konsep dan strategi matematika dengan cepat, dengan ingatan yang baik, dan mengaitkan konsep-konsep matematika dan menghubungkannya dengan konten yang lain serta dengan situasi nyata.
12. Menyelesaikan masalah dengan solusi yang beragam dan/atau solusi-solusi alternatif.
13. Menggunakan matematika dengan rasa percaya diri.
14. Mengambil resiko dengan konsep dan strategi matematika.

15. Menerapkan pengetahuan yang mendalam dan ekstensif mengenai beragam topik-topik matematika yang pokok.
16. Menerapkan estimasi dan strategi perhitungan mental.

Tampak bahwa karakteristik siswa yang berbakat matematika dari beberapa pendapat di atas mencakup aspek kognitif, afektif, maupun psikomotorik. Beberapa karakteristik utama antara lain cepat belajar akan hal baru, fleksibel dan unik dalam memecahkan masalah dan menyampaikan ide, pemahaman dan observasi yang mendalam, kegigihan dalam bekerja/berpikir, percaya diri dan berani mengambil resiko, terampil mengaplikasi ke situasi yang baru, dapat berpikir abstrak dan efisien, intuisi yang tajam, dan cenderung berpikir strategis daripada prosedural.

Miller (1990) menyatakan bahwa beberapa siswa dengan bakat matematika, tidak menunjukkan prestasi akademik yang menonjol, tidak menunjukkan antusiasme dalam mengikuti pembelajaran, atau tidak menempati ranking tinggi di kelas. Ada banyak faktor mengapa mereka tidak menunjukkan keunggulannya, baik faktor dari dalam kelas maupun dari luar kelas. Salah satu faktornya adalah pola pembelajaran yang kurang mengakomodasi perbedaan individu dan gaya mengajar yang tidak fleksibel.

Sheffield seperti dikutip dalam MCPS (2014) menyatakan beberapa cara dalam mengidentifikasi bakat, potensi, dan kemampuan matematis yang tinggi sebagai berikut.

1. Observasi. Pengamatan yang dilakukan saat siswa bekerja, khususnya saat memecahkan masalah yang tingkat kesulitannya meningkat atau yang didesain untuk mendapatkan karakteristik siswa yang berkemampuan matematis tinggi.
2. Portofolio. Analisis terhadap kemampuan siswa pada portofolionya mencakup karakteristik kemampuan siswa dengan kemampuan matematis yang tinggi.
3. Interview atau wawancara dengan siswa
4. Informasi dari orang tua
5. Survei pada siswa
6. Penilaian yang terus menerus (*on-going assessment*)

2. Kesiapan Belajar Siswa

Slavin (2006: 45), *“some educators refer to a “teachable moment” when a child or group of children is exactly at the point of readiness for a given concept”*. Artinya, para pendidik berpendapat bahwa suatu konsep dapat diberikan kepada siswa ketika siswa tersebut telah siap menerimanya.

Kesiapan memiliki berbagai makna yang didasarkan pada konteks dan pendekatan yang digunakan. Menurut Harjanto (2000: 64), kesiapan diartikan sebagai kesediaan seseorang untuk menentukan tindakan yang mencakup kesediaan materil, kesiapan fisik, dan adanya kemauan memberikan reaksi. Menurut Oemar Hamalik (2005: 39), kesiapan merupakan hasil latihan atau belajar dan kematangan. Selain itu, kesiapan merupakan keadaan kapasitas dalam diri siswa yang berhubungan dengan tujuan pengajaran (Oemar Hamalik, 2005: 41). Pengertian kesiapan selanjutnya dari Boethel (2004: 13) yang mengartikan kesiapan sebagai usia kronologi tertentu, sebagai suatu tahap perkembangan anak, sebagai ketrampilan atau kompetensi siswa, sebagai suatu proses, dan sebagai suatu set hubungan. Sedangkan menurut Ackerman, D.J. (2005: 5), *“readiness has often been defined as a child’s skills, behaviors, or attributes in relation to the expectations of individual classroom or school. As a result, many schools formally asses skills or knowledge in order to determine a child’s “readiness status”*. Dari pendapat Ackerman, D. J. (2005:5), kesiapan diartikan sebagai suatu ketrampilan, tingkah laku, atau atribut yang terkait dengan persekolahan. Dari berbagai pendapat tersebut disimpulkan bahwa kesiapan belajar siswa merupakan keadaan seorang siswa atau sekelompok siswa untuk menentukan tindakan yang mencakup kesiapan fisik, kesiapan psikis, dan kesiapan kognisi.

a. Kesiapan Fisik

Menurut Slameto (2010: 113), kondisi fisik adalah kesiapan kondisi jasmani seseorang untuk mengikuti kegiatan belajar. Sebagai contoh adalah adanya tindakan yang berasal dari kesadaran diri siswa sendiri untuk menjaga pola makan, waktu istirahat, dan menjaga kesehatan panca indera terutama mata sebagai indera penglihat dan telinga sebagai indera pendengar, serta menjaga agar terhindar dari kondisi jasmani (cacat tubuh) yang diakibatkan kelalaian.

Kegiatan Pembelajaran 2

Bagi pendidik, mengetahui kesiapan fisik siswa menjadi hal penting dikarenakan pendidik dapat memberikan tindak lanjut atau saran tertentu untuk mempersiapkan kondisi fisik siswa dalam proses pembelajaran. Proses identifikasi kesiapan fisik siswa oleh pendidik dapat dilakukan dengan membuat tabel indikator dan melakukan pengecekan pada siswa.

Tabel 1 Indikator Kesiapan Fisik Siswa

No.	Indikator	Y/T
1.	Siswa tidak mengantuk saat di kelas	
2.	Siswa tidak mengalami gangguan pancaindra terutama mata dan telinga.	
3.	Siswa tidak mudah lesu saat di kelas	
4.	Siswa dalam kondisi sehat	

Setelah proses identifikasi kesiapan fisik yang terdiri dari pembuatan instrumen pengukuran seperti Tabel 1 dan proses pengecekan dilakukan, maka pendidik memberikan tindak lanjut kepada siswa. Tindak lanjut yang diberikan pendidik dapat berupa nasihat atau penggunaan metode dan pendekatan pembelajaran di kelas untuk membuat siswa lebih bersemangat dan antusias dalam mengikuti proses pembelajaran.

b. Kesiapan Psikis

Kondisi mental merupakan keadaan siswa yang berhubungan dengan kecerdasan siswa (Slameto, 2010: 113). Sebagai contoh adalah kemampuan siswa dalam memberi pendapat, berbicara dalam forum diskusi, rasa percaya diri terhadap kemampuan yang dimiliki, dan kemampuan berkonsentrasi saat proses pembelajaran berlangsung.

Kesiapan psikis siswa dalam proses belajar juga melibatkan kesiapan kondisi emosional siswa. Kondisi emosional adalah kemampuan siswa untuk mengatur emosinya dalam menghadapi masalah, misalnya saat kenyataan yang terjadi tidak sesuai dengan harapan dan kesungguhan siswa dalam mengikuti kegiatan belajar. Hal ini terlihat saat apabila siswa mendapatkan nilai ulangan atau tugas

matematika yang tidak sesuai dengan harapannya. Siswa yang mampu mengatur emosinya akan menjadikan hal tersebut sebagai motivasi untuk mendapatkan hasil yang lebih baik pada ulangan atau tugas selanjutnya. Kondisi siswa SMP yang masih memiliki emosi yang meluap-luap menjadikan pendidik memiliki peran penting dalam membimbing dan mengarahkan siswa agar lebih pintar mengatur emosinya.

Menurut Meisels (1998: 8-9), *“One common view of readiness holds that children are ready to start school when they reach a level of maturity that enables them to sit quietly, focus on work, engage with their peers in socially acceptable ways, and accept direction from adults.”* Pendapat tersebut bermakna bahwa salah satu pandangan umum perihal kesiapan adalah siswa siap untuk mulai sekolah ketika mereka mencapai tingkat kematangan yang membuat mereka mampu untuk duduk tenang, fokus, terlibat secara sosial, dan menerima arahan dari pendidik. Untuk melihat kesiapan psikis siswa, guru dapat menggunakan indikator seperti pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2 Indikator Kesiapan Psikis Siswa

No.	Indikator	Y/T
1.	Siswa tenang dan fokus (berkonsentrasi)	
2.	Menyampaikan pendapat dan aktif dalam diskusi kelompok	
3.	Percaya diri dalam menyampaikan hasil pekerjaan/diskusi	
4.	Bersikap terbuka dan mau menerima arahan dari guru	
5.	Bersikap pantang menyerah dalam belajar	

Seperti halnya pada kesiapan fisik, kesiapan psikis siswa juga memiliki tahapan dari proses identifikasi yang terdiri dari pembuatan instrumen pengukuran kesiapan psikis seperti pada tabel 2 dan dilanjutkan dengan proses pengecekan serta pemberian tindak lanjut oleh pendidik.

c. Kesiapan Kognisi.

Kesiapan dalam diri siswa yang lain dan yang memiliki peranan penting dalam suatu pelaksanaan proses pembelajaran adalah kesiapan kognisi atau kesiapan siswa terhadap materi prasyarat yang harus dikuasai siswa sebelum siswa memulai untuk mempelajari konsep atau materi baru dalam matematika. Adanya perbedaan tingkat kesiapan kognisi pada setiap siswa dengan siswa yang lain sangat mungkin terjadi.

Kegiatan Pembelajaran 2

Selain itu, menurut Ackerman (2005: 9), saat seorang siswa berkata telah siap dalam suatu hal sangat mungkin siswa tersebut tidak siap untuk hal yang lain. Menurut Nasution (2011: 183), perbedaan kesiapan kognisi siswa disebabkan oleh perbedaan ketrampilan intelektual. Keterampilan intelektual merupakan kemampuan seseorang dalam menggunakan pengetahuannya untuk memecahkan masalah.

Sebagai seorang guru, mengetahui tingkat kesiapan kognisi siswa merupakan langkah yang sangat penting. Pengukuran kesiapan kognisi siswa dapat dilakukan dengan memberikan tes yang berisi materi prasyarat atau materi yang harus dikuasai siswa sebelum mempelajari materi baru. Berikut diberikan contoh materi prasyarat yang harus dikuasai siswa ketika siswa akan mempelajari materi baru. Materi prasyarat Pertidaksamaan Linier Dua Variabel (kelas VIII) misalnya adalah kemampuan siswa dalam menyelesaikan persamaan linier dua variabel, membuat koordinat Kartesius, dan menyajikan himpunan dalam berbagai cara.

Setelah guru mengetahui materi prasyarat yang harus dikuasai siswa sebelum mempelajari materi baru yang lebih tinggi, hal yang dilakukan oleh guru adalah menyiapkan instrumen tes untuk mengukur kesiapan kognisi siswa. Tes ini diberikan sebelum pelaksanaan proses pembelajaran. Apabila didapatkan lebih dari 50% siswa di kelas masih belum menguasai materi prasyarat maka guru memberikan penekanan kembali pada materi yang dijadikan prasyarat. Hal tersebut bertujuan agar siswa dapat mengikuti proses pembelajaran materi yang akan dipelajari. Proses pembelajaran yang mensyaratkan penguasaan materi prasyarat sejalan dengan hakekat dari hirarki belajar menurut Gagne (Orton, 1987). Pembelajaran dimulai dari kemampuan, ketrampilan, atau pengetahuan prasyarat yang dikuasai siswa lebih dahulu dan kemudian berlanjut ke materi baru yang akan dipelajari.

D. Aktivitas Pembelajaran

AKTIVITAS 1

1. Bentuklah kelompok yang terdiri dari 4 hingga 6 anggota dan diskusikan di dalam kelompok, tiga (3) anggapan mengenai bakat yang paling banyak diyakini kebanyakan orang.
2. Bagaimana usaha Anda dalam proses pembelajaran untuk mengurangi atau menghilangkan anggapan keliru tersebut di kelas?
3. Kategorikan setiap ciri-ciri siswa yang berbakat matematis pada bagian uraian materi, ke dalam salah satu dari kategori-kategori berikut ini: aspek kognitif, aspek afektif, atau aspek sosial.

AKTIVITAS 2

1. Sebutkan kondisi siswa yang menggambarkan kesiapan dan ketidaksiapan fisik maupun psikis dalam belajar matematika di kelas! Jika teridentifikasi adanya ketidaksiapan siswa, jelaskan cara penanganannya!
2. Tentukan materi matematika SMP yang paling sulit menurut Anda dan kemudian tentukan materi-materi prasyaratnya!

E. Latihan

Untuk memantapkan pemahaman Anda, jawablah pertanyaan di bawah ini.

1. Dengan bahasa Anda sendiri, jelaskan miskonsepsi atau mitos yang tidak benar terkait bakat di kalangan umum!
2. Jelaskan dengan bahasa Anda sendiri, minimal 5 ciri utama siswa yang berbakat matematika!
3. Tentukan kondisi-kondisi berikut apakah sebagai ujud kesiapan fisik atau psikis siswa dengan memberikan *checklist* (\checkmark) pada kolom sesuai!

No.	Kondisi	Keterangan	
		Fisik	Psikis
a.	Siswa terlihat fokus dan mengerti pada penjelasan guru tetapi saat diberikan pertanyaan matematika siswa tidak dapat menjawabnya		
b.	Siswa memahami materi pelajaran tetapi tidak berani		

Kegiatan Pembelajaran 2

	untuk menyampaikannya di depan kelas		
c.	Siswa mengalami kesulitan dalam menulis dikarenakan cedera pada tangan kanannya		
d.	Siswa sudah terlihat mengantuk di jam pelajaran pertama		
e.	Siswa harus selalu duduk di bangku paling depan agar dapat mendengar dan melihat lebih jelas saat pembelajaran berlangsung		

4. Jika akan dilakukan pembelajaran pada materi Kesebangunan, materi prasyarat yang harus dikuasai siswa sebelumnya adalah ...
5. Jika diberikan tes kesiapan kognisi untuk mengetahui penguasaan materi prasyarat sebagai berikut, maka tentukan penyelesaian dan materi lanjutan yang dapat digunakan.
 - a. $\frac{1}{8} \times 360^\circ = \dots$; Besar sudut satu putaran penuh adalah \dots° .
 - b. Rata-rata dari nilai matematika 70, 80, 95, 82, dan 75 adalah

F. Rangkuman

Bakat merupakan potensi kemampuan siswa yang bersifat unggul. Siswa yang berpotensi ataupun yang berbakat matematika memiliki karakteristik tertentu, utamanya antara lain: cepat belajar akan hal baru, fleksibel dan unik dalam memecahkan masalah dan menyampaikan ide, pemahaman dan observasi yang mendalam, kegigihan dalam bekerja/berpikir, percaya diri dan berani mengambil resiko, terampil mengaplikasi ke situasi yang baru, dapat berpikir abstrak dan efisien, intuisi yang tajam, dan cenderung berpikir strategis daripada prosedural.

Siswa yang berbakat matematika tidak selalu sama dengan siswa dengan prestasi akademik yang tinggi.

Kesiapan belajar siswa dapat menentukan keberhasilan proses pembelajaran dalam mencapai tujuannya. Terdapat tiga jenis kesiapan belajar siswa yaitu kesiapan fisik, kesiapan psikis, dan kesiapan kognisi siswa. Cara maupun instrumen pengukuran tingkat kesiapan belajar siswa disesuaikan dengan jenis kesiapan yang hendak diukur.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Periksalah pemahaman Anda terhadap materi yang disajikan dalam modul ini. Jika Anda dapat memahami sebagian besar materi dan dapat menjawab sebagian besar latihan/tugas, maka Anda dapat dianggap menguasai kompetensi yang diharapkan. Namun jika tidak atau Anda merasa masih belum optimal, silakan dipelajari kembali dan berdiskusi dengan teman sejawat untuk memantapkan pemahaman dan memperoleh kompetensi yang diharapkan.

Kegiatan Pembelajaran 3

Kesulitan Belajar Siswa

A. Tujuan

Guru memiliki pemahaman mengenai kesulitan belajar, ketidakmampuan belajar (*learning disability*), macam kesulitan belajar matematika, faktor penyebab kesulitan belajar, serta diagnosis kesulitan belajar.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

Guru dapat:

1. menjelaskan pengertian kesulitan belajar secara umum,
2. menjelaskan macam kesulitan belajar siswa,
3. menjelaskan pengertian ketidakmampuan belajar (*learning disability*),
4. menjelaskan macam ketidakmampuan belajar,
5. menjelaskan kesulitan siswa dalam belajar matematika,
6. menjelaskan sebab-sebab kesulitan belajar, dan
7. menjelaskan cara mendiagnosis kesulitan belajar.

C. Uraian Materi

1. Pengertian Kesulitan Belajar

Kesulitan belajar (*learning difficulty*) dalam modul ini dibedakan dengan ketidakmampuan belajar (*learning disability*). Kesulitan belajar merupakan istilah yang lebih bersifat umum, sementara ketidakmampuan belajar merupakan salah satu jenisnya.

Secara sederhana, kesulitan belajar dapat dinyatakan sebagaimana literatur berikut: Dalam keadaan di mana anak didik/siswa tidak dapat belajar sebagaimana mestinya, itulah yang disebut dengan “kesulitan belajar” (Abu & Widodo, 1991: 74). Namun demikian, ada beberapa literatur yang mendeskripsikan kesulitan belajar dari sudut pandang tertentu, misalnya bahwa kesulitan belajar adalah suatu kondisi di mana anak didik tidak dapat belajar secara wajar, disebabkan adanya ancaman, hambatan ataupun gangguan dalam belajar (Syaiful B. Djamarah, 2011: 235), atau

kesulitan belajar ialah kesukaran yang dialami siswa dalam menerima atau menyerap pelajaran, kesulitan belajar yang dihadapi siswa ini terjadi pada waktu mengikuti pelajaran yang disampaikan/ditugaskan oleh seorang guru. (Alisuf, 1996: 88).

Dalam modul ini, kesulitan belajar didefinisikan secara sederhana yaitu siswa tidak mampu belajar sebagaimana mestinya. Jadi, siswa mengalami kesulitan yang utamanya berasal dari dalam diri siswa, namun demikian faktor-faktor kesulitan itu dapat saja berasal dari luar diri siswa tersebut. Dengan demikian, kegaduhan di luar kelas, guru yang tidak responsif, dan semacamnya walaupun menjadi faktor gangguan belajar, tidak termasuk pada ranah kesulitan belajar siswa.

2. Macam Kesulitan Belajar

Kesulitan-kesulitan belajar dapat dikelompokkan berdasarkan beberapa klasifikasi, misalnya kesulitan yang berat dan kesulitan yang ringan, kesulitan di mata pelajaran tertentu dan kesulitan di semua mata pelajaran, kesulitan di ranah psikomotorik, afektif, atau kognitif, kesulitan permanen atau sementara, kesulitan karena faktor genetik atau tidak, dan kesulitan karena inteligensi atau tidak.

Menurut Mulyadi (2010:6-7), kesulitan belajar mempunyai pengertian yang luas dengan kedalaman pengertiannya seperti berikut ini.

a) *Learning Disorder* (ketergangguan belajar)

Keadaan di mana proses belajar seseorang terganggu karena timbulnya respons yang bertentangan. Pada dasarnya orang yang mengalami gangguan belajar, proses belajarnya yang terganggu atau terhambat oleh adanya respons-respons yang bertentangan. Dengan demikian hasil belajarnya lebih rendah dari potensi yang dimiliki.

b) *Learning Disabilities* (ketidakmampuan belajar)

Ketidakmampuan seseorang murid yang mengacu kepada gejala dimana murid tidak mampu belajar sehingga hasil belajarnya di bawah potensi intelektualnya.

c) *Learning Disfuntion* (ketidakfungsian belajar)

Gejala dimana proses belajar tidak berfungsi dengan baik meskipun pada dasarnya tidak ada tanda-tanda subnormalitas mental, alat indra, atau gangguan-gangguan psikologis lainnya.

d) *Under Achiever* (pencapaian rendah)

Mengacu kepada murid-murid yang memiliki tingkat potensi intelektual di atas normal, tetapi prestasi belajarnya tergolong rendah. Prestasi belajar ditentukan oleh suatu penilaian setelah proses pembelajaran.

e) *SlowLearner* (lambat belajar)

Siswa yang lambat dalam proses belajarnya sehingga membutuhkan waktu dibandingkan dengan murid-murid yang lain yang memiliki taraf potensi intelektual yang sama.

3. Ketidakmampuan Belajar (*Learning Dissability*)

Terkadang orang menyamakan kesulitan belajar dengan ketidakmampuan belajar. Ketidakmampuan belajar (*Learning Dissability*) sendiri bentuk kesulitan belajar yang khusus, karena kelemahan pada indera yang terkait dengan koordinasi saraf.

Disabilitas belajar atau ketidakmampuan belajar bukanlah masalah yang berkenaan dengan inteligensi atau motivasi (*A learning disability is not a problem with intelligence or motivation*)(Kemp, Smith, & Gella, 2015). Karakteristik utama disabilitas belajar adalah prestasi akademik siswa yang rendah dalam membaca, menulis, atau ber matematika sementara inteligensinya sama atau di atas rata-rata, pembelajaran berlangsung normal, aturan sekolah yang normal, serta faktor-faktor lingkungan juga mendukung pembelajaran. (Waaryk, Harrison, dan Prentice, 2004: 10)

Disabilitas belajar menunjuk pada gangguan yang berefek pada penerimaan, pengorganisasian, ingatan, pemahaman, atau penggunaan informasi verbal maupun non-verbal. Gangguan ini berdampak pada belajar siswa walaupun siswa tersebut menunjukkan kemampuan yang di atas rata-rata untuk kemampuan berpikir. Jadi, disabilitas belajar berbeda dengan tingkat intelektual yang rendah. (The Learning Disabilities Association of Canada (LDAC), dalam Waaryk, Harrison, dan Prentice, 2004: 10).

Disabilitas belajar bersifat sepanjang hayat dan kemunculannya mungkin bervariasi antar individu, bergantung kepada interaksi antara lingkungan belajar dan kebutuhan serta kemampuan siswa. Disabilitas belajar berkaitan erat dengan faktor

Kegiatan Pembelajaran 3

genetik dan/atau neurologikal (kemampuan berpikir yang dipengaruhi keadaan syaraf otak) yang mempengaruhi fungsi otak sehingga berdampak pada satu atau beberapa proses belajar siswa. Namun gangguan ini bukan pada masalah kegagalan fungsi indera, cacat tubuh, masalah psikologis, maupun masalah eksternal. Seringkali masalah disabilitas belajar tersebut ikut memperparah kesulitan belajar.

Berikut ini beberapa ketidakmampuan belajar yang tidak disebabkan karena kekurangan biologis namun lebih disebabkan oleh rendahnya kerja dan koordinasi otak (neurologis): (Kemp, Smith, & Segal (2015), BC (2011), LDA (2015), dan Berret (2015)).

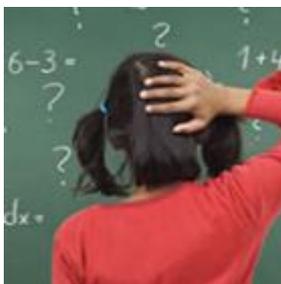
a) *Auditory Processing Disorder (APD)*



Gambar 2 Ilustrasi APD (<http://ldaamerica.org>)

Orang dengan APD bukanlah tuli tetapi memiliki hambatan untuk memahami apa yang didengar. Mereka mungkin mendengar sayup-sayup, mungkin tidak jelas, mungkin tidak dapat membedakan urutan kata yang terdengar, atau tidak dapat menentukan darimana suara berasal. Masalahnya bukan pada ketidakmampuan mendengar tetapi ketidakmampuan otak memproses apa yang didengar.

b) *Dyscalculia*



Gambar 3 Ilustrasi Dyscalculia (<http://ldaamerica.org>)

Orang dengan ketidakmampuan ini mengalami kesulitan untuk memahami konsep bilangan dan belajar fakta-fakta matematika. Mereka memiliki pemahaman yang

rendah mengenai simbol-simbol matematika, mungkin berusaha sangat keras sekedar untuk mengingat simbol-simbol, juga kesulitan menyatakan waktu, dan tentu saja berhitung. Di beberapa literatur, pengertian dyscalculia juga meliputi seluruh tipe ketidakmampuan matematis mulai dari ketidakmampuan memahami simbol hingga ketidakmampuan memecahkan masalah.

c) *Dysgraphia*



Gambar 4 Ilustrasi *Dysgraphia* (<http://ldaamerica.org>)

Dysgraphia adalah ketidakmampuan belajar yang berdampak pada kemampuan menulis. Mereka tidak mampu menulis dengan lancar seperti kebanyakan orang dan gerak motorik yang tidak sempurna. Mereka menulis dengan tidak rapi, spasi tulisan yang tidak teratur, penulisan kata yang cenderung tidak tepat, dan mungkin juga mengalami kesulitan dalam membuat rangkaian kata menjadi suatu kalimat bermakna karena ketidakmampuan berpikir dan menulis dalam waktu yang bersamaan.

d) *Dyslexia*



Gambar 5 Ilustrasi *Dyslexia* (<http://ldaamerica.org>)

Dyslexia adalah kesulitan dalam menggunakan dan memproses kode-kode simbolik dan linguistik, huruf-huruf alpabetik yang merepresentasikan suara percakapan

atau numerik yang merepresentasikan bilangan atau kuantitas. (Berret, 2015 : 4). Ini terkait dengan ketidakmampuan dalam membaca dan keterampilan yang berkaitan dengan proses bahasa. Mereka mengalami hambatan dalam hal membaca dengan lancar, memahami bacaan, berbicara, membaca menirukan, atau melafalkan kata. Dyslexia kadang disebut dengan *Language-Based Learning Disability*.

e) *Language Processing Disorder*

Ini merupakan APD yang bersifat lebih khusus. Jika LPD berefek pada penafsiran oleh otak apa yang didengarkan, maka LPD hanya terkait dengan bagaimana memproses bahasa. Mereka kesulitan menangkap arti dari kata-kata, kalimat atau cerita yang didengar.

f) *Non-Verbal Learning Disabilities*

Terdapat perbedaan signifikan antara bahasa verbal yang baik dengan bahasa tubuh, kemampuan gerak, dan kemampuan sosial yang rendah. Mereka mengalami kesulitan dalam memahami bahasa tubuh, ekspresi wajah, dan mungkin memiliki koordinasi (tubuh) yang rendah.

g) *Visual Perceptual/Visual Motor Deficit*

Ketidakmampuan memahami apa yang dilihat atau ketidakmampuan menggambar atau mencontoh gambar.

h) *ADHD (Attention Deficit Hyperactivity Disorder)*

Gangguan yang meliputi kesulitan untuk tetap fokus dan perhatian, kesulitan mengontrol tingkah laku dan hiperaktif. Walaupun beberapa literatur menganggap ADHD tidak termasuk kesulitan belajar, namun penelitian menunjukkan hampir 50% orang dengan ADHD juga mengalami kesulitan belajar.

i) *Dyspraxia*

Gangguan karena kesulitan dalam gerak otot, yang menyebabkan masalah pada gerak dan koordinasi tubuh. Walaupun tidak termasuk kesulitan belajar, namun berperan besar pada ketidakmampuan belajar seperti dyslexia, dyscalculia, atau ADHD.

j) *Executive Functioning*

Kurang efisiennya sistem manajemen kognitif dari otak yang mempengaruhi proses neuropsikologis seperti merencanakan, mengorganisasi, membuat strategi, memperhatikan dan mengingat detil/rincian, serta mengatur waktu dan tempat.

Walaupun bukan termasuk kesulitan belajar, namun gangguan ini juga terlihat pada kesulitan belajar lainnya, khususnya ADHD.

k) *Memory Deficit*

Jika ada kelemahan dalam kemampuan memorinya dalam hal mengingat informasi baik verbal maupun non-verbal, maka akan mengganggu seseorang dalam hal kemampuan belajarnya.

l) *Autism*

Gangguan syaraf yang disebut autisme, seringkali juga dianggap sebagai disabilitas belajar, karena ketidakmampuan siswa untuk mengorganisasikan perhatian atau fokus dalam proses belajarnya, seperti kesulitan melakukan kontak mata dengan lawan bicara, kesulitan menggerakkan badan atau anggota (gestur) sesuai pesan yang ingin disampaikan, atau kesulitan berkomunikasi.

4. Kesulitan Belajar Matematika

Kesulitan belajar yang telah dipaparkan pada bagian sebelumnya juga merupakan kesulitan belajar matematika. Namun demikian, terdapat beberapa kesulitan belajar yang lebih spesifik pada belajar matematika.

Istilah *Dyscalculia* yaitu ketidakmampuan dalam berhitung, sudah sering dipergunakan untuk menunjukkan ketidakmampuan belajar dalam belajar matematika. Namun, kini istilah kesulitan belajar matematika sudah dipahami secara luas tidak semata-mata pada keterampilan berhitung, namun kesulitan dalam belajar dan menerapkan konsep dan keterampilan matematika.

Geary (dalam Montani, 2007) melaporkan tahun 2004 bahwa 5% hingga 8% siswa teridentifikasi mengalami kesulitan baik dalam pembelajaran membaca maupun matematika. Kesulitan belajar matematika bahkan banyak ditunjukkan dari hasil penelitian yang paling sering terjadi mulai dari sekolah dasar hingga pembelajaran orang dewasa.

Secara umum jenis kesulitan belajar dapat dibagi ke dalam 2 jenis berdasarkan urgensinya, yaitu: kesulitan berhitung dan kesulitan memecahkan masalah matematika. Beberapa penelitian menunjukkan bahwa keterampilan berhitung dasar, merupakan kesulitan belajar matematika yang paling awal muncul dan paling sering terjadi. Lebih parah lagi, kesulitan belajar berhitung menjadi indikasi

Kegiatan Pembelajaran 3

kesulitan belajar matematika yang lebih tinggi. Barangkali hal ini dikarenakan keterampilan berhitung merupakan keterampilan dasar sehingga kesulitannya memberikan pengaruh pada kemampuan dan kecepatan belajar siswa berikutnya. Semenara kesulitan memecahkan masalah juga merupakan kesulitan yang penting karena mempengaruhi cara dan kemampuan berpikir siswa secara umum. Kesulitan ini sering kali dikarenakan pola pembelajaran matematika yang cenderung bersifat ingatan fakta matematika dan latihan prosedur matematika.

Di lain pihak, Berrett (2015: 22), juga mengemukakan beberapa jenis kesulitan belajar matematika yang penting sebagai berikut.

a) *Memory* (memori)

Kemampuan mengingat siswa akan mempengaruhi kecepatan belajarnya. Jika siswa begitu kesulitan dalam mengingat fakta dasar dan aturan dasar, apalagi lambang atau simbol matematika, maka sangat mungkin siswa tersebut mengalami kesulitan dalam belajar matematika. Begitu juga jika siswa mengalami kesulitan mengingat urutan atau prosedur, maka ia tidak akan mampu memecahkan masalah matematika yang setidaknya memuat suatu prosedur atau algoritma matematika.

b) *Reasoning and Logical Thinking* (penalaran dan berpikir logis)

Kelemahan siswa dalam berpikir nalar dan logis sudah barang tentu menghambat kemampuan matematikanya secara menyeluruh. Tidak dapat dipungkiri, bahwa pendidikan matematika di Indonesia jarang membina keterampilan berpikir logis atau bernalar bagi siswa. Dengan demikian jenis ketidakmampuan belajar ini dapat diduga mendera hampir kebanyakan siswa di Indonesia.

c) *Visual-Spatial Relationship* (relasi visual-spasial)

Kelemahan dalam keterampilan visual dan spasial (keruangan) juga menghambat kemampuan matematika, misalnya dalam kesulitan memahami pecahan, kebingungan terkait letak titik pada sistem desimal, bentuk bangun (baik dimensi dua, lebih-lebih dimensi tiga), dan ketidakmampuan membaca pola sederhana dari gambar dan tulisan.

5. Faktor Penyebab Kesulitan Belajar

Secara garis besar, faktor penyebab timbulnya kesulitan belajar terdiri atas dua macam, yakni:

a) Faktor internal

- 1) Faktor fisiologis. Ada banyak faktor fisiologis, misalnya (a) sakit dan kurang sehat; siswa yang sakit akan mengalami gangguan secara fisiologis karena rangsangan yang diterima melalui inderanya, khususnya mata tidak dapat diteruskan ke otak dan diolah secara baik oleh otak. Jika sakit berlangsung dalam waktu yang lama, akan memperparah kesulitan belajarnya, dan (b) karena cacat tubuh; cacat tubuh dibedakan atas cacat tubuh yang ringan dan tetap. Cacat tubuh ringan misalnya kurang pendengaran, kurang penglihatan, dan gangguan psikomotor sedangkan cacat tubuh yang tetap seperti buta, tuli, bisu, serta hilang tangan atau kakinya.
- 2) Faktor psikologis. Beberapa sumber masalah kesulitan belajar yang berasal dari faktor psikologis, antara lain: intelegensi, bakat, minat, motivasi, persepsi, kepercayaan (*belief*), kebiasaan belajar, dan lain-lain.

b) Faktor eksternal

- 1) Faktor-faktor sosial. Faktor sosial bisa berasal dari orang tua, keluarga, teman, guru, dan orang-orang dekat siswa, maupun masyarakat di lingkungannya.
- 2) Faktor-faktor non-sosial. Faktor eksternal non-sosial berasal dari lingkungan non-sosial, misalnya lingkungan alam di rumah siswa atau di sekitar sekolah.

6. Diagnostik Kesulitan Belajar

Ada beberapa cara yang dapat dilakukan untuk mengidentifikasi kesulitan belajar siswa, terutama mengidentifikasi gejala-gejala kesulitan belajar yang timbul.

Menurut konsep *mastery learning*, kesulitan belajar ditandai dengan:

- a) Siswa tidak dapat mencapai ukuran keberhasilan tingkat penguasaan minimal dalam pelajaran tertentu, untuk periode pembelajaran tertentu.
- b) Prestasi belajarnya jauh di bawah potensi yang diperkirakan lebih tinggi.
- c) Siswa tidak mampu melakukan tugas-tugas dalam proses pembelajaran sesuai dengan tingkat perkembangannya.
- d) Siswa tidak mampu menguasai pengetahuan prasyarat.

Kegiatan Pembelajaran 3

Selain itu, perlu diidentifikasi gejala-gejala psikologis lainnya, misalnya:

- a) Siswa mengabaikan dan lambat dalam melakukan aktivitas dan penyelesaian tugas belajar.
- b) Siswa menunjukkan sikap yang kurang produktif bahkan kurang pantas.
- c) Siswa menunjukkan tingkah laku yang tidak mendukung dan tidak wajar.
- d) Siswa menunjukkan emosi yang negatif: marah, tidak acuh, mudah tersinggung, pemurung, dan sebagainya.

Untuk memperoleh informasi yang jelas dan lebih tepat, beberapa cara dapat dilakukan guru untuk mengetahui kesulitan belajar dan penyebabnya, yang gejalanya tampak dari siswa. Beberapa cara tersebut antara lain: tes, wawancara, kuisisioner/angket, portofolio, observasi, hingga pemeriksaan medis. Hal ini dapat dilakukan langsung kepada siswa, orang tua, teman sebaya, dan pihak-pihak lain yang dipandang berhubungan erat dengan kesulitan belajar siswa.

D. Aktivitas Pembelajaran

Baik secara mandiri maupun kelompok, ikuti dan sesuaikan aktivitas pembelajaran berikut ini.

1. Diskusikan di dalam kelompok mengenai macam-macam kesulitan belajar. Setelah itu lengkapi tabel mengikuti format di bawah ini.

No.	Macam kesulitan belajar	Contoh nyata dalam belajar matematika (deskripsikan)	Faktor penyebabnya (daftarkan)
1	Gangguan belajar		
2	Ketidakmampuan belajar		
3	Ketidakberfungsian belajar		
4	Pencapaian rendah		
5	Lambat belajar		

2. Selama ini kesulitan belajar matematika selalu dikaitkan dengan *discalculia*, tetapi seiring berkembangpemahaman akan matematika yang tidak sekedar kegiatan berhitung, maka ketidakmampuan belajar yang lain juga berpengaruh pada kemampuan belajar matematika. Terkait dengan hal tersebut, diskusikan dan lengkapilah menurut tabel di bawah ini.

No	Ketidakmampuan belajar	Pengaruh pada belajar matematika	Alternatif cara belajar/mengajar yang disarankan
1			
2			
3			

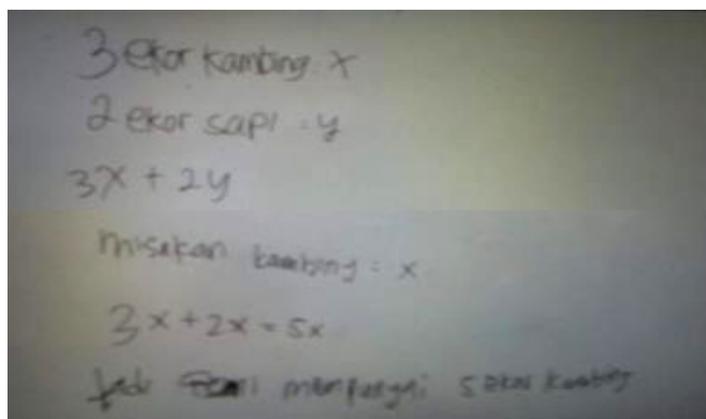
3. Salah satu kesulitan belajar matematika adalah ketidakmampuan siswa dalam melakukan penalaran dan berpikir logis. Diskusikan dan tulis apa saja faktor yang mempengaruhi sehingga siswa memiliki kesulitan tersebut beserta alternatif cara meningkatkannya!
4. Akibat pembelajaran yang bersifat satu arah, proses kurang bermakna di pikiran siswa, ataupun kesalahan cara belajar siswa, maka seringkali istilah, simbol, atau prosedur yang diterima siswa memiliki pengertian yang berbeda dari pengertian sesungguhnya. Ini apa yang dinamakan ***miskonsepsi***. Berdasarkan pengalaman mengajar dan menilai, daftarkanlah beberapa miskonsepsi yang banyak dialami siswa dalam pembelajaran matematika, dan dugalah apa yang mungkin menyebabkannya. Tulislah menurut tabel di bawah ini.

Materi	Miskonsepsi yang terjadi	Mengapa terjadi? Mengapa siswa berpikir demikian? Apa penyebab siswa berpikir demikian?
Bilangan		
Aljabar		
Geometri		
Peluang		
Himpunan		



Kegiatan Pembelajaran 3

5. Gambar di bawah adalah hasil pekerjaan siswa dengan soal “Toni mempunyai 3 ekor kambing, kemudian ayahnya membelikan lagi 2 ekor kambing. Berapa banyak kambing yang dimiliki Toni sekarang?”



Selidikilah, kesalahan apa saja yang diperbuat siswa tersebut? Apa saja miskonsepsi yang dipikirkan siswa?

E. Latihan

Untuk memantapkan pemahaman Anda mengenai materi kesulitan belajar siswa, lakukan tugas berikut ini secara mandiri.

1. Buatlah *resume* atau ringkasan mengenai kesulitan belajar siswa.
2. Buatlah daftar 5 kesulitan belajar paling mencolok pada kelas Anda atau yang paling sering Anda jumpai dalam pembelajaran matematika.

F. Rangkuman

Kesulitan belajar adalah keadaan dimana siswa tidak dapat belajar dengan semestinya dari yang diperkirakan. Banyak jenis kesulitan belajar yang dapat digolongkan dalam beberapa jenis: gangguan belajar, ketidakberfungsian belajar, ketidakmampuan belajar, pencapaian rendah, dan lambat belajar. Penyebab kesulitan belajar dapat berasal dari dalam diri siswa maupun dari luar diri siswa. Secara garis besar, kesulitan belajar matematika digolongkan ke dalam kesulitan berhitung dan kesulitan memecahkan masalah. Akibat dari kesulitan belajar, selain pencapaian kompetensi yang rendah juga munculnya miskonsepsi matematika pada pikiran siswa.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Periksalah pemahaman Anda akan materi yang disajikan dalam modul ini, kemudian cocokkan hasil pengerjaan latihan/tugas dengan kunci jawaban. Jika Anda dapat memahami sebagian besar materi dan dapat menjawab sebagian besar latihan/tugas, maka Anda dapat dianggap menguasai kompetensi yang diharapkan. Namun jika tidak atau Anda merasa masih belum optimal, silakan pelajari kembali dan berdiskusi dengan teman sejawat untuk memantapkan pemahaman dan memperoleh kompetensi yang diharapkan. Setelah selesai mempelajari modul ini, Anda dapat beralih pada modul lain.

Kunci Jawaban Latihan

Sebagai petunjuk atau gambaran singkat atas jawaban soal latihan pada setiap akhir Kegiatan Pembelajaran, berikut ini diberikan pedoman atas solusi esensial/dasarnya.

KB 1: Perkembangan Siswa

1. Pada masa remaja bagian otak yang bertugas memproses informasi berkembang signifikan. Selain itu **amygdala** (bagian otak tempat emosi dan marah) berkembang lebih awal dari **cortex prefrontal** (bagian otak tempat penalaran dan pengambilan keputusan).
2. Senang, sedih, percaya, muak, takut, marah, terkejut, dan antisipasi. Kedelapan emosi merupakan emosi dasar dan dapat membentuk emosi lain yang lebih tinggi atau rendah intensitasnya.
3. Perkembangan sosial siswa adalah proses perkembangan kepribadian siswa dalam berhubungan dengan orang lain dalam kehidupan bermasyarakat.
4. Pada usia 12-18 tahun, siswa telah memasuki kondisi pencarian identitas diri mereka dalam kehidupannya. Tahap ini disebut "*identity vs role confusion*". Pada tahap ini seseorang mulai dihadapkan pada kondisi pencarian identitas diri mereka dalam kehidupannya.
5. Asimilasi adalah proses kognitif dimana seseorang mengintegrasikan persepsi, konsep ataupun pengalaman baru ke dalam skema atau pola yang sudah ada dalam pikirannya. Akomodasi terjadi untuk membentuk skema baru yang cocok dengan rangsangan yang baru atau memodifikasi skema yang telah ada sehingga cocok dengan rangsangan itu.
6. *Openness* (keterbukaan), *Conscientiousness* (kehati-hatian), *Extraversion* (supel), *Agreeableness* (keramahan), *Neuroticism* (kestabilan emosi)
7. Taksonomi SOLO diklasifikasikan menjadi lima level berbeda dan bersifat hirarkis yaitu: *prestructural*, *unistructural*, *multistructural*, *relational*, dan *extended-abstract*.

KB 2: Potensi dan Kesiapan Siswa

1. Fokus pada mitos atau miskonsepsi yang menyebabkan kesalahan cara memandang terkait dengan bakat.

Kunci Jawaban Latihan

2. Ambil 5 ciri utama siswa yang berbakat kemudian uraikan dengan disertai contoh yang terjadi di dalam kelas.
3. Jawaban a. Psikis, b. Psikis, c. Fisik, d. Fisik, e. Fisik
4. Materi prasyarat kesebangunan adalah konsep dasar segitiga, garis dan sudut, perbandingan senilai, dan konsep operasi bilangan bulat dan pecahan.
5. (a) Juring Lingkaran
(b) Statistika (rata-rata gabungan, rata-rata dengan tabel distribusi frekuensi).

KB 3: Kesulitan Belajar Siswa

1. Ringkasan kesulitan belajar memuat tentang pengertian kesulitan belajar, macam kesulitan belajar, ketidakmampuan belajar, kesulitan belajar matematika, faktor penyebab kesulitan belajar, dan diagnostik kesulitan belajar
2. Lima kesulitan belajar paling mencolok di kelas dapat dipilih dari macam kesulitan belajar, ketidakmampuan belajar, dan kesulitan belajar matematika.

---000---

Evaluasi

Untuk setiap soal berikut, pilihlah salah satu pilihan jawaban yang Anda anggap paling tepat.

1. Jika seorang siswa bersikap murung dan banyak bersedih hati, maka guru sebaiknya:
 - A. Memberikan banyak humor untuk menghiburnya
 - B. Berbicara dari hati ke hati untuk mengetahui penyebabnya
 - C. Mengisolir penyebab sikap siswa tersebut agar ia kembali ceria
 - D. Mendekatkan iadenganteman karibnya dalam kelompok yang sama.
2. Berdasarkan karakteristik siswa SMP menurut Teori Piaget, dalam membelajarkan materi tentang “mengidentifikasi sifat-sifat bangun datar dan menggunakannya untuk menentukan keliling dan luas” maka yang paling tepat untuk dilakukan guru adalah...
 - A. membuat kumpulan soal
 - B. menggunakan metode ceramah
 - C. menggunakan bantuan alat peraga
 - D. membuat kumpulan rumus
3. Salah satu ciri siswa berbakat matematika terkait penanganan perhitungan adalah ...
 - A. Langkah perhitungan ringkas dan jelas
 - B. Sesuai rumus yang melibatkan perhitungan
 - C. Melakukan perhitungan dengan rapi dan benar
 - D. Perhitungan cenderung sulit dipahami
4. Salah satu dampak dari kesulitan belajar matematika adalah munculnya miskonsepsi matematika pada siswa, yaitu berupa:
 - A. Rendahnya penguasaan pada suatu konsep matematika
 - B. Memiliki pemahaman yang keliru mengenai simbol dan prosedur matematika
 - C. Kesulitan dalam konseptualisasi suatu permasalahan matematika
 - D. Ketidakmampuan membedakan antara konsep matematika dan bukan konsep matematika

5. Perhatikan soal sebagai berikut:

Hasil dari $\sqrt{21} + \sqrt{3} + \sqrt{1}$ adalah...

Siswa Anda mengerjakan dengan cara sebagai berikut:

$$\text{Hasil dari } \sqrt{21} + \sqrt{3} + \sqrt{1} = \sqrt{21 + 3 + 1} = \sqrt{25} = 5$$

Dengan menggunakan caratersebut, kemungkinan siswa Anda mengalami kesulitan belajar yang disebabkan oleh...

- A. kesalahan terkait konsep, prinsip dan operasi
- B. kesalahan terkait konsep, prinsip dan fakta
- C. kesalahan terkait operasi, fakta dan prinsip
- D. kesalahan terkait fakta, operasi dan prinsip

---000---

Kunci Jawaban Soal Evaluasi

1. C
2. C
3. A
4. B
5. A



Penutup

Penulisan modul ini disertai harapan besar akan kemanfaatan yang dapat dipetik oleh pembaca untuk meningkatkan pemahaman dan keterampilan karakteristik siswa SMP.

Kesempurnaan hanya milik Sang Maha Pencipta sehingga tentu saja modul ini tidak lepas dari kekurangan dan kekeliruan. Oleh karena itu, saran dan kritik yang konstruktif untuk perbaikan modul dan pemanfaatannya, senantiasa diharapkan.

Akhirnya, jika ditemukan ada kekeliruan fatal dalam modul atau saran konstruktif untuk perbaikan esensial terhadap modul ini, silakan disampaikan langsung ke PPPPTK Matematika, Jl.Kaliurang Km.6, Sambisari, Depok, Sleman, DIY, (0274) 881717, atau melalui email sekretariat@p4tkmatematika.org dengan tembusan (cc) ke penulis:

1. sumardyonomatematika@gmail.com;
2. sugiman_uny@yahoo.com; atau
3. marfuahmy@gmail.com.

DAFTAR PUSTAKA

- Abu Ahmadi dan Widodo Supriyono.(1991). *Psikologi Belajar*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Ackerman, D.J. & Steven Barnett. (2003). Prepared For Kindergarten: What Does "Readiness" Mean?.*National Institute for Early Education Research*.
- Alisuf Sabri. (1996). *Psikologi Pendidikan*. Jakarta: Pedomam Ilmu Jaya.
- Berrett, Shantell. (2015). *Learning Disabilities 101: Everything you need to know about how learning disabilities affect reading skills*. USA: Reading Horizons.
- Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982).*Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy (structure of the observed learning outcome)*. Fifth Avenue: Academic Press.
- Boethel, Martha. (2004). *Readiness School, Family, And Community Connection*. Texas: Southwest Educational Development Laboratory (SEDL).
- Bruno, F. J. (1987). *Dictionary of Key Word in Psychology*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Erikson, E. H. (1963). *Childhood and Society* (2nd ed.). New York: Norton.
- Erikson, E. H. (1968). *Identity and Society*. New York: Norton.
- Harjanto.(2000). *Perencanaan Pengajaran*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Hurlock, E. (2002). *Psikologi Perkembangan*. Jakarta: Erlangga
- Hurlock, Elizabeth B. (1980). *Psikologi Perkembangan: Suatu Pendekatan Sepanjang Rentang Kehidupan*. Jakarta: Erlangga.
- Hurlock, Elizabeth B. 1990. *Psikologi Perkembangan Suatu Pendekatan Sepanjang Rentang Kehidupan*. Terjemahan Iswidayanti, dkk. Erlangga. Jakarta.
- Kemp, G., Smith, M., dan Segal, J. (2015).*Learning Disabilities and Disorders Types of Learning Disorders and Their Signs*.dalam <http://www.helpguide.org/articles/learning-disabilities/learning-disabilities-and-disorders.htm> (diakses 1 Desember 2015)
- Meisels, Samuel J. (1998). *Assesing Readiness*. Michigan: University of Michigan School of Education.
- Montani, T. (2007).*Mathematics Disabilities*.dalam <http://www.council-for-learning-disabilities.org/mathematics-disabilities> (diakses 3 Desember 2015)
- Mulyadi.(2010). *Diagnosis Kesulitan Belajar dan Bimbingan Terhadap Kesulitan Belajar Khusus*. Yogyakarta: Nuha Litera.
- Nasution.(2011). *Berbagai Pendekatan Dalam Proses Belajar Dan Mengajar*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Oemar Hamalik. (2005). *Perencanaan Pengajaran Berdasarkan Pendekatan Sistem*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Orton, A. (1987). *Learning Mathematics*. London: Casel Educational Limited.

Daftar Pustaka

- Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 16 Tahun 2007.
- Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 24 Tahun 2007.
- Santrock, John W. 2011. *Life-Span Development* (Perkembangan Masa Hidup). Terjemahan Benedictine Widyasinta. Erlangga. Jakarta
- Scherer, K. R. (2005). "What are emotions? And how can they be measured?". *Social Science Information* 44: 693–727.
- Shaffer.(2005). *Social and Personality Development*. Belmont, California: Thompson Wardworth
- Slameto.(2010). *Belajar Dan Faktor-Faktor Yang Mempengaruhinya*.Jakarta: Rineka Cipta.
- Slavin, R. E. (2006).*Educational Psychology: Theory and practice* (8th ed.). Boston: Pearson Educational.Inc.
- Slavin, Robert E. 2012.*Educational Psychology: Theory and Practice 10/E*. Pearson.
- Suherman, E., Turmudi, Suryadi, D., Herman, T., Suhendra, Prabawanto, S., et al. (2003). Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer. Bandung: JICA.
- Sukmadinata, Nana Syaodah. (2005). *Landasan Psikologi Proses Pendidikan*. Bandung: PT. Rosda Karaya Remaja.
- Sunarto & Agung Hartono.(2002). *Perkembangan Peserta Didik*.Jakarta : PT. Rineka Cipta
- Syaiful Bahri Djamarah. (2011). *Psikologi Belajar*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle School Mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Pearson Education, Inc.
- Waaryk, L., Harrison, G., dan Prentice, B. (2004).*Teaching Student with Reading Difficulties and Disabilities*. Saskatchewan (Kanada): Saskatchewan Learning, University of Saskatchewan.
- Wikipedia.(2015). *Emotion*.dalam https://en.wikipedia.org/wiki/Emotion#cite_note-FOOTNOTEFox200816.E2.80.9317-14 (diakses 3 Des 2015)
- Wikipedia.(2015). *Emotional Intelligence*.dalam https://en.wikipedia.org/wiki/Emotional_intelligence#cite_note-A_Dictionary_of_Psychology-1 (diakses 6 Des 2015).
- World Health Organization (2006). *Adolescent Nutrition: A Review of The Situation in Selected South-East Asian Countries*. http://apps.searo.who.int/PDS_DOCS/B0239.pdf?ua=1 (diakses pada 19 Desember 2015 pukul 20.00 WIB)

GLOSARIUM

- Krisis psikososial : Persoalan krisis yang harus diatasi masing-masing orang ketika melewati tiap-tiap tahap perkembangan psikososial Erikson.
- Otonomi : Kemampuan individu melakukan sendiri segala sesuatu.
- Teori psikososial : beberapa prinsip yang menghubungkan lingkungan sosial dengan perkembangan psikologis.
- Adaptasi : Proses penyesuaian skema sebagai tanggapan atas lingkungan melalui asimilasi dan akomodasi
- Akomodasi : Mengubah skema yang telah ada agar sesuai dengan situasi yang baru
- Asimilasi : Memahami pengalaman/ pengetahuan baru berdasarkan skema yang ada
- Equilibrasi : Proses memulihkan keseimbangan antara pemahaman sekarang dengan pemahaman baru
- Kesiapan fisik : kesiapan belajar siswa dalam hal fisik siswa yang dapat terlihat dengan jelas oleh pendidik.
- Kesiapan kognisi : kesiapan belajar siswa dalam hal materi pembelajaran prasyarat yang digunakan sebelum mempelajari materi yang baru.
- Kesiapan psikis : kesiapan belajar siswa dalam hal psikologi siswa.

---000---



GURU PEMBELAJAR

MODUL MATEMATIKA SMP

KELOMPOK KOMPETENSI A

PROFESIONAL

BILANGAN

**DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN**

2016

Penulis:

1. Dr. Imam Sujadi, M.Si.
08121565696, imamsujadi@ymail.com
2. Dr. Abdurrahman As'ari, M.Pd., M.A.
081 334 452 615,abdur.rahman.fmipa@um.ac.id

Penelaah:

1. Drs. M. Fauzan, M.Sc.ST
082137545916, fauzan3264@gmail.com
2. Dr.Drs. Sugiman, M.Si.,
08122786314, sugiman_uny@yahoo.com

Ilustrator:

R.Haryo Jagad P

Copyright © 2016

Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengcopy sebagian atau keseluruhan isi buku ini untuk kepentingan komersial tanpa izin tertulis dari Kementerian Pendidikan Kebudayaan.

Kata Pengantar

Peningkatan kualitas pendidikan saat ini menjadi prioritas, baik oleh pemerintah pusat maupun daerah. Salah satu komponen yang menjadi fokus perhatian adalah peningkatan kompetensi guru. Peran guru dalam pembelajaran di kelas merupakan kunci keberhasilan untuk mendukung keberhasilan belajar siswa. Guru yang profesional dituntut mampu membangun proses pembelajaran yang baik sehingga dapat menghasilkan output dan outcome pendidikan yang berkualitas.

Dalam rangka memetakan kompetensi guru, telah dilaksanakan Uji Kompetensi Guru (UKG) Tahun 2015. UKG tersebut dilaksanakan bagi semua guru, baik yang sudah bersertifikat maupun belum bersertifikat untuk memperoleh gambaran objektif kompetensi guru, baik profesional maupun pedagogik. Hasil UKG kemudian ditindaklanjuti melalui Program Guru Pembelajar sehingga diharapkan kompetensi guru yang masih belum optimal dapat ditingkatkan.

PPPPTK Matematika sebagai Unit Pelaksana Teknis Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan di bawah pembinaan Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan mendapat tugas untuk menyusun modul guna mendukung pelaksanaan Guru Pembelajar. Modul ini diharapkan dapat menjadi sumber belajar bagi guru dalam meningkatkan kompetensinya sehingga mampu mengambil tanggung jawab profesi dengan sebaik-baiknya.

Yogyakarta, Maret 2016

Kepala PPPPTK Matematika,



Dr. Dra. Daswatia Astuty, M.Pd.

196002241985032001

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Daftar Isi.....	v
Daftar Gambar.....	ix
Pendahuluan.....	1
A. Latar Belakang.....	1
B. Tujuan.....	1
C. Peta Kompetensi.....	2
D. Ruang Lingkup	3
E. Saran Cara Penggunaan Modul.....	3
Kegiatan Pembelajaran 1 Sistem Bilangan	5
A. Tujuan.....	5
B. Indikator Pencapaian Kompetensi.....	5
C. Uraian Materi.....	5
1. Pendahuluan.....	5
2. Sistem Bilangan Asli.....	6
3. Sistem Bilangan Bulat	9
4. Sistem Bilangan Real	12
D. Aktivitas Pembelajaran.....	16
E. Latihan/Kasus/Tugas.....	19
F. Rangkuman.....	19
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut.....	20
Kegiatan Pembelajaran 2 Keterbagian, Fpb, Dan Kpk.....	23
A. Tujuan.....	23
B. Indikator Pencapaian Kompetensi	23
C. Uraian Materi.....	23



Daftar Isi

1. Keterbagian	23
2. Ciri Bilangan Habis Dibagi	24
3. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)	27
4. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK).....	30
D. Aktifitas Pembelajaran.....	33
E. Latihan/Kasus/Tugas	34
F. Rangkuman	34
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut	35
Kegiatan Pembelajaran 3 Pola Bilangan	39
A. Tujuan.....	39
B. Indikator Pencapaian Kompetensi	39
C. Uraian Materi.....	39
D. Aktivitas Pembelajaran.....	41
H. E. Latihan/Kasus/Tugas	42
F. Rangkuman	43
I. G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut	43
Kegiatan Pembelajaran 4 Barisan Dan Deret.....	45
J. Tujuan.....	45
K. Indikator Pencapaian Kompetensi	45
L. Uraian Materi	46
1. Barisan Bilangan	46
D. Aktivitas Pembelajaran.....	52
E. Latihan/Kasus/Tugas	53
F. Rangkuman	54
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut	55
Kegiatan Pembelajaran 5 Bentuk Akar.....	57
A. Tujuan.....	57

B. Indikator Pencapaian Kompetensi.....	57
C. Uraian Materi.....	57
D. Aktifitas Pembelajaran.....	63
E. Latihan/Kasus/Tugas.....	64
F. Rangkuman.....	64
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut.....	65
Kegiatan Pembelajaran 6Aritmetika Sosial.....	69
A. Tujuan.....	70
B. Indikator Ketercapaian Kompetensi	70
C. Uraian Materi.....	70
1. Harga Satuan dan Harga Keseluruhan.....	70
2. Untung dan Rugi.....	72
3. Persentase Keuntungan/Kerugian.....	73
4. Diskon.....	75
5. Bruto, Netto dan Tara.....	77
D. Aktivitas Pembelajaran.....	79
E. Latihan/Kasus/Tugas.....	80
F. Rangkuman.....	80
G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut.....	80
Kegiatan Pembelajaran 7 Estimasi Dan Aproksimasi	83
A. Tujuan.....	83
B. Indikator Ketercapaian Kompetensi	83
C. Uraian Materi.....	83
D. Aktivitas Pembelajaran.....	97
E. Latihan/Kasus/Tugas.....	98
F. Rangkuman.....	98
H. Umpan Balik dan Tindak Lanjut.....	99

Daftar Isi

Kunci Jawaban.....	101
A. Kegiatan Pembelajaran 1.....	101
B. Kegiatan Pembelajaran 2.....	102
C. Kegiatan Pembelajaran 5.....	103
Evaluasi.....	105
Penutup.....	111
Daftar Pustaka.....	115
Glosarium.....	117

Daftar Gambar

Gambar 1. Garis Bilangan Real.....	12
Gambar 2. Sistem Bilangan.....	17



Daftar Gambar

Pendahuluan

Pada bagian pendahuluan ini, akan disajikan latar belakang penulisan modul, tujuan, peta kompetensi, ruang lingkup, dan saran penggunaan modul.

A. Latar Belakang

Dalam rangka mencapai tujuan pendidikan nasional yakni mencerdaskan kehidupan bangsa dan mengembangkan manusia seutuhnya, maka sangat dibutuhkan peran serta pendidik yang profesional. Hal ini sejalan dengan Undang-undang Sistem Pendidikan Nasional, bahwa jabatan guru sebagai pendidik merupakan jabatan profesional. Sebagai tenaga profesional, guru dituntut untuk selalu mengembangkan diri sejalan dengan kemajuan ilmu pengetahuan, teknologi, dan seni. Kondisi dan situasi yang ada menjadi sebab masing-masing guru memiliki perbedaan dalam penguasaan kompetensi yang disyaratkan. Oleh karena itu, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan mengukur profesionalisme guru, secara akademis dan non-akademis.

Penguasaan materi matematika, merupakan salah satu syarat utama bagi seorang Guru matematika SMP/MTs agar mampu membelajarkan matematika dengan baik. Penguasaan materi matematika yang baik, memungkinkan guru melakukan improvisasi dalam kegiatan pembelajaran mereka, sehingga pembelajaran terkesan dinamis, tidak sekedar mengikuti urutan buku teks yang digunakan. Penguasaan materi matematika yang baik juga memungkinkan guru memiliki kepercayaan diri yang tinggi, dan membantu guru mengelola kelas dengan baik.

Bilangan merupakan materi yang dibelajarkan di SMP/MTs. Terdapat kurang lebih 10 Kompetensi Dasar yang berkaitan dengan bilangan yang tersebar di kelas VII sampai kelas IX. Dengan kata lain penguasaan Guru akan materi ini sangat penting karena akan meningkatkan profesionalisme Guru dalam membelajarkan mata pelajaran matematika di SMP/MTs. Untuk itulah modul ini dikembangkan.

B. Tujuan

Tujuan dari penyusunan modul guru pembelajar materi bilangan ini adalah: (1) meningkatkan kompetensi guru matematika SMP/MTs terkait dengan kompetensi profesional, (2) menambah wawasan guru tentang bilangan, yakni sistem bilangan



yang terdiri dari sistem bilangan asli, bulat, rasional, dan real, Keterbagian, FPB, KPK, pola bilangan, barisan dan deret, bentuk akar, aritmetika sosial, estimasi, serta aproksimasi, (3) memfasilitasi para guru dalam mengelola kegiatan pembelajaran, khususnya terkait dengan materi bilangan agar lebih profesional.

C. Peta Kompetensi

Peta kompetensi yang harus dikuasai guru terkait dengan materi bilangan adalah sebagai berikut.

Kompetensi Inti Guru Mapel Matematika

20. Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu.

Kompetensi Guru Matapelajaran Matematika

20.1 Menggunakan bilangan, hubungan diantara bilangan, berbagai sistem bilangan dan teori bilangan.

Indikator Pencapaian Kompetensi Esensial Guru Matematika SMP/MTs

20.1.1 Menggunakan bilangan dalam pemecahan masalah

20.1.2 Menggunakan hubungan diantara bilangan untuk memecahkan masalah

20.1.3 Menggunakan berbagai sistem bilangan dalam pemecahan masalah

20.1.4 Menggunakan teori bilangan dalam pemecahan masalah

20.1.5 Menganalisis hubungan berbagai jenis dan bentuk bilangan

20.1.6 Menerapkan operasi pada bilangan dan aturannya pada berbagai konteks permasalahan

20.1.7 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pola bilangan

20.1.8 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan barisan bilangan

20.1.9 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan deret bilangan

20.1.10 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan konsep dan sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar

D. Ruang Lingkup

Penyusunan modul ini dimaksudkan untuk memberikan gambaran bagi guru matematika SMP tentang materi bilangan dalam pembelajaran Matematika. Dalam modul ini akan dibahas tentang sistem bilangan, yang memuat sistem bilangan asli, bilangan bulat, sistem bilangan rasional, sistem bilangan real, keterbagian, FPB, KPK, pola bilangan, barisan dan deret, bentuk akar, aritmetika sosial, estimasi, serta aproksimasi.

Materi yang dibahas dalam modul ini tertuang dalam tujuh kegiatan belajar sebagai berikut.

Kegiatan Belajar 1: Sistem Bilangan

Kegiatan Belajar 2: Keterbagian, FPB dan KPK

Kegiatan Belajar 3: Pola Bilangan

Kegiatan Belajar 4: Barisan dan Deret

Kegiatan Belajar 5 : Bentuk Akar

Kegiatan Belajar 6 : Aritmetika Sosial

Kegiatan Belajar 7 : Estimasi dan Aproksimasi

E. Saran Cara Penggunaan Modul

Modul ini secara khusus diperuntukkan bagi guru yang mengikuti pelatihan setelah menempuh Ujian Kompetensi Guru (UKG) atau sedang belajar mandiri secara individu atau dengan teman sejawat.

Berikut ini beberapa saran dalam cara penggunaan dan pemanfaatan modul.

1. Bacalah modul ini secara runtut, dimulai dari Pendahuluan, agar dapat lebih mudah dan lancar dalam mempelajari kompetensi dan materi dalam modul ini.
2. Lakukan aktivitas belajar yang terdapat pada modul. Dalam melakukan aktivitas belajar tersebut, sesekali dapat melihat kembali materi di dalam modul.

Pendahuluan

3. Materi di dalam modul lebih bersifat ringkas dan padat, sehingga dimungkinkan untuk menelusuri literatur lain yang dapat menunjang penguasaan kompetensi.
4. Setelah melakukan aktivitas belajar, barulah berusaha untuk menyelesaikan latihan dan/atau tugas yang ada. Jangan tergoda untuk melihat kunci dan petunjuk jawaban. Kemandirian dalam mempelajari modul akan menentukan seberapa jauh penguasaan kompetensi.
5. Setelah memperoleh jawaban atau menyelesaikan tugas, bandingkan dengan kunci atau petunjuk jawaban.
6. Lakukan refleksi berdasarkan proses belajar yang telah dilakukan dan penyelesaian latihan/tugas. Bagian rangkuman dapat dijadikan modal dalam melakukan refleksi. Hasil refleksi yang dapat terjadi antara lain ditemukan beberapa bagian yang harus direviu dan dipelajari kembali, ada bagian yang perlu dipertajam atau dikoreksi, dan lain lain.
7. Setelah mendapatkan hasil refleksi, rencanakan dan lakukan tindak lanjut yang relevan. Baik dalam sesi pelatihan maupun di luar sesi pelatihan.

Kegiatan Pembelajaran 1

Sistem Bilangan

A. Tujuan

Peserta dapat menjelaskan berbagai sistem bilangan dan mampu menggunakan dalam pemecahan masalah matematika

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Peserta mampu mendeskripsikan sistem bilangan asli
2. Peserta mampu mendeskripsikan sistem bilangan bulat
3. Peserta mampu mendeskripsikan sistem bilangan real.
4. Peserta mampu menggunakan berbagai sistem dalam pemecahan masalah matematika

C. Uraian Materi

1. Pendahuluan

Pernahkah Anda berpikir bahwa setiap orang mulai dari bangun tidur hingga mau tidur kembali aktivitasnya tidak bisa dipisahkan dengan bilangan? Aktivitas tersebut diantaranya adalah suatu aktivitas ingin mengetahui waktu, suhu, frekwensi pekerjaan, kuantitas kebutuhan, dan masih banyak aktivitas lain yang semuanya membutuhkan bilangan. Jadi bilangan adalah hal yang tidak bisa dipisahkan dari kehidupan manusia. Bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Simbol atau lambang yang digunakan untuk merepresentasikan suatu bilangan disebut sebagai angka atau lambang bilangan. Pernahkah anda mendengarkan siaran radio atau menonton televisi dengan acara perkiraan cuaca? Bilangan apakah yang digunakan oleh penyiar radio pada acara tersebut? Cukupkah bilangan asli atau bilangan cacah untuk menggambarkan situasi di atas? Pernahkah anda mengamati suatu pintu air di sungai, bilangan apa sajakah yang terdapat pada skala pada pintu air itu? Pernahkah anda mengamati suatu termometer, bilangan apa sajakah yang terdapat pada skala termometer itu?



Untuk itu modul ini akan membahas tentang berbagai macam bilangan, operasi bilangan yaitu prosedur-prosedur tertentu yang mengambil satu atau lebih bilangan sebagai masukan dan menghasilkan bilangan lain sebagai keluran, dan sistem bilangan merupakan penerapan berbagai metode aksiomatik dari logika atas himpunan bilangan, relasi dan operasi yang berlaku pada himpunan bilangan itu, serta penggunaan bilangan dalam masalah aritmetika sosial.

2. Sistem Bilangan Asli

a. Pengertian Bilangan Asli

Bilangan asli adalah bilangan kardinal dari himpunan berhingga yang tidak kosong. Bilangan kardinal adalah banyaknya anggota suatu himpunan. Banyaknya anggota himpunan menyatakan suatu hasil membilang. Oleh karena menyatakan suatu hasil membilang, hal ini tidak mungkin bernilai negatif tetapi mungkin saja bernilai nol. Sehingga disyaratkan bilangan kardinal yang tidak kosong (nol). Dari pengertian tersebut, yang dimaksud bilangan-bilangan asli adalah: 1, 2, 3, 4, 5,

Himpunan yang beranggotakan semua bilangan asli disebut dengan himpunan bilangan asli yang dilambangkan dengan N .

Jadi $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ atau $N = \{x | x \text{ bilangan asli}\}$. Andaikan suatu himpunan H mempunyai p anggota maka dikatakan bilangan kardinal dari himpunan H adalah p , ditulis $n(H) = p$, p disini merupakan bilangan asli, dengan syarat H tidak kosong.

b. Operasi Pada Bilangan Asli

1). Operasi Penjumlahan

Definisi: "Jika p dan q bilangan-bilangan asli, H dan G himpunan-himpunan dengan $p = n(H)$, $q = n(G)$ dan $H \cap G = \emptyset$, maka $p + q = n(H \cup G)$. Sebagai contoh jika $H = \{1,2,3\}$ dan $G = \{7,8,9\}$ diperoleh $p = n(H) = 4$ dan $q = n(G) = 3$ serta $H \cap G = \emptyset$, $H \cup G = \{1,2,3,4,7,8,9\}$ sehingga $3 + 4 = n(H \cup G) = 7$.

Sifat-sifat penjumlahan pada bilangan asli adalah sebagai berikut.

- a) tertutup, yaitu jika p adalah bilangan asli dan q adalah bilangan asli maka $p + q$ juga merupakan bilangan asli.
- b) komutatif, yaitu Jika p adalah bilangan asli dan q adalah bilangan asli maka $p + q = q + p$
- c) asosiatif, yaitu Jika p , q , dan r adalah bilangan asli maka $(p + q) + r = p + (q + r)$
- d) Untuk setiap bilangan asli p , q dan r , jika $p + r = q + r$ maka $p = q$

2). Operasi Pengurangan

Definisi: "Jika p dan q bilangan-bilangan asli, H dan G himpunan-himpunan dengan $G \subset H$, $p = n(H)$ dan $q = n(G)$ maka $p - q = n(H - G)$." Definisi tersebut menyatakan jika p bilangan asli dan q bilangan asli maka $p - q$ dapat dioperasikan apabila $p = n(H)$ dan $q = n(G)$ dengan H dan G suatu himpunan dengan syarat G himpunan bagian dari H . Dalam hal G bukan subset dari H maka operasi pengurangan pada bilangan asli tidak dapat dilakukan. Contoh : Suatu himpunan $H = \{4,5,6,7,8,9\}$ dan

$G = \{2,3,4,5\}$, sehingga $p = n(H) = 6$ dan $q = n(G) = 4$. Perhatikan bahwa G bukan subset dari H , karena ada anggota G yang tidak termasuk pada H . Jadi $p - q$ tidak dapat dioperasikan. Operasi pengurangan bilangan Asli tidak bersifat tertutup, karena hasil dari pengurangan bilangan asli belum tentu menghasilkan bilangan asli itu sendiri.

Kegiatan Pembelajaran 1

3). Operasi Perkalian

Definisi , “Jika p dan q bilangan-bilangan asli maka: $p \times q = q + q + q + \dots + q$ (sebanyak p suku).” Apakah operasi perkalian bersifat tertutup, bersifat komutatif, assosiatif dan distributif?

4). Operasi Pembagian

Definisi: “Jika p dan q bilangan-bilangan asli, maka $p : q$ adalah r (bila ada) sedemikian hingga $q \times r = p$.” Pada pembagian bilangan asli hasil bagi $p : q$ belum tentu menghasilkan bilangan asli, sehingga pembagian bilangan asli tidak memenuhi sifat tertutup. Apakah operasi pembagian juga bersifat komutatif, assosiatif dan distributif?

5). Operasi Perpangkatan

Definisi: “Jika p dan q bilangan asli maka $p^q = p \times p \times p \times \dots \times p$ (sebanyak q faktor).” p disebut bilangan pokok dan q disebut pangkat (eksponen). Apakah operasi perpangkatan juga bersifat tertutup, komutatif, assosiatif dan distributif?

6). Kesamaan Bilangan Asli

Definisi: “Jika p dan q bilangan asli, p dan q menunjukkan bilangan asli yang sama maka dikatakan bahwa “ p sama dengan q ” ditulis $p = q$.”

Hubungan ini memiliki sifat-sifat:

- a. refleksif, yaitu $p = p$
- b. simetrik, yaitu jika $p = q$ maka $q = p$,
- c. transitif, yaitu jika $p = q$ dan $q = r$ maka $p = r$.

7). Ketidaksamaan Bilangan Asli

Definisi: “Untuk setiap bilangan asli m dan n , jika $m < n$ maka terdapat bilangan asli p sedemikian hingga $m + p = n$, dan untuk setiap bilangan asli m dan n , jika $m > n$ maka $n < m$.”

3. Sistem Bilangan Bulat

a. Pengertian Bilangan Bulat

Bilangan bulat adalah bilangan asli atau lawan bilangan asli atau nol. Himpunan semua bilangan bulat disebut himpunan bilangan bulat yang dinyatakan dengan $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, dimana himpunan tersebut merupakan gabungan himpunan Bilangan asli (bilangan bulat positif), himpunan nol, dan himpunan lawan bilangan asli (yang bertanda negatif). Jika a adalah bilangan bulat maka $a + (-a) = (-a) + a = 0$, dengan $(-a)$ disebut lawan (invers penjumlahan) dari a dan 0 disebut elemen identitas terhadap penjumlahan.

b. Operasi Pada Bilangan Bulat

1) Penjumlahan Pada Bilangan Bulat

a) Jika penjumlahan melibatkan *dua bilangan positif*, misalnya 6 dan 2, maka cara memperoleh hasil $6 + 2$ Jika dengan garis bilangan, maka proses dimulai dari nol, enam langkah ke kanan sehingga berada pada posisi bilangan 6 dan dilanjutkan dua langkah ke kanan sehingga berada pada posisi bilangan 8. Jadi $6 + 2 = 8$.

b) Jika penjumlahan melibatkan dua bilangan negatif, misalnya -6 dan -2 , maka cara memperoleh hasil $(-6) + (-2)$, Jika dengan garis bilangan, maka dimulai dari nol, enam langkah ke kiri sehingga berada pada posisi bilangan -6 dan dilanjutkan dua langkah ke kiri sehingga berada pada posisi bilangan -8 . Jadi $(-6) + (-2) = -8$.

c) Jika penjumlahan melibatkan *satu bilangan negatif dan satu bilangan positif*, misalnya -5 dan 3, maka cara memperoleh hasil $-5 + 3$.Jika dengan garis bilangan, maka dimulai dari nol, lima langkah ke kiri sehingga berada pada posisi bilangan -5 dan dilanjutkan tiga langkah ke kanan sehingga berada pada posisi bilangan -2 Jadi $-5 + 3 = -2$.

2) Pengurangan Pada Bilangan Bulat

Kegiatan Pembelajaran 1

Jika a , b dan k bilangan bulat, maka $a - b = k$ bila dan hanya bila $a = b + k$. Pengurangan pada bilangan bulat tidak negatif tidak bersifat tertutup, akan tetapi pengurangan pada bilangan bulat bersifat tertutup. Pada dasarnya, setiap operasi pengurangan, dapat diubah menjadi operasi penjumlahan. Proses pengerjaan gunakan proses penjumlahan menggunakan garis bilangan pada penjumlahan.

3) Perkalian Pada Bilangan Bulat

Pada perkalian dua bilangan bulat $a \times b$, bilangan pertama a menyatakan pengali dan bilangan kedua b adalah bilangan yang dikalikan. Untuk menentukan hasil kali dua bilangan bulat yang bertanda positif semua atau bilangan pertama positif sedangkan bilangan kedua negatif, $a \times b$ dapat ditentukan dengan cara menjumlahkan b sebanyak a buah.

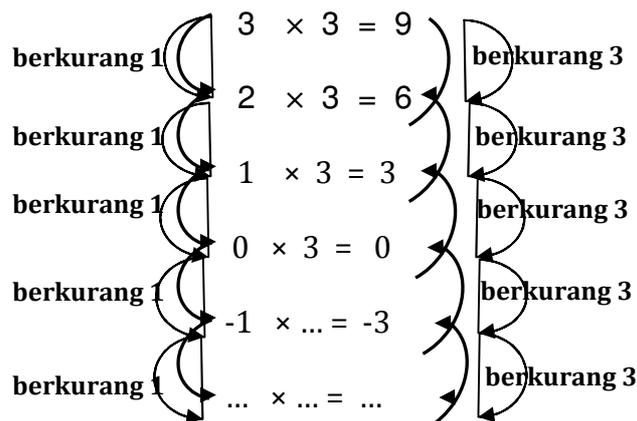
Jadi $a \times b = b+b+b+\dots+b$ (sebanyak a buah), demikian juga

$$a \times (-b) = (-b) + (-b) + (-b) + \dots + (-b) \text{ (sebanyak } a \text{ buah)}$$

Pada perkalian dua bilangan bulat $a \times b$, dimana bilangan pertama negatif maka perkalian dua bilangan bulat tersebut dapat ditentukan dengan pola bilangan.

Contoh: $-2 \times 3 = \dots$

Lengkapilah hasil perkalian berikut!



Melihat hasil perkalian dengan pola di atas, tampak bahwa hasil kali dua bilangan bulat yang berbeda tanda adalah bilangan bulat negatif.

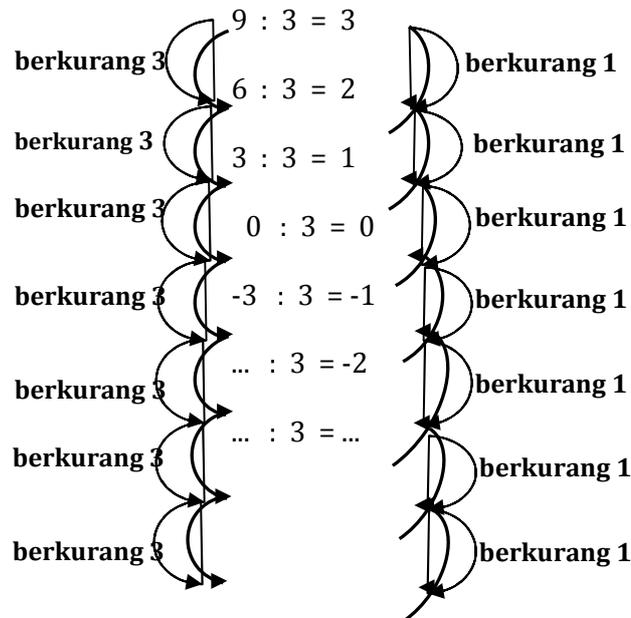
4) Pembagian Pada Bilangan Bulat

Jika a , b dan c bilangan bulat dengan $b \neq 0$, maka $a : b = c$ bila dan hanya bila $a = b \times c$. Pada pembagian dua bilangan bulat, bilangan pertama menyatakan bilangan yang dibagi dan bilangan kedua adalah pembagi. Untuk menentukan hasil bagi dua bilangan bulat yang bertanda positif semua $a : b$ dapat ditentukan dengan cara menghitung berapa banyak mengurangkan a dengan b sampai habis. Sebagai contoh $12 : 4 = \dots$ ditentukan dengan cara $12 - 4 - 4 - 4 = 0$, yaitu sebanyak tiga kali. Maka $12 : 4 = 3$

Untuk pembagian dua bilangan bulat, dapat digunakan pola bilangan seperti berikut.

Contoh: $-12 : 3 = \dots$

Lengkapilah hasil perkalian berikut!



Berdasar pola tersebut di atas dapat disimpulkan

- a) Hasil pembagian dua bilangan bulat bertanda sama selalu menghasilkan bilangan bulat positif.
 - b) Hasil pembagian dua bilangan bulat berbeda tanda selalu menghasilkan bilangan bulat negatif.
- 5) Perangkatan Pada Bilangan Bulat

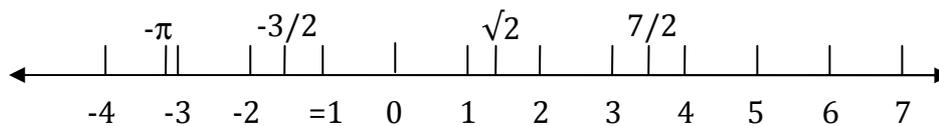
Kegiatan Pembelajaran 1

Perkalian bilangan a dengan a dinamakan **kuadrat** dari a , ditulis dengan $a^2 = a \times a$. Jika a dan m adalah bilangan bulat, perpangkatan a oleh m dinotasikan dengan a^m adalah perkalian $axaxax\dots xa$ sebanyak m buah.

4. Sistem Bilangan Real

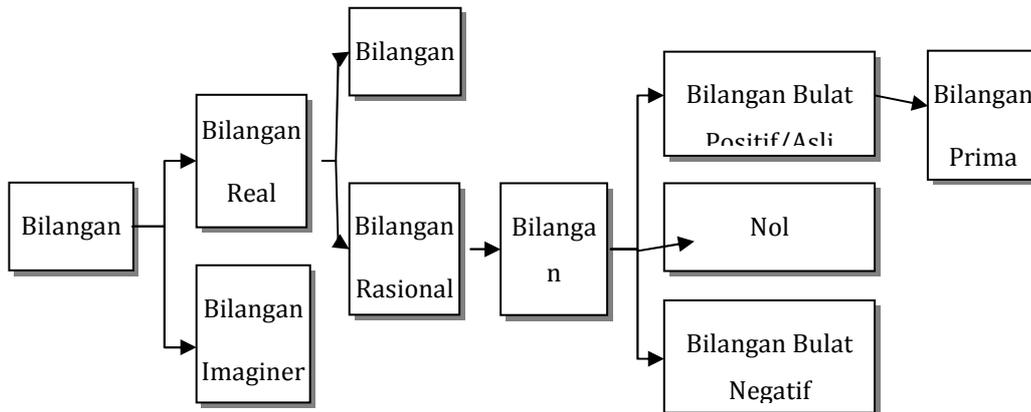
a. Pengertian Bilangan Real

Bilangan Real dapat dipandang sebagai kumpulan titik-titik dalam sebuah garis mendatar atau selanjutnya kita sebut sebagai garis bilangan. Pada garis bilangan letak kumpulan titik-titik bilangan itu mengukur jarak ke kanan atau ke kiri dari suatu titik tetap/titik asal yang diberi label 0. Tiap bilangan hanya mempunyai satu titik dalam sebuah garis bilangan yang disebut sebagai koordinat titik tersebut (lihat Gambar 1).



Gambar 1. Garis Bilangan Real

Terdapat bermacam-macam bilangan yang membentuk sistem bilangan real, yaitu sistem bilangan asli, dan sistem bilangan bulat sistem bilangan rasional. Himpunan bilangan rasional sering dilambangkan dengan Q ; yang anggotanya dapat dinyatakan dalam bentuk $r = \frac{a}{b}$, dimana a, b bilangan bulat dan $b \neq 0$. Bilangan-bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk a/b , disebut bilangan tak rasional/irasional. Sekumpulan bilangan rasional dan tak rasional disebut sebagai kumpulan bilangan real, dilambangkan dengan R . Selain bilangan real terdapat bilangan imajiner yang dilambangkan dengan i , dimana nilai $i = \sqrt{-1}$. Bilangan yang dinyatakan dalam bentuk $a + b\sqrt{-1}$, atau $a + ib$ dinamakan bilangan kompleks.



Gambar 2. Sistem Bilangan

Untuk selanjutnya dalam modul ini kalau disebutkan bilangan, maka yang dimaksud adalah bilangan real kecuali kalau disebutkan secara khusus bilangan tertentu.

b. Operasi Bilangan Real

1. Sifat-Sifat Operasi Bilangan Real

Sifat-sifat dari operasi tambah dan kali dari bilangan Real adalah sebagai berikut ini.

- a. Sifat Komutatif, yaitu jika a dan b adalah bilangan real maka $a + b = b + a$, dan $ab = ba$.
- b. Sifat Asosiatif, yaitu jika a , b dan c adalah bilangan real maka $(a + b) + c = a + (b + c)$, dan $(ab)c = a(bc)$
- c. Sifat Distributif, yaitu jika a , b dan c adalah bilangan real maka $a(b + c) = ab + ac$, dan $(b + c)a = ab + ac$
- d. Satu pada operasi perkalian, disebut *identitas perkalian* karena $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ untuk setiap bilangan real a .
- e. Setiap bilangan tak nol a mempunyai balikan/invers $\frac{1}{a}$, sehingga

$$a\left(\frac{1}{a}\right)=1.$$

2. Sifat Bilangan Negatif

Nol disebut *elemen identitas penjumlahan* karena untuk setiap bilangan real a berlakulah $a + 0 = 0 + a = a$. Untuk setiap bilangan real a mempunyai negatif bilangan a (ditulis $-a$), sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$. Pengurangan adalah operasi penjumlahan dengan negatif bilangan tersebut. Sehingga operasi pengurangan bilangan dapat kita tuliskan sebagai berikut: $a - b = a + (-b)$.

Kegiatan Pembelajaran 1

3. Sifat Pembagian

Pembagian adalah perkalian dengan balikan bilangan. Jika $b \neq 0$, maka $a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$

, dan ditulis $a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$ sebagai $\frac{a}{b}$.

Berikut ini adalah sifat-sifat dari operasi bagi bilangan Real.

- Operasi kali antar dua pembagian sama dengan perkalian antar pembilang dibagi dengan perkalian antar penyebut atau $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- Operasi bagi antar dua pembagian sama dengan membalik pembagi kemudian mengkalikan atau $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
- Penjumlahan dua pembagian yang mempunyai penyebut sama adalah dengan menjumlahkan pembilangnya atau $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- Untuk menjumlahkan dua pembagian yang mempunyai penyebut yang berbeda sama dengan membuat penyebut persekutuan. Kemudian jumlahkan kedua pembilangnya atau $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- Bilangan dapat dibagi dengan factor persekutuan jika pembilang dan penyebut mempunyai faktor persekutuan atau $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$
- Diberikan a, b, c , dan d bilangan real, jika $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ maka $ad = bc$

4. Pangkat Bilangan Real

Jika a suatu bilangan Real dan n sebuah bilangan bulat, maka pangkat n dari a adalah: $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ kali}}$

Bilangan a disebut basis dan n disebut eksponen. Perkalian dua perpangkatan yang mempunyai basis sama, yaitu dengan menjumlahkan eksponennya atau

dapat dinyatakan sebagai $a^m \times a^n = a^{m+n}$, dimana m dan n bilangan bulat positif. Untuk $a \neq 0$ dan bilangan real dan n berlakulah $a^0 = 1$ dan $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

5. Akar Bilangan Real

Pangkat suatu bilangan tidak selalu bernilai bulat misalkan pada $2^{2/3}$, pangkat bilangan tersebut merupakan bilangan rasional. Simbul $\sqrt{\quad}$ dibaca dengan “akar positif dari”. $\sqrt{a} = b$ setara dengan $b^2 = a$ dan $b \geq 0$. Karena $a = b^2 \geq 0$, simbul \sqrt{a} hanya akan berlaku jika $a \geq 0$. Sebagai contoh $\sqrt{9} = 3$ karena $3^2 = 9$. Akar pangkat n dari bilangan real a didefinisikan sebagai $\sqrt[n]{a} = b$ setara dengan $b^n = a$. Jika n genap maka $a \geq 0$ dan $b \geq 0$. Akar pangkat n dari suatu bilangan a dinotasikan dengan $\sqrt[n]{a}$ bilamana $n = 2$ sehingga $\sqrt[n]{a}$ cukup ditulis \sqrt{a} , akan tetapi $\sqrt[n]{-8}$ tidak terdefinisi, karena akar dari setiap bilangan real adalah nonnegatif. Jika pangkat rasional m/n , dimana m dan n bilangan bulat dan $n > 0$, maka $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$ setara dengan $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, jika n genap maka dipersyaratkan $a \geq 0$

6. Relasi Urutan

Himpunan semua bilangan real dapat dibagi menjadi 3 himpunan bagian tak kosong yang saling asing: (i). Himpunan semua bilangan real positif; (ii). Himpunan dengan bilangan 0 sebagai satu-satunya anggota; dan (iii). Himpunan semua bilangan real negatif.

Untuk sebarang bilangan real a dan b , a dikatakan *kurang dari* b (ditulis $a < b$) jika $b - a$ positif. Bilangan a dikatakan *lebih dari* b (ditulis $a > b$) jika $b < a$. Jika a kurang dari atau sama dengan b , maka ditulis $a \leq b$. Jika a lebih dari atau sama dengan b , maka ditulis $a \geq b$. Sedangkan $a < b < c$ dimaksudkan sebagai $a < b$ dan $b < c$. Artinya b antara a dan c .

7. Nilai Mutlak (*Absolute Value*)

Nilai mutlak suatu bilangan adalah jarak bilangan tersebut pada garis bilangan dari bilangan 0. Jadi, nilai mutlak 5 adalah 5, nilai mutlak -7 adalah 7, nilai mutlak 0 adalah 0, dan seterusnya.

Definisi: Nilai mutlak $x \in R$, ditulis dengan notasi $|x|$, didefinisikan sebagai:

$$|x| = \sqrt{x^2}. \text{ Atau dapat pula dinyatakan sebagai:}$$

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

8. Selang (Interval)

Diberikan sebarang dua bilangan real a dan b , dengan $a < b$. Berturut-turut didefinisikan:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

D. Aktivitas Pembelajaran

Untuk memantapkan pengetahuan dan keterampilan yang terkait dengan materisistem bilangan, peserta pelatihan dapat mengerjakan aktivitas-aktivitas pembelajaran berikut. Dalam mengerjakan aktivitas ini pembaca diharapkan untuk mengisi isian atau menjawab pertanyaan yang diajukan. Hasil perkerjaan peserta pelatihat dapat didiskusikan dengan peserta lain atau menanyakan kepada instruktur.

Aktivitas-1.

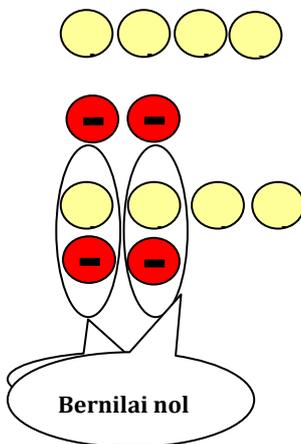
Untuk memperdalam pengetahuan anda mengenai materi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, coba anda diskusikan percobaan untuk menjumlahkan dua bilangan bulat menggunakan koin bilangan. Terdapat dua macam koin bilangan, yaitu koin positif  dan koin negatif. 

Dalam menggunakan koin bilangan, disepakati aturan penggunaan koin bilangan sebagai berikut:

1. Satu koin positif mewakili bilangan 1 dan satu koin negatif mewakili bilangan -1 (dibaca negatif 1).
2. Satu pasang koin yang terdiri dari satu koin positif dan satu koin negatif disebut **pasangan koin bernilai 0**.
3. Operasi "+" berarti menambah koin.
4. Operasi "-" berarti mengambil koin.

Contoh cara menggunakan koin bilangan adalah sebagai berikut.

- 1). Tentukan $4 + (-2) = \dots$

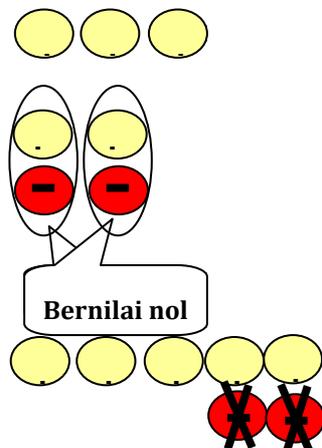


Jadi $4 + (-2) = 2$

Langkah-langkah:

1. Ambillah empat buah koin positif, sesuai bilangan pertama
2. Operasi "+" berarti menambah koin. Tambahkan dua koin negatif, sesuai dengan bilangan kedua.
3. Hitung banyak pasangan koin bernilai nol. Terdapat dua pasang koin bernilai nol, dan tersisa dua koin positif.
4. Banyak koin selain pasangan koin bernilai nol merupakan hasil penjumlahan.
5. Buatlah contoh lain dan lakukan langkah 1 sampai langkah 4

- 2). Tentukan $3 - (-2) = \dots$



Jadi $3 - (-2) = 5$

Langkah-langkah:

1. Ambil tiga koin positif, sesuai bilangan pertama
2. Operasi "-" berarti mengambil koin, sesuai bilangan kedua
3. Karena tidak ada koin negatif yang akan diambil, maka lakukan dengan meminjam pasangan koin bernilai nol. Tambahkan pasangan koin bernilai nol yang sesuai bilangan kedua.
4. Setelah ditambah pasangan koin bernilai nol, ambillah koin sesuai bilangan kedua yaitu 2

Kegiatan Pembelajaran 1

5. Sisa koin setelah diambil merupakan hasil pengurangan
6. Buatlah contoh lain dan lakukan langkah 1 sampai langkah 5

Aktivitas-3.

Untuk memperdalam pengetahuan anda mengenai materi bilangan Real, coba anda selesaikan latihan berikut ini!

Anda tentu masih ingat rumus luas persegi.

1 a. Lengkapilah tabel di bawah ini!

No	Panjang sisi persegi (cm)	Luas persegi (cm ²)
1	3	...
2	5	...
3	7	...

b. Bagaimanakah cara anda menentukan luas tiap persegi di atas?

c. $3^2 = \dots$; $5^2 = \dots$; $7^2 = \dots$

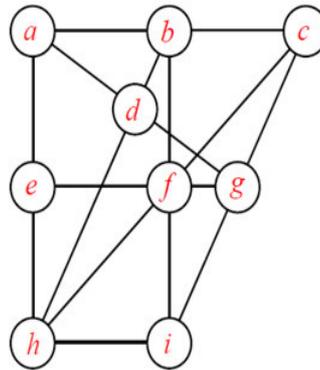
d. Lengkapilah tabel di bawah ini!

No	Panjang sisi persegi (cm)	Luas persegi (cm ²)
1	...	36
2	...	225
3	...	64

e. Bagaimanakah Anda menentukan sisi tiap persegi yang telah diketahui luasnya?

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Gantilah huruf-huruf pada gambar berikut dengan bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9 sedemikian sehingga jumlah huruf-huruf yang terletak dalam satu garis lurus sama dengan 14



2. Apakah pernyataan berikut benar atau salah? “Jumlah suatu bilangan bulat positif dan suatu bilangan bulat negatif adalah bilangan negatif”. Berilah sebuah contoh untuk memperkuat alasanmu.
3. Tentukan semua nilai x sehingga $\left| \frac{2x}{x-2} \right| \leq 3$

F. Rangkuman

4. Bilangan asli adalah bilangan kardinal dari himpunan berhingga yang tidak kosong. Penjumlahan, perkalian dan perpangkatan pada bilangan asli bersifat tertutup, akantetapi sifat tertutup tidak berlaku pada pengurangan dan pembagian bilangan asli.
5. Bilangan bulat adalah bilangan asli atau lawan bilangan asli atau nol.. Penjumlahan, pengurangan, perkalian dan perpangkatan pada bilangan bulat bersifat tertutup, akantetapi sifat tertutup tidak berlaku pada pembagian bilangan bulat.
6. Bilangan Real adalah bilangan rasional atau bilangan tak rasional. Penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian,dan perpangkatan pada bilangan real bersifat tertutup, akan tetapi sifat tertutup tidak berlaku pada penarikan akar bilangan real.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Umpan Balik

Kerjakanlah soal-soal berikut dengan benar!

- Urutkan bilangan-bilangan berikut dari yang kecil ke yang besar.
 - 23, 17, -7, 2, -45, 33, -34
 - 19, 28, -37, 55, -2, 19
 - 0, -8, 32, -78, 39, -41, 78
- Tentukanlah bilangan bulat yang merupakan lawan dari 10.
- Di manakah letak bilangan -6 pada garis bilangan?
- Gantilah tanda \diamond dengan $<$, $>$, atau $=$ sehingga menjadi pernyataan yang benar.
 - $-100 \diamond 90$
 - $0 \diamond -10$
 - $-66 \diamond -666$
- Suhu suatu ruangan mula-mula adalah 28° , setelah alat pendingin ruangan dihidupkan, suhunya menjadi 19° .
 - Bertambah naikkah atau bertambah turunkah suhu ruangan itu?
 - Jika naik, berapa kenaikannya? Dan jika turun, berapa turunnya?
- Suhu udara di kota A adalah 30° sedangkan di kota B adalah -10° .
 - Di kota manakah yang udaranya lebih tinggi?
 - Di kota manakah yang lebih dingin?
 - Berapa derajat selisih suhu di kedua kota tersebut? Jelaskan jawabanmu!
 - Hitunglah hasil setiap operasi berikut ini.

(1) $(25+4) \times 5 = \dots$	(4) $(-8 \times 14) - 120 = \dots$
(2) $-8 \times (43 - 14) = \dots$	(5) $(126 : 6) \times (24 - 82) = \dots$
(3) $(54 \times 3) : 3 = \dots$	(6) $(-24 - 46) : 14 = \dots$
- Mengapa sifat asosiatif tidak berlaku pada operasi pembagian bilangan bulat? Jelaskan dengan contoh!

Tindak Lanjut

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes yang ada. Kemudian hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar dan gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar ini

$$\textbf{Rumus:} \text{ Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Banyaknya Jawaban Anda yang Benar}}{\text{Banyaknya soal yang dikerjakan}} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang Anda capai:

90% – 100%	: sangat baik
80% – 89%	: baik
70% – 79%	: cukup
0% – 69%	: kurang

Bila tingkat penguasaan Anda telah mencapai 80% ke atas, Anda dapat melanjutkan ke KBM berikutnya. **Selamat dan sukses!** Akan tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi lagi Kegiatan Belajar, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

Kegiatan Pembelajaran 2

Keterbagian, Fpb, Dan Kpk

A. Tujuan

Peserta memahami berbagai pengertian keterbagian, FPB, dan KPK dan mampu menggunakan dalam pemecahan masalah matematika

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Peserta memahami pengertian keterbagian
2. Peserta mampu mendeskripsikan pengertian uji keterbagian
3. Peserta mampu mendeskripsikan pengertian FPB
4. Peserta mampu mendeskripsikan pengertian KPK
5. Peserta mampu menggunakan prinsip keterbagian, FPB, dan KPK dalam pemecahan masalah matematika

C. Uraian Materi

1. Keterbagian

Definisi keterbagian: "Bilangan bulat a dengan $a \neq 0$ membagi habis bilangan bulat b (ditulis $a \mid b$) bila dan hanya bila ada bilangan bulat c sedemikian hingga $b = a \cdot c$ ".

Catatan:

- a. $a \mid b$ dibaca "a membagi b" atau "b terbagi a" atau "a faktor dari b" atau "b kelipatan dari a"
- b. Jika a tidak membagi habis b , maka ditulis $a \nmid b$
- c. Pada bentuk $b = a \cdot c$, a adalah *divisor* (pembagi) atau factor dari b , sedangkan b adalah terbagi dan c adalah *kousien* (hasil bagi)

Contoh:

- 1) $2 \mid 6$ karena $2c = 6$ sehingga $c = 3$
- 2) $7 \mid 28$ karena $7c = 28$ sehingga $c = 4$
- 3) $3 \nmid 16$ karena tidak ada bilangan bulat c yang memenuhi $3c = 16$

Mengapa disyaratkan $a \neq 0$? Jika $a = 0$ maka $0 \mid b$, harus berlaku $b = 0$. Hal ini tidak mungkin, karena hanya $b = 0$ yang memenuhi persamaan $b = 0$.c. Sehingga disyaratkan $a \neq 0$.

2. Ciri Bilangan Habis Dibagi

Untuk menguji suatu bilangan bulat habis dibagi oleh bilangan bulat lain sangat diperlukan ketika akan menentukan faktorisasi dari suatu bilangan bulat. Sebagai contoh, untuk menentukan apakah 758 habis dibagi 2, dapat diketahui dari ciri 758 yaitu bilangan genap, dengan melihat digit terakhir bilangan tersebut atau melihat digit satuannya yaitu 8. Jika diuraikan bilangan $758 = 750 + 8 = 75(10) + 8$. Karena 2 membagi sebarang bilangan berkelipatan 10, untuk menentukan apakah suatu bilangan habis dibagi oleh 2 cukup dengan memperhatikan apakah digit satuannya dapat dibagi oleh 2. Jika digit satuannya tidak habis dibagi oleh 2 maka bilangan itu tidak habis dibagi oleh 2. Uji serupa dapat dikembangkan untuk keterbagian oleh 3, 5, 7, dan 11. Selanjutnya akan diuraikan aturan-aturan keterbagian sebagai berikut ini.

a. Uji keterbagian oleh 2^n .

Suatu bilangan bulat habis dibagi oleh 2^n jika dan hanya jika n digit terakhirnya menyatakan suatu bilangan yang habis dibagi oleh 2^n .

Contoh:

Tentukan apakah 83026 dapat dibagi oleh 2, 4, dan 8.

Jawab.

$2 \mid 83026$ karena $2 \mid 6$

$4 \mid 83026$ karena $4 \mid 26$

$8 \nmid 83026$ karena $8 \nmid 026$.

b. Uji keterbagian oleh 5^n .

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 5^n jika dan hanya jika n buah digit terakhirnya menyatakan suatu bilangan yang habis dibagi oleh 5^n . Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0 atau 5.

Contoh:

Tentukan apakah 83025 dapat dibagi oleh 5, 25, dan 125.

Jawab.

$5 \mid 83025$ karena $5 \mid 5$

$25 \mid 83025$ karena $25 \mid 25$

$125 \nmid 83025$ karena $125 \nmid 025$.

c. Uji keterbagian oleh 10^n .

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 10^n jika dan hanya jika n buah digit terakhirnya menyatakan suatu bilangan yang habis dibagi oleh 10^n . Sebagai contoh suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 100 atau 10^2 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya menyatakan suatu bilangan yang habis dibagi oleh 100 atau 10^2 . Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 1000 atau 10^3 jika dan hanya jika tiga digit terakhirnya menyatakan suatu bilangan yang habis dibagi oleh 1000 atau 10^3 .

d. Uji keterbagian oleh 3 atau 9

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 3.

Untuk mendapatkan ciri tersebut perhatikan keterbagian suatu bilangan bulat oleh 3 berikut ini. Tidak ada pangkat dari 10 yang dapat dibagi oleh 3, tetapi bilangan-bilangan 9, 99, 999, dan yang sejenisnya adalah dekat dengan bilangan pangkat ari 10 dan dapat dibagi oleh 3. Tulis kembali bilangan-bilangan yang menggunakan 999, 99, dan 9 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 5721 &= 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \text{ (cek lagi angka nya)} \\
 &= 5(999 + 1) + 7(99 + 1) + 2(9 + 1) + 1 \\
 &= 5 \cdot 999 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 99 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 1 + 1 \\
 &= (5 \cdot 999 + 7 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (5 + 7 + 2 + 1)
 \end{aligned}$$

Jumlah dari bilangan-bilangan yang ada dalam kurung pertama dapat dibagi oleh 3 yaitu $3(5 \cdot 333 + 7 \cdot 33 + 2 \cdot 3)$. Jadi keterbagian 5721 oleh 3 tergantung pada jumlah

Kegiatan Pembelajaran 2

bilangan-bilangan yang ada di dalam kurung ke dua. Di dalam kasus ini, $5 + 7 + 2 + 1 = 15$ dan 3 membagi habis 15. Dengan demikian, untuk memeriksa apakah 5721 dapat dibagi oleh 3, cukup diperiksa apakah $5 + 7 + 2 + 1$ dapat dibagi oleh 3. Jadi secara umum suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 3.

Argumen serupa dapat digunakan untuk menunjukkan keterbagian suatu bilangan bulat oleh 9. Suatu bilangan bulat habis dibagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah dari digit-digitnya merupakan suatu bilangan yang habis dibagi oleh 9.

Contoh

Tentukan apakah 14238 dapat dibagi oleh 3 dan dapat dibagi oleh 9.

Jawab.

Karena $1 + 4 + 2 + 3 + 8 = 18$ dan $3 \mid 18$, akibatnya $3 \mid 14238$. Karena $9 \mid 18$, akibatnya $9 \mid 14238$.

e. Uji keterbagian oleh 7

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 7 jika dan hanya jika bilangan yang dinyatakan tanpa digit satuannya dikurangi dua kali unit satuan asalnya, dapat dibagi oleh 7

f. Uji keterbagian oleh 11

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 11 jika dan hanya jika angka-angka bilangan tersebut diurutkan dari satuannya, jumlah digit-digit yang berada pada urutan ganjil, dikurangi jumlah digit-digit yang berada pada urutan genap melambangkan suatu bilangan yang habis dibagi oleh 11

g. Uji keterbagian oleh hasil kali 2, 3, 5, 7, dan 11

Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh hasil kali dari 2, 3, 5, 7, atau 11 jika dan hanya jika bilangan itu dapat dibagi oleh masing-masing bilangan tersebut.

Contoh

Tentukan apakah 875 dapat dibagi oleh: (i) 7, (ii) 11, dan (iii) 6.

Jawab.

(i) $87 - 2 \cdot 5 = 77$ dan $7 \mid 77$, Jadi $7 \mid 875$

(ii) $(5 + 8) - 7 = 6$ dan $11 \nmid 6$, Jadi, $11 \nmid 875$

(iii) $2 \nmid 875$ karena 875 bilangan ganjil, Jadi $6 \nmid 875$

3. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Untuk bilangan bulat a , b , dan c dengan $a \neq 0$ dan $b = a \cdot c$, maka a adalah *divisor* (pembagi) atau factor dari b , sedangkan b adalah terbagi dan c adalah *kousien* (hasil bagi). Sebagai contoh $1 \times 24 = 24$, maka 1 dan 24 adalah faktor dari 24. Untuk mendata faktor dari 24, perlu didata bilangan-bilangan yang hasil kali kedua bilangan tersebut adalah 24, yaitu: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, dan 24. Siswa hendaknya dapat memverifikasi bahwa bilangan antara 1 dan 24 selain 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, dan 24 bukan merupakan faktor dari 24 karena tidak membagi habis 24. Jadi faktor dari suatu bilangan adalah pembagi dari suatu bilangan, yaitu bilangan yang membagi habis bilangan tersebut.

Apabila ada dua buah bilangan, masing-masing bilangan tersebut mempunyai faktor, jika ada bilangan-bilangan yang merupakan faktor dari dua bilangan tersebut maka bilangan-bilangan tersebut disebut **faktor persekutuan** dua bilangan. Sebagai contoh faktor dari 40 adalah: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. Faktor dari 48 adalah: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. Faktor dari 40 dan 48 ternyata ada yang sama, yaitu: 1, 2, 4, dan 8. Jadi yang merupakan faktor dari kedua bilangan itu adalah: 1, 2, 4, dan 8. Bilangan-bilangan yang merupakan faktor yang sama dari 40 dan 48 dinamakan faktor persekutuan dua bilangan tersebut.

Definisi: "Suatu bilangan bulat c adalah faktor persekutuan dari a dan b bila dan hanya bila $c \mid a$ dan $c \mid b$." Setiap bilangan bulat a dan b , selalu memiliki faktor persekutuan paling sedikit satu buah.

Definisi: "Jika a atau b adalah bilangan bulat positif, d adalah faktor persekutuan terbesar dari a dan b (ditulis $FPB(a, b)$) bila dan hanya bila d faktor persekutuan dari a dan b , jika c faktor persekutuan dari a dan b maka $c \leq d$ ".

Contoh.

Kegiatan Pembelajaran 2

Faktor dari 40 adalah: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

Faktor dari 48 adalah: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

Faktor persekutuan dari 40 dan 48 adalah: 1, 2, 4, dan 8.

Jadi yang merupakan FPB(40,48) adalah 8, karena 8 adalah faktor persekutuan dari 40 dan 48, dan diantara factor persekutuan 1, 2, 4, dan 8 semua ≤ 8 .

FPB(a, b) selalu bilangan bulat positif. Sehingga $\text{FPB}(a, b) \geq 1$, karena $1 \mid a$ dan $1 \mid b$ untuk setiap a dan b.

Jika $\text{FPB}(a, b) = d$ maka $\text{FPB}(a : d, b : d) = 1$

Ada beberapa cara untuk menemukan faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan. Di bawah ini adalah beberapa di antaranya:

a. Cara sederhana atau dengan himpunan faktor

Tentukan FPB dari bilangan 75 dan 120

Faktor 75 = {1, 3, 5, 15, 25, 75}

Faktor 120 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120}

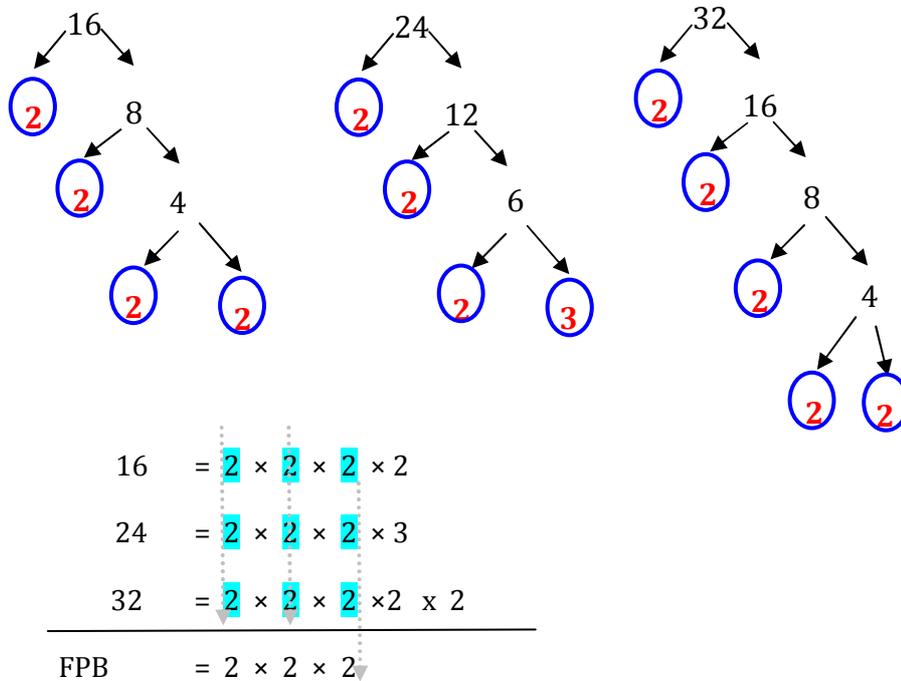
Faktor persekutuan dari 75 dan 120 = {1, 3, 4, 15}. Jadi FPB dari 75 dan 120 = 15

b. Dengan faktorisasi prima

Bilangan prima adalah bilangan Asli yang tepat mempunyai dua buah factor. Faktorisasi prima dari suatu bilangan adalah menguraikan suatu bilangan menjadi perkalian factor-factor prima dari bilangan tersebut. Faktorisasi prima biasanya dicari dengan menggunakan pohon faktor.

Pohon faktor adalah pohon yang tumbuh ke bawah dengan menggunakan perkalian yang menggunakan bilangan prima.

Untuk mencari faktor prima dari tiga bilangan dapat dicari sbb:



Sehingga FPB dari 16, 24, dan 32 adalah $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$.

c. Algoritma Pembagian

Untuk bilangan bulat positif a dan b dengan $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, maka ada tepat satu pasang bilangan bulat q dan r sehingga $b = q \cdot a + r$ dengan $0 \leq r < a$.

Pada teorema di atas r disebut sisa pembagian b oleh a dan q disebut hasil bagi bersisa b oleh a. Teorema ini sering disebut dengan “algoritma pembagian”. Fungsinya dapat digunakan untuk mencari FPB dari dua bilangan bulat positif dengan menggunakan algoritma pembagian.

Contoh penerapan:

Carilah FPB dari 247 dan 299 dengan menggunakan algoritma pembagian.

Penyelesaian:

Diketahui : $a = 247$ dan $b = 299$, sehingga $b = a \cdot q + r$

$$299 = 247 \cdot 1 + 52 \quad (\text{disini } q = 1 \text{ dan } r = 52, \text{ dimana } 0 \leq r < a)$$

$$247 = 52 \cdot 4 + 39$$

$$52 = 39 \cdot 1 + 13$$

$$39 = 13 \cdot 3 + 0 \text{ (disini } q = 3 \text{ dan } r = 0, \text{ ini merupakan langkah terakhir)}$$

Jadi FPB dari 247 dan 299 adalah 13.

d. Algoritma Euclid

Algoritma Euclid adalah cara mencari FPB dengan melakukan pembagian berulang-ulang dimulai dari kedua bilangan yang hendak dicari FPB-nya sampai didapatkan sisa 0 dari hasil pembagian.

Misalnya untuk menemukan FPB 24 dan 60, langkah-langkah yang diambil untuk mencari FPB dengan Algoritma Euclid adalah sebagai berikut.

- Dari dua bilangan yang akan dicari FPB nya, bagilah bilangan yang lebih besar dengan bilangan yang lebih kecil. Dalam contoh ini, bagi 60 dengan 24 dan hasilnya adalah 2 dengan sisa 12.
- Lalu bagi bilangan yang lebih kecil (yaitu 24) dengan sisa dari pembagian sebelumnya (yaitu 12). Jadi 24 dibagi 12, didapatkan hasilnya 2 dan sisanya 0.
- Karena sudah mendapat sisa 0, bilangan terakhir yang digunakan untuk membagi adalah FPBnya, yaitu 12.

Contoh lain, cari FPB dari 40 dan 64.

$$64 \div 40 = 1 \text{ dengan sisa } 24$$

$$40 \div 24 = 1 \text{ dengan sisa } 16$$

$$24 \div 16 = 1 \text{ dengan sisa } 8$$

$$16 \div 8 = 2 \text{ dengan sisa } 0.$$

Bilangan terakhir yang digunakan untuk membagi adalah 8, jadi FPB dari 40 dan 64 adalah 8

4. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Untuk bilangan bulat a , b , dan c dengan $a \neq 0$ dan $b = a \cdot c$, maka a adalah *divisor* (pembagi) atau factor dari b , sedangkan b adalah kelipatan dari a .

$1 \times 4 = 4$	$\rightarrow 4 : 4 = 1$	}	Dari operasi pembagian tersebut nampak bahwa 4 adalah faktor dari 4, 8, 12, dan 16 atau 4, 8, 12, dan 16 adalah kelipatan dari 4
$2 \times 4 = 8$	$\rightarrow 8 : 4 = 2$		
$3 \times 4 = 12$	$\rightarrow 12 : 4 = 3$		
$4 \times 4 = 16$	$\rightarrow 16 : 4 = 4$		

Jadi kelipatan suatu bilangan memiliki bilangan tersebut sebagai suatu faktor.

Sebagai contoh: bilangan-bilangan kelipatan 2 adalah: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24,

bilangan-bilangan kelipatan 3 adalah: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ...

bilangan yang sama dari kelipatan 2 dan 3 adalah: 6, 12, 18, 24, Selanjutnya bilangan-bilangan yang sama dari **6, 12, 18, 24, 30, ...** disebut kelipatan persekutuan dari 2 dan 3.

Jadi kelipatan persekutuan dari dua bilangan adalah kelipatan-kelipatan dari kedua bilangan tersebut yang bernilai sama

Definisi: "Kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari dua bilangan adalah bilangan bulat positif terkecil yang dapat dibagi habis oleh kedua bilangan itu."

Ada beberapa cara/metode untuk mencari Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) adalah sebagai berikut.

a. Cara Himpunan Faktor

Tentukan KPK dari bilangan 8 dan 12. Untuk menentukan KPK dari dua bilangan dapat ditentukan dengan himpunan factor sebagai berikut

$$\text{Kelipatan 8} = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots\}$$

$$\text{Kelipatan 12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\}$$

$$\text{Kelipatan persekutuan dari 8 dan 12} = \{24, 48, \dots\}$$

$$\text{Jadi KPK dari 8 dan 12} = 24$$

b. Cara Faktorisasi Prima

Untuk mencari KPK dari bilangan 48, 72 dan 96, dapat dilakukan dengan cara membuat pohon faktor dari masing-masing bilangan.

Kegiatan Pembelajaran 2

Susun bilangan dari pohon faktor untuk mendapatkan faktorisasi bilangan tersebut:

Faktorisasi dari $48 = 24 \times 3$

Faktorisasi dari $72 = 2^3 \times 3^2$

Faktorisasi dari $96 = 2^5 \times 3$

Ambil faktor-faktor yang memiliki pangkat terbesar, dalam hal ini 32 dan 25, Kalikan faktor-faktor tersebut: $32 \times 25 = 288$. Maka KPK dari bilangan 48, 72 dan 96 adalah **288**. Dengan kata lain, tidak ada bilangan yang lebih kecil dari 288 yang dapat dibagi habis oleh bilangan 48, 72 dan 96.

Jadi untuk menentukan KPK dari dua bilangan atau lebih dapat dilakukan dengan mengalikan semua faktor yang berbeda dari bilangan-bilangan tersebut. Jika ada faktor yang sama maka diambil pangkat yang terbesar.

c. Cara Tabel Pembagian

Untuk menentukan KPK dari 48 dan 12 dapat dilakukan dengan cara membagi kedua bilangan dengan faktor prima terkecil sampai tidak dapat dibagi lagi dengan bilangan prima terkecil sampai hasil tinggal 1 semua (baris bawah).

2	8	12
2	4	6
2	2	3
3	1	3
	1	1

Jika bilangan yang dibagi tidak habis dibagi oleh bilangan pembagi, maka bilangan yang dibagi turunkan ke baris dibawahnya, sebagai contoh: 3 tidak habis dibagi 2, maka 3 diturunkan ke baris berikutnya.

Kelipatan persekutuan terkecil dari 8 dan 12 adalah hasil perkalian semua bilangan pembagi, yaitu: $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$.

d. Cara Rumus

Jika diketahui FPB dari bilangan bulat a dan b, KPK dari dua bilangan tersebut dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut ini.

$$\text{KPK}(a,b) = \frac{a \times b}{\text{FPB}(a,b)}$$

D. Aktifitas Pembelajaran

Untuk memantapkan pengetahuan dan keterampilan yang terkait dengan materi Keterbagian, FPB, dan KPK, peserta pelatihan dapat mengerjakan aktivitas-aktivitas pembelajaran berikut. Dalam mengerjakan aktivitas ini pembaca diharapkan untuk mengisi isian atau menjawab pertanyaan yang diajukan. Hasil pekerjaan peserta pelatihan dapat didiskusikan dengan peserta lain atau menanyakan kepada instruktur.

Aktivitas-1.

Untuk memperdalam pengetahuan anda mengenai materi keterbagian, kerjakan soal-soal berikut ini.

1. Apa yang anda lakukan jika anda diminta mencari semua factor dari bilangan 56, 625, 1825, dan 876543? Apakah ciri bilangan dibagi dapat membantu anda dalam menentukan factor dari bilangan tersebut?
2. Apa yang anda lakukan jika anda diminta membuat soal untuk menentukan dua buah bilangan bulat yang terdiri dari 5 digit dan mempunyai Faktor Persekutuan Terbesar 11
3. Jika anda diminta menentukan angka yang belum diketahui pada bilangan $9a7b6$ yaitu bilangan lima angka yang habis dibagi 33

Aktivitas-2.

Untuk memperdalam pengetahuan anda mengenai materi FPB, kerjakan soal-soal berikut ini.

1. Carilah FPB dari 1009 dan 4001. Apakah bisa diselesaikan dengan himpunan factor? Apakah bisa diselesaikan dengan faktorisasi prima? Apa bisa diselesaikan dengan algoritma euclid? Berikan penjelasan apa persaratan

untuk bisa mencari FPB dengan himpunan factor, faktorisasi prima, dan algoritma euclides?

2. Carilah FPB dan KPK dari 6243 dan 3299, dengan cara apa anda mencarinya?
Berikan penjelasan secukupnya

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Berikan contoh suatu bilangan yang terdiri dari 5 angka yang habis dibagi 66
2. Buatlah contoh dua buah bilangan yang masing masing terdiri dari 5 angka dan FPB nya 105

F. Rangkuman

1. Misalkan a dan b bilangan bulat sebarang; $b \mid a$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat c sedemikian sehingga $a = b \cdot c$
2. Misalkan a, d, dan n bilangan bulat sebarang, Jika $d \mid a$ maka $d \mid na$.
3. Misalkan a, b, dan d bilangan bulat sebarang.
 - a. Jika $d \mid a$ dan $d \mid b$ maka $d \mid (a + b)$
 - b. Jika $d \mid a$ dan $d \nmid b$ maka $d \nmid (a + b)$
 - c. Jika $d \mid a$ dan $d \mid b$ maka $d \mid (a - b)$
 - d. Jika $d \mid a$ dan $d \nmid b$ maka $d \nmid (a - b)$
4. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 2 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 2.
5. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 5 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 5. Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0 atau 5.
6. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 10 jika dan hanya jika digit satuannya dapat dibagi oleh 10. Hal ini berarti bahwa digit satuannya adalah 0.
7. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 4 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya menyatakan bilangan yang dapat dibagi oleh 4.
8. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 8 jika dan hanya jika tiga digit terakhirnya menyatakan bilangan yang dapat dibagi oleh 8.
9. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 3 jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 3.

10. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 9 jika dan hanya jika jumlah dari digit-digitnya merupakan bilangan yang dapat dibagi oleh 9.
11. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 7 jika dan hanya jika bilangan yang dinyatakan tanpa digit satuannya dikurangi dua kali unit satuan asalnya, dapat dibagi oleh 7.
12. Suatu bilangan bulat dapat dibagi oleh 11 jika dan hanya jika angka-angka bilangan tersebut diurutkan dari satuannya, jumlah digit-digit yang berada pada urutan ganjil, dikurangi jumlah digit-digit yang berada pada urutan genap melambangkan suatu bilangan yang habis dibagi oleh 11.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Umpan Balik

Pilihlah jawaban yang menurut Anda benar!

1. Terdapat pasangan bilangan p dan q , kemudian akan dicari KPK dari pasangan bilangan tersebut. Jika ternyata $KPK(p, q) = pq$, itu berarti:
 - A. Nilai $p = q$.
 - B. $FPB(p, q) = 1$.
 - C. p dan q keduanya harus merupakan bilangan-bilangan prima.
 - D. p dan q keduanya merupakan bilangan-bilangan ganjil.
 - E. p merupakan bilangan ganjil, sedangkan q bilangan genap.
2. Andaikan FPB dari pasangan bilangan m dan n adalah m , maka kesimpulan yang benar adalah
 - A. m dan n adalah pasangan bilangan yang relatif prima.
 - B. n adalah faktor dari m
 - C. n habis dibagi oleh m
 - D. KPK dari m dan n adalah m^n
 - E. FPB dari m dan n adalah $\frac{n}{m}$
3. Andaikan $m = a^4b^2c^5d$ dan $n = a^3b^3c^3$, dengan a, b, c , dan d adalah bilangan prima, maka $KPK(m, n)$ adalah
 - A. ab^2c^3

Kegiatan Pembelajaran 2

- B. ab^2c^3d
C. $a4b3c3d$
D. $a4b2c5$
E. $a4b3c5d$
4. Jika $p = a^6b^2c^3d$ dan $q = a^k b^3c^k$, dengan a, b, c , dan d adalah bilangan prima, serta k adalah bilangan prima genap, tentukan FPB (p, q) !
- A. ab^2c^2
B. ab^2c^3
C. ab^2c^2d
D. ab^2c^kd
E. ab^2c^kd
5. Tentukan KPK ($2x, 4x, 6x, 8x, 10x, \dots, 1000x$)
- A. $2x + 4x + 6x + 8x + 10x + \dots + 1000x$
B. $2x \times 4x \times 6x \times 8x \times 10x \times \dots \times 1000x$
C. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 1000$
D. $1000x$
E. 1000

Tindak Lanjut

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes yang ada. Kemudian hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar dan gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar ini.

$$\text{Rumus: Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban Anda yang Benar}}{5} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang Anda capai:

90% – 100% : sangat baik

80% – 89% : baik

70% – 79% : cukup

0% – 69% : kurang

Bila tingkat penguasaan Anda telah mencapai 80% ke atas, Anda dapat melanjutkan ke KBM berikutnya. **Selamat dan sukses!** Akan tetapi bila tingkat penguasaan Anda

masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi lagi Kegiatan Belajar, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

Kegiatan Pembelajaran 3

Pola Bilangan

A. Tujuan

Peserta dapat menemukan pola bilangan, baik pola bilangan yang ada dalam konteks kehidupan sehari, maupun pola bilangan dalam matematika

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Peserta mampu memberikan contoh kehidupan sehari-hari yang memiliki pola bilangan
2. Peserta mampu menggunakan pola yang Ada untuk menentukan susunan berikutnya
3. Peserta mampu menggunakan Pola Bilangan dalam pemecahan masalah matematika

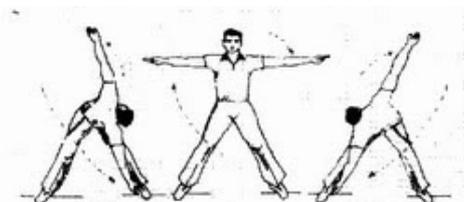
C. Uraian Materi

Pola menempati kedudukan yang istimewa dalam matematika, terutama dalam teori bilangan. Melalui pengamatan terhadap pola, matematikawan melakukan generalisasi dan menghasilkan teorema/dalil/hukum. Karena itu, untuk memahami matematika dengan baik, menikmati karya-karya matematikawan yang diperoleh dari menemukan pola Anda juga perlu menguasai pola, termasuk pola bilangan.

Berikut disajikan beberapa contoh pola bilangan dalam konteks.

Contoh 1

Ketika mengikuti kegiatan senam yang dipimpin oleh seorang instruktur senam, gerakan yang satu dan yang lain tak jarang dilakukan secara berulang-ulang. Untuk satu rangkaian kegiatan tertentu, misalnya, pelaksanaan kegiatan-kegiatan tersebut seringkali mengikuti pola tertentu. Si instruktur pun seringkali menggunakan bilangan-bilangan tertentu untuk jenis gerakan tertentu.



Kegiatan Pembelajaran 3

Pada gambar di atas, instruktur menyebut kata 1 untuk posisi badan seperti gambar paling kiri, kata 2 untuk posisi badan seperti gambar tengah, kata 3 untuk posisi badan pada gambar paling kanan, kata 4 untuk posisi badan seperti gambar tengah, kata 5 untuk posisi badan pada gambar paling kiri, kata 6 untuk posisi badan pada gambar tengah, kata 7 untuk posisi badan pada gambar paling kanan, dan kata 8 pada posisi badan pada gambar tengah kembali. Pengulangan ini diteruskan sesuai dengan skenario instruktur.

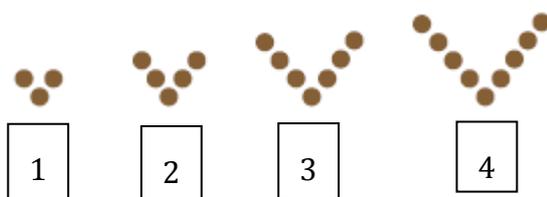
Contoh 2.

Perhatikan formasi burung terbang sebagai berikut



Mereka terbang dengan pola tertentu. Mereka selalu membentuk formatis seperti huruf "V".

Pola dari susunan seperti huruf V ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Susunan ke 1 terdiri dari 3 nokhtah

Susunan ke 2 terdiri dari 5 nokhtah

Susunan ke 3 terdiri dari 7 nokhtah

Susunan ke 4 terdiri dari 9 nokhtah

Tampak bahwa dalam setiap perubahan susunan selalu bertambah 2 nokhtah.

Secara umum, susunan ke-n-nya mengikuti rumus $1 + 2n$, adalah bilangan asli

D. Aktivitas Pembelajaran

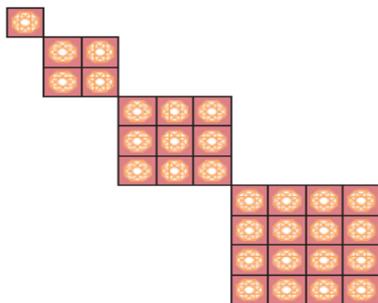
Untuk memantapkan pemahaman Anda tentang pola bilangan dalam kehidupan sehari-hari, lakukanlah aktivitas-aktivitas pembelajaran berikut.

Aktivitas 1.

Amati keramik yang ada di bawah meja Anda. Diharapkan Anda akan menemukan susunan keramik yang keramik satuannya berbentuk persegi.

Dengan menggunakan kapur, tandailah daerah persegi pada keramik tersebut dengan ukuran 1×1 , 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , dan 6×6 .

Mudah-mudahan Anda memperoleh daerah yang beberapa di antaranya adalah sebagai berikut:



Sekarang,

1. Hitung banyaknya keramik yang ditemukan pada setiap daerah tersebut. Apakah Anda ada polanya?
2. Hitung keliling daerah yang terbentuk? Apakah ada polanya?

Aktivitas 2.

Perhatikan susunan Segitiga Pascal berikut

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Kegiatan Pembelajaran 3

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Kalau Anda perhatikan barisan bilangan-bilangan yang ada dalam segitiga Pascal ini, mungkin Anda akan menemukan beberapa pola. Gambar berikut memperlihatkan dua pola yang ada.

JMLH									
1	1								
2	1	1							
4	1	2	1						
8	1	3	3	1					
16	1	4	6	4	1				
32	1	5	10	10	5	1			
64	1	6	15	20	15	6	1		
128	1	7	21	35	35	21	7	1	
?	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Kolom ke tiga (yang diarsir krem), membentuk barisan bilangan segitiga 1, 3, 6, 10, 15, dan seterusnya. Kalau Anda jumlahkan bilangan-bilangan dalam satu barisnya, maka Anda akan menemukan barisan geometri.

Temukan lagi pola lainnya.

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Buatlah suatu aturan permainan yang menggunakan pola bilangan.
2. Temukan penerapan pola bilangan 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2,dalam kehidupan sehari-hari.
3. Dalam kegiatan belanja di suatu toko misalnya, besarnya uang yang harus dibayarkan dalam membeli barang apakah juga memenuhi pola bilangan? Pola yang seperti apakah itu?
4. Carilah informasi tentang pertumbuhan amoeba dari internet. Apakah pertumbuhannya mengikuti pola bilangan tertentu? Pola yang seperti apakah itu?
5. Carilah informasi tentang cara perhitungan bunga di bank. Pola bilangan apa yang digunakan? Bagaimana dengan yang di koperasi?

F. Rangkuman

Banyak hal dalam kehidupan yang memiliki pola, baik pola yang terbentuk secara alami atau hasil rekayasa manusia. Pola bilangan dapat Anda temukan kalau Anda lebih memberikan perhatian khusus pada aspek bilangan dari pola tersebut.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

1. Untuk latihan/tugas 1, kerjakan bersama teman. Lakukan saja permainan yang Anda sukai bersama teman Anda, dan buatlah aturan yang Anda sepakati bersama. Kemudian temukan polanya.
2. Untuk latihan/tugas 2, salah satu bentuk penerapannya mungkin Anda bisa temukan dalam kegiatan perayaan hari kemerdekaan. Silakan cari lagi yang lain. Ingat, 1 dan 2 di situ tidak harus berarti banyaknya benda. Bisa juga berupa bilangan nominal.
3. Untuk latihan/tugas 3, besarnya uang yang harus dibayarkan tentu akan seiring dengan banyaknya barang yang dibeli. Ada polanya.
4. Untuk latihan/tugas 4, amoeba sepertinya selalu membelah menjadi dua kali lipat dalam setiap periodenya.
5. Untuk latihan/tugas 5, di perbankan umumnya sekarang berlaku bunga majemuk, dan di koperasi seringkali berlaku bunga tunggal. Kalau Anda masih kesulitan dalam memahami maksud dari dua macam bunga ini, masuklah ke “google search engine” dan ketikkan kata-kata “bunga tunggal dan bunga majemuk”. Niscara Anda akan memperoleh banyak informasi tentang kedua jenis bunga ini.

Kegiatan Pembelajaran 4

Barisan Dan Deret

A. Tujuan

1. Membantu Anda memahami dan menguasai dua macam barisan penting dalam matematika, yaitu barisan aritmetik dan barisan geometri, serta
2. Membantu Anda memahami dua macam deret khusus dalam matematika, yaitu deret aritmetik dan deret geometri. Khusus untuk deret geometri, di dalam modul ini akan disajikan pula jumlah tak hingga deret geometri yang memiliki rasio antara 0 dan 1, yaitu deret geometri yang konvergen.

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Peserta mampu membedakan barisan aritmetik dengan barisan lainnya.
2. Peserta mampu membedakan barisan geometri dengan barisan lainnya
3. Peserta mampu menentukan rumus umum suku ke- n barisan aritmetik
4. Peserta mampu menentukan rumus umum suku ke- n barisan geometri
5. Peserta mampu menggunakan pola pada barisan aritmetik untuk menentukan unsur-unsur yang masih kosong
6. Menggunakan rumus jumlah n suku pertama untuk menyelesaikan masalah deret aritmetik.
7. Menggunakan rumus jumlah n suku pertama untuk menyelesaikan masalah deret geometri.
8. Mengidentifikasi kesalahan penggunaan rumus jumlah tak hingga dalam masalah deret geometri

C. Uraian Materi

1. Barisan Bilangan

Barisan bilangan adalah susunan bilangan yang dibentuk dalam susunan berurutan sehingga antara bilangan yang satu dengan bilangan lainnya mengikuti suatu pola tertentu. Barisan bilangan aritmetik dan barisan bilangan geometri dibedakan atas dasar hubungan antara suku yang satu dengan suku sebelumnya.

Amati beberapa barisan berikut.

- a. barisan 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... dimana unsur berikutnya mengikuti pola sebagaimana pola yang terbentuk dari enam bilangan di awal tersebut. Barisan ini adalah salah satu contoh dari barisan aritmetik.
- b. barisan 1, -1, 1, -1, 1, -1, ... dimana suku berikutnya diperoleh dengan mengalikan -1 suku sebelumnya adalah bukan barisan aritmetik. Barisan ini lebih dikenal sebagai barisan geometri.
- c. Barisan 4, 4, 4, 4, 4, 4, ... yang selalu bernilai konstan 4 adalah sekaligus barisan aritmetik dan barisan geometri,

Kalau begitu apa yang membedakan? Kalau Anda mencermati uraian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa:

Suatu barisan bilangan disebut barisan aritmetik manakala selisih dua suku berurutan adalah konstan. Sementara itu, suatu barisan bilangan disebut barisan geometri manakala rasio dua suku berurutan adalah konstan.

Apa yang terjadi kalau kita memiliki barisan aritmetik? Kalau Anda memperhatikan lebih tajam, sebenarnya barisan bilangan, aritmetik ataupun geometri, adalah fungsi dari himpunan bilangan asli N ke himpunan bilangan real. Karenanya, kalau dinyatakan dalam himpunan pasangan terurut, barisan geometri 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... sebenarnya adalah $\{(1,1), (2,2), (3,4), (4,8), (5,16), (6,32), \dots\}$. Rumus yang berlaku untuk fungsi ini adalah:

$$f: N \rightarrow R; f(n) = 2^{n-1}.$$

Sementara itu, barisan aritmetik 1, 3, 5, 7, 9, ... pada dasarnya adalah fungsi dengan himpunan pasangan terurutnya adalah $\{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7), (5,9), \dots\}$ Kalau dinyatakan dalam bentuk rumus, maka barisan aritmetik ini dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut:

$$f: N \rightarrow R; f(n) = 2n - 1.$$

Rumus fungsi $f(n)$ ini adalah rumus yang dapat digunakan untuk menentukan suku ke- n dari barisan aritmetik atau barisan geometri.

Bagaimana caranya? Mari kita pelajari.

Rumus Umum Suku ke- n Barisan Aritmetik

Misalkan $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots$ adalah barisan aritmetik. Dari informasi ini, kita bisa mengetahui bahwa: u_1 = suku pertama dari barisan tersebut.

Sebagai barisan aritmetik, maka:

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots = u_n - u_{n-1} \text{ adalah beda atau selisih dari setiap dua suku yang berurutan.}$$

Kalau beda ini kita misalkan secara simbolis dengan b , kita akan memperoleh hubungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &u_1 \\ &u_2 = u_1 + b \\ &u_3 = u_2 + b = u_1 + 2b \\ &u_4 = u_3 + b = u_1 + 3b \end{aligned}$$

Sehingga kalau kita ikuti polanya, akan diperoleh hubungan

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times b$$

Rumus umum suku ke- n Barisan Geometri

Misalkan $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots$ adalah barisan aritmetik.

Dari informasi ini, kita bisa mengetahui bahwa:

u_1 = suku pertama dari barisan tersebut

Kegiatan Pembelajaran 4

Sebagai barisan geometri, maka rasio dua suku yang berurutan adalah tetap.

Karena itu, berlaku hubungan:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \dots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

Kalau rasio ini kita misalkan r , maka kita akan memperoleh hubungan:

$$u_1$$

$$u_2 = u_1 \times r$$

$$u_3 = u_2 \times r = u_1 \times r^2$$

$$u_4 = u_3 \times r = u_1 \times r^3$$

Sehingga kalau kita ikuti polanya, akan diperoleh hubungan:

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Penggunaan Rumus Umum

Dengan rumus umum tersebut, menentukan suku ke- n suatu barisan bisa menjadi lebih simpel. Dengan menggunakan rumus, kita tidak perlu mendaftarkan satu persatu unsur-unsurnya. Apalagi kalau yang ditanyakan adalah suku ke- n , dimana n adalah bilangan yang sangat besar.

Kita juga bisa menentukan suku ke berapa yang bernilai tertentu dengan menggunakan rumus tersebut. Oleh karena itu, mariperhatikan contoh penerapan rumus-rumus di atas.

Contoh 1

Diberikan barisan aritmetika sebagai berikut: 9, 4, -1, -6, -11, -16. ...Tentukan suku ke-215 dari barisan tersebut.

Jawab

Kalau kita mau, sebenarnya kita masih bisa melengkapi daftar tersebut sampai suku ke-215 yang dikehendaki. Tetapi, tentu itu akan memakan waktu agak lama, dan mungkin akan terjadi salah hitung meskipun kalau diperhatikan angka-angka satuan pada suku-sukunya setelah -16 itu hanya 1 dan 6 saja. Karena itu, mari kita cari rumusnya. Dari barisan aritmetika 9, 4, -1, -6, -11, -16. ..., tampak bahwa $u_1 = 9$ dan $b = -5$.

Karena itu, dengan menggunakan rumus di atas, suku ke-215 adalah:

$$\begin{aligned} u_{215} &= u_1 + (215 - 1) \times b \\ &= 9 + 214 \times (-5) \\ &= 9 - 1070 \\ &= -1061 \end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukan suku ke-25 dari barisan geometri 1, 2, 4, 8, 16,...

Jawab:

Dari barisan 1, 2, 4, 8, 16, ... di atas, kita mengetahui bahwa $u_1 = 1, r = 2$.

Karena itu, dengan rumus $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

Kita akan memperoleh

$$u_{25} = 1 \times (2)^{25-1} \text{ atau } u_{25} = 2^{24}$$

Pemanfaatan rumus juga dapat digunakan untuk menentukan suku pertama dari suatu barisan aritmetik atau barisan geometri.

Contoh 3

Misalkan suku ke 10 suatu barisan geometri adalah 128. Jika suku pertamanya adalah $\frac{1}{4}$, berapakah rasionya?

Jawab:

Rumus umum suku ke- n barisan geometri adalah $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

Karena $n = 10, u_{10} = 128, u_1 = \frac{1}{4}$, maka

$$128 = \frac{1}{4} \times r^9$$

$r^9 = 512$ atau $r = 2$ Jadi, rasionya adalah 2.

2. Deret Bilangan

Jumlahn suku pertama Barisan Aritmetik

Kegiatan Pembelajaran 4

Misalkan kita memiliki barisan aritmetik 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... Kalau kita tertarik untuk menghitung $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$, maka kita tertarik untuk menghitung jumlah 7 suku pertama dari barisan 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... tersebut. Kalau bentuk 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... disebut sebagai barisan aritmetik, maka bentuk $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$ disebut sebagai deret aritmetik.

Karena bilangannya kecil, dan jumlahnya juga tidak banyak, menghitung secara satu persatu tentu masih dapat kita lakukan. Bagaimana kalau kita tertarik untuk menghitung jumlah 1000 suku pertama dari barisan 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... tersebut? Tentu pekerjaan menghitungnya akan menjadi lebih rumit. Keberadaan rumus mungkin akan lebih memudahkan.

Mari kita lihat kasus berikut

Tentukan jumlah dari

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 21 + 22 + 23 + 24 + 25$$

Kalau kita misalkan

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 21 + 22 + 23 + 24 + 25$$

Mengingat rumus suku barisan aritmetik. Maka, dengan sifat komutatif penjumlahan,

$$s = 25 + 24 + 23 + 22 + 21 + \dots + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Kalau dua bentuk ini kita jumlahkan, maka

$$2s = 26 + 26 + 26 + 26 + 26 + \dots + 26 + 26 + 26 + 26 + 26$$

Kalau masing-masing ruas dibagi dua, maka

$$s = \frac{1}{2}(26) \times (25)$$

Langkah ini memberikan inspirasi dalam menentukan rumus jumlah n suku pertama dari barisan aritmetik.

Misalkan kita mempunyai barisan aritmetik sebagai berikut,

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$$

Maka, jumlah n suku pertamanya dapat dinyatakan sebagai:

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Dengan dasar sifat komutatif penjumlahan, maka bentuk ini dapat juga ditulis dengan:

$$s_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_3 + u_2 + u_1$$

Apa yang Anda ketahui tentang $u_1 + u_{n-1}$ dengan $u_2 + u_{n-2}$? Jawabnya adalah sama (silakan dikerjakan dalam latihan).

Dengan fakta itu, dan kalau dua rumus s_n ini dijumlahkan, diperoleh hasil:

$$s_n = \frac{1}{2} \times n \times (u_1 + u_n)$$

Jumlah n suku pertama Barisan Geometri

Misalkan kita punya barisan ke- n dari barisan geometri tersebut dapat dituliskan dengan

$$u_1, u_1 \times r, u_1 \times r^2, \dots, u_1 \times r^{n-3}, u_1 \times r^{n-2}, u_1 \times r^{n-1}$$

Maka

$$s_n = u_1 + u_1 \times r + u_1 \times r^2 + \dots + u_1 \times r^{n-3} + u_1 \times r^{n-2} + u_1 \times r^{n-1}$$

Kalau masing-masing ruas kita kalikan r , maka kita akan dapatkan

$$r \times s_n = u_1 \times r + u_1 \times r^2 + \dots + u_1 \times r^{n-3} + u_1 \times r^{n-2} + u_1 \times r^{n-1} + u_1 \times r^n$$

Kalau dua persamaan ini dikurangkan, diperoleh

$$r \times s_n - s_n = u_1 \times r^n - u_1$$

sehingga diperoleh rumus umum:

$$s_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Deret Konvergen dan Deret Divergen

Deret konvergen dan deret divergen merupakan topik pembicaraan dalam matematika lanjut. Penulis tidak akan mengajak Anda untuk membahas deret konvergen dan divergen ini secara mendalam.

Kegiatan Pembelajaran 4

Suatu deret dikatakan konvergen bila jumlah bilangan-bilangan dalam deret itu sampai tak hingga menuju ke suatu bilangan tertentu. Bila tidak, maka deret itu dikatakan divergen. Salah satu ciri utama dari deret geometri yang konvergen adalah rasionya antara 0 dan 1.

Penulis tidak akan membahas topik ini di dalam modul ini. Penulis akan meminta Anda untuk mencari referensi melalui dunia maya, atau dari buku-buku referensi yang ada, dan mempelajarinya sendiri. Penulis hanya akan mengajak Anda untuk terhindar dari kesalahan berikut.

Misalkan $x = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$ suatu deret geometri

Maka kalau masing-masing ruas dikalikan 2, diperoleh

$$2x = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$$

Akibatnya $2x - x = -1$

Sehingga $x = -1$

Atau $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$

Suatu hal yang mustahil. Mana mungkin jumlah semua bilangan positif menghasilkan bilangan negatif.

D. Aktivitas Pembelajaran

Aktivitas 1

Untuk melengkapi pemahaman Anda tentang barisan aritmetik dan barisan geometri, kerjakanlah aktivitas pembelajaran berikut:

1. Coba cari dan pelajari buku-buku teks luar negeri serta dalam negeri. Selidiki apakah rumus-rumus untuk menentukan suku ke- n di dalam modul ini berbeda dengan rumus di buku-buku teks yang ada. Kalau ada, dimana letak perbedaannya? Menurut Anda, untuk anak Indonesia, lebih baik pakai rumus yang mana? Jelaskan alasan Anda.
2. Seseorang menyewa mobil di suatu rental. Si pemilik menetapkan aturan sebagai berikut. Selama 12 jam, mobil boleh disewa dengan nilai sewa sebesar Rp500.000. Manakala mobil itu disewa lebih dari 12 jam dan kurang dari 24 jam, si penyewa harus menambah biaya sewa sebesar

Rp50.000 per jam. Selidiki, apakah persewaan mobil ini menggunakan prinsip barisan aritmetik atau tidak? Bila ya, sejak kapan prinsip barisan aritmetik ini diterapkan dan untuk berapa lama? Selanjutnya, berapa harus dibayarkan oleh penyewa bila dia menggunakan mobil itu selama 28 jam?

3. Termasuk jenis barisan apakah barisan berikut?
 - a. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.... semua sukunya sama dengan 1
 - b. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,suku ke n diperoleh dari jumlah dua suku sebelumnya (kecuali dua suku pertama)

Aktivitas 2

Untuk melengkapi pemahaman Anda tentang deret aritmetik dan deret geometri, kerjakanlah aktivitas pembelajaran berikut:

1. Coba cari dan pelajari buku teks luar negeri dan dalam negeri tentang cara mencari rumus jumlah n suku pertama dari deret aritmetik dan deret geometri. Bandingkan dengan yang ada di dalam modul ini. Temukan perbedaan, walaupun sesedikit mungkin.
2. Cari buku tentang deret konvergen dan deret divergen. Berdasarkan pemahaman tersebut, jelaskan mengapa:
 - a. Jumlah tak hingga dari barisan barisan geometri $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ sama dengan
 - b. Jumlah tak hingga dari barisan geometri $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ tak dapat ditentukan.

E. Latihan/Kasus/Tugas

Untuk memperdalam Barisan Bilangan, kerjakan latihan berikut ini

1. Buatlah sebanyak 5 barisan yang suku ke-5-nya 20.

Kegiatan Pembelajaran 4

2. Apakah fungsi dari himpunan bilangan asli N ke himpunan bilangan real yang didefinisikan dengan $f(n) = (-1)^n$, merupakan barisan bilangan? Jika ya, barisan apakah itu? Jelaskan
3. Temukan beberapa barisan yang sekaligus merupakan barisan aritmetik dan juga barisan geometri. Jelaskan bagaimana Anda menemukannya!

Untuk memperdalam Deret Bilangan, kerjakan latihan berikut ini

4. Tentukan jumlah 10 suku pertama dari deret aritmetik berikut.
 - a. $5 + 3 + 1 + -1 + \dots$
 - b. $17 + 11 + 5 + -1 + \dots$
5. Tentukan jumlah 10 suku pertama dari deret geometri berikut.
 - a. $-1 + 1 + -1 + 1 + \dots$
 - b. $2 + 2\sqrt{2} + 4 + \dots$
6. Jumlah 10 suku pertama suatu deret aritmetik bernilai sama dengan 0, kesimpulan apa yang bisa Anda peroleh?
7. Apakah jumlah tak hingga dari deret geometri $2, -1, \frac{1}{2}, -1/4, 1/8, -1/16, \dots$ bisa ditentukan? Mengapa?

F. Rangkuman

1. Barisan bilangan yang paling dikenal adalah barisan aritmetik dan barisan geometri. Kalau di dalam barisan aritmetik, beda antar dua suku berurutan yang tetap, maka di dalam barisan geometri, rasio antar dua suku berurutan yang tetap. Karena itu, rumus umum untuk suku ke- $n(u_n)$ dari barisan aritmetik adalah $u_n = u_1 + (n - 1)b$ dimana u_1 adalah suku pertama, dan b adalah beda atau selisih antar setiap dua sukunya. Sementara itu, rumus umum suku ke- $n(u_n)$ dari barisan geometri adalah $u_n = u_1 \times r^{n-1}$, dimana u_1 adalah suku pertama, dan r adalah rasio antar setiap dua sukunya.
2. Deret aritmetik dan geometri terbentuk dari ketertarikan menentukan jumlah n suku pertama dari suatu barisan aritmetik dan geometri. Rumus untuk menentukan jumlah n suku pertama dari suatu deret

aritmetik adalah $s_n = \frac{1}{2} \times n \times (u_1 + u_n)$. Sedangkan jumlah n suku pertama dari suatu deret geometri adalah $s_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}$.

- Deret geometri ada dua macam, yaitu deret yang konvergen dan deret yang divergen. Deret yang konvergen biasanya ditandai dengan nilai rasio terletak di antara 0 dan 1. Kita bisa menentukan jumlah tak terhingga dari deret yang konvergen, tapi tidak bisa untuk deret yang divergen.

G. Umpam Balik dan Tindak Lanjut

- Kalau Anda mulai dari 0 sebagai suku pertama, maka akan tersedia jarak sebesar 20 dengan suku ke-5. Kalau Anda bagi 20 ini dengan 4, maka maka diperoleh suku-suku sebagai berikut 0, 5, 10, 15, 20, ... seperti yang diminta. Coba lakukan hal yang sama, tapi berangkat dari 2, 8, atau yang lainnya.
- Suatu bilangan negatif kalau dipangkatkan genap pasti bernilai positif. Akan tetapi, nilai suatu suku tidak hanya ditentukan oleh pangkat dari rasio. Masih ditentukan oleh bilangan pertama.
- Lakukan manipulasi aljabar dengan pelan-pelan dan hati-hati. $f(n) = (-1)^n$ akan menghasilkan barisan -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ... suatu barisan geometri dengan rasio -1.

Kegiatan Pembelajaran 4

Kegiatan Pembelajaran 5

Bentuk Akar

A. Tujuan

Peserta memahami konsep dan sifat Bentuk Akar dan mampu menggunakan dalam pemecahan masalah matematika

B. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Peserta mampu mendeskripsikan konsep bentuk akar
2. Peserta mampu mendeskripsikan sifat bentuk akar
3. Peserta mampu menggunakan konsep dan sifat Bentuk Akar dalam pemecahan masalah matematika

C. Uraian Materi

Dalam matematika kita mengenal berbagai jenis bilangan. Beberapa contoh jenis bilangan diantaranya adalah bilangan rasional dan irrasional. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m, n bilangan bulat dan n tidak samadengan 0, dan bilangan yang tidak dapat dinyatakan seperti itu dinamakan bilangan irasional. Bilangan-bilangan seperti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ termasuk bilangan irasional, karena hasil akar dari bilangan tersebut bukan merupakan bilangan rasional. Bilangan-bilangan semacam itu disebut bentuk akar. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bentuk akar adalah akar-akar dari suatu bilangan riil positif, yang hasilnya merupakan bilangan irrasional. Dari bentuk akar di atas dapat kita simpulkan $\sqrt{p^2} = p$, dengan p bilangan real positif.

- a. Mengubah Bentuk Akar menjadi Bilangan Berpangkat Pecahan atau Sebaliknya

Kegiatan Pembelajaran 5

Dari bentuk perkalian $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$ dapat kita nyatakan sebagai $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, sehingga kita

peroleh hubungan $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$ atau $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$. Demikian juga perkalian $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times$

$a^{\frac{2}{3}}$ dapat kita nyatakan dalam bentuk $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3$, sehingga diperoleh hubungan

$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^2$ atau $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$. Dari uraian di atas dapat dinyatakan bahwa setiap

bilangan berpangkat pecahan dapat dinyatakan dalam bentuk akar atau sebaliknya.

Secara umum bilangan berpangkat pecahan $p^{\frac{a}{b}}$, p bilangan real $b \neq 0$ dan a, b bilangan bulat positif merupakan bilangan bentuk akar karena bilangan pangkat

pecahan tersebut dapat dinyatakan sebagai bentuk akar $p^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{p^a}$

Contoh:

Nyatakan bilangan-bilangan berikut ke dalam bentuk akar

(1) $5^{\frac{2}{3}}$,

(3) $x^{\frac{5}{3}}$

(2) $3^{-\frac{1}{2}}$

(4) $y^{-\frac{3}{4}}$

Penyelesaian:

(1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

(3) $x^{\frac{5}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^5 = \sqrt[3]{x^5}$

(2) $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $y^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{y^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$

b. Operasi pada Bentuk Akar

1) Menghitung perpangkatan dari Akar Suatu Bilangan

Pada bahasan sebelumnya, telah dipelajari sifat-sifat umum pada bilangan berpangkat rasional. Sifat-sifat tersebut diantaranya

$$a) \quad p^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{p^a};$$

$$b) \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b};$$

$$c) \quad (a^p)^q = a^{pq}$$

Ketiga sifat tersebut akan digunakan untuk menghitung contoh soal berikut ini.

Hitunglah:

$$a. \quad (\sqrt[3]{4^2})^3$$

$$b. \quad (2\sqrt[3]{3^2})^6$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} a. \quad (\sqrt[3]{4^2})^3 &= \left(4^{\frac{2}{3}}\right)^3 \dots \text{sifat } \sqrt[b]{p^a} = p^{\frac{a}{b}} \\ &= 4^2 \quad \dots \text{sifat } (a^p)^q = a^{pq} \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b. \quad (2\sqrt[3]{3^2})^6 &= \left(2 \times 3^{\frac{2}{3}}\right)^6 \\ &= 2^6 \times 3^4 \dots \text{sifat } (axb)^n = a^n \times b^n \\ &= 64 \times 81 \\ &= 5184 \end{aligned}$$

2). Penjumlahan dan pengurangan bentuk Akar

Untuk memahami penjumlahan dan pengurangan bilangan bentuk akar dapat digunakan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan atau pengurangan.

Contoh berikut akan membantu untuk lebih memahaminya.

Kegiatan Pembelajaran 5

Selesaikanlah soal-soal berikut

a. $8\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$

b. $5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}$

Penyelesaian:

a. $8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = (8-3)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

b. $5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}$ tidak dapat dijumlahkan, karena angka di dalam akar berbeda.

Penjumlahan atau pengurangan bilangan dalam bentuk akar dapat dirumuskan sebagai berikut

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$$

$$a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a - b)\sqrt{c} \text{ dengan } a, b \text{ dan } c \text{ bilangan real dan } c > 0.$$

3). Perkalian Bentuk Akar

Perkalian bentuk akar dapat kita sederhanakan dengan menggunakan sifat yang telah kita pelajari. Misalnya $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ dengan a, b bilangan real positif.

Contoh:

Sederhanakanlah perkalian berikut ini $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \dots\dots\dots$

Penyelesaian:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$$

Perkalian bentuk akar secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = (a \times c)\sqrt{bd} \text{ dimana } a, b, c \text{ dan } d \text{ bilangan real dengan } b > 0, d > 0$$

4) Pembagian Bentuk Akar

Untuk lebih memahami pembagian bentuk akar, perhatikan contoh berikut.
Hitunglah soal-soal berikut.

a. $\sqrt{125} : \sqrt{5} = \dots\dots\dots$

b. $\sqrt{64} : \sqrt{4} = \dots\dots\dots$

Penyelesaian:

a. $\sqrt{125} : \sqrt{5} = \sqrt{125:5} = 5$

b. $\sqrt{64} : \sqrt{4} = \sqrt{64:4} = 4$

Pembagian bentuk akar memenuhi ketentuan

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a:b} \text{ dimana } a,b \text{ bilangan real dengan } a>0 \text{ dan } b>0$$

5) Menghitung Perkalian, Pembagian, dan Perpangkatan Bilangan Berpangkat Tak Sebenarnya

Perhatikan kembali sifat-sifat umum pada bilangan berpangkat rasional berikut ini. Jika a, b bilangan real dan p, q, n bilangan rasional maka berlakulah.

a. $a^p \times a^q = a^{p+q}$

b. $a^p : a^q = a^{p-q}$

c. $(axb)^n = a^n \times b^n$

d. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

e. $a^0 = 1$

f. $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

g. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \in R$ dan $m, n \in Z$

Kegiatan Pembelajaran 5

6). Merasionalkan Bentuk akar Kuadrat

Diberikan bilangan irasional $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{4}{\sqrt{7}}$. Penyebut dari pecahan-pecahan tersebut dapat diubah menjadi bilangan rasional dan disebut merasionalkan bentuk akar. Cara merasionalkan penyebut berbentuk akar dapat dilakukan dengan mengalikan pembilang dan penyebut tersebut dengan pasangan bentuk akar sekawannya, sehingga diperoleh penyebut bilangan rasional.

Untuk lebih jelasnya perhatikan bentuk pecahan berikut

a. Pecahan bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Sebagai contoh rasionalkan bentuk $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Penyelesaian:

Pecahan tersebut dikalikan dengan sekawan $\sqrt{2}$, yaitu $\sqrt{2}$ Dengan dikalikan $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ maka akan diperoleh penyebutnya tidak dalam bentuk akar.

$$\text{Jadi, } \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ atau } \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Pecahan yang pembilang dan penyebut dikalikan dengan sekawan dari penyebutnya akan bernilai tetap, walau bentuknya berubah.

Bentuk pecahan $\frac{a}{\sqrt{b}}$ dengan a bilangan rasional dan \sqrt{b} bentuk akar dapat dirasionalkan dengan cara mengalikan pecahan itu dengan sekawan

penyebutnya, yaitu $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$ sehingga pecahan itu berubah menjadi

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \text{ atau } \frac{a}{b}\sqrt{b}$$

- b. Merasionalkan Pecahan bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ atau $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

Cara merasionalkan bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ atau $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ hampir sama dengan

merasionalkan $\frac{a}{\sqrt{b}}$, yaitu dengan mengalikan pembilang dan penyebutnya

dengan sekawan dari masing-masing penyebutnya. Bentuk sekawan

dari $\sqrt{b} + \sqrt{c}$ adalah $\sqrt{b} - \sqrt{c}$ dan bentuk sekawan dari $\sqrt{b} - \sqrt{c}$ adalah

$$\sqrt{b} + \sqrt{c}$$

D. Aktifitas Pembelajaran

Untuk memantapkan pengetahuan dan keterampilan yang terkait dengan materi bentuk akar, peserta pelatihan dapat mengerjakan aktivitas-aktivitas pembelajaran berikut. Dalam mengerjakan aktivitas ini pembaca diharapkan untuk mengisi isian atau menjawab pertanyaan yang diajukan. Hasil perkerjaan peserta pelatihan dapat didiskusikan dengan peserta lain atau menanyakan kepada instruktur.

Aktivitas-1.

Untuk memperdalam pengetahuan anda mengenai materi bentuk akar selesaikan masalah berikut ini.

- Mengapa $\sqrt[n]{p}$ tidak terdefinisi jika n genap dan $p < 0$?
- Tulis bentuk lain yang ekuivalen dengan $\sqrt[3]{46}$
- Dapatkah kamu menghitung $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2}$?
- Dapatkah kamu menghitung $\sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{b}}$, $a > 0$, $b > 0$, n, m bilangan bulat positif?

Aktivitas-2

Untuk memperdalam pengetahuan anda mengenai materi bentuk akar selesaikan masalah berikut ini.

- Nyatakan $\sqrt[4]{8x^2y^8}$ dalam eksponen rasional

Kegiatan Pembelajaran 5

- b. Nyatakan $(7a)^{\frac{5}{8}} b^{\frac{3}{8}}$ dalam bentuk akar
- c. Sederhanakan $\sqrt{x^3 y^9}$
- d. Jika a bilangan real dan p, q bilangan rasional apakah hasil dari $\frac{a^p}{a^q}$
- e. Jika a bilangan real dan p, q bilangan rasional apakah hasil dari $(a^p)^q$

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Diketahui segitiga ABC sama kaki dengan $AB = AC = 8\sqrt{2}$ dan $BC = 8$.

Tentukan :

- tinggi segitiga dari titik sudut A
- Luas segitiga tersebut.

2. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut :

a. $5^{x+3} = 25^{x-2}$	c. $\sqrt{16^{2x+4}} = (0,25)^{-3x-3}$
b. $\sqrt{4^{2x+1}} = 64$	d. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \sqrt[3]{2^{3x+1}}$

3. Tuliskan perkalian $(X^{1/2} - Y^{1/2}) \cdot (X^{1/2} + Y^{1/2})$ dalam bentuk akar.

F. Rangkuman

Bentuk akar adalah akar-akar darisuatu bilangan riil positif, yang hasilnya merupakan bilangan irrasional. Bentuk akar di atas dapat dituliskan sebagai $\sqrt[p]{p}$, dengan p bilangan real positif atau nol

Sifat-sifat bentuk akar :

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3. $\sqrt{a}(\sqrt{b} \pm \sqrt{c}) = \sqrt{ab} \pm \sqrt{ac}$
4. $m\sqrt{a} \pm n\sqrt{a} = (m \pm n)\sqrt{a}$
5. $m\sqrt{a} \pm m\sqrt{b} = m(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$
6. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$
7. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
8. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

Umpan balik

1. Hitunglah

a) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{6}}$

c) $\left(\frac{216}{729}\right)^{\frac{2}{3}}$

b) $(27)^{\frac{2}{3}}$

d) $(2a^3b)^{-3} \cdot (2a^3b)^3$

2. Sederhanakan

a) $\left(6a^{\frac{1}{2}}\right)^3$

c) $(2a)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2b)^{\frac{1}{2}}$

b) $\left(\frac{1}{2}x^4\right)^3$

d) $\sqrt{12} + \sqrt{8} + \sqrt{48} - \sqrt{50}$

3. Nyatakan dalam eksponen rasional

a) $\sqrt[3]{81x^4y^2}$

b) $\sqrt[4]{32x^3y^2}$

c) $\sqrt{8p^3q}$

d) $\sqrt[5]{32s^5t}$

4. Nyatakan dalam bentuk akar

a) $2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

c) $3^{\frac{2}{3}}p^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}$

b) $4^{\frac{3}{4}}a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{1}{2}}$

d) $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}$

Kegiatan Pembelajaran 5

5. Hitunglah

a) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

c) $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}$

b) $(\sqrt[4]{x^2})^8$

d) $(64)^{\frac{2}{3}}$

6. Hitunglah

a) $81 \left(3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{4}{3}} \right)$

c) $\frac{a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}}}$

b) $6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}$

d) $\left(2x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} \right)^8$

7. Rasionalkan bentuk akar berikut

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

b) $\frac{1}{3\sqrt{a}}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

Tindak Lanjut

Cocokkanlah hasil jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes yang ada. Kemudian hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar dan gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban Anda yang Benar}}{\text{Jumlah Skor Total}} \times 100\%$$

Arti penguasaan yang Anda capai:

90% – 100% : sangat baik

80% – 89% : baik

70% – 79% : cukup

0% – 69% : kurang

Bila tingkat penguasaan Anda telah mencapai 80% ke atas, Anda dapat melanjutkan ke KBM berikutnya. **Selamat dan sukses!** Akan tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi lagi Kegiatan Belajar, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

Kegiatan Pembelajaran 6

Aritmetika Sosial

Dalam rangka memenuhi kebutuhan hidupnya, manusia sering mengadakan transaksi jual dan beli. Ada yang menjual dan ada yang membeli. Dari kegiatan itu muncullah pasar, pusat perdagangan, mall dan lain sebagainya. Muncul sentra pertanian, perikanan, peternakan dan lain-lain.



Bahkan, kalau semula yang diperjual belikan hanya sebatas barang, saat ini jasa juga sudah diperjual belikan. Jasa konsultan, jasa makelar, dan banyak lagi jenis jasa yang sekarang ini diperjual belikan.

Dari kegiatan jual beli ini, muncullah beberapa konsep dalam ilmu ekonomi, seperti harga jual, harga beli, untung, rugi, diskon, tara, berat kotor (bruto), berat bersih (netto), dan lain sebagainya. Dalam prosesnya, proses ekonomi ini kemudian menggunakan matematika, khususnya aritmetika, sehingga aritmetika sosial kemudian menjadi salah satu bahan kajian dalam pelajaran matematika. Fokus pembahasannya tentu bukan pada konsep kegiatan ekonominya sendiri, melainkan kepada kajian matematis (aritmetik) dari kegiatan ekonomi tersebut. Kajian ini dalam matematika dikenal dengan istilah aritmetika sosial.

A. Tujuan

Melalui modul ini, Anda akan kami ajak untuk mempelajari penerapan konsep aritmetik dalam kegiatan sosial, sehingga Anda mampu menjelaskan konsep bilangan atau aljabar yang digunakan dalam masalah aritmetika sosial, serta menggunakannya untuk memecahkan masalah.

B. Indikator Ketercapaian Kompetensi

Kompetensi yang terkait dengan aritmetika sosial dianggap sudah dimiliki oleh Anda manakala indikator-indikator berikut sudah muncul pada diri Anda, yaitu:

1. Menentukan konsep atau prinsip matematika (aritmetika dan aljabar) yang digunakan dalam kegiatan masalah yang terkait dengan aritmetika sosial.
2. Menggunakan konsep atau prinsip matematika (aritmetika dan aljabar) untuk memecahkan masalah yang terkait dengan aritmetika sosial.
3. Memberikan alasan yang kuat tentang digunakannya konsep atau prinsip matematika (aritmetika dan aljabar) tertentu dalam memecahkan masalah yang terkait dengan aritmetika sosial.

C. Uraian Materi

1. Harga Satuan dan Harga Keseluruhan

Misalkan kita melihat suatu iklan di internet sebagai berikut.

		
APPLE iPhone 6 16GB - Gold Smart Phone Apple iPhone - 4.7 Inch Multi-Touch display (Retina) - 16GB Internal - GSM/HSDPA/LTE	APPLE iPhone 4 CDMA 16GB (Garansi Merchant) - Black Smart Phone Apple iPhone - 3.5 inch LED-backlit IPS LCD - 16GB Storage - 5MP+VGA Camera	APPLE iPhone 4 CDMA 16GB (Garansi Merchant) - White Smart Phone Apple iPhone - 3.5 inch LED-backlit IPS LCD - 16GB Storage - 5MP+VGA Camera
Rp 8,839,404	Rp 1,414,500	Rp 1,414,500

Ada dua hal yang perlu dikemukakan dari iklan di atas. Pertama, **satuan harga** penjualan dari handphone ini adalah per handphone utuh, bukan per bagian-bagiannya, dan juga bukan per kelompok beberapa handphone sekaligus. Kedua, harga yang ditulis itu adalah **harga satuan**. Artinya, harga 1 handphone secara utuh adalah seperti tertera dalam gambar di atas.

Bagaimana dengan informasi berikut.

Harga Beras di Sejumlah Kota
(Per 28 Februari 2015)

Kota	Rp/Kg	Kota	Rp/Kg
Kota Banjarmasin	11.250	Kota Jayapura	13.000
Kota Samarinda	10.500	Kota Banda Aceh	9.800
Kota Manado	9.500	Kota Medan	9.250
Kota Palu	10.000	Kota Padang	11.200
Kota Makassar	8.750	Kota Bandar Lampung	10.000
Kota Kendari	9.700	DKI Jakarta	12.000
Kota Ambon	11.000	Kota Bandung	10.000
Manokwari	12.000	Kota Surabaya	9.150



Satuan harga yang digunakan untuk menentukan harga beras di dua gambar di atas adalah berbeda. Kalau di gambar tabel, *satuan harganya* adalah per kilogram, sedang kalau di gambar sebelah kanan, *satuan harganya* adalah per 5 kilogram.

Satuan harga yang berbeda ini umumnya mengakibatkan harga satuan yang berbeda pula. Karena itu, memahami satuan harga dan harga satuan dalam setiap kegiatan jual beli merupakan hal yang perlu dipahami oleh setiap orang.

Misalkan serombongan orang berbelanja membeli bakso di depot X dimana harga barang-barangnya sudah ditetapkan sebagai berikut:



Setelah sampai di kasir, ternyata rombongan itu membeli 4 es kelapa muda, 3 es jeruk, 1 teh botol, dan 5 orang makan bakso urat, 3 orang makan bakso super spesial, dan ada 4 orang yang juga makan nasi putih.

Berapakah harga keseluruhan yang harus dibayarkan oleh rombongan tersebut? Konsep, prinsip atau prosedur matematika apa saja yang terlibat di dalam proses perhitungan biaya keseluruhan tersebut.

Kalau kita lakukan perhitungan biaya keseluruhan yang harus dikeluarkan rombongan tersebut, diperoleh tabel perhitungan sebagai berikut.

Kegiatan Pembelajaran 6

Jenis Makanan Minuman	Satuan Harganya	Banyak satuan yang dibeli	Harga satuan	Perhitungan
Es Kelapa Muda	Per gelas	4 gelas	Rp8.000	Rp32.000
Es Jeruk	Per gelas	3 gelas	Rp6.000	Rp18.000
Teh Botol	Per botol	1 botol	Rp4.000	Rp4.000
Bakso Urat	Per mangkok	5 mangkok	Rp14.000	Rp70.000
Bakso Super Spesial	Per mangkok	3 mangkok	Rp22.000	Rp66.000
Nasi putih	Per piring	4 piring	Rp3.000	Rp12.000
TOTAL				Rp202.000

Dari tabel di atas, tampak kita menggunakan operasi perkalian, yaitu ketika menentukan harga keseluruhan untuk setiap jenis makanan. Kita juga menggunakan operasi penjumlahan ketika menentukan harga keseluruhan yang harus dibayarkan. Sebenarnya, kita juga bisa menerapkan operasi pembagian, manakala semua anggota kelompok tersebut bersepakat untuk berbagi dalam pembayarannya. Sayangnya, di dalam soal ini tidak ada informasi yang tegas tentang berapa orang anggota kelompok tersebut dan tidak ada pula informasi bahwa pembayarannya ditanggung bersama.

Di dalam perhitungan itu, kita juga tidak terlihat menggunakan konsep pengurangan. Kita tidak mengetahui berapa besar uang yang diserahkan oleh kelompok itu kepada penjual sehingga kita tidak mengetahui berapa besarkah sisa pengembalian uangnya. Demikian pula, kita tidak melihat diskon yang dikenakan, sehingga operasi dengan persen juga tidak terlalu tampak.

2. Untung dan Rugi

Ketika seseorang melaksanakan kegiatan jual beli, ia akan berhadapan dengan harga beli dan harga jual. Harga beli adalah nilai uang yang harus kita keluarkan untuk mendapatkan barang atau jasa yang kita inginkan. Harga jual adalah nilai

uang yang kita dapatkan karena menjual barang atau jasa yang diinginkan oleh pembeli.

Dalam konteks jual beli ini, ada konsep **untung** dan konsep **rugi**. Kita dikatakan memperoleh untung kalau harga jual kita lebih tinggi dari harga beli. Sebaliknya, kita dikatakan mengalami rugi manakala harga jual kita lebih rendah dari harga belinya. Kita dikatakan **impas** manakala tidak untung dan tidak rugi.

Secara matematis, kalau harga beli kita simbolkan dengan H_b , dan harga jual kita simbolkan dengan H_j , maka kita sekarang akan bisa menentukan nilai dari H_j dan H_b , yaitu $H_j - H_b$.

Manakala $H_j - H_b > 0$, maka orang itu mengalami untung.

Tapi, manakala $H_j - H_b < 0$, maka orang itu mengalami rugi.

Orang itu mengalami impas, manakala $H_j - H_b = 0$ atau harga jualnya sama dengan harga belinya.

Tapi, apakah semua jual beli akan selalu menghasilkan untung atau rugi. Tentu saja tidak.

Kalau kita membeli radio senilai Rp120.000, dan menjual beras sebanyak 25 kg senilai Rp215.000, maka dalam konteks demikian tidak dikenal istilah untung rugi. Kenapa? Jawabnya karena barang yang dibeli dan dijual tidak sama. Kalau barang yang kita perjual belikan itu sama atau tunggal, dalam hal ini konsep untung dan rugi bisa kita terapkan.

Tampak bahwa konsep matematika yang digunakan dalam hal ini adalah konsep penjumlahan, perkalian, dan pengurangan. Selain itu, konsep ketidaksamaan juga terlibat di dalamnya.

3. Persentase Keuntungan/Kerugian

Kadang seseorang ingin tahu persentase keuntungan, atau kerugian yang dialami. Berikut diberikan suatu contoh.

Contoh

Misalkan si Amir membelikan *charger* seharga Rp150.000. Karena sangat membutuhkan, si Ahmad merayu si Amir agar menjual *charger* tersebut. Setelah

Kegiatan Pembelajaran 6

melalui proses negosiasi panjang, *charger* si Amir itu dijual juga kepada si Ahmad dengan harga Rp175.000. Berapa persen keuntungan/kerugian si Amir?

Jawab:

Amir membelicharger tersebut seharga Rp150.000. Jadi $H_b = 150.000$.

Amir menjualcharger tersebut seharga Rp165.000. Jadi $H_j = 165.000$.

Dari informasi di atas, tampak bahwa $H_j > H_b$. Berarti, si Amir memperoleh keuntungan.

Besar keuntungannya adalah $Rp165.000 - Rp150.000$ yaitu sebesar Rp15.000

Berapakah persentase keuntungannya?

Si Amir itu membeli Rp150.000 dan memperoleh keuntungan Rp15.000. Maka persentase keuntungannya adalah $\frac{15000}{150000} \times 100\% = 10\%$.

Dari uraian di atas, tampak bahwa konsep matematika yang digunakan dalam masalah penentuan persentase keuntungan atau kerugian ini adalah rasio dan perkalian dengan 100%.

Berpikir Kritis

Dalam menentukan untung dan rugi, kita sering kali hanya mempertimbangkan harga jual dan harga beli. Benarkah demikian?

Sebenarnya tidak bisa sesederhana itu.

Kalau tidak ada biaya lain yang dikeluarkan selain harga beli, maka keuntungan itu bisa diperoleh dari harga jual dikurangi harga beli.

Akan tetapi, bila diperlukan biaya lain setelah membeli, misalnya masih harus ada biaya perawatan, maka selisih harga jual dengan harga beli tidak layak untuk digunakan sebagai nilai keuntungan. Harga belinya harus juga memasukkan biaya perawatan.

Dalam dunia nyata memang seperti itu adanya. Harga beli itu mencakup segala biaya yang dikeluarkan untuk membeli, dan merawat sampai dijual kembali. Akan tetapi, kesepakatan keuntungan sama dengan harga jual dikurangi harga beli sudah berlangsung lama. Untuk keperluan pembelajaran, biarlah definisi keuntungan itu

tetap seperti semula, yaitu harga jual dikurangi harga beli. Tapi, untuk keperluan praktis kita sehari-hari, kita harus menyadari bahwa keuntungan itu tidak semata-mata selisih dari harga jual dan harga beli.

4. Diskon

Pernahkah Anda melihat tanda berikut di pertokoan?



Itulah tanda bahwa kalau Anda membeli sesuatu di toko itu, ada peluang bahwa harganya nanti akan dikenai diskon. Diskon 20% artinya kalau kita membeli sesuatu dengan harga x kita hanya perlu membayar 80% dari x tersebut.

Pernahkah juga Anda melihat tanda ini?



Kalau Anda membeli barang dengan tanda tersebut, maka Anda akan memperoleh diskon bertahap. Pertama akan memperoleh diskon

Kegiatan Pembelajaran 6

maksimal 80%, jadi diskonnya bisa saja 50%, 30% atau 25% tergantung ketentuan diskon harga barang di situ.

Anggap saja dapat diskon 50%, maka setelah dipotong harganya menjadi 50%, kita diberi lagi potongan atau diskon 12% dari harga yang harus dibayarkan. Selanjutnya, dari harga terakhir yang harusnya dibayarkan, kita mendapatkan diskon lagi sebesar 12%.

Misalkan harga sepeda adalah Rp2.000.000, dan diskon untuk sepeda ini adalah 25%. Maka dengan diskon tersebut harga yang harus kita bayarkan adalah 75% dari Rp2.000.000 yaitu sebesar Rp1.500.000. Harga Rp1.500.000 ini selanjutnya dikenai diskon 12% sehingga harusnya kita membayar 88% dari Rp1.500.000 atau Rp1.320.000. Selanjutnya harga ini dikenai diskon lagi sebesar 12% sehingga harga terakhir yang harus kita bayarkan adalah 12% dari Rp1.320.000 yaitu sebesar Rp1.161.600

Tampak bahwa konsep matematika yang dipakai adalah persen, perkalian, dan hubungan antara dua bilangan.

Diskon Bentuk Lain

Terkadang juga kita diiming-imingi dengan discount yang berbunyi



Arti dari iklan ini adalah belilah dua barang sejenis, Anda akan dapat tambahan satu barang lagi yang sejenis secara cuma-cuma.

Kalau Anda dihadapkan dengan pilihan, mana yang lebih baik untuk dibeli: barang dengan diskon 30% atau barang yang didiskon dengan model beli dua gratis 1.

Kalau kita misalkan harga barangnya adalah Rp300.000. Maka dengan sistem diskon 30%, orang yang membeli barang itu cukup membayar Rp210.000 yang didapatkan dari $70\% \times 300.000$. Kalau dia membeli dengan sistem diskon beli 2

gratis 1, maka dia harus membayar Rp600.000 terlebih dahulu untuk memperoleh satu barang gratis. Dengan demikian, harga Rp600.000 itu untuk tiga barang. Artinya, harga satuannya adalah Rp200.000 yang lebih murah dari harga diskon 70%.

Tapi, mana yang lebih baik untuk dibeli?

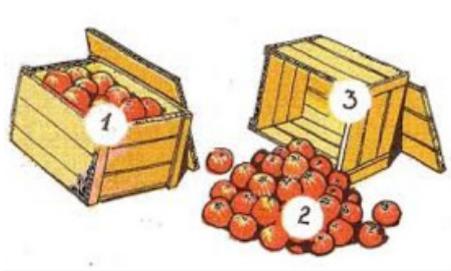
Jawabannya tidak terletak pada perhitungan matematikanya. Kalau mau dijual kembali, mungkin model beli 2 gratis 1 lebih menguntungkan. Tapi, kalau hanya untuk dipakai sendiri, untuk apa beli banyak-banyak. Semua memiliki kelebihan dan kekurangan. Maka, kita harus bijak dalam menghadapi promosi diskon seperti itu.

5. Bruto, Netto dan Tara

Tiga istilah ini biasanya ditemukan dalam kegiatan perhitungan berat. Bruto artinya adalah berat kotor. Netto artinya adalah berat bersih. Rabat adalah selisih antara bruto dan netto.

Contoh

Misalkan kita membeli satu kotak buah seperti gambar berikut dengan berat 50 kg. Berat kotaknya adalah 5 kg.



Maka angka 1 pada gambar di atas menunjukkan berat bruto (berat kotor yang terdiri dari berat buah dan berat kotaknya). Berat netto nya sama digambarkan oleh angka 2, dan taranya digambarkan dengan angka 3. Tampak bahwa berat netto sama dengan berat bruto dikurangi rabat.

Dalam kasus di atas, maka berat brutonya adalah 50 kg, dan rabatnya adalah 5 kg. Dengan demikian, berat netto nya adalah 45 kg.

Kegiatan Pembelajaran 6

Tampak bahwa konsep matematika yang dilibatkan hanya pengurangan atau penjumlahan, atau mungkin hanya sekedar persentase (kalau rabat nantinya dijadikan bentuk persen).

6. Bunga Tunggal dan Bungan Majemuk

Kalau kita menabung atau meminjam uang di Bank, kita akan dihadapkan dengan uang jasa, yang biasa dikenal dengan istilah bunga. Uang jasa ini biasanya diberikan tiap bulan dengan perhitungan sesuai perjanjian, yakni apakah bunganya dihitung tiap hari, atau tiap bulan. Apakah bunganya dihitung secara majemuk atau secara tunggal.

Apa saja maksud istilah itu?

Bunga Tunggal

Misalkan Anda mempunyai uang sebesar Rp50.000.000. Anda kemudian menabung di Bank dan sesuai dengan perjanjian yang berlaku, kepada Anda diberikan bunga tunggal setiap bulan sebesar 0,5%. Jika uang Anda tidak diambil sampai 10 bulan, berapakah besar uang Anda sekarang?

Jawab:

Kalau kita gunakan tabel untuk menghitung kondisi uang Anda tersebut, kita akan memperoleh tabel sebagai berikut

Modal	Awal Bulan ke	Bunga setiap bulan	Besar uang sekarang
50.000.000	2	250.000	50.250.000
50.000.000	3	250.000	50.500.000
50.000.000	4	250.000	50.750.000
50.000.000	5	250.000	51.000.000
50.000.000	6	250.000	51.250.000
50.000.000	7	250.000	51.500.000

50.000.000	8	250.000	51.750.000
50.000.000	9	250.000	52.000.000
50.000.000	10	250.000	52.250.000
50.000.000	11	250.000	52.500.000

Catatan: Bunga sebesar Rp250.000 diperoleh dari perhitungan $0,5\% \times 50.000.000 = 250.000$

Tampak bahwa dalam bunga tunggal, bunga tidak dikumpulkan dengan modal. Modal dianggap tetap. Bunga yang diperoleh tidak ditambahkan ke dalam modal.

Dalam sistem bunga tunggal ini, konsep matematika yang digunakan hanyalah penjumlahan, perkalian, persen biasa.

Bunga Majemuk

Di dalam bunga majemuk, bunga yang diperoleh setiap periode ditambahkan ke modal awal, sehingga setiap periodenya modal itu semakin bertambah besar.

Jadi kalau pada contoh bunga tunggal di atas, modal setelah satu bulan mungkin berubah menjadi 50.250.000. Ini berbeda dengan modal yang tetap 50.000.000 setiap bulannya. Bulan berikutnya, bunga 0,5% tersebut akan dikenakan kepada 50.250.000, sehingga akan lebih besar dari 250.000. Demikian seterusnya sehingga modal itu akan bertambah setiap bulannya.

Sehubungan dengan itu, selain penjumlahan, perkalian bilangan biasa, di dalam bunga majemuk ini, konsep matematika yang digunakan mencakup juga konsep eksponen.

D. Aktivitas Pembelajaran

1. Dalam penentuan persentase keuntungan, kita menggunakan rumus "keuntungan dibagi dengan harga beli dikalikan 100%." Diskusikan dengan teman Anda: "Mengapa bukan dibagi harga jual? Apa yang terjadi kalau pembaginya harga jual?"

2. Andaikan seseorang ditawari menabung di dua bank yang berbeda. Di bank pertama ditawarkan bunga tunggal sebesar 12% per tahun, sedang di bank kedua ditawarkan bunga majemuk sebesar 0,5% per bulan. Sampai berapa lama menabung dengan bunga tunggal lebih menguntungkan daripada dengan menggunakan bunga majemuk?

E. Latihan/Kasus/Tugas

1. Pak Amir berbelanja batu akik di pasar X di Balikpapan. Dari rumah dia mengendarai mobil dan pulang pergi menghabiskan bensin dengan nilai sebesar Rp40.000. Dia juga harus membayar biaya parkir sebesar Rp2.000. Akik yang dibelinya seharga Rp350.000 ternyata ditawar orang di pasar itu juga. Orang itu sangat menginginkan akik itu dan sanggup membeli berapapun yang harga yang dibilang pak Amir. Setelah dipikir-pikir sejenak, pak Amir memutuskan menjual akik itu dengan keuntungan 25%. Setelah terjadi jual beli, si penjual akik yang menyaksikan jual beli di depan matanya, meminta *fee* saksi mata jual beli sebesar Rp10.000. Berapakah keuntungan pak Amir?
2. Tentukan konsep matematika yang terlibat dalam proses pengerjaan soal latihan 1 di atas. Agar operasi pembagian juga termuat di dalam operasi itu, situasi seperti apakah yang harus ditambahkan pada cerita pak Amir di atas.
3. Coba temukan rumus nilai uang simpanan yang diberi skema bunga majemuk.

F. Rangkuman

Tidak banyak konsep, prinsip, prosedur matematika yang dilibatkan dalam menyelesaikan masalah aritmetika sosial. Operasi aritmetik seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian umumnya adalah konsep, prinsip, atau prosedur matematika yang banyak digunakan dalam hal ini. Andaikata ditambahkan lagi, mungkin konsep persentase, kesamaan, dan eksponen adalah beberapa konsep yang bisa disebutkan.

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

1. Untuk latihan 1, kecermatan Anda dalam menentukan biaya pembelian, prosentase keuntungan sangat diperlukan. Anda memang harus memahami

betul cerita di dalamnya agar bisa membuat pemodelan matematika yang sesuai. Tapi yang jelas, biaya pembelian adalah sebesar Rp400.000. Karena ingin untung 25%, maka harga jualnya adalah Rp500.000. Dengan begitu dia memperoleh keuntungan sebesar Rp100.000. Karena masih harus membayar *fee* saksi mata sebesar Rp10.000, maka sisa keuntungannya adalah Rp90.000.

2. Konsep matematika yang terlibat antara lain, penjumlahan (yaitu ketika menghitung biaya pembelian), persentase (ketika menentukan harga jual), pengurangan (untuk menentukan keuntungan).
3. Misalkan modalnya M dan bunganya $i\%$.

Maka setelah 1 bulan,

modalnya akan menjadi $M \times (100 + i)\%$.

Setelah 2 bulan,

modalnya menjadi $(M \times (100 + i)\%.) \times (100 + i)\%$ atau $M \times ((100 + i))^2$.

Setelah 3 bulan,

modalnya menjadi $M \times ((100 + i)\%)^2 \times (100 + i)\%$ atau $M \times ((100 + i))^3$.

Begitu seterusnya.

Coba temukan sendiri rumusnya.

Kegiatan Pembelajaran 7

Estimasi Dan Aproksimasi

Dalam banyak kesempatan, kita lebih banyak menggunakan perhitungan estimasi dan aproksimasi dari pada perhitungan eksak. Perhitungan estimasi dan aproksimasi ini biasanya digunakan dalam kondisi yang menuntut keputusan cepat atau karena ketiadaan piranti yang pasti untuk menentukan hasilnya secara eksak. Begitu banyaknya kegiatan estimasi dan aproksimasi ini, berbagai teknik untuk melakukan estimasi dan aproksimasi pun tumbuh berkembang.

Sehubungan dengan itu, di samping membelajarkan hitungan yang eksak, Anda juga perlu membelajarkan siswa Anda untuk melakukan estimasi. Karena itu, Anda juga perlu belajar tentang estimasi dan aproksimasi.

Pembelajaran Estimasi dalam Kehidupan Sehari-hari

A. Tujuan

Dengan mempelajari modul ini, Anda diharapkan memiliki kemampuan untuk melakukan aproksimasi dan estimasi, serta terapannya dalam kehidupan sehari-hari.

B. Indikator Ketercapaian Kompetensi

Indikator bahwa Anda sudah memiliki kompetensi dalam estimasi dan aproksimasi adalah:

1. Mengidentifikasi kondisi atau situasi yang memerlukan estimasi atau aproksimasi

C. Uraian Materi

Estimasi merupakan kegiatan yang dilakukan dalam kehidupan sehari-hari. Karenanya, kita akan melihat banyak contoh estimasi dalam kehidupan sehari-hari. Berikut akan disajikan beberapa contoh kegiatan sehari-hari yang menggunakan estimasi.

Contoh 1.

Kegiatan Pembelajaran 7

Ketika seorang ibu hendak berbelanja ke pasar, beliau akan menggunakan estimasi berapa uang yang harus dibawa untuk menjamin uang belanjanya cukup. Beliau tentu tidak ingin membawa uang terlalu banyak agar terhindar dari hal-hal yang merugikan. Beliau hanya akan membawa uang seperlunya.

Misalkan beliau hendak membeli cabai 1 kg, beras 10 kg, bawang merah 1 kg, dan tomat 2 kg. Beliau tidak bisa menetapkan harga-harga dari barang-barang yang mau dibelinya itu. Oleh karena itu, dia melakukan estimasi. Beliau mengira-ngira berapa harganya dengan memperhatikan pengalaman yang dimiliki sebelumnya.



Contoh 2

Ketika seseorang hendak membangun rumah, dan dia memiliki sejumlah uang tertentu. Dengan uang tersebut dia atau pemborongnya akan berbelanja alat dan bahan yang diperlukan untuk membangun rumah tersebut. Dia tidak tahu persis berapa banyaknya barang, berapa banyak tenaga, dan berapa lama waktu yang diperlukan untuk pengerjaan pembangunan rumahnya. Dia harus membuat estimasi atau perkiraan berapa besar biaya yang diperlukannya untuk membangun rumah tersebut.



Contoh 3

Pak Asari mempunyai banyak sekali kelereng. Ketika masih remaja, beliau memang suka sekali bermain kelereng. Karena anaknya sekarang sudah besar, dan beliau tahu bahwa sekarang musim bermain kelereng sedang ramai, beliau pun memutuskan untuk memberikan sejumlah kelereng kepada anaknya. Cara yang dilakukan pak Asari adalah dengan mengambil sejumlah kelereng dengan menggunakan kedua tangan beliau dari kumpulan kelereng yang ada. Dia melakukan hal itu sebanyak 7 kali. Berapa banyak kelereng yang diberikan oleh Pak Asari kepada anaknya?



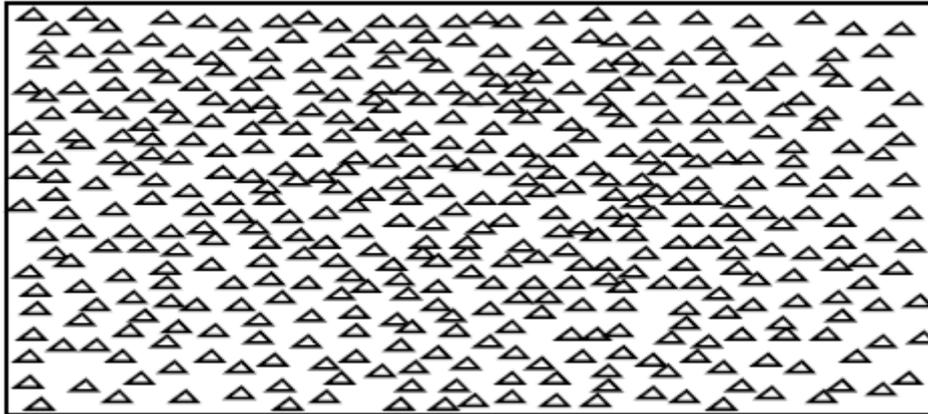
Contoh-contoh di atas menunjukkan bahwa dalam kehidupan sehari-hari, banyak ditemukan kasus dimana estimasi lebih diperlukan daripada menghitung secara eksak. Ketidaktahuan secara pasti, dan kebutuhan untuk melakukan pekerjaan dengan segera, mendorong seseorang untuk lebih menggunakan estimasi daripada perhitungan eksak.

Ragam Estimasi

1. *Estimasi untuk menentukan banyaknya anggota suatu himpunan*

Perhatikan gambar berikut.

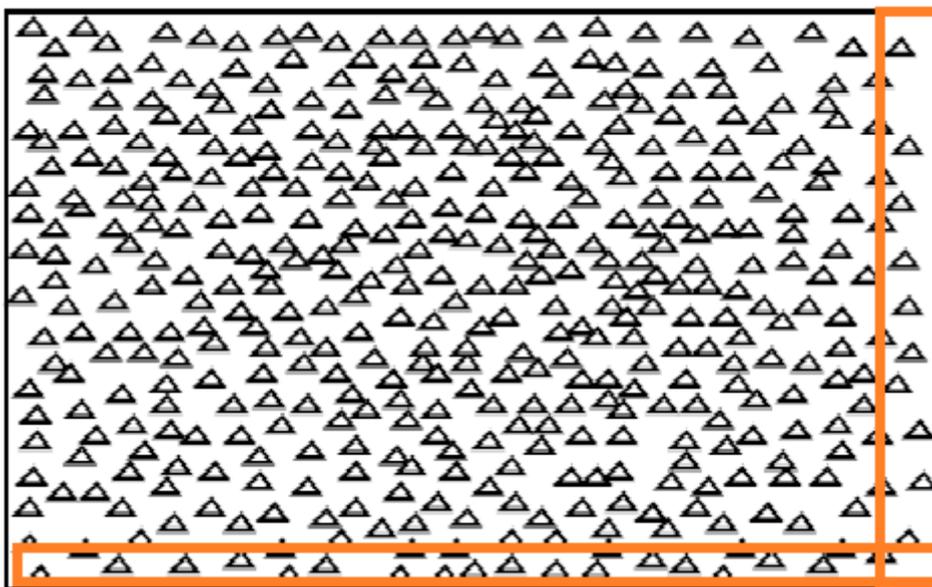
Dengan cepat, coba tentukan berapa banyak segitiga yang ada pada gambar berikut.



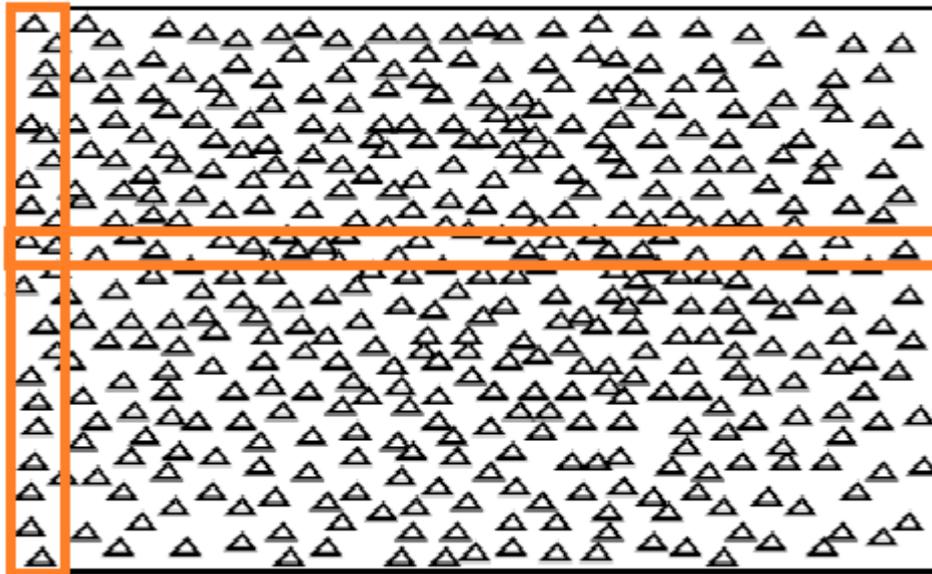
Kalau Anda hitung satu persatu, tentu akan diperlukan waktu yang lama. Anda harus mempunyai keterampilan tertentu dalam menduga berapa banyak segitiga yang ada pada gambar tersebut. Semakin dekat dugaan Anda dengan banyak segitiga sesungguhnya, semakin hebat lah kemampuan estimasi Anda.

Bagaimana sebaiknya kita membuat perkiraan.

Kita asumsikan bahwa segitiga-segitiga itu tersusun membentuk susunan persegi panjang. Karena itu, kita hitung saja satu baris paling bawah, dan satu kolom paling kanan. Hasil kali keduanya kita tetapkan sebagai estimasi kita tentang berapa banyaknya segitiga pada gambar tersebut.



Atau, kita buat kotak mendatar di tengah-tengah dan kotak vertikal di kiri, sehingga diperoleh hasil gambar berikut.



Dengan cara ini, kita akan menghasilkan estimasi atau taksiran banyaknya segitiga pada gambar tersebut.

2. *Estimasi untuk menentukan luas suatu daerah*

Perhatikan beberapa contoh berikut

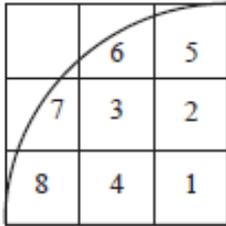
Tentukan luas daerah yang diarsir berikut jika 1 kotaknya dianggap mempunyai ukuran luas 1 cm^2 .



Tentu kita bisa menghitung luas daerah yang diarsir itu dengan menggunakan rumus luas $\frac{1}{4}$ lingkaran.

Akan tetapi, kita bisa juga dengan menggunakan estimasi atau taksiran, terutama kalau kita belum mengenal rumus luas lingkaran. Mari kita lihat ilustrasi berikut

Kegiatan Pembelajaran 7



Kita pilih bagian-bagian dari seperempat lingkaran itu yang kira-kira luasnya lebih dari $\frac{1}{2}$ satuan, dan kita beri nomor mulai dari 1 sampai terakhir. Ternyata kita bisa memberi nomor mulai dari 1 sampai dengan 8. Dengan demikian, kita bisa menaksir bahwa luas daerah yang diarsir itu adalah 8 cm^2 .

Atau kita bisa membuat lebih cermat dengan menetapkan sebagai berikut:

Ada 4 persegi dengan masing-masing memiliki luas 1 cm^2 . Daerah dengan nomor 5 dan 6 kira-kira luas total sebesar $1 \frac{1}{2} \text{ cm}^2$. Daerah dengan nomor 7 dan 8 kira-kira luas total sebesar $1 \frac{1}{2} \text{ cm}^2$

Luas keseluruhan adalah $4 + 1 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2}$ dan satu bagian kecil lagi di antara kotak nomor 6 dan 7. Dengan demikian, luas keseluruhannya kira-kira 7 lebih sedikit.

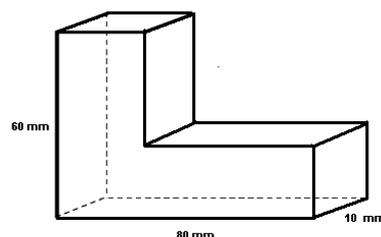
3. *Estimasi untuk menentukan volume atau kapasitas suatu ruang*

Andai Anda diminta untuk memperkirakan volume dari bangun dimensi 3 berikut.

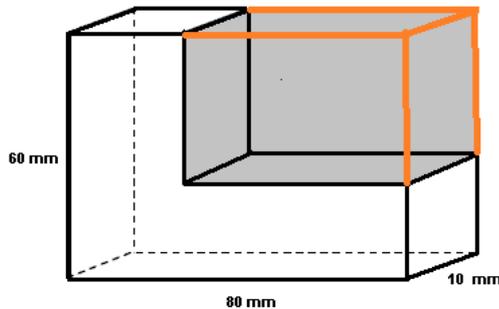
Seperti halnya menaksir luas dari suatu bangun tak beraturan, kita perlu bantuan bangun-bangun ruang yang sudah kita kenal cara menentukan volumenya. Mungkin kita bisa menggunakan balok, atau bahkan mungkin tabung.

Contoh

Tentukan perkiraan volume bangun ruang berikut



Untuk menentukan volume perkiraan dari bangun ruang tersebut, kita bisa saja menggunakan rujukan gambar sebagai berikut.



Dengan begitu, volume yang dimaksud adalah volume keseluruhan dikurangi dengan volume yang diarsir. Tetapi karena kita tidak memiliki ukuran yang tepat tentang dimensi panjang dari daerah yang diarsir, kita buat perkiraan saja panjangnya. Tinggi daerah yang diarsir mungkin sekitar 40 cm.

Karena panjang alas adalah 80 cm, sementara yang diarsir sekitar $\frac{3}{4}$ kalinya, maka kita bisa menduga volume daerah yang diarsir adalah $60 \times 10 \times 40$ atau 24000 cm³. Sementara itu, volume keseluruhan adalah $80 \times 10 \times 60$ atau 48000 cm³. Karena itu, volume perkiraan dari daerah yang dimaksud adalah 24000 cm³.

Mungkin terkesan agak kurang akurat. Anda bisa meningkatkan kualitas perkiraan Anda dengan memperbaiki estimasi ukuran-ukuran panjang dan tinggi daerah yang diarsir.

4. *Estimasi untuk menentukan hasil operasi bilangan*

Perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1.

Mengingat lahan di sekitar rumah yang didiaminya ada dua lahan kecil yang tidak dimanfaatkan, Burhan kemudian berinisiatif menanam jagung. Ternyata usahanya berhasil. Dari lahan pertama dia berhasil memanen jagung sebanyak 343 kg, sedang dari lahan kedua dia berhasil memanen jagung sebanyak 518 kg. Orang tuanya bertanya, “berapa kg jagung yang bisa kamu panen dari dua lahan tersebut?”

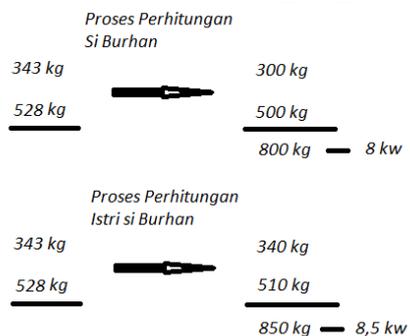
Burhan tidak menjawab secara akurat. Dia menggunakan perkiraan. Dan menjawab sekitar 8 kwintal. Tetapi istrinya yang ikut mendengar percakapan antara suaminya,

Kegiatan Pembelajaran 7

si Burhan, dengan orang tuanya tersebut justru menjawab $8 \frac{1}{2}$ kwintal. Untungnya si Burhan tidak protes dan tidak perlu terjadi pertengkaran.

Tahukah Anda bagaimanakah proses perhitungan yang dilakukan si Burhan dan istrinya.

Proses perhitungan yang dilakukan si Burhan dan istrinya dapat digambarkan sebagai berikut:



Jawaban si Burhan dan istrinya tersebut sama-sama bisa diterima. Meskipun hasilnya berbeda, tetapi karena keduanya diperoleh dari melakukan estimasi, maka perbedaan tersebut tidak menjadi masalah.

Si Burhan dan istrinya menggunakan suatu cara yang dikenal dengan cara *front-end estimation* (estimasi ujung paling depan). Si Burhan menggunakan hanya satu angka ujung paling depan (*one-column front end*), sedang istrinya menggunakan dua angka ujung paling depan (*two-column front end*). Yang membedakan hanya akurasinya saja.

Mungkinkah penggunaan estimasi ujung terdapan dua kolom (*two-column front end*) senantiasa memberikan hasil yang lebih akurat dibandingkan dengan menggunakan estimasi ujung terdapan satu kolom (*one-column front end*)?

Sebenarnya apa yang dimaksud dengan teknik ujung terdapan (*front-end*) ini?

Teknik Front End (Ujung Terdapan)

Perhatikan tabel berikut

Soal Perhitungan	One-Column Front End (Ujung terdepan satu kolom)		Two-Column Front End (Ujung terdepan dua kolom)	
	Proses	Hasilnya	Proses	Hasilnya
$143 + 362$	$100 + 300$	400	$140 + 360$	500
$3154 + 2873$	$3000 + 2000$	5000	$3100 + 2800$	5900
$767365 + 467581$	$700000 + 400000$	1100000	$760000 + 460000$	1220000
$837 - 629$	$800 - 600$	200	$830 - 620$	210
$87365 - 52871$	$80000 - 50000$	30000	$87000 - 52000$	35000

Berdasarkan tabel di atas, angka yang harus diperhatikan hanya yang berada di ujung terdepan (dalam hal ini ujung paling kiri), entah satu angka paling kiri (ujung paling depan satu kolom), atau dua angka paling kiri (ujung paling depan dua kolom). Angka-angka yang selebihnya dianggap 0.

Pertanyaan kritis:

Kalau kita dihadapkan dengan soal tentukan selisih dari 9128438 dan 4389201, sebaiknya kita menggunakan ujung paling depan satu kolom (*one-column front end*) ataukah ujung paling depan dua kolom (*two-column front end*)? Mengapa?

Contoh 2

Ketika di USA, pak Asari berbelanja barang untuk kebutuhan sehari-hari. Ia sudah memilih bread, milk, dan cereal. Ia membawa uang sebanyak \$11. Dia ingin menambah belanjanya dengan membeli popcorn. Ternyata, dia melihat dalam daftar harga sebagai berikut.



Kegiatan Pembelajaran 7

Coba Anda gunakan prosedur *Front End (one-column)*, dan lanjutkan dengan *two-column*) untuk mengestimasi cukup tidaknya uang pak Asari tersebut untuk membeli pop-corn.

Jawab:

Kalau Anda kerjakan hal di atas, terkesan uang \$10,75 yang dimiliki Asari akan mencukupi untuk membeli tambahan *pop corn*. Dengan *one-column front end*, diperoleh perkiraan \$9. Dengan *two-column front end*, diperoleh perkiraan pengeluaran sebesar \$10.7. Padahal kenyataannya, Asari tidak bakal bisa membeli *popcorn* tersebut. Kalau dijumlah dengan sebenarnya, maka diperoleh jumlah \$10,96, suatu jumlah yang melebihi jumlah uang yang dimilikinya.

Oleh karena itu, dikembangkan juga metode *front-end* yang lain. Metode ini dikenal dengan ujung depan yang disesuaikan (*adjusted front-end*). Cara melakukannya adalah sebagai berikut: pertama, lakukan estimasi dengan *one-column front end* atau *two-column front end*. Sesudah itu, lanjutkan dengan estimasi dari sisa digit yang lain. Sebagai contoh

Lakukan one-column Front End	Lakukan estimasi untuk angka tersisa	Jumlah keseluruhan
\$1.79	\$1.79 →	
\$2.18	\$2.18 → \$1	
\$3.34	\$3.34 →	\$9
\$3.65	\$3.65 → \$1	\$2
<u>\$9</u>	<u>\$2</u>	<u>\$11</u>

Dengan teknik ujung terdepan yang disesuaikan ini (*adjusted front end*), hasil yang diperoleh lebih mendekati jumlah yang sesungguhnya, sehingga hasilnya bisa lebih dapat dipercaya.

Teknik Pembulatan (*Rounding*)

Dalam kehidupan sehari-hari, teknik lain yang juga sering digunakan orang dalam menghitung adalah pembulatan (*rounding*). Teknik ini sering digunakan untuk keperluan **aproksimasi (pendekatan)**.

Misalkan kita dihadapkan dengan tabel tentang kegiatan olahraga yang dilakukan oleh laki-laki dan perempuan sebagai berikut:

Partisipasi dalam Kegiatan Olahraga (dalam jutaan)

Jenis Olahraga	Laki-laki	Perempuan
Golf	21,8	5,7
Sepakbola	8,2	4,9
Renang	27,0	31,3
Bersepeda	22,9	20,6

Berapa banyak laki-laki yang berpartisipasi dalam kegiatan bersepeda daripada yang berpartisipasi dalam kegiatan golf?

Dalam menjawab soal ini, kita boleh saja menjawab dengan perkiraan 1 juta yang berasal dari fakta dalam tabel bahwa laki-laki yang terlibat dalam kegiatan bersepeda adalah 22,9 juta yang dibulatkan menjadi 23 juta dan laki-laki yang terlibat dalam kegiatan golf adalah 21,8 juta yang dibulatkan menjadi 22 juta. Dengan demikian, perbedaannya adalah 1 juta, sehingga jawaban dari soal itu adalah: terdapat 1 juta laki-laki yang lebih berpartisipasi dalam kegiatan bersepeda daripada berpartisipasi dalam kegiatan golf.

Berikut diuraikan beberapa kasus penggunaan pembulatan (*rounding*) yang lebih sederhana.

Kasus 1

Suatu ketika, Asari diminta memperkirakan jumlah dari 136 dan 281. Yang dilakukan oleh Asari untuk menjawab soal itu adalah sebagai berikut:

136 → 140 (artinya, bilangan 136 itu dibulatkan menjadi 140)

281 → 280 (Bilangan 281 dibulatkan menjadi 280)

Sehingga Asari memperkirakan bahwa jumlahnya adalah sekitar 420.

Kasus 2

Ketika diberi lagi soal yang lain, yaitu “tentukan jumlah dari 427 dan 45, yang dilakukannya adalah sebagai berikut:

427 → 430

45 → 50

Sehingga dengan itu, didapatkan jumlahnya 480.

Kasus 3

Terakhir, ketika dia diberi soal “Berapakah selisih antara 7863 dan 3349”, dia menjawab sebagai berikut:

7853 → 7850

3349 → 3350

Selisihnya dalah 4500

Dalam kasus-kasus ini, Asari melakukan pembulatan ke PULUHAN terdekat.

Jawaban Asari untuk kasus-kasus di atas mungkin akan berbeda kalau dia menggunakan pembulatan ke RATUSAN TERDEKAT.

Catatan: Untuk melakukan pembulatan ke puluhan atau ke ratusan terdekat, Anda perlu memperhatikan bilangan yang di bentuk oleh dua atau tiga angka terakhir (tapi jangan diubah urutannya).

Jenis Aproksimasi lainnya

Kalau tadi sudah disampaikan tentang teknik aproksimasi dengan pembulatan ke puluhan terdekat, atau ke ratusan terdekat, sebenarnya masih ada lagi teknik aproksimasi yang bisa digunakan, yaitu: pembulatan ke banyaknya angka desimal, dan pembulatan ke angka-angka signifikan (angka-angka penting).

Pembulatan ke banyaknya angka desimal

Pembulatan ke banyaknya angka desimal tertentu dilakukan dengan cara menetapkan berapa desimal (berapa angka sesudah koma) yang masih dapat diterima sebagai hasil pengukuran yang baik.

Kalau kita membatasi sampai dua angka desimal, misalnya, maka pengukuran panjang yang menghasilkan 12,3472 sebenarnya cukup dianggap 12,35. Pengukuran dengan panjang 0,132 misalnya cukup dianggap dengan 0,13.

Aproksimasi semacam ini akan menghasilkan bilangan-bilangan dengan banyaknya angka desimal yang sama. Bilangan-bilangan ini selanjutnya dapat digunakan untuk keperluan melakukan estimasi yang sesuai.

Pembulatan ke angka-angka penting

0,00036 sebenarnya hanya memiliki 2 angka penting. Akan tetapi, 0,03600 memiliki empat angka penting. Ini disebabkan bahwa pada 0,03600 satuan kecermatan pengukuran menghendaki sampai 5 angka desimal. Dari 5 angka desimal tersebut, empat angka penting yang diperoleh yang membentuk 3600. Sebaliknya, pada 0,00036, meskipun juga pengukuran itu menghendaki sampai 5 angka desimal, hanya bilangan 36 yang penting di situ, Jadi hanya ada dua angka penting di dalamnya. Pembulatan ke angka penting mungkin kurang begitu terasa untuk digunakn dalam estimasi.

Ketika sudah ditetapkan berapa angka penting yang dijadikan patokan, maka semua bilangan yang ada tersebut diubah dahulu menjadi bilangan sesuai dengan angka penting, dan kemudian dioperasikan.

Sebagai contoh, misalkan kita ingin menentukan jumlah dari 0,36; 1,4726; 0,2071; dan 2,0 dengan menggunakan 3 angka penting. Maka, langkah pertama bilangan-bilangan tersebut diubah menjadi bilangan dengan 3 angka penting.

0,36 diubah menjadi 0,360

1,4726 diubah menjadi 1,47

0,2071 diubah menjadi 0,207, dan

2,0 diubah menjadi 2,00

Dengan begitu, bilangan yang dijumlahkan sekarang adalah:

$$0,360 + 1,47 + 0,207 + 2,00$$

Teknik Compatible Numbers (Bilangan yang Mengenakkan)

Teknik ini memanfaatkan karakteristik dari bilangan-bilangan tertentu yang sudah kiita kenal dengan baik yang membuat kita lebih mudah menentukan hasil operasinya.

Contoh 1

Kegiatan Pembelajaran 7

Berapakah 26% dari 49?

Untuk keperluan estimasi, daripada menggunakan bilangan 26%, kita memilih 25% yang nilainya sama dengan $\frac{1}{4}$. Daripada menggunakan 49, kita gunakan 48. Karena itu, nilai dari 26% dari 49 adalah kira-kira 12.

Contoh 2

Berapakah hasil dari $0,23 + 0,97 + 0,76$

Untuk keperluan estimasi, bilangan yang lebih enak digunakan daripada 0,23 adalah 0,25 yang kita kenal sebagai $\frac{1}{4}$. Bilangan yang lebih enak digunakan daripada 0,76 adalah 0,75 yang kita kenal dengan $\frac{3}{4}$. Terakhir, 0,97 itu dekat dengan 1. Karena itu, jumlahnya adalah kira-kira 2.

Contoh 3

Berapakah hasil dari $\frac{13}{14} - \frac{3}{8}$

Untuk keperluan estimasi, $\frac{13}{14}$ adalah sekitar 1 dan $\frac{3}{8}$ adalah sekitar $\frac{1}{2}$

Sehingga selisihnya adalah sekitar $\frac{1}{2}$

Teknik Clustering (Mengelompokkan)

Penulis akan menyajikan beberapa contoh. Tugas Anda adalah mencoba menemukan bagaimana prinsip penggunaan teknik ini.

Contoh

Dari suatu survey terhadap jumlah penonton pertandingan sepakbola yang dilakukan di stadion Nou Camp Barcelona dalam 5 pertandingan terakhir diperoleh data sebagai berikut:

Tanggal 12 Desember 2015 ditonton oleh sebanyak 67.839 orang

Tanggal 5 Desember 2015 ditonton oleh sebanyak 71.153 orang

Tanggal 28 November 2015 ditonton oleh sebanyak 70.682 orang

Tanggal 21 November 2015 ditonton oleh sebanyak 69.853 orang

Tanggal 14 November 2015 ditonton oleh sebanyak 72.112 orang

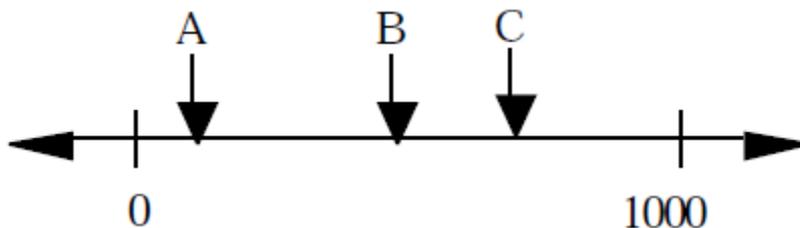
Berapakah jumlah penonton dalam 5 pertandingan terakhir di Nou Camp Barcelona tersebut?

Jawab:

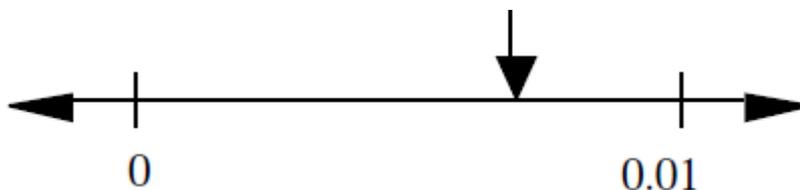
Dengan teknik cluster, kita dapat melihat bahwa dalam setiap pertandingan, jumlah penontonnya adalah sekitar 70.000 orang. Karena itu, dalam 5 pertandingan terakhir tersebut, jumlah penonton keseluruhan adalah sekitar 350.000

Estimasi lain

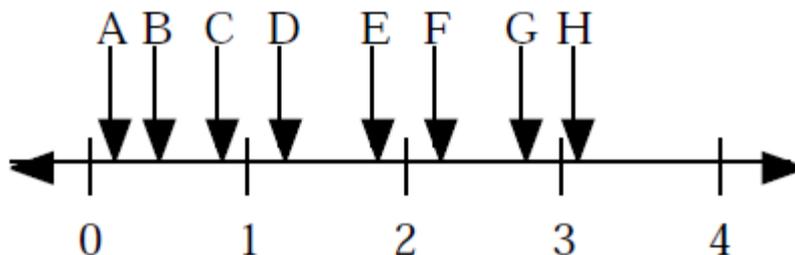
Lambang suatu bilangan kadang disimbolkan sebagai titik dalam garis bilangan. Sebagai contoh, tentukan nilai dari A, B, dan C yang tampak pada gambar berikut.



Berapakah nilai yang ditunjuk oleh ujung anak panah pada gambar berikut



Pemahaman ini dapat digunakan untuk menentukan hasil operasi dua bilangan. Sebagai contoh



Huruf apakah yang cocok untuk dengan hasil $A \times G$? $B + F$?

D. Aktivitas Pembelajaran

Agar Anda semakin mengenali kehidupan sehari-hari yang memerlukan estimasi, lakukanlah hal-hal berikut:

1. Ketika Anda akan mengecat dinding rumah Anda, sebenarnya kita bisa menggunakan perhitungan eksak atau estimasi. Dalam kondisi seperti apa Anda akan menggunakan perhitungan eksak? Dalam kondisi seperti apa Anda akan menggunakan estimasi? Mengapa?
2. Ambil satu sobekan kertas koran yang tidak beraturan. Lakukan estimasi tentang luas sobekan koran tersebut. Setelah semua kelompok menentukan nilai

estimasi mereka, tatalah sobekan kertas koran tersebut menjadi bentuk yang lebih mudah Anda hitung luasnya (bisa persegi, persegipanjang, trapesium, jajargenjang, segitiga atau bentuk gabungan), dan bandingkan luas hasil estimasi Anda dengan luas hasil pengukuran yang lebih baik. Diskusikan cara yang lebih baik untuk meningkatkan akurasi estimasi Anda dengan teman-teman Anda.

3. Diskusikan dengan teman-teman, keunggulan dan kelemahan dari masing-masing teknik estimasi yang dipelajari dalam modul ini, yaitu: ujung terdepan (*front-end*), pembulatan (*Rounding*), pengelompokan (*clustering*), dan bilangan yang mengenaikan (*compatible numbers*). Tampilkan hasil diskusi Anda ke dalam tabel perbandingan.

E. Latihan/Kasus/Tugas

Kerjakan tugas berikut bersama rekan Anda.

1. Setiap berapa lamakah Anda memotong kuku? Memangkas rambut? Mengapa Anda mengestimasi?
2. Selidiki kegiatan di rumah Anda yang lebih menuntut penggunaan estimasi daripada perhitungan eksak.
3. Selidiki kegiatan di sekolah yang lebih menuntut penggunaan estimasi daripada perhitungan eksak.
4. Identifikasi jenis pekerjaan yang menjadi idaman para siswa Anda. Selanjutnya, selidiki kegiatan di tempat kerja tersebut yang lebih menuntut penggunaan estimasi daripada perhitungan eksak.

F. Rangkuman

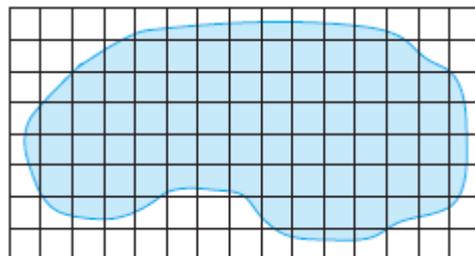
Estimasi dan aproksimasi banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Estimasi banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Estimasi ini biasa dilakukan manakala kita belum mengenal medan dengan pasti, atau kalau dalam kondisi terburu-buru yang tidak memungkinkan dilakukan perhitungan eksak. Bekal untuk melakukan estimasi adalah pengenalan akan situasi dan pengalaman yang kita miliki.

Estimasi bisa dilakukan dalam konteks menentukan banyak anggota suatu himpunan, luas suatu daerah, volume suatu bangun ruang, dan juga bisa dalam menentukan hasil pengoperasian beberapa bilangan.

Dalam operasi bilangan, ada banyak teknik estimasi yang bisa digunakan. Teknik-teknik tersebut adalah teknik ujung terdepan (*front-end*), teknik pembulatan (*rounding*), teknik pengelompokan (*clustering*), dan teknik memanfaatkan bilangan yang mengena (*compatible numbers*).

G. Umpan Balik dan Tindak Lanjut

1. Anda diberi sebungkus kelereng. Anda diberi kebebasan untuk menata kelereng itu ke dalam bentuk yang Anda suka. Tapi, Anda hanya diberi waktu 1 menit untuk memperkirakan banyaknya kelereng dalam bungkus tersebut. Apa yang akan Anda lakukan untuk membantu Anda agar perkiraan Anda lebih akurat?
2. Kepada Anda diberikan satu gambar daerah berikut, dan Anda diminta membuat estimasi tentang luas daerah yang diarsir. Kalau Anda hanya diberi waktu 1 menit untuk menentukan perkiraan luas daerah yang diarsir berikut,



strategi apakah yang Anda gunakan?

3. Berilah contoh kegiatan dalam kehidupan sehari-hari yang penentuan hasil operasi bilangannya (penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian) menggunakan teknik-teknik:
 - a. Ujung terdepan (*Front-end*)
 - b. pembulatan (*rounding*)
 - c. pengelompokan (*clustering*)
 - d. bilangan yang mengena (*compatible numbers*)

Kunci Jawaban

A. Kegiatan Pembelajaran 1

1.
 - a) -45, -34, -7, 2, 17, 23, 33
 - b) -37, -19, -2, 19, 28, 55
 - c) -78, -41, -8, 0, 32, 39, 78
2. -10
3. Jawaban bisa bervariasi, contoh jawaban : terletak diantara 7 dan -5.
4.
 - i) <
 - ii) >
 - iii) >
5.
 - a) bertambah turun
 - b) turun 19°
6.
 - a) Di kota A
 - b) Di kota B
 - c) $(30 - (-10))^\circ = 40^\circ$.
7. Hitunglah hasil setiap operasi berikut ini.
 - a) $(25+4) \times 5 = \mathbf{145}$
 - b) $(12 - 6) \times 12 = \mathbf{72}$
 - c) $-8 \times (43 - 14) = \mathbf{-232}$
 - d) $(54 \times 3) : 3 = \mathbf{54}$
 - e) $-8 \times 14) - 120 = \mathbf{-232}$
 - f) $(126 : 6) \times (24 - 82) = \mathbf{1218}$
 - g) $(45 - 126) \times 3 = \mathbf{-243}$
 - h) $(-24 - 46) : 14 = \mathbf{-5}$
8. Sifat-sifat apakah yang berlaku pada operasi penjumlahan bilangan bulat?
Sebutkan dan tulis bunyi sifat tersebut!
Penyelesaian:
 - a) tertutup; jika $p, q \in B$, maka $p + q \in B$

Kunci Jawaban

b) komutatif; jika $p, q \in B$, maka $p + q = q + p$

c) Asosiatif; jika $p, q, r \in B$, maka $(p + q) + r = p + (q + r)$

9. Mengapa sifat asosiatif tidak berlaku pada operasi pembagian pada bilangan bulat? Jelaskan dengan contoh!

Penyelesaian:

Sifat asosiatif tidak berlaku pada operasi pembagian pada bilangan bulat, contoh :

$$(64 : 8) : 4 = 8 : 4 = 2.$$

Sedangkan,

$$64 : (8 : 4) = 64 : 2 = 31.$$

Ternyata, $(64 : 8) : 4 \neq 64 : (8 : 4)$

B. Kegiatan Pembelajaran 2

1. Terdapat pasangan bilangan p dan q , kemudian akan dicari KPK dari pasangan bilangan tersebut. Jika ternyata $KPK(p, q) = pq$, itu berarti bilangan p dan q tersebut relatif prima, atau dengan kata lain $FPB(p, q) = 1$. Jawaban: **B**
2. Andaikan FPB dari pasangan bilangan m dan n adalah m , atau $FPB(m, n) = m$, maka kesimpulan yang benar adalah m merupakan faktor dari n . Karena m merupakan faktor dari n , berarti m membagi habis n , atau dengan kata lain n **habis dibagi oleh m** . Jawaban: **C**
3. Diketahui $m = a^4b^2c^5d$ dan $n = ab^3c^3$, dengan a, b, c , dan d adalah bilangan prima, maka $KPK(m, n)$ dapat kita tulis sebagai perkalian dari faktor-faktor prima dengan pangkat tertinggi, yaitu: $a^4b^3c^5d$. Jawaban: **E**
4. Jika $p = a^6b^2c^3d$ dan $q = ab^3c^k$, dengan a, b, c , dan d adalah bilangan prima, serta k adalah bilangan prima genap, yaitu $k = 2$. Maka $FPB(p, q)$ dapat kita tulis dalam bentuk perkalian faktor-faktor prima dengan pangkat terkecil, yaitu: ab^2c^2 . Jawaban: **A**
5. Bentuk barisan: $2x, 4x, 6x, 8x, 10x, \dots, 1000x$, merupakan bentuk barisan kelipatan 2 dari $2x$. Dengan demikian, $KPK(2x, 4x, 6x, 8x, 10x, \dots, 1000x)$ haruslah $1000x$. Jawaban: **D**

C. Kegiatan Pembelajaran 5

1. a) $\frac{1}{2}$ b) 81 c) 3 d) $\frac{4}{9}$ e) 1
2. a) $\frac{1}{25}$ b) 216a c) $\frac{1}{8}x^{12}$ d) $2^{\frac{1}{3}}ab^{\frac{1}{3}}$ e) $6\sqrt{3}-3\sqrt{2}$
3. a) $3^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ b) $2^{\frac{5}{4}}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}$ c) $2^{\frac{3}{2}}p^{\frac{3}{2}}q^{\frac{1}{2}}$ d) $2st^{\frac{1}{5}}$
4. a) $\sqrt{2x^3y}$ b) $\sqrt[4]{64a^5b^2}$ c) $\sqrt[3]{9p^4q}$ d) $\sqrt[6]{a^5b^3c^4}$
5. a) $a-2\sqrt{3a}+3$ b) X^6 c) 3 d) 8^3
6. a) $3+81$ atau 84 b) 6^2 c) $a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$ d) $28x^6y^2$
7. a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{a}}{3a}$ c) $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2}$

Evaluasi

Petunjuk

1. Di dalam soal evaluasi ini, tersedia 25 soal pilihan ganda dengan empat pilihan.
2. Hanya satu pilihan yang benar dari setiap soal tersebut
3. Lingkariilah jawaban yang Anda anggap benar.
4. Kerjakan semua soal ini dalam waktu 45 menit.

Soal

1. Nilai dari $17 + 4 \times 3 - (5:2) = \dots$
 - A. 19
 - B. 26,5
 - C. 39
 - D. 60,5
2. Nilai dari $\sqrt{32} - \sqrt{72} + 5\sqrt{2} = \dots$
 - A. $-3\sqrt{2}$
 - B. $-2\sqrt{2}$
 - C. $7\sqrt{2}$
 - D. $3\sqrt{2}$
3. Bentuk sederhana dari $2\sqrt{3}(3\sqrt{6} + \sqrt{24})$ adalah ...
 - A. $20\sqrt{2}$
 - B. $24\sqrt{2}$
 - C. $30\sqrt{2}$
 - D. $32\sqrt{2}$
4. Jika setiap pernyataan dengan operasi "*" berikut ini dinyatakan benar

$$2 * 1 = 8$$

$$5 * 2 = 40$$

$$5 * 3 = 60$$

$$9 * 2 = 72$$

$$\text{maka } 20 * 5 = \dots$$

- A. 200
B. 300
C. 400
D. 500
5. Diketahui $P = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{5}{4}}$. Jika $a = 27$ dan $b = 16$, maka nilai P sama dengan
- A. $\frac{9}{2}$
B. $\frac{9}{8}$
C. $\frac{9}{16}$
D. $\frac{9}{32}$
6. Diketahui deret aritmatika $U_1 = 3$ dan $U_5 = -5$, maka jumlah 10 suku pertama adalah
- A. -60
B. -50
C. 50
D. 60
7. Diketahui barisan geometri dengan $U_3 = 2$ dan $U_8 = \frac{1}{16}$ untuk $r > 0$, maka U_6 adalah
- A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{8}$
D. $\frac{1}{9}$
8. Pada barisan 2, 7, 3, 9, 4, 11, 5, 13, ... maka, yang pasti **salah** dari pernyataan pada pilihan jawaban berikut adalah
- A. Dua suku berikutnya berturut-turut 6 dan 15
B. Suku-suku ganjilnya membentuk barisan aritmetik
C. Suku-suku genapnya membentuk barisan geometri
D. Barisan ini merupakan gabungan dua barisan aritmetik
9. Jika $a679b$ adalah bilangan lima angka yang habis dibagi 72, maka nilai a dan b berturut turut adalah
- A. $b=2$ dan $a=3$
B. $a=2$ dan $b=3$
C. $b=8$ dan $a=9$

D. $a=8$ dan $b=9$

10. Diketahui $\frac{(p^{n-1}q^n)^3}{p^{2n}q^{6+n}} = p^a q^b$ senilai dengan $p^a q^b$ nilai $\frac{a}{b}$ adalah

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{-1}{2}$

11. Dari suatu persewaan mobil, diketahui bahwa mereka mempunyai dua skema untuk mengetahui biaya sewa mobilnya. Skema tersebut adalah sebagai berikut:

Skema 1: Mobil boleh dipakai selama 48 jam, dengan biaya Rp600.000 per hari.

Skema 2: Sewa mobil selama 12 jam pertama adalah Rp400.000. Akan tetapi, manakala mobil dipakai selama lebih dari 12 jam dan kurang dari 36 jam, kelebihanannya akan dikenakan *charge* sebesar Rp25.000 per jam, dan manakala pemakaian mobil lebih dari 36 jam sampai dengan 48 jam, *charge*-nya ditambahkan Rp50.000 per jam terhitung dari jam ke 37.

Anda akhirnya menyewa mobil di rental tersebut selama 40 jam. Maka... .

A. kalau Anda menggunakan skema 1, biaya yang harus dibayarkan adalah $\frac{40}{48} \times 600.000$

B. kalau Anda menggunakan skema 2, maka kalimat matematika yang bisa digunakan untuk menghitung biayanya adalah

a. $400.000 + 24 \times 25.000 + 12 \times 50.000$

C. kalau Anda menggunakan skema 1, maka kalimat matematika yang bisa digunakan untuk menghitung biayanya adalah

a. $400.000 + 24 \times 25.000 + 5 \times 50.000$

D. biaya sewanya tidak sama dengan jawaban A, B, dan C di atas

12. Jika suatu barang dengan harga x , didiskon ganda 50% + 20%, artinya diskon dulu 50% kemudian sisanya didiskon lagi 20%, maka kalau kita membeli barang tersebut, nilai uang yang harus kita keluarkan adalah

A. $0,3x$

B. $0,4x$

C. $0,25x$

D. 0,3

Evaluasi

13. Imam menabung Rp10.000.000 di Koperasi A dengan sistem bunga tunggal setiap bulan sebesar 1%. Bunga dibayarkan pada awal bulan berikutnya sesuai dengan jumlah uang yang ada dalam tabungan di Bank selama satu bulan penuh. Setiap awal bulan Imam menambah tabungannya sebesar Rp1.000.000. Pada akhir bulan ke-3 Imam mengambil seluruh tabungan tersebut. Maka ...
- A. Uang Imam pada akhir bulan pertama adalah
- i. $10.000.000 + 1\% \times 10.000.00$
- B. Uang Imam pada akhir bulan ke dua adalah
- i. $(10.000.000 \times (1,01) + 1.000.000$
- C. Uang Imam pada akhir bulan ke tiga adalah
- i. $(10.000.000(1,01) + 1)(1\%)$
- D. Uang Imam pada akhir bulan ketiga adalah lebih dari 13.000.000
14. Penggunaan teknik ujung terdepan satu kolom (*one column front-end*), untuk menentukan estimasi hasil penjumlahan dua bilangan berikut yang **Tepat** adalah ...
- A. $2573+168=3000$
- B. $191,3 + 214,7 = 300$
- C. $1673 + 2481 = 4000$
- D. $51514 + 2378 = 70000$
15. Pertanyaan berikut yang benar adalah ...
- A. 23,0060 memiliki 5 angka yang penting
- B. 0,0001 memiliki empat angka yang penting
- C. 3,000000 memiliki 7 angka yang penting
- D. 10,102 memiliki 3 angka penting

Jawaban Evaluasi

- 1.B
2.D
3.C
4.C
5.D
6.A
7.C
8.A
9.A
10.C

11.D

12.B

13.B

14.B

15.B

Penutup

Keterampilan serta disposisi berpikir kritis dan kreatif merupakan hal yang amat diperlukan untuk bisa sukses bertahan hidup atau mewarnai kehidupan. Karena itu, kita perlu membekali diri dan siswa kita dengan berpikir kritis dan kreatif tersebut. Penguasaan matematika saja masih belum mencukupi.

Berpikir Kritis dalam Bilangan

Berpikir kritis adalah berpikir yang dilakukan dengan sepenuh hati, menggunakan penalaran yang mantap, untuk mengambil keputusan apakah yang bersangkutan harus mempercayai suatu klaim atau menuruti perintah yang diberikan. Karena itu, berpikir kritis ini melandasi keputusan yang diambil seseorang. Dengan berpikir kritis, orang selalu berusaha mencari akurasi dan ketepatan suatu klaim sebelum mempercayainya. Dengan berpikir kritis, orang akan berusaha menemukan celah yang membuatnya ragu terhadap klaim yang ada, dan menemukan alternatif yang lebih baik untuk menyangkal atau memperbaiki keadaan.

Perhatikan contoh soal berikut.

- Apakah pernyataan berikut benar atau salah?

Jumlah suatu bilangan bulat positif dan suatu bilangan bulat negatif adalah bilangan negatif. Berilah sebuah contoh untuk memperkuat alasanmu!

Kalau kita perhatikan dengan seksama, soal ini memerintahkan kita untuk menjawab benar atau salah pernyataan tersebut. Kalau kita tidak berpikir kritis, dengan segera kita bisa menjawab bahwa pernyataan tersebut bernilai benar atau salah dengan memberikan contoh. Tapi, coba perhatikan soal di atas dengan baik-baik. Bagi Anda yang berpikir kritis, sebelum kita menjalankan perintah tersebut mungkin kita akan bertanya: *Apakah di dalam soal itu ada keterangan bahwa kedua bilangan itu letaknya pada garis bilangan apakah berjarak sama dari titik asal atau tidak?* Karenanya, kita harus menganalisis dari beberapa kemungkinan yang ada.

- *Diketahui suatu barisan yang empat suku pertamanya adalah*

1, 2, 3, 4. Berapakah suku berikutnya?

Kalau kita perhatikan dengan seksama, soal ini memerintahkan kita untuk menentukan suku berikutnya. Pilihan respon yang mungkin untuk kita adalah melakukan perintah itu, atau melakukan penilaian terlebih dahulu terhadap kebenaran, ketepatan dari apa yang diberikan.

Kalau kita tidak berpikir kritis, dengan segera kita bisa menjawab bahwa suku berikutnya adalah 5. Jawaban ini masuk akal karena beda antar dua suku berurutan dari bilangan-bilangan pada barisan itu tetap, yaitu 1. Karenanya, kita patut menduga kalau barisan ini adalah barisan aritmetik.

Tapi, coba perhatikan soal di atas dengan baik-baik.

Bagi Anda yang berpikir kritis, sebelum kita menjalankan perintah tersebut mungkin kita akan bertanya: *Apakah di dalam soal itu ada keterangan bahwa barisan itu barisan aritmetik?* Jawabnya adalah tidak. Tidak ada satu pun pernyataan yang menyatakan bahwa barisan itu adalah barisan aritmetik. Karenanya, kita mencoba mencari alternatif pemahaman yang ada. Kita kembalikan hal ini kepada definisi dari barisan bilangan.

Menurut definisi dari barisan bilangan yang sempat kita kemukakan di atas, barisan bilangan adalah fungsi dari himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan real. Karena domainnya adalah himpunan bilangan asli, dan banyaknya anggota dari himpunan bilangan asli ini tak terhingga, maka banyaknya barisan (baca : banyaknya fungsi) yang bisa dibuat juga tak terhingga banyaknya.

Banyaknya barisan dimana empat suku pertamanya 1, 2, 3, 4 adalah tak terhingga. Barisan bilangan 1, 2, 3, 4 ini bisa saja dilanjutkan dengan 5, 6, 7, 8, ... sebagaimana barisan bilangan asli itu sendiri. Tetapi, barisan ini bisa saja berulang lagi sehingga membentuk siklus barisan 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, dan seterusnya (seperti ketika mendengar aba-aba olahraga senam). Bukan tidak mungkin, bilangan sesudah 1, 2, 3, 4, adalah bilangan-bilangan konstan karena yang demikian itu juga tetap merupakan fungsi dari himpunan bilangan asli yang berarti juga barisan bilangan.

Karena itu, kalau kita menginginkan bahwa siswa kita menganggap itu barisan aritmetik, kita harus tegas mengemukakannya di depan. Di dalam soal itu sudah harus diberitahukan bahwa soal ini adalah soal tentang barisan aritmetik.

Di buku-buku terbitan luar negeri, konsensus itu ditetapkan di awal sehingga untuk seterusnya pembaca dianggap memahami konsensusnya.

Berpikir Kreatif dalam Bilangan

Berpikir kreatif adalah berpikir yang tidak terpatok pada batasan-batasan yang ada. Berpikir kreatif memungkinkan seseorang berpikiran atau bahkan berperilaku aneh, dan lain dari kebanyakan orang.

Contoh 1.

Misalkan Anda diberikan barisan bilangan sebagai berikut.

1, 3, 2, 8, 3, 13, 4, 18, 5, 23, 6, 28, ... Tentukan suku berikutnya.

Orang yang berpikir kreatif tidak terkungkung oleh sudut pandang bahwa barisan ini memiliki satu rumus tunggal. Orang yang kreatif sangat dimungkinkan memandang barisan ini sebagai gabungan dari dua barisan, yaitu barisan bilangan asli 1, 2, 3, 4, 5, 6... pada suku-suku ganjilnya, dan barisan 3, 8, 13, 18, 23, 28, ..., yaitu barisan aritmetik dengan suku pertama 3 dan beda 5 pada suku-suku genapnya. Dengan sudut pandang itu, orang yang kreatif ini akan mampu menjawab soal yang seperti ini dengan mudah.

Contoh 2

Perhatikan barisan 1, 1, 2, 3, 3, 8, 4, 15, 5, 24, 6, 35, ... Tentukan suku ke 100.

Kalau kita berpikir biasa saja, soal ini merupakan soal yang sulit. Tapi bagi orang yang berpikir kreatif, bisa jadi soal ini adalah soal yang biasa saja.

Sebagai orang yang berpikir di luar kebiasaan (*thinking out of the box*), orang yang berpikir kreatif mungkin saja memandang barisan ini sebagai barisan pasangan bilangan. Dia tidak memandang bahwa suku pertama barisan itu adalah 1, suku kedua adalah 1, suku ketiga adalah 2, suku keempat adalah 3, dan seterusnya. Orang yang berpikir kreatif mungkin saja akan memandang barisan itu sebagai barisan dari pasangan suku, sehingga diperoleh barisan baru sebagai berikut. Karena itu, sangat dimungkinakan dia memandang barisan di atas sebagai barisan pasangan bilangan sebagai berikut: (1, 1), (2, 3), (3, 8), (4, 15), (5, 24), (6, 35), ...

Penutup

Dengan persepsi seperti itu, dia melihat bahwa pasangan berikutnya adalah (7,49), (8, 63), (9,80), dan seterusnya dimana setiap pasangan itu memiliki hubungan $(n, n^2 - 1)$. Karena itu, suku ke-100 nya adalah pasangan dari 50, yaitu 2499.

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes praktek untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Daftar Pustaka

- Burton, David. M. 1988. *Elementary Number Theory*. Boston : Allyn and Bacon, Ins.
- Brown, Richard G.. (1994). *Advanced Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Depdiknas.2000. Matematika kontekstual untuk SMP.
- Direktorat PSMP. 2014. *Bahan TOT Bridging Course Matematika* . Jakarta
- Hollands, Roy. (1984). *Kamus Matematika* (Terjemahan Naipopos Hutahuruk). Jakarta: Erlangga.
- Gellert, W.. (1977). *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.
- Haryadi, Muh.. (2002). *Bahan Ajar Matematika SMK*. Yogyakarta: PPPG Matematika.
- Herry Sukarman. 1993. *Teori Bilangan*. Ditjen Dikdasmen : Jakarta
- Sukirman. 2006. *Pengantar Teori Bilangan*. Hanggar Kreator : Yogyakarta
- Keedy, Mervin Laverne. (1983). *Algebra and Trigonometry*. California: Addison-Wesley Publishing Company.
- Miller, Charles David. (1978). *Mathematical Ideas*. Glenview Illinois: Scott Foresman and Company.
- Raharjo, Marsudi. (2001). *Notasi Sigma dan Induksi Matematika*. Yogyakarta: PPPG Matematika.
- Wheeler, Ruric E. (1973). *Modern Mathematics An Elementary Approach (Third Edition)*, (California: Brooks/Cole Publishing Company, Mont

Daftar Pustaka

Glosarium

Bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran

Bilangan Bulat adalah bilangan yang berupa bilangan asli, lawan bilangan asli, atau nol

Bilangan Rasional adalah Bilangan pecah, bulat, atau decimal berulang

Bilangan real adalah bilangan rasional atau irasional.

Barisan bilangan adalah susunan bilangan yang mempunyai aturan tertentu

Deret bilangan adalah jumlah bilangan pada barisan bilangan

Barisan bilangan aritmetika adalah susunan bilangan yang selisih antara dua suku yang berurutan tetap

Barisan bilangan geometri adalah susunan bilangan yang rasio antara dua suku yang berurutan tetap

Bentuk Akar adalah ekspresi matematika dalam bentuk akar

Pangkat tak sebenarnya adalah pangkat rasional

