ISSN 2222-0631 (print)

УДК 519.6

Ю. В. БРАЗАЛУК

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С СИЛЬНО СЕГМЕНТИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕЙ

В настоящей работе метод граничных элементов был применен к решению краевых задач для уравнения Лапласа в плоской области с сильно сегментированной границей. Особое внимание было уделено точности численного решения, которая исследовалась путем численного эксперимента на специально подобранных тестовых задачах, имеющих аналитические решения в квадратурах. Было реализовано два алгоритма метода граничных элементов: традиционный с решением системы линейных алгебраических уравнений методами гауссовского исключения, и итерационный, при этом в итерационном алгоритме использовались функции Грина или их вычислительные аналоги. Результаты работы могут быть использованы при создании специализированного программного обеспечения соответствующего назначения.

Ключевые слова: метод граничных элементов, область сложной геометрической формы, сегментированная граница, уравнение Лапласа, погрешность, тестовая задача, функция Грина.

Ю. В. БРАЗАЛУК

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ З СИЛЬНО СЕГМЕНТОВАНОЮ МЕЖЕЮ

В даній роботі метод граничних елементів було застосовано до розв'язання крайових задач для рівняння Лапласа у плоских областях з сильно сегментованою межею. Особливу увагу було приділено точності чисельного розв'язку, яка досліджувалася шляхом чисельного експерименту на спеціально підібраних тестових задачах, що мають аналітичні розв'язки у квадратурах. Було реалізовано два алгоритми методу граничних елементів: традиційний з розв'язанням системи лінійних алгебраїчних рівнянь методами гауссовського виключення, та ітераційний, при цьому в ітераційному алгоритмі використовувалися функції Гріна чи їх обчислювальні аналоги. Результати роботи можуть бути застосовані при створенні спеціалізованого програмного забезпечення відповідного призначення.

Ключові слова: метод граничних елементів, область складної геометричної форми, сегментована межа, рівняння Лапласа, похибка, тестова задача, функція Гріна.

IU. V. BRAZALUK

BOUNDARY ELEMENT METHOD APPLICATION TO NUMERICAL SOLVING OF LINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN DOMAINS WITH STRONGLY SEGMENTED BOUNDARY

One of the most serious problems of modern numerical analysis is boundary-value problem solution in domains of complex geometrical shapes. Such problems are proved especially difficult for the domains with strongly segmented boundary, which means that the boundary is divided into isolated pieces. Such situations are specific for heterogeneous media. In such situations local approximation methods have to deal with the insuperable difficulties such as constructing computational grid and subsequent solving rather sophisticated systems of linear algebraic equations. The methods of global approximations and, first of all, methods of computational potential theory do not have similar difficulties, nevertheless they have to overcome a lot of problems. Boundary element method is applied in the present work to solve boundary-value problems for Laplace equations in plane domain with strongly segmented boundary. Special attention in the work was paid to accuracy of numerical solutions. The accuracy is investigated by a numerical experiment using specially selected test problems, which have the known analytical solutions in quadrature. Two boundary element algorithms are implemented. The first one is the traditional approach with Gauss elimination algorithm for solving linear algebraic equation system. The second one is an iterative approach with possible using of Green's functions or their computational analogs in the iterative procedure. The results obtained in the work can be applied for creating specialized software of corresponding purposes.

Key words: boundary element method, domain of complex geometrical shape, segmented boundary, Laplace equation, error, test problem, Green's function.

Введение. Тенденция усложнения современной техники проявляется, в том числе, и в усложнении геометрических форм составляющих технических устройств, а, следовательно, и в усложнении областей, в которых формулируются задачи, необходимые для расчета и проектирования указанной техники. Именно эта тенденция обуславливает актуальность рассматриваемого направления научных исследований. Действительно, в настоящее время появляется все больше задач, связанных с расчетами скалярных или векторных полей в сплошной среде, которая ослаблена полостями, включениями и другими неоднородностями. Для примера достаточно вспомнить задачу N – тел в гидромеханике и являющуюся естественным обобщением этой задачи проблему многофазного течения, задачу о напряженно-деформированном состоянии твердого тела с включениями и полостями и являющиеся ее естественными обобщениями проблемы механики композитных материалов. Хотя список релевантных задач отнюдь не исчерпывается приведенными двумя примерами, а включает всю механику гетерогенных сред и охватывает значительные части других технических и естественнонаучных дисциплин, приведенных примеров вполне достаточно, чтобы показать исключительное научное значение рассматриваемого класса задач. Однако результаты, относящиеся к задачам, сформулированным в областях с сильно сегментированной границей, традиционно рассматривались с точки зрения соответствующей предметной области; так, например, решения гидродинамической задачи N – тел анализировалась с точки зрения гидродинамического взаимодействия, а задача о напряженно-деформированном состоянии перфорированной упругой среды трактовалась как неотъемлемая часть исследований механических свойств композитного материала. В отличие от упомянутых выше исследований основным предметом рассмотрения настоящей работы были вычислительные аспекты прямого численного решения линейных краевых задач в областях с сильно сегментированной границей.

Очевидно, что для задач, численное решение которых близко к пределам возможностей лучшей вычислительной техники, особое значение приобретает выбор численного метода решения и алгоритмической реализации этого метода. Инструментарий современного численного анализа условно разделяют на две группы методов: традиционные – конечных разностей и конечных элементов, а также их многочисленные модификации, – и альтернативные, к которым относятся самые разнообразные подходы, в том числе и методы вычислительной теории потенциала, а среди них метод граничных элементов – наиболее разработанный и известный из альтернативных методов. Традиционные численные методы являются методами локальной аппроксимации, в то время как среди альтернативных достаточно широко распространены подходы, основанные на глобальной аппроксимации, в том числе и метод граничных элементов. Для областей с сильно сегментированной границей традиционные численные методы локальной аппроксимации испытывают существенные затруднения с построением расчетных сеток, которые оказываются чрезвычайно громоздкими со всеми вытекающими отсюда вычислительными трудностями. Собственно говоря, эта проблема и воспрепятствовала применению традиционных численных методов к рассматриваемому классу задач, сделав таковое применение совершенно неэффективным. В то же время методы локальной аппроксимации, и метод граничных элементов в том числе, подобных трудностей с построением расчетных сеток не испытывают, а усложнение формы областей решения, хотя и создает определенные трудности, но они вполне преодолимы. Последние указанные обстоятельства и обусловили выбор метод граничных элементов в качестве основного вычислительного инструмента настоящей работы.

Анализ последних исследований. Возможности прямого численного решения краевых задач, в областях сложной геометрической формы, в частности в областях с сильно сегментированной границей при произвольной конфигурации перфорирования области, появились относительно недавно, и их появление было обусловлено, в первую очередь, беспрецедентным ростом производительности вычислительной техники и стремительным увеличением ее инсталляционной базы. На предыдущих этапах исследований в данном направлении внимание исследователей было сосредоточено, главным образом, на гетерогенных системах регулярной структуры, например, композитных материалах, с последующей гомогенизацией решений [1 – 5]. Даже в гидродинамике многофазных сред, где не было никаких оснований ожидать регулярной структуры гетерогенной среды, пытались ввести некоторую осредненную регулярность по принципу «частица в ячейке» [6]. Первые работы, в которых методы численного моделирования локальной аппроксимации были применены к определению полей в сильно перфорированных областях, трудно назвать успешными, особенно это утверждение относится к соответствующим задачам вычислительной гидромеханики. Во многом указанные трудности преодолеть не удалось. По этой причине не будем рассматривать здесь вопросы, связанные с применением численного моделирования к краевым задачам в областях с нерегулярной структурой перфорации, если они основаны на применении методов локальной аппроксимации.

С другой стороны, актуальные задачи прикладной гидромеханики и дозвуковой аэродинамики требовали изучения гидродинамического (аэродинамического) взаимодействия тел в потоке. Еще во время, предшествующее эпохе численного моделирования, появились весьма значительные работы, посвященные проблеме гидродинамического взаимодействия [7 – 9], основанные на аналитических и приближенных аналитических подходах. Значительно позже стало ясно, что в рамках максимально упрощенных математических моделей, использованных в работах [7 – 9], к задачам в областях с сильно сегментированной границей могут быть применены альтернативные численные методы глобальной аппроксимации, и, прежде всего, метод дискретных вихрей [10, 11] и метод граничных элементов [12, 13]. Уверенность в преимуществе метода граничных элементов над методом конченых разностей по точности и эффективности численного решения основывается на результатах специально приведенных исследований [14, 15]. С другой стороны, метод дискретных вихрей [10, 11] ориентирован на другие задачи, уступает методу граничных элементов в эффективности [16] и имеет специфические вычислительные проблемы [17], именно поэтому предпочтение в данной работе будет отдано методу граничных элементов.

Непосредственно настоящей работе предшествовали публикации, посвященные гидродинамическому взаимодействию тел в потоке [18], гидродинамическому взаимодействию тел в течении сверхтекучей жидкости [19], общей проблеме $N-$тел в гидродинамике [20]. При проведении расчетов использовался комплекс программ, реализующих метод граничных элементов, особенности данного комплекса описаны в следующих работах [21 – 24]. Сложность формы области решения в рассматриваемом классе задач и связанные с этим значительные вычислительные трудности несколько камуфлируют проблему точности расчета в релевантных областях, в результате чего в предшествующих работах точности численных расчетов в областях с сильно сегментированной границей не было уделено надлежащего внимания. В настоящей же работе вопрос о точности подобных расчетов был одним из центральных, при этом использовалась методика тестирования граничноэлементного программного обеспечения, описанная в работе [24].

Постановка задачи. Основная задача настоящей работы состоит в том, чтобы на примере плоских краевых задач для уравнения Лапласа разработать методику численного решения задач в областях с сильно сегментированной границей и проанализировать точность полученных численных решений при помощи специально подобранных тестовых задач.

Математическая модель. Как отмечалось выше, настоящая работа ориентирована в первую очередь, на задачи гидромеханики. В случае потенциальных плоских течений обычно применяются два наиболее популярных способа описания поля течения: *задача Дирихле* для *уравнения Лапласа* относительно функции тока и *задача Неймана* для уравнения Лапласа относительно потенциала скоростей:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\,, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{\Gamma_i}=c_i\,, \tag{2}$$

или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\,, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_i}=V_i\,, \tag{4}$$

где ψ – функция тока; φ – потенциал скоростей; x, y – координаты декартовой ортогональной системы координат; c_i – постоянные значения функции тока на непротекаемой границе Γ_i, предполагаемые известными; V_i – известная функция, имеющая физический смысл нормальной скорости на той же границе Γ_i. Если задача формулируется в неограниченной области, то постановки (1), (2) и (3), (4) должны быть дополнены условиями в бесконечно удаленной точке

$$rot\,\psi\big|_{(x,y)\to\infty}=\vec{V}_\infty\,, \tag{5}$$

$$grad\,\varphi\big|_{(x,y)\to\infty}=\vec{V}_\infty\,, \tag{6}$$

где $\vec{V}_\infty$ – известный вектор. Если же область решения ограничена или полуограничена, то на ее внешних границах должны быть поставлены граничные условия вида (2) или (4).

Дабы избежать путаницы и повторения обозначений, введем искомую функцию u, которая удовлетворяет либо задаче Дирихле для уравнения Лапласа, либо задаче Неймана для того же уравнения, соответственно совпадая с функцией тока или потенциалом скоростей с учетом дополнительных условий однозначности. Очевидно, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,, \tag{7}$$

$$u\big|_{\Gamma}=f_D\,, \tag{8}$$

или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=f_N\,, \tag{9}$$

где Γ – граница области решения; f_D и f_N – заданные функции. Граница области решения Γ состоит из внешней границы Γ_{out} и внутренних (сегментированных) границ Γ_i, то есть

$$\Gamma=\Gamma_{out}\bigcup\left(\bigcup_i\Gamma_i\right),\; i=1,\ldots,N\,, \tag{10}$$

при этом

$$\Gamma_{out}\bigcap\Gamma_i=\varnothing,\forall i\,, \tag{11}$$

$$\Gamma_i\bigcap\Gamma_j=\varnothing,\;\forall i,\; j<N,\; i\neq j\,, \tag{12}$$

это означает, что контуры не пересекаются.

Перейдем от формулировок (7), (8) и (7), (9) к граничным интегральным соотношениям [12, 13]:

$$c(x_0,\,y_0)u(x_0,\,y_0)=\int_\Gamma g(x,\,x_0,\,y,\,y_0)\,\frac{\partial u}{\partial n}(x,\,y)\,dS(x,\,y)-\int_\Gamma u(x,\,y)\,\frac{\partial g(x,\,x_0,\,y,\,y_0)}{\partial n(x,\,y)}dS(x,y)\,, \tag{13}$$

где точка $(x_0,\,y_0)$ называется точкой наблюдения (*коллокации*), а точка $(x,\,y)$ – точка источника. Функция c определяется как

$$c(x_0,y_0)=\begin{cases}1,\;(x_0,\,y_0)\in D;\\ 1/2,\;(x_0,\,y_0)\in\Gamma;\\ 0,\;(x_0,\,y_0)\notin D,(x_0,\,y_0)\notin\Gamma,\end{cases} \tag{14}$$

$g(x, x_0, y, y_0)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа [12, 13]

$$g(x, x_0, y, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tag{15}$$

или соответствующая *функция Грина*.

Следует отметить, что собственно математической моделью в данном случае является граничное интегральное уравнение (сингулярное или регулярное в зависимости от расположения точек коллокации относительно границы Γ), полученное с учетом подстановки граничных условий (8) или (9). Отметим также, что в случае граничного условия (8) сингулярное граничное интегральное уравнение будет уравнением первого рода, а это означает, что корректность его в должной мере не исследована. Для точек коллокации, расположенных вне области решения, и обоих граничных условий (8), (9) получаем регулярное граничное интегральное уравнение первого рода, которое некорректно. Поэтому вопрос об эквивалентности дифференциальных и интегральных формулировок остается открытым, хотя не составляет труда показать, что, если некоторая функция u^* удовлетворяет одной из формулировок, то она удовлетворяет и второй.

Алгоритмы численного расчета. Следуя общей схеме метода граничных элементов [12, 13], разобьем границу области решения Γ, определенную соотношениями (10), произвольным образом на части, которые назовем граничными элементами, при необходимости форма граничных элементов может быть аппроксимирована дугами более простых кривых, в простейшем случае отрезками прямых. Однако регулярный метод граничных элементов (с точками коллокации вне области решения [21] и внутри области решения [22]) вообще не нуждаются в аппроксимации граничных элементов, обеспечивая при этом высокую точность решения. Известные (для удобства, но не обязательно) и неизвестные (обязательно) граничные значения функций u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ также аппроксимируются специально подобранными пробными функциями. Простоты ради, далее все неизвестные граничные значения на граничных элементах будут аппроксимироваться постоянными, а известные граничные значения либо тоже аппроксимироваться постоянными, либо вообще не будут аппроксимироваться. Тогда интегральное представление

$$c_k\, u_k = \sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_j \int_{\Gamma_j} g(x, x_k, y, y_k)\, dS(x, y) - \sum_{j=1}^{M} u_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial g(x, x_k, y, y_k)}{\partial n(x, y)}\, dS(x, y), \tag{16}$$

где (x_k, y_k) – точка коллокации, соответствующая $k-$ому граничному элементу; M – общее число граничных элементов, на которые разделены N или $N+1$ контуров, является системой линейных алгебраических уравнений, поскольку интегралы по заданным граничным элементам от известных функций g и $\frac{\partial g}{\partial n}$ в правой части (16) принимают численные значения. Перепишем систему (16) в матричном виде:

$$\{cu\} = (H)\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\} - (F)\{u\}. \tag{17}$$

Откуда для *задачи Дирихле*

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\} = -(H)^{-1}(F^*)\{u\}, \tag{18}$$

и для задачи Неймана

$$\{u\} = (F^*)^{-1}(H)\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}. \tag{19}$$

Однако чаще система уравнений (16) решается *методами гауссовского исключения* или *итерационными методами*, что намного проще, чем строить обратную матрицу больших размеров, что необходимо в (18) и (19).

В процессе решения задачи методом граничных элементов наиболее ресурсоемким и длительным этапом является определение матриц (H) и (F), поэтому целесообразно один раз вычислив эти матрицы хранить их в дальнейшем в памяти компьютера. Однако в случае сильно сегментированной границы области решения может возникнуть ситуация, когда матрица системы слишком велика для оперативной памяти компьютера, а, следовательно, должна храниться на внешних носителях, обмен с которыми существенно замедляет процесс счета. В таких случаях могут быть использованы безматричные итерационные методы, основанные на схемах вида:

$$u_k^{l+1} = \sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_j^l \int_{\Gamma_j} g(x, x_k, y, y_k)\, dS(x, y) - \sum_{j=1}^{M} u_j^l \int_{\Gamma_j} \frac{\partial g(x, x_k, y, y_k)}{\partial n(x, y)}\, dS(x, y), \tag{20}$$

где верхний индекс указывает на номер итерации. Алгоритмы типа (20) являются полными аналогами итерационных алгоритмов, применяемых в методе граничных элементов, с единственной разницей – элементы матрицы системы линейных алгебраически уравнений в них не хранятся в памяти, а постоянно вычисляются, то есть, каждый коэффициент вычисляется неоднократно. По понятным причинам такие подходы не получили широкого распространения. Однако в настоящей работе подход (20) модифицирован следующим образом: пусть для некоторого контура с номером K известна функция Грина G_K (для определенности предположим, что это функция Грина задачи Дирихле), отметим также, что для каждого граничного элемента (каждой точки коллокации) при записи интегральных соотношений (13) и их дискретных аналогов (16) и (20) могут быть использованы свои ядра потенциалов, стоящих в правой части. Тогда из правой части представления (20) можно выделить интегралы по контуру Γ_K :

$$u_k^{l+1} = -\int\limits_{\Gamma_K} u^l(x, y) \frac{\partial G_K(x, x_k, y, y_k)}{\partial n(x, y)} dS(x, y) +$$

$$+\sum_{j=1}^{M} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_j^l \int\limits_{\Gamma_j \not\subset \Gamma_K} G_K(x, x_k, y, y_k)\, dS(x, y) - \sum_{j=1}^{M} u_j^l \int\limits_{\Gamma_j \not\subset \Gamma_K} \frac{\partial G_K(x, x_k, y, y_k)}{\partial n(x, y)} dS(x, y), \qquad (21)$$

а это означает, что в представлении (21) на каждом шаге итерации краевая задача по выбранному контуру, для которого известна функция Грина, решается не численно методом граничных элементов, а аналитически методом функций Грина, что обеспечивает очевидные преимущества в точности решения. Рассуждения при выводе аналога представления (21) для задачи Неймана совершенно аналогичны. Более того, если даже функция Грина для данного контура неизвестна, то вместо нее можно использовать ее численный аналог, а именно матрицы $-(H)^{-1}(F^*)$ и $(F^*)^{-1}(H)$ из решений (18) и (19), если последние формулы применяются только к рассматриваемому контуру. Указанные дискретные аналоги матриц Грина можно хранить в оперативной памяти компьютера, и это потребует примерно в N раз меньшего объема необходимой памяти по сравнению с хранением всей матрицы системы. Таким образом, расчетные схемы вида (21) дают возможность объединить в одном итерационном процессе численные и аналитические подходы.

Результаты проведенных расчетов. Ограниченный объем настоящей работы не позволяет привести полный спектр полученных результатов, поэтому ограничимся здесь описанием методики тестирования и несколькими иллюстрирующими примерами. Численный эксперимент проводился для трех тестовых функций [24]:

$$u_1(x, y) = (x + y)/2\,; \qquad (22)$$

$$u_2(x, y) = x^2 - y^2\,; \qquad (23)$$

$$u_3(x, y) = e^{x-1} \cos\, y\,. \qquad (24)$$

Выбор тестовых функций (22) – (24) не является принципиальным, а результаты тестирования носят, скорее, эвристический характер. Тем не менее, такие результаты могут послужить основанием для качественных выводов о характере численного алгоритма и выработки практических рекомендаций по его реализации и использованию. Оценка погрешности во всех дальнейших расчетах проводилась на специально выбранном представительском наборе точек, расположенных внутри области решения. Как правило, такие точки выбирались в узлах некоторой сетки, если узлы оказывались внутри одного из внутренних контуров, то они отбрасывались. В выборе набора внутренних точек также заложен определенный произвол, но он позволяет удовлетворить практические требования, выдвигаемые при вычислениях. Вычислялась максимальная и среднеквадратичная погрешность, при этом последняя сглаживала возможные всплески вычислительной ошибки, когда некоторая из точек, в которых контролировалась погрешность, оказывалась вблизи границы области решения. Тестирование в приведенных ниже примерах проводилось в ограниченных областях квадратной или круглой формы, что, впрочем, не является принципиальным ограничением.

Таблица 1 – Результаты тестирования для функции (23) в квадратной области с круглыми включениями (400 граничных элементов на внешнюю границу и по 100 на каждое включение)

	Максимальная погрешность	Среднеквадратичная погрешность	Максимальная внутренняя погрешность	Среднеквадратичная внутренняя погрешность
Без включений	.1209E-4	.6188E-6	.2304E-5	.4000E-7
3 включения	.3166E-3	.1950E-5	.8267E-4	.8774E-6
4 включения	.3875E-3	.3475E-5	.1079E-3	.9072E-6

В табл. 1 приведены значения погрешностей, определенных в результате расчетов, в квадратной области для тестовой функции (23) при наличии 3 и 4 внутренних контуров и без внутренних контуров вообще, для контрольных точек выбиралась регулярная сетка 100 на 100. Согласно статье [24] внутренней погрешностью называются результаты расчета на том же представительском множестве точек и с той же граничной аппроксимацией, однако без численного решения интегрального уравнения. Как видно из табл. 1, добавление включений в область решения увеличивает погрешность решения, но это увеличение можно назвать «весьма умеренным». В целом же, результаты подтверждают достаточно высокую точность метода граничных элементов. При применении итерационных схем (21) существенного изменения погрешности численного решения не произошло, что было несколько неожиданно для автора.

Помимо приведенных выше тестовых расчетов было проведено несколько единичных численных экспериментов, чтобы оценить погрешность численного решения для большого числа изолированных сегментов границы области решения. В частности, были рассмотрены краевые задачи для тестовых функций (22) и (24) в круглой области, включающей 100, 160 и 200 контуров (дискретизация по 30 граничных элементов на каждое включение), а также в квадратной области для 100 и 225 контуров (при той же дискретизации). Результаты расчетов подтвердили высокую точность и эффективность метода граничных элементов.

Перспективы дальнейших исследований. Приведенные выше расчетные схемы и методики численного анализа свойств алгоритмов имеют совершенно очевидные перспективы дальнейшего развития: а) распространение предложенного подхода на пространственный случай; б) сравнительный анализ влияния различных граничноэлементных аппроксимаций на точность численных решений в областях с сильно сегментированной границей; в) распространение описанных подходов и методик на случаи иных исходных дифференциальных уравнений и, соответственно, граничных интегральных уравнений.

Выводы. Таким образом, в данной работе подтверждена эффективность метода граничных элементов для численного решения краевых задач математической физики в областях с сильно сегментированной границей. Кроме того, в данной статье сформулирован и опробован итерационный алгоритм метода граничных элементов, который позволяет интегрировать в процедуру численного решения известные аналитические решения для частных случаев той же самой краевой задачи в областях простой формы. Наконец, при помощи оригинальной методики численного эксперимента в работе удалось проанализировать влияние усложнения формы границы области (добавления контура) на точность численного решения. Последнее исследование проводилось на относительно небольших группах контуров, для которых изменение погрешности при добавлении еще одного контура было более заметным.

Список литературы

1. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Гомогенизация дифференциальных операторов. – М. : Наука, 1993. – 464 с.
2. *Marchenko V. A., Khruslov E. Y.* Homogenization of Partial Differential Equations. – Basel : Birkhauser, 2006. – 402 p.
3. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1980. – 406 p.
4. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. – М. : МГУ, 1984. – 336 с.
5. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М. : Наука, 1984. – 352 с.
6. *Нигматуллин Р. И.* Динамика многофазных сред. – М. : Наука, 1987. Ч. 1 – 464 с., Ч. 2. – 360 с.
7. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М. : Наука, 1966. – 448 с.
8. *Костюков А. А.* Взаимодействие тел, движущихся в жидкости. – Л. : Судостроение, 1972. – 312 с.
9. *Блох Э. Л., Гиневский А. С.* О движении системы тел в идеальной жидкости // Труды НТО суд. пром.– 1963. – Вып. 47. – с. 131 – 143.
10. *Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров П. М.* Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М. : Наука, 1988. – 309 с.
11. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М. : Наука, 1985. – 256 с.
12. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М. : Мир, 1987. – 534 с.
13. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. – М. : Мир, 1984. – 494 с.
14. *Бевза Э. К., Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Кочубей А. А.* Сравнение эффективности метода граничных элементов и метода конечных разностей путем численного эксперимента // Вестник Херсонского государственного технического университета. – 2002. – № 2 (15). – С. 53 – 56.
15. *Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Шульга Р. А.* Сравнение эффективности методов конечных разностей и граничных элементов при решении эллиптических краевых задач в кольцевых областях // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2016. – № 3 (58). – С. 325 – 330.
16. *Бевза Э. К., Евдокимов Д. В.* Особенности применения комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения плоских внешних задач гидродинамики // Труды X Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Херсон, 2001. – С. 51 – 55.
17. *Бразалук Ю. В., Шульга Р. А.* Прямые методы дискретных особенностей // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2017. – № 3 (62), т. 1. – С. 31 – 39.
18. *Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Поляков Н. В.* Применение комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения некоторых задач гидродинамического взаимодействия в плоских потоках // Вестник Харьковского национального университета. Сер. : «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2003. – Вып. 1. – № 590. – С. 55 – 60.
19. *Бразалук Ю. В.* Расчет гидродинамического взаимодействия в сверхтекучей жидкости методами вычислительной теории потенциала // Восточно – Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – № 5/5 (65). – С. 6 – 11.
20. *Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Шульга Р. А.* Численное исследование гидродинамической проблемы N – тел // Международная научно-техническая конференция «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях – 2016», 26 – 31 мая 2016 г. – Харьков : Харьковский национальный университет имени Н.В. Каразина, 2016. – С. 45 – 48.
21. *Евдокимов Д. В.* Об одном варианте регулярного метода граничных элементов // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 1999. – Випуск 2. – Том 1. – С. 150 – 156.
22. *Евдокимов Д. В.* Разработка прямых регулярных алгоритмов вычислительной теории потенциала с точками коллокации внутри области решения // Восточно – Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – № 2/7 (74). – С. 16 – 25.
23. *Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Поляков Н. В.* Численная реализация обобщенного метода Блоха – Гиневского // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 2013. – Вип. 17. – Том 1. – С. 35 – 51.

24. *Бразалук Ю. В., Евдокимов Д. В., Поляков Н. В.* Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями // Вестник Харьковского национального университета. Сер. : «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2005. – № 703. – С. 50 – 66.

References (transliterated)

1. Zhikov V. V., Kozlov S. M., Oleynik O. A. *Gomogenizatsiya differentsial'nулh operatorov* [Homogenization of differential operators]. Moscow, Nauka Publ., 1993. 464 p.

2. Marchenko V. A., Khruslov E. Y. *Homogenization of Partial Differential Equations*. Basel, Birkhauser, 2006. 402 p.

3. Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1980. 406 p.

4. Pobedrya B. E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanic of composite materials]. Moscow, MGU Publ., 1984. 336 p.

5. Bakhvalov N. S., Panasenko G. P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging of processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 352 p.

6. Nigmatullin R. I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multi-phase media]. Moscow, Nauka Publ., 1987. Part 1 – 464 p., Part 2 – 360 p.

7. Sedov L. I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Plane problems of aero- and hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 448 p.

8. Kostyukov A. A. *Vzaimodeystvie tel, dvizhuschikhsya v zhidkosti* [Interaction of bodies moving in a fluid]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1972. 312 p.

9. Blokh E. L., Ginevskiy A. S. *O dvizhenii sistemy tel v ideal'noy zhidkosti* [On the movement of system of bodies in ideal fluid]. *Trudy NTO Sud. Prom*. [Works of the Scientific and Technical Society of the Shipbuilding Industry]. 1963, issue 47, pp. 131 – 143.

10. Belotserkovskiy S. M., Kotovskiy V. N., Nisht M. I., Fedorov P. M. *Matematicheskoe modelirovanie ploskoparallel'nogo otryvnogo obtekaniya tel* [Mathematical modeling of plane-parallel separated flow past bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 309 p.

11. Belotserkovskiy S. M., Lifanov I. K. *Chislennye metody v singulyarnykh integral'nykh uravneniyakh* [Computational methods in singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 256 p.

12. Brebbia K., Telles Zh., Wroubel L. *Metody granichnykh elementov* [Boundary element methods]. Moscow, Mir Publ., 1987. 534 p.

13. Benerdzhi P., Batterfild R. *Metod granichnykh elementov v prikladnykh naukakh* [Boundary element method for applied sciences]. Moscow, Mir Publ., 1984. 494 p.

14. Bevza E. K., Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Kochubey O. O. Sravnenie effektivnosti metoda granichnykh elementov i metoda konechnykh raznostey putem chislennogo eksperimenta [Comparing the efficiency of boundary element method and finite difference method by numerical experiment]. *Vestnik Khersonskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Kherson State Technical University]. 2002, no. 2 (15), pp. 53–56.

15. Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Shul'ga R. A. Sravnenie effektivnosti metodov konechnykh raznostey i granichnykh elementov pri reshenii ellipticheskikh kraevykh zadach v kol'tsevykh oblastyakh [Comparing the efficiency of finite difference and boundary element methods when solving elliptic boundary-value problems in ring domains]. *Visnyk Khersons'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu* [Bulletin of the Kherson National Technical University]. 2016, no. 3 (58), pp. 325–330.

16. Bevza E. K., Yevdokimov D. V. Osobennosti primeneniya kombinirovannogo metoda granichnykh elementov i diskretnykh vikhrey dlya resheniya ploskikh vneshnikh zadach gidrodinamiki [Features of using boundary element and discrete vortex combined method for solving plane exterior problems of hydromechanics]. *Trudy X Mezhdunarodnogo simpoziuma «Metody diskretnykh osobennostey v zadachakh matematicheskoy fiziki»* [Proceedings of the X International Symposium "Methods of Discrete Singularities in Mathematical Physics Problems"]. Kherson, 2001. pp. 51–55.

17. Brazaluk Iu. V., Shul'ga R. A. Pryamye metody diskretnykh osobennostey [Direct methods of discrete singularities]. *Visnyk Khersons'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universitetu* [Bulletin of the Kherson National Technical University]. 2017, no. 3 (62), vol. 1, pp. 31–39.

18. Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Polyakov M. V. Primenenie kombinirovannogo metoda granichnykh elementov i diskretnykh vikhrey dlya resheniya nekotorykh zadach gidrodinamicheskogo vzaimodeystviya v ploskikh potokakh [Application of boundary element and discrete vortes combined method for solving particular problems of hydrodynamic interaction in plain flows]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo universiteta. Ser. : «Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravleniya»* [Bulletin of the Kharkov National University. Series : "Mathematical modeling. Informational technologies. Automated control systems"]. 2003, vol. 1, no. 590, pp. 55–60.

19. Brazaluk Iu. V. Raschet gidrodinamicheskogo vzaimodeystviya v sverkhtekuchey zhidkosti metodami vychislitel'noy teorii potentsiala [Computing hydrodynamic interaction in superfluid by computational potential theory]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [East-European journal of advanced technologies]. 2013, no. 5/5 (65), pp. 6–11.

20. Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Shul'ga R. A. Chislennoe issledovanie gidrodinamicheskoy problemyi N – tel [Numerical study of the N-body hydrodynamic problem]. *Mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Komp'yuternoe modelirovanie v naukoemkikh tekhnologiyakh – 2016», 26 – 31 maya 2016 g.* [International scientific and technical conference "Computer modeling in knowledge-intensive technologies – 2016". May, 26 – 31, 2016]. Kharkov, Kharkovskiy natsional'nyy universitet imeni N.V. Karazina Publ., 2016. pp. 45–48.

21. Yevdokimov D. V. Ob odnom variante regulyarnogo metoda granichnykh elementov [On a version of regular boundary element method]. *Visnyk Dnipropetrovs'kogo universitetu. Mekhanika* [Bulletin of the Dnipropetrovsk University. Mechanics]. 1999, vol. 2, no. 1, pp. 150–156.

22. Yevdokimov D. V. Razrabotka pryamykh regulyarnykh algoritmov vychislitel'noy teorii potentsiala s tochkami kollokatsii vnutri oblasti resheniya [Developing direct regular algorithms of computational potential theory with collocation point inside the solution domain]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [East-European journal of advanced technologies]. 2015, no. 2/7 (74), pp. 16–25.

23. Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Polyakov M. V. Chislennaya realizatsiya obobshhennogo metoda Blokha – Ginevskogo [Numerical implementation of Bloh – Ginetskiy method]. *Visnyk Dnipropetrovs'kogo universitetu. Mekhanika* [Bulletin of the Dnipropetrovsk University. Mechanics]. 2013, vol. 17, no. 1, pp. 35–51.

24. Brazaluk Iu. V., Yevdokimov D. V., Polyakov M. V. Sovmestnoe primenenie metoda malogo parametra i metoda granichnykh elementov dlya chislennogo resheniya ellipticheskikh zadach s malyimi vozmushheniyami [Joint application of small parameter method and boundary element method for numerical solution of small perturbation elliptic problems]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo universiteta. Ser. : «Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravleniya»* [Bulletin of the Kharkov National University. Series : "Mathematical modeling. Informational technologies. Automated control systems"]. 2005, no. 703, pp. 50–66.

Поступила (received) 08.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бразалук Юлія Володимирівна (Бразалук Юлия Владимировна, Brazaluk Iuliia Volodymirivna) – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро; тел.: (050) 582-71-71; e-mail: brazaluk_jv@ukr.net.