MATEMATICAS

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Unidad Autotormativa No 32

CBS Colección Básica SENA

Servicio Nacional de Aprendizaje SENA
Subdirección General de Operaciones
División de Programación Didáctica
Bogotá - Colombia
Noviembre de 1978

M A T E M A T I C A S

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Unidad Autoformativa No.32

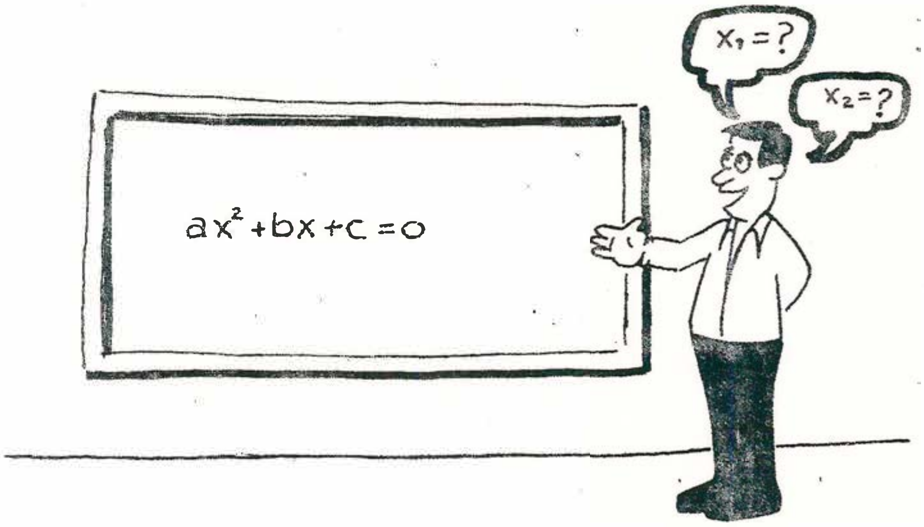
Elaborado por: NESTOR JIMENEZ
CARLOS PIZARRO
JESUS CORTES

C.B.S.: Colección Básica SENA

CBS División de Programación	HOJA DE TAREA 32	REF	
	ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	CODIGÓ	

OBJETIVO

Al terminar el estudio de la unidad sobre ecuaciones de Segundo Grado, usted estará en capacidad de resolver cualquier ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ por medio de la fórmula general.

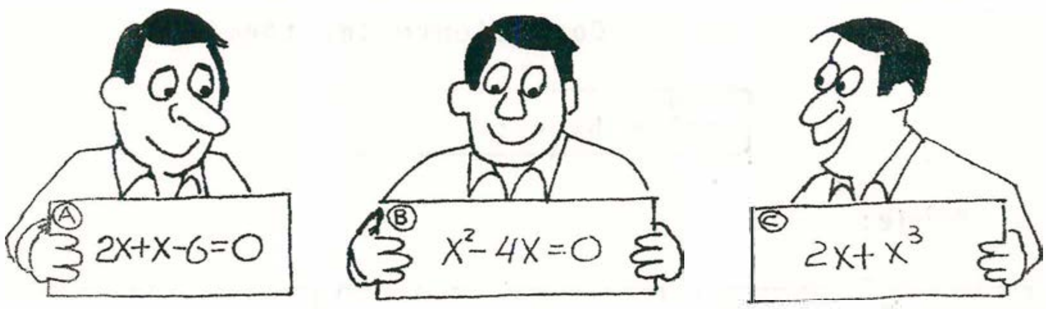


HOJA DE	TEMA	CODIGO
HE	ECUACION DE SEGUNDO GRADO: CONCEPTO	
HE	ECUACION DE SEGUNDO GRADO: RESOLUCION	
HE	DEDUCCION Y APLICACION DE LA FORMULA GENERAL	
HEJ	ECUACION DE SEGUNDO GRADO: AUTOCONTROL	
HEJ	ECUACION DE SEGUNDO GRADO: RESPUESTAS AUTOCONTROL	
HEJ	ECUACION DE SEGUNDO GRADO: EJERCICIOS.	

CONCEPTO

Recuerde cuáles son las ecuaciones de segundo grado. Hagamos la prueba.

Cuál de las siguientes es una ecuación de segundo grado?



Si su respuesta fué: (B) $x^2 - 4x = 0$ ¡es correcta!

Porque las ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO son aquellas en las cuales una vez simplificadas, el MAYOR EXPONENTE de la incognita de la ecuación es "2" (DOS)
Veamos que en $x^2 - 4x = 0$ el mayor exponente de "x" es 2.

UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO, SE REPRESENTA POR LA FORMULA: $ax^2 + bx + c = 0$

Las ecuaciones de segundo grado pueden ser completas o incompletas.

1. *ECUACION COMPLETA DE SEGUNDO GRADO.*

$x^2 + 12x - 85 = 0$

Estas ecuaciones SIEMPRE tienen tres términos así:

(1) Un término en X^2
(2) Un término en X
(3) Un término independiente.

Por lo tanto una ecuación completa de segundo grado SIEMPRE será de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde: a = Coeficiente del término en x^2
b = Coeficiente del término

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Donde:

"a"	"b"	"c"
Es el coeficiente del término x^2	Es el coeficiente del término x	Es el término Independiente.

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$a=3$ $b=-5$ $c=2$

Ejemplo:

Ecuación dada	Ecuación simplificada en forma general	a	b	c
$x^2 + 3x = 40$	$x^2 + 3x - 40 = 0$	1	3	-40
$2x^2 + 2x = 2x-3$	$2x^2 + 7x + 3 = 0$	2	7	3
$5(x^2+2) = 7(x+3)$	$5x^2 - 7x - 11 = 0$	5	-7	-11

2. *ECUACION INCOMPLETA DE SEGUNDO GRADO O ECUACION BINOMIAL.*

$$\boxed{x^2 - 4 = 0}$$

$$\boxed{x^2 - 2x = 0}$$

Reciben estos nombres porque una vez simplificadas ponen solamente DOS términos.
Las ecuaciones incompletas o binomiales de segundo grado pueden ser de dos tipos.

a. Carecer del tẽrmino en "X" asî.

$$3x^2 - 9 = 0$$

Está ecuación tiene el término en X^2 y el término independiente como

$$ax^2 \mp (C) = 0$$

b. Carecer del tẽrmino independiente como:

$$5x^2 - 10x = 0$$

La ecuación tiene términos en x^2 y en x ; es de la forma

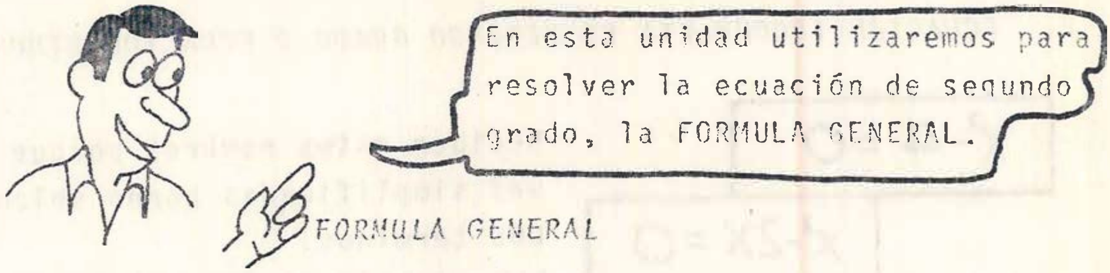
$$ax^2 \mp bx = 0$$

Ejemplo:

$\boxed{x^2 + 12x - 85 = 0}$ Ecuación COMPLETA de segundo grado

$\boxed{3x^2 + 15x = 0}$ Ecuación INCOMPLETA de segundo grado. Falta el término independiente

$\boxed{3x^2 - 10 = 0}$ Ecuación INCOMPLETA de segundo grado. Falta el término en 'X'



Toda ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se puede resolver mediante la fórmula

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Pero:

1. De donde proviene ésta fórmula?

2. Cómo se interpreta ó cómo se aplica?

Veamos en primer lugar de donde proviene.

DEDUCCION

De la fórmula general utilizada para resolver ecuaciones de segundo grado.

Paso 1

Tomamos la forma general de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Paso 2

Multiplicamos por "$4a$"

$$4a(ax^2+bx+c) = 4a(0)$$
$$4a^2x^2+4abx +4ac = 0$$

Paso 3

Se suma b^2 en los dos miembros de la ecuación.

$$4a^2x^2+ 4abx + 4ac+b^2 = b^2$$

Paso 4

Se traslada el término "$4ac$" al segundo miembro

$$4a^2x^2 +4abx +b^2 = b^2 - 4ac$$

Paso 5

Se toma el primer miembro que es un trinomio cuadrado perfecto así:

$$4a^2x^2 +4abx +b^2 = (2ax+b)^2$$

porque:

$$(2ax +b)^2 = (2ax)^2 + 2(2ax)(b) + b^2 =$$
$$4a^2x^2 +4abx +b^2$$

Paso 6

Se coloca la nueva notación $(2ax+b)^2$ en el lugar correspondiente.

$$\underbrace{4a^2x^2+4abx} + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

Paso 7

Se extrae la raíz cuadrada a los dos miembros

$$\sqrt{(2ax+b)^2} = \sqrt{b^2-4ac}$$

$$2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

NOTA:

El segundo término se ve precedido simultáneamente por los signos (+) y (-) porque un número elevado al cuadrado SIEMPRE dará cantidad positiva, independientemente de si el número es positivo o negativo.

Ej: $4^2 = 16$ y $-4^2 = 16$

por lo tanto $\sqrt{16}$ tiene dos soluciones y se expresa

$$\boxed{\pm\sqrt{16} = \begin{cases} 4 \\ -4 \end{cases}}$$

OBSERVACION

Los signos + y - del radical nos van a indicar a su vez DOS SOLUCIONES para la ecuación.

Paso 8

Se traslada el término b al segundo miembro

$$2ax+b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Paso 9

Se halla el valor de X. Como 20 está multiplicando a X pasa al segundo miembro a dividir.

$$\boxed{X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Con lo cual llegamos a la fórmula general para resolver las ecuaciones de segundo grado.

INTERPRETACION DE LA FORMULA

La fórmula general proporciona dos soluciones "X_1" y "X_2" para la ecuación según se tome $\sqrt{b^2 - 4ac}$ con signo positivo o con signo negativo, Así:

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Una vez tomada la ecuación a resolver, procedemos a reemplazar los términos de la fórmula por los términos de la ecuación.

RECUERDE

a = Coeficiente en X^2

b = Coeficiente en X

c = Término independiente

PRECAUCION:

Tenga en cuenta que en la fórmula aparece "b" (coeficiente de x) con SIGNO DISTINTO al que tiene en la ecuación. compárelos:

$$\boxed{\begin{array}{c} ax^2+bx+c = 0 \\ \text{Ecuación} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} X=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \text{Fórmula} \end{array}}$$

$+b$ $\qquad\qquad$ $-b$

Por lo tanto tenga cuidado de cambiar el signo del coeficiente del segundo término cuando lo reemplace en la fórmula por $-b$, o por $+b$

Aplicando todas estas normas reemplacemos los términos de la fórmula por los de la siguiente ecuación:

$$4x^2+3x-22 = 0$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ donde $a = 4$, $b = 3$, $c = -22$

Al reemplazar quedaría:

$$X=\frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4(4)(-22)}}{2(4)}$$

$$X=\frac{-3 \pm \sqrt{9-16(-22)}}{8}$$

$$X=\frac{-3 \pm \sqrt{9+352}}{8}$$

$$X = \frac{-3 \pm \sqrt{361}}{8}$$

Como X tiene dos soluciones según se tomen como positiva o como negativa la cantidad que se antepone al radical, procedemos a buscarlas:

Para hallar X_1 tomamos el signo +

$$X_1 = \frac{-3 + \sqrt{361}}{8}$$

$$X_1 = \frac{-3 + 19}{8}$$

$$X_1 = \frac{16}{8}$$

$$\boxed{X_1 = 2}$$

Para hallar X_2 tomamos el signo -

$$X_2 = \frac{-3 - \sqrt{361}}{8}$$

$$X_2 = \frac{-3 - 19}{8}$$

$$X_2 = \frac{-22}{8}$$

$$\boxed{X_2 = \frac{-11}{4}}$$

De acuerdo a lo anterior para la ecuación

$$4x^2 + 3x - 22 = 0$$

Las soluciones ó raíces que satisfacen la ecuación:

$$X_1 = 12$$

$$X_2 = \frac{-11}{4}$$

Ejemplo:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{5^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$X_1 = \frac{5+\sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5+1}{6} = 1$$

$$X_2 = \frac{-b- \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 - 1}{6} = \frac{2}{3}$$

Soluciones de la ecuación:

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = \frac{2}{3}$$

$$X = \frac{-3 \pm \sqrt{361}}{8}$$

Como X tiene dos soluciones según se tomen como positiva o como negativa la cantidad que se antepone al radical, procedemos a buscarlas:

Para hallar X_1 tomamos el signo +

$$X_1 = \frac{-3 + \sqrt{361}}{8}$$

$$X_1 = \frac{-3+19}{8}$$

$$X_1 = \frac{16}{8}$$

$$\boxed{X_1 = 2}$$

Para hallar X_2 tomamos el signo -

$$X_2 = \frac{-3 - \sqrt{361}}{8}$$

$$X_2 = \frac{-3-19}{8}$$

$$X_2 = \frac{-22}{8}$$

$$\boxed{X_2 = \frac{-11}{4}}$$

De acuerdo a lo anterior para la ecuación

$$4x^2 + 3x - 22 = 0$$

Las soluciones ó raíces que satisfacen la ecuación:

$$X_1 = 12$$

$$X_2 = \frac{-11}{4}$$

Ejemplo:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{5^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$X_1 = \frac{5+\sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5+1}{6} = 1$$

$$X_2 = \frac{-b- \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 - 1}{6} = \frac{2}{3}$$

Soluciones de la ecuación:

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = \frac{2}{3}$$

AUTOCONTROL

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $X^2 - 3X - 4 = 0$

2. $X^2 + 11X + 24 = 0$

3. $X^2 - 3X + 2 = 0$

4. $X^2 + 7X + 12 = 0$

5. $9X^2 - 17X - 2 = 0$

6. $2X^2 - 5X - 3 = 0$

7. $X^2 - 2X - 15 = 0$

8. $2X^2 + 7X - 4 = 0$

9. $6X^2 + 11X - 10 = 0$

10. $20X^2 - 27X - 14 = 0$

En la hoja siguiente encontrará las respuestas, compárelas con los resultados que usted obtuvo.

RESPUESTAS

1. $X_1 = 1, X_2 = -4$

2. $X_1 = -3. X_2 = -8$

3. $X_1 = 1, X_2 = 2$

4. $X_1 = -3, X_2 = -4$

5. $X_1 = 2, X_2 = -\frac{1}{9}$

6. $X_1 = 3, X_2 = -\frac{1}{2}$

7. $X_1 = 5, X_2 = -3$

8. $X_1 = -4, X_2 = \frac{1}{2}$

9. $X_1 = \frac{2}{3}, X_2 = -\frac{5}{2}$

10. $X_1 = \frac{7}{4}, X_2 = -\frac{2}{5}$

Si todas sus respuestas son satisfactorias continúe si encontró errores detecte donde estuvo la falla o pida explicación al instructor

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $X^2 - 9X - 10 = 0$

b) $2X^2 + 7X + 3 = 0$

c) $X^2 - 4X - 5 = 0$

d) $5X^2 - 7X - 11 = 0$

e) $X^2 + 9X + 20 = 0$

f) $32X^2 + 18X = 17$

g) $105 = X + 2X^2$

h) $X^2 = -15X - 56$

i) $176X = 121 + 6X^2$

j) $27X^2 - 12X = 7$