

International Workshop
**Networking Games and
Management**

Международный семинар

**Сетевые игры и
менеджмент**

June 23-25, 2013, Petrozavodsk, Russia

NGM-2013

**EXTENDED ABSTRACTS
РАСШИРЕННЫЕ ТЕЗИСЫ**

Научный редактор / Editor: В. В. Мазалов / V. V. Mazalov
Отв. за выпуск / Resp. for volume: Ю. В. Чиркова / Ju. V. Chirkova

© Karelian Research Centre, RAS, 2013
© Institute of Applied Mathematical Research,
KarRC RAS, 2013

Main organizers

Russian Academy of Sciences (RAS)
The Institution of RAS Institute of Applied Mathematical Research
(IAMR),
Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Russia
Petrozavodsk State University

Program committee

chair: Vladimir Mazalov (IAMR, Petrozavodsk, Russia)
Samuli Aalto (Aalto University, Helsinki, Finland)
Eitan Altman (INRIA, France)
Konstantin Avrachenkov (INRIA, France)
Andrey GarnaeV (Saint-Petersburg State University, Russia)
Andrei Gurtov (Helsinki Institute for Information Technology, Finland)
Alexander Dudin (Belarusian State University, Minsk, Belarus)
Peter Jacko (Lancaster University, UK, and BCAM, Bilbao, Spain)
Hisao Kameda (University of Tsukuba, Ibaraki, Japan)
Burkhard Monien (Paderborn University, Germany)
Evsey Morozov (IAMR KarRC RAS, Petrozavodsk, Russia)
Ilkka Norros (VTT, Helsinki, Finland)
Dmitry Novikov (V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS,
Moscow, Russia)
Michele Pagano (University of Pisa, Italy)
Leon Petrosjan (Saint-Petersburg State University, Russia)
Bart Steyaert (Ghent University, Belgium)
Krzysztof Szajowski (Institute of Mathematics, Wrocław University of
Technology, Wrocław Poland)
Alexandr Vasin (Moscow State University, Russia)
Anatolii Voronin (Petrozavodsk State University, Russia)
Aleksii Zhizhchenko (Division of Mathematical Sciences of RAS, Russian)

Organizing committee

chair: Vladimir Mazalov

secretary: Julia Chirkova

Andrei Pechnikov, Evsey Morozov, Aleksandr Rogov, Anna Rettieva, Anna Ivashko, Evgeniy Ivashko, Aleksandr Chirkov, Natalia Nikitina, Anna Schiptsova, Aleksey Kondratev

Foreword

The present volume contains extended abstracts accepted for the International Workshop “Networking Games and management” held in the Institute of Applied Mathematical Research, Petrozavodsk, Russia, June 23-25, 2013.

The Program of the Workshop concentrates on (but not restricted to) the following topics: networking games and management, optimal routing, price of anarchy, auctions, negotiations, learning and adaptive games, etc.

Over 26 papers from Finland, France, Germany, Netherland, Russia and Ukraine were submitted.

Acknowledgements. The Program and Organizing Committee thank the Prezidium of Russian Academy of Science and the Russian Foundation for Basic Research for the financial support. Also the Workshop is supported by the Programm of the strategic development for 2012-2016 years “University complex PetrSU in education-research space of European North: strategy of innovation development”

Программный и организационный комитеты благодарят Президиум Российской академии наук и Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку. Также проведение семинара поддержано в рамках Программы стратегического развития на 2012-2016 годы “Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития”

On behalf of the Organization Committee
Professor Vladimir V. Mazalov

Contents

<i>K. Avrachenkov</i>	
Dynamic Rate Allocation in Markovian Quasi-Static Multiple Access Channels: A Game Theoretic Approach	8
<i>K. Avrachenkov, E. V. Morozov, R. S. Nekrasova, B. Steyaert</i>	
Queue with constant retrial rate: verification of stability region via regenerative simulation	9
<i>Olga K. Bogdanova, Elena M. Parilina</i>	
Profit Maximizing Problem in Social Network Product Diffusion	11
<i>И. П. Болодурина, А. В. Кулешов</i>	
Исследование динамических систем в интервальном фазовом пространстве	14
<i>И. П. Болодурина, Т. А. Огурицова</i>	
Задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи в условиях конкурентной борьбы .	20
<i>Бородина А. В., Морозов Е. В.</i>	
Оценивание эффективной пропускной способности узла в тандемной сети	26
<i>V. V. Breer, A. D. Rogatkin</i>	
Expected time of the first exit from a domain in large social networks	29
<i>René van den Brink, Anna Khmelnitskaya, Gerard van der Laan</i>	
An efficient and fair solution for communication graph games	33
<i>Denis Chernobrovkin, Andrey Pechnikov</i>	
Regarding Web Site Structure Improvements	35

<i>Ilya A. Chernov</i> Optimal quorum for the model of computational grid with redundancy.....	38
<i>J. V. Chirkova</i> Price of Anarchy in Machine Load Balancing Game.....	43
<i>Доценко С.И., Маринич А.В.</i> Игры в цензуру, подсказку и угадывание в задаче оп- тимального выбора	44
<i>E.E. Ivashko, A.S. Rumiantsev</i> Optimizing workflow in BOINC-based Desktop Grid ...	48
<i>A. Y. Kondratev</i> N-threshold approximation of continuous equilibrium in internet auction	51
<i>M.M. Leri, Yu.L. Pavlov</i> Power-Law Random Graphs and Fire Robustness.....	53
<i>O. V. Lukashenko, E. V. Morozov</i> On the overflow probability asymptotics for a class of gaussian queues	58
<i>Anna V. Mazalova</i> Pricing and transportation costs in queueing system	60
<i>Mazalov V. V., Nikitina N. N.</i> CUSUM method in detection of a change point for Bernoulli distribution	62
<i>Угольницкий Г.А., Горбанева О.И.</i> Задача целевого распределения ресурсов в двухуров- невых иерархических системах управления	70
<i>L. Potakhina, E. Morozov, K. De Turck</i> An application of the inspection paradox to stability anal- ysis of some telecommunication systems	76

<i>L. Petrosyan, A. Sedakov</i>	
Two-Stage Communication Games	79
<i>M. Sandomirskaia</i>	
On multistage bidding games with positive bid-ask spread	84
<i>F. Sandomirskii</i>	
Repeated games with incomplete information and slowly growing value	90
<i>A. Sergeeva, V. Bure</i>	
One problem of determine a Nash equilibrium in the game of choice of three service companies	93
<i>A. Shchiptsova</i>	
Location-price competition in airline networks	96
<i>Б.Т. Цыгзев</i>	
Многошаговая игра формирования сети с экспоненци- альной выплатой	98
<i>А.А. Васин</i>	
Теоретико-игровой анализ механизмов рынка электро- энергии	102

Dynamic Rate Allocation in Markovian Quasi-Static Multiple Access Channels: A Game Theoretic Approach

Konstantin Avrachenkov

INRIA research group, Sophia Antipolis, France

E-mail: `konstantin.avrachenkov@inria.fr`

We deal with multiple access channels whose channel coefficients follow a quasi-static Markov process on a finite set of states. We address the issue of allocating transmission rates to users in each time interval, such that optimality and fairness of an allocation are preserved throughout a communication, and moreover all the users are consistently satisfied with it. First we show how to allocate the rates in a global optimal fashion. We give a sufficient condition for the optimal rates to fulfil some fairness criteria in a time consistent way. Then we utilize the gametheoretical concepts of time consistent Core and Cooperation Maintenance. We show that in our model the sets of rates fulfilling these properties coincide and they also coincide with the set of global optimal rate allocations. The relevance of our dynamic rate allocation to LTE systems is also shown.

This is a joint work with L. Cottatellucci (Eurecom) and L. Maggi (CreateNet)

Queue with constant retrial rate: verification of stability region via regenerative simulation

Konstantin Avrachenkov¹, Evsey V. Morozov²,
Ruslana S. Nekrasova², Bart Steyaert³

INRIA research group, Sophia Antipolis, France¹
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Russia²
S.M.A.C.S, University of Ghent, Ghent, Belgium³

E-mail: `konstantin.avrachenkov@inria.fr`, `emorozov@karelia.ru`,
`ruslana.nekrasova@mail.ru`, `bs@telin.ugent.be`

We study the stability region of a general retrial queueing system with constant retrial rate. Considered finite-capacity system (denoted as Σ) is fed by the renewal input of primary customers with rate λ .

If arrivals find all servers busy and buffer full they join an infinite-capacity virtual orbit and then try to rejoin the primary queue after an exponentially distributed time with (retrial) rate μ_0 . We stress that orbit rate in Σ does not depend on the orbit size (the number of orbit customers) unlike classical retrial models. Such a system can be applied to model some networking protocols.

The infinite growth of orbit size indicates the instability of Σ . Otherwise, the system is stable and obeys the stationary regime. The following sufficient stability condition has been proved in [1]:

$$(\lambda + \mu_0)P_{loss} < \mu_0, \quad (1)$$

where P_{loss} is the stationary loss probability in a loss system with input rate $\lambda + \mu_0$. Note that (1) is stability criteria for the system with Poisson input of primary customers.

On the other hand, stability criteria of $GI/M/1$ -type bufferless retrial system with constant retrial rate has been found in [2]. The main purpose of the present work is to study by simulation the tightness of the stability region given by sufficient condition (1) for non-Poisson primary customers. At that the regenerative simulation is used to obtain an estimate of the (unknown) loss probability P_{loss} .

Furthermore, we consider a retrial queueing system with N classes of customers and N orbits. Class- i primary customers are characterized by the input rate λ_i , service rate μ_i and exponential retrial times with rate $\mu_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$. Such a system is also motivated by multiple telecommunication applications with multi class customers. For the single-server bufferless system with Poisson inputs of primary customers, the following *necessary stability conditions* are obtained

$$\lambda_i P_b < \mu_0^{(i)} (1 - P_b), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

where P_b is the stationary busy probability in an corresponding loss system with input rate $\sum_i (\lambda_i + \mu_0^{(i)})$.

Simulation shows that conditions (2) determine the stability region of a 2-orbit system with a high accuracy being in fact stability criteria.

Acknowledgements. This work is done under financial support of the Program of Strategy development of PetrSU in the framework of the research activity.

References

- [1] Avrachenkov K., Morozov E. (2010). Stability analysis of $GI/G/c/K$ retrial queue with constant retrial rate. *INRIA Research Report No. 7335*. Available online at <http://hal.inria.fr/inria-00499261/en/>.
- [2] Lillo L.E. (1996). A $G/M/1$ -queue with exponential retrial. *Top*, **4(1)**, 99–120.

Profit Maximizing Problem in Social Network Product Diffusion

Olga K. Bogdanova, Elena M. Parilina

Saint-Petersburg State University

E-mail: bogdanova.o.k@gmail.com, elena.parilina@gmail.com

We consider a social network consisting of a finite number of agents and simulate the process of diffusion of a new product on the market characterized by the network.

Let N be the set of agents. Each agent can be in one of two states: it can be active or susceptible. Active agent obtains a product. Susceptible agent doesn't obtain a product, but he can purchase the product under the influence of external factors, i.e. influence of neighbors, product advertising, etc.

The following states of the network are possible: $(0, n), (1, n-1), \dots, (n, 0)$. Pair $(i, n-i)$ is a state of the network, where i is a number of active agents, $n-i$ is a number of susceptible agents. The network can move from one state to another. The transition is as follows.

We suppose there are two factors of influence on the network agents. They are product advertising and neighbors' opinion. Denote the level of advertising as $\lambda = \lambda(c)$, where $c \in [0, c_0]$ is an amount of money invested in advertising of the product, $\lambda \geq 0$ is a nondecreasing function of c . The probability of transition from susceptible to active state is denoted by $p = p(\lambda, \theta)$, where θ is the ratio of the number of active neighbors a to the total number of neighbors $k = \text{const}$, $p \in [0, 1]$ is a nondecreasing function of θ . We suppose that case where the reverse transition isn't possible.

The diffusion process can be described using the Markov chain with the finite state space $\{(0, n), (1, n-1), \dots, (n, 0)\}$ and matrix of transition

probabilities:

$$\Pi = \begin{pmatrix} C_n^0 p^0 (1-p)^n & C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} & \dots & C_n^n p^n (1-p)^0 \\ 0 & C_{n-1}^0 p^0 (1-p)^{n-1} & \dots & C_{n-1}^{n-1} p^{n-1} (1-p)^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Suppose there is one firm distributing the product in the social network under consideration. The task of the firm is to maximize profits in the long run. Let λ and p be known. Then profits of the firm can be described by the function

$$b(\lambda, \theta, c, r) = \sum_{i=1}^k b_i \delta^{i-1},$$

where $b_i = E[a_i - a_{i-1}]r_i - c_i$ is an anticipated profit of the firm at stage i , a_i is a number of neighbors at stage i , $\delta \in (0, 1)$ is a discount factor, c_i is the cost of advertising at stage i , $r \in [r_0, R]$ is a price of the product, r_0 is a cost price of the product.

The strategy of the firm is a set of pairs (r_i, c_i) , $i = \overline{1, t}$, where pair (r_i, c_i) is the strategy of the firm at stage i , t is a total number of stages.

Therefore, the problem is in finding the optimal strategy of the firm, that is the strategy maximizing the total profit of the firm.

This study is devoted to empirical research of the behavior of the model depending on the parameters. Different λ and p function types are considered.

References

1. Bogdanova O., Parilina E. Empirical study of social networks // Control Processes and Stability: Contributions, 2010. P. 559–564 (in russian).
2. Bogdanova O., Parilina E. Mathematical modeling of the diffusion of a new product in social networks // Control Processes and Stability: Contributions, 2011. P. 432–435 (in russian).
3. Mine H., Osaki S. Markov decision processes. M.: Science, 1977. PP. 176 (in russian).

4. Bogdanova O., Parilina E. Modeling of the dynamics of a new product distribution in the social network // Theory of active systems: Contributions, 2011. P. 241–244.

Исследование динамических систем в интервальном фазовом пространстве

И. П. Болодурина, А. В. Кулешов

г. Оренбург

E-mail: prmat@mail.osu.ru

В данной статье представлен вывод понятия динамической системы в пространстве n -мерных интервалов. Обоснованы важные свойства такой системы, позволяющие использовать некоторые методы действительного анализа для исследования интервальных динамических систем.

Введение

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + h(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ при $t \in [t_0, T]$ с начальными условиями $x(t_0) = x^0$, в которой коэффициенты $A(t), B(t), h(t)$ - известные достаточно гладкие функции. Существует класс задач, в которых коэффициенты модели (1) полагаются неизвестными функциями, которые лежат в пределах интервалов с известными границами. Фазовый вектор при этом считается детерминированным. Однако, естественным представляется, по аналогии с коэффициентами, считать интервальным и фазовый вектор. Но для этого необходимо ввести понятие интервальной функции и интервальной производной. Для этого введем пространство интервальных векторов, зададим в нем метрику и отношение порядка и сформулируем необходимые определения.

Пространство IR^n

© И. П. Болодурина, А. В. Кулешов, 2013

Рассмотрим пространство IR^n векторов, составленных из интервалов $\mathbf{x}_i = \overline{[x_i, \bar{x}_i]}$ с действительными границами $\underline{x}_i, \bar{x}_i \in R, i = \overline{1, n}$. Следуя принятой в интервальном анализе терминологии, перейдем к обозначениям $\mathbf{x} = \left([x_{1,0} - \Delta x_1, x_{1,0} + \Delta x_1] \cdots [x_{n,0} - \Delta x_n, x_{n,0} + \Delta x_n] \right)$, где $x_{i,0} = \frac{\underline{x}_i + \bar{x}_i}{2}, \Delta x_i = \frac{\bar{x}_i - \underline{x}_i}{2}, i = \overline{1, n}$. Поскольку $\mathbf{x} \in IR^n$ однозначно определяется парой действительных векторов: $x_0 \in R^n$ - вектором центров и $\Delta x \in R^n$ - вектором полудлин компонент далее, где это необходимо, наряду с подробной записью, для сокращения будем писать $\mathbf{x} = (x_0, \Delta x)$.

Будем выделять полужирным начертанием интервалы и интервальные векторы, а обычным - числа и числовые векторы.

Обычным способом [1] определим на IR^n операции умножения вектора на число, сложения и скалярного умножения векторов.

Метрика и отношение порядка в пространстве IR^n

Зададим расстояние $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : IR^n \times IR^n \rightarrow R$ в следующем образе:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in IR^n, \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |y_{i,0} - x_{i,0}| + \sum_{i=1}^n |\Delta y_i - \Delta x_i|. \quad (2)$$

Не трудно убедиться, что (2) является метрикой в IR^n . Для $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in IR^n$ аксиомы метрики выполняются в силу свойств модуля действительного числа. Значит IR^n - метрическое пространство с метрикой (2).

Определим отношение порядка на IR^n с использованием показателя интервального неравенства [2]. Сначала приведем этот показатель для скалярных интервалов, а затем расширим это понятие на n -мерный случай. Показатель интервального неравенства есть действительная функция пар интервалов: $r(\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) : IR \times IR \rightarrow R$, которая характеризует степень выполнения неравенства $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, следующего вида:

$$r(\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) = \frac{y_0 - x_0}{\Delta y + \Delta x}. \quad (3)$$

Отношение порядка между интервальными векторами будем считать определенным, если отношения порядка для всех n пар компонент $r(\mathbf{x}_i \leq \mathbf{y}_i), i = \overline{1, n}$ одного знака. При этом

$Rel(\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) = |\bar{r}_i| \text{sign}(\bar{r}_i)$, где $\bar{r}_i = \min_i r(\mathbf{x}_i \leq \mathbf{y}_i)$. В противном случае отношение порядка будем считать неопределенным.

Определение 1. Множество $K \subset IR^n$ называется ограниченным, если для $\forall \mathbf{x} \in K, \exists M \in IR^n : Rel(\mathbf{x} \leq M), Rel(-M \leq \mathbf{x})$ одновременно определены и больше 1.

Определение 2.

Множество $K \subset IR^n$ называется замкнутым, если для $\forall \varepsilon \in R^+, \exists \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \in K$: $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) < \varepsilon, \exists \mathbf{y}_2 \notin K : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) < \varepsilon$.

Ограниченные замкнутые множества в IR^n будем называть компактными в IR^n .

Определение 3.

Множество $K \subset IR^n$ называется выпуклым, если для $\forall \mathbf{x} \in K, \forall \lambda \in R, \lambda \in [0, 1] : \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x} \in K$.

Предел и производная в IR^n

Будем говорить, что на компактном множестве $T \subset R$ задана n -мерная интервальная функция $\mathbf{f} : R \rightarrow IR^n$ действительной переменной $t \in T$, если $\forall t \in T \exists \mathbf{f}(t) \in IR^n$.

Определение 4.

Интервальный вектор $\mathbf{A} \in IR^n$ является пределом интервальной функции $\mathbf{f}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если $\forall \varepsilon \in R^+ \exists \delta(\varepsilon) \in R^+ : \forall t \in T, |t - t_0| < \delta : \rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{A}) < \varepsilon$. По аналогии с действительным анализом, будем использовать обозначение $\mathbf{A} = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t)$.

Под понятием приращения функции на отрезке времени будем понимать интервал, характеризующий расстояние между значениями функции в начальный и конечный моменты времени. Для его введения удобно воспользоваться записью $\mathbf{f}(t) = (f_0(t), \Delta f(t))$.

Определение 5.

Приращением функции $\mathbf{f}(t)$ на отрезке времени $[t_1, t_2]$ назовем величину

$$\delta \mathbf{f}(t_1, t_2) = (f_0(t_2) - f_0(t_1); \Delta f(t_2) - \Delta f(t_1)).$$

Определение 6.

Производной функции $\mathbf{f}(t)$ в точке t_0 назовем предел

$$\dot{\mathbf{f}}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{f}(t_0, t_0 + \Delta t)}{\Delta t},$$

если он существует.

Разобьем отрезок времени $[t_0, t]$ точками $t_1, t_2, \dots, t_N = t$, при этом $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, N}$.

Определение 7.

Интегралом интервальной функции $\mathbf{f}(\tau)$ на отрезке $[t_0, t]$ называется предел, если он существует, вида $\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}(t_i) \Delta t_i$. По аналогии с дей-

ствительным анализом, будем писать $\int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau) d\tau$.

Лемма 1. *Предел интервальной функции равен интервалу с предельными границами.*

Доказательство леммы основывается на свойствах модуля действительного числа, определении производной и определении метрики (2). //

В дальнейшем нам понадобится понятие непрерывного отображения.

Определение 8.

Будем говорить, что функция $\mathbf{f}(t)$ непрерывна в точке $t_0 \in T$, если $\forall \varepsilon \in R^+ \exists \delta \in R^+, \forall t \in T : |t - t_0| < \delta, \rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t_0)) < \varepsilon$.

Динамическая система в IR^n

Рассмотрим в IR^n динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{h}(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{x}(t) : T \rightarrow IR^n$, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{h}$ - интервальные матричные функции размерностей $n \times n$, $n \times m$, $n \times 1$ с элементами $\mathbf{a}_{i,j}, \mathbf{b}_{i,k}, \mathbf{h}_i$, $i, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$ - интервальными функциями типа $T \rightarrow IR$ с известными непрерывно дифференцируемыми границами. Управляющее воздействие $u(t) \in \Omega$, $u : T \rightarrow R^m$ является детерминированной функцией, поскольку считается, что ее значение однозначно определяется управляющей стороной. Ω будем считать постоянным выпуклым компактным множеством.

Пусть известно состояние системы (4) в некоторый момент времени t_0 , который считаем начальным,

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (5)$$

где $\mathbf{x}^0 \in IR^n$ - интервальный вектор с известными конечномерными границами.

Определение 9.

Множеством достижимости системы (5), (6) в момент времени $t \in T$ назовем множество $P(t, t_0, \mathbf{x}^0, \Omega)$ правых концов траекторий $\mathbf{x}(t)$, выходящих из \mathbf{x}^0 с учетом всевозможных допустимых реализаций управлений $u(\tau) \in \Omega$, $t_0 \leq \tau < t$. Далее будем писать кратко $P(t)$.

Теорема 1. *Множество достижимости $P(t)$ системы (5) с начальным условием (6) при сделанных предположениях является компактным выпуклым в IR^n множеством [3].*

Доказательство теоремы проводится в 3 этапа.

1. Показывают ограниченность множества достижимости с использованием аналога интегральной формулы и требований, накладываемых на коэффициенты модели (4);
2. Обосновывают непрерывную зависимость выбора управляющей последовательности и соответствующей ей траекторией;
3. Используя непрерывность соотношения $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau < t$ и $\mathbf{x}(t)$, доказывают замкнутость и выпуклость множества достижимости $P(t)$.

Компактность и выпуклость понимаются здесь в смысле определений 1-3.

Заключение

В данной работе представлена концепция интервальной динамической системы, доказано свойство выпуклости и компактности множества достижимости линейной интервальной системы. Теорема 1 является важнейшим инструментом при дальнейших рассуждениях, а именно, при обосновании необходимого условия оптимальности. Кроме того, она имеет самостоятельный интерес, потому, как свойство выпуклости и компактности множества достижимости применяется при численном решении задач динамики методами динамического программирования и экстремального прицеливания.

Список литературы

- [1] Хансен Е., Уолстер Дж. У. Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа // М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2012. – 516 с.
- [2] Ащепков Л. Т., Давыдов Д. В. Показатель интервального неравенства: свойства и применение // Вычислительные технологии. Том 11, №4, 2006. С. 13 – 22.
- [3] Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления // Наука, М., 1972, 576 с.
- [4] Кулешов А. В. Некоторые способы численного решения дифференциальной игры «шофер-убийца» // Известия института математики и информатики УдГУ – Выпуск 1 (39). Ижевск: Изд.–«Удмуртский университет», 2012. – С. 73.

Задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи в условиях конкурентной борьбы

И. П. Болодурина, Т. А. Огурцова

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Последние десятилетия ознаменовались бурным развитием высоких технологий, в том числе в области телекоммуникаций. На сегодняшний день это направление остается одним из наиболее прибыльных и перспективных. Большая привлекательность телекоммуникационного рынка порождает жесткую конкуренцию в этом секторе экономики. Сегодня предприятия сотовой связи представляют единственный на телекоммуникационном рынке сегмент, располагающий инфраструктурой доступа к потребителю контента. Конкурентная борьба на рынке телекоммуникационных услуг, ставшая реальностью и для операторов связи, приводит к необходимости быстрого принятия маркетинговых решений и обновления пакета предоставляемых услуг. С целью удержания и увеличения своей доли на рынке, компаниям сотовой связи необходимо изучать деятельность конкурентов, что и определяет возможность дальнейшего качественного развития операторов связи, и, соответственно, ставит перед ними задачу эффективного реагирования на изменение состояния внешней среды. Важнейшим фактором, характеризующим конкурентоспособность операторов связи, является емкость системы связи, определяемая числом потенциальных абонентов. Поэтому весьма актуальной

представляется задача разработки эффективного механизма управления стратегией развития предприятий телекоммуникационной отрасли. В рамках задачи разработки стратегии развития и оптимального управления поведением операторов связи в условиях конкурентной борьбы за общие ресурсы (в данном случае это пользователи услуг) важное место занимает разработка математической модели данного процесса. Для этой цели рассмотрим n конкурирующих фирм, предоставляющих услуги сотовой связи, которые существуют в одной экономической нише, то есть с общими трудовыми и природными ресурсами и общими потребителями сотовой связи (абонентами). Предположим, что рассматриваемые фирмы не являются монополистами и что услуга незамещаема. Для построения модели оптимального управления поведением предприятий сотовой связи разделим всех операторов на две неравные группы: экономический агент №1 (агент ЭА₁), обособив одно из ведущих предприятий рассматриваемой отрасли на рынке, и ее конкурентов – экономический агент №2 (агент ЭА₂), объединив остальные предприятия путем суммирования числа абонентов на рынке. Обозначим через $x_i(t)$ число абонентов i -го экономического агента в момент времени t , x_{i0} – число абонентов i -го экономического агента в начальный момент времени ($i = 1, 2$).

На изменение динамики развития числа абонентов каждого оператора сотовой связи оказывают влияние множество факторов: экспоненциальный рост числа абонентов в отсутствие конкурентов, нелинейность во взаимодействии, временной лаг, определяющий разницу во времени между изменениями в рыночной ситуации и моментом принятия управленческих решений с целью реагирования на эти изменения, а также наличие конкурентов на рынке. Для описания конкурентного поведения двух экономических агентов использована логистическая модель (1) с запаздыванием во времени, позволяющая учесть все перечисленные факторы в полном объеме.

$$\dot{x}(t) = x_i \left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^2 \gamma_{ik} x_k(t - \tau) \right], \quad (1)$$

где γ_{ik} , $k = 1, 2$ – коэффициент взаимного влияния i -ого и k -ого экономических агентов. Число абонентов i -го экономического агента на начальном интервале $[-\tau, 0]$ задано функциями $\varphi_i(t)$,

$i = 1, 2$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (2)$$

Существование нижней грани η_i объема абонентской базы, которая обеспечивает нормальное функционирование предприятия, а также верхней грани μ_i объема, определяемой техническими характеристиками сети, т.е. возможностью обслуживать заданное количество абонентов в единицу времени, описано неравенствами (3)

$$\eta_i \leq x_i(t) \leq \mu_i, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Рассмотрен подход к проблеме одновременной идентификации величины запаздывания и коэффициентов системы, в основе которого лежит метод настройки модели на экспериментально полученные данные [5]. Для демонстрации важности введения временного лага рассмотрена процедура идентификации параметров модели без учета запаздывания.

Конкуренция между компаниями ведется за потенциального клиента, которого интересует стоимость минуты связи пользования услугами. Поэтому возникает проблема эффективного управления поведением предприятий сотовой связи, учитывая фактор цены. Для моделирования процесса управления конкурентным поведением двух экономических агентов в модель (1) введем показатель $u_i(t)$, $i = 1, 2$ характеризующий среднюю стоимость минуты пользования услугами связи оператора в момент времени и удовлетворяющий ограничению (4)

$$\alpha \leq u_i(t) \leq \beta, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

где α – минимальная средняя стоимость минуты связи, при которой затраты на издержки не превысят выручку, получаемую от использования услуг связи (себестоимость минуты связи); β – максимальная средняя стоимость минуты связи, позволяющая экономическому агенту оставаться конкурентно способным на рынке.

В качестве структуры модели выбрана динамическая модель в виде системы дифференциальных уравнений с запаздыванием типа моде-

лей Лотки-Вольтерры (5)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \\ x_1(t) [\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(t - \tau) - \gamma_{12}x_2(t - \tau)] - p_{11}u_1(t) - p_{12}u_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \\ x_2(t) [\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(t - \tau) - \gamma_{22}x_2(t - \tau)] - p_{21}u_1(t) - p_{22}u_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

где p_{ij} , $i, j = 1, 2$ – коэффициенты влияния средней стоимости минуты связи на прирост числа абонентов. Число абонентов i -го экономического агента на начальном интервале $[-\tau, 0]$ задано функциями (2), а ограничения на фазовые переменные выбраны в виде (3).

В процессе взаимодействия экономических агентов перед фирмой могут быть поставлены различные цели, реализованные в соответствующих критериях качества:

1. наращивание абонентской базы предприятия за конечный период времени

$$J_1(u_1) = \int_0^T b_1 x_1(t) dt \rightarrow \max; \quad (6)$$

2. приведение абонентской базы предприятия к заданному объему в конечный момент времени

$$J_2(u_1) = b_2 (x_1(T) - M)^2 \rightarrow \min, \quad (7)$$

где M – плановое значение абонентской базы агента ЭА₁;

3. увеличение прибыли предприятия за конечный период времени

$$J_3(u_1) = \int_0^T b_3 x_1(t) u_1(t) dt \rightarrow \max; \quad (8)$$

В зависимости от приоритетов развития агента ЭА₁ решены задачи оптимального управления для каждого функционала (6) – (8). Поставленные задачи относятся к классу задач оптимального управления с постоянным запаздыванием. Для их решения в работе применен принцип максимума Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием в предположении, что значение стоимости минуты связи агента

ΔA_2 фиксировано, и может быть оценено из динамики предыдущей тарифной политики и тенденции развития рынка.

Выполнение фазовых ограничений задачи обеспечено путем введения квадратичных внешних штрафных слагаемых в рассматриваемые функционалы.

Особенностями построенной задачи оптимального управления является нелинейность системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику развития абонентской базы двух экономических агентов, а также наличие постоянного запаздывания в управляемой системе по вектору состояния. С учетом перечисленных особенностей для построенной задачи оптимального управления получены условия оптимальности, на основе которых реализован численный алгоритм ее решения. Проведена дискретная аппроксимация непрерывных задач. Ограничения на управление имеющиеся в задаче учтены с помощью метода проекции градиента при произвольном выборе начального приближения управления.

Следует отметить, что с помощью одного численного метода не всегда удается найти решение задачи оптимального управления с требуемой точностью. Поэтому в процессе решения задачи могут быть последовательно реализованы различные алгоритмы. Один из приближенных методов решения задач оптимального управления нелинейными объектами предложен Л.И. Шатровским. Он основан на линеаризации заданной нелинейной системы и дальнейшей итерационной процедуре, в ходе которой при заданном в виде функции времени начальном приближении управления на каждом шаге решается линейная задача аппроксимирующая исходную задачу.

Для повышения надежности расчета оптимального управления для нелинейной задачи авторами работы был предложен комбинированный метод, суть которого заключается в том, что в качестве начального приближения в методе проекции градиента выбрано допустимое управление, полученное в методе Шатровского. Такой подход к выбору начального приближения управления позволит избежать попадания функционала в локальный экстремум.

В рамках поставленной задачи разработан программный комплекс в среде программирования Borland Delphi 7.0, реализующий численное решение задач оптимального управления поведением предприятий связи в условиях конкурен-

ции за потребителей услуг. Программный комплекс состоит из четырех модулей: М1 – модуль главного окна программы, М2 – модуль идентификации параметров модели, М3 – модуль метода проекции градиента при произвольном выборе начального приближения управления, М4 – модуль метода проекции градиента при выборе начального приближения управления на основе метода Шатровского. По имеющимся данным абонентской базы, динамики предыдущей тарифной политики и тенденций развития рынка созданный программный комплекс позволяет находить оптимальные значения параметров и величины запаздывания, а также оптимальные управленческие сценарии для предприятий, предоставляющих услуги связи в зависимости от приоритетов развития.

Таким образом, разработка и совершенствование эффективных численных методов и алгоритмов, а также создание на их основе программных комплексов для решения задач динамики изменения абонентской базы и управления поведением предприятий сотовой связи на российском рынке в условиях конкурентной борьбы за пользователей услуг являются в настоящее время одними из рычагов ускорения научно-технического прогресса страны.

Список литературы

1. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации. Оренбург-Тверь: Твер. гос. ун-т, 2004. - 575 с. Вычислительные технологии. Том 11, №4, 2006. С. 13 – 22.
2. Болодурина И.П. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и их приложения: учебное пособие. – Оренбург: Оренбург. гос. ун-т, 2006. – 101 с.
3. Болодурина И.П., Огурцова Т.А. Управление ценой на предоставляемые услуги предприятий телекоммуникационной отрасли // Проблемы управления. 2011. №3. С. 30-35.
4. Коблов А.И., Ширяев В.И. Оптимальное управление поведением фирмы на примере рынка сотовой связи // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – №5. – С. 157-165.
5. Прасолов А.В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии. – СПб.: Лань, 2010. – 192 с.

Оценивание эффективной пропускной способности узла в тандемной сети¹

Бородина А. В., Морозов Е. В.

Институт Прикладных Математических Исследований КарНЦ РАН,
Петрозаводский государственный университет

Рассмотрим систему с постоянной скоростью обслуживания C и конечным буфером b (узел коммуникационной сети). Для большинства сетей обслуживания скорость обслуживания в узле должна удовлетворять требованиям качества обслуживания QoS. Поэтому разработка алгоритмов для оценивания эффективной скорости обслуживания с учетом требований QoS является важной задачей. Для узла сети вычислить эффективную пропускную способность (ЭПС) означает найти наименьшее значение скорости обслуживания C , которое гарантирует, что вероятность перегрузки удовлетворяет условию

$$P(W > b) \leq \Gamma,$$

где W - стационарный процесс нагрузки, а значение Γ достаточно мало и обеспечивает уровень QoS.

Будем предполагать, что на вход узла сети поступает регенеративный входной поток, что характерно для тандемных сетей. Более того, регенеративный процесс сохраняет свойство регенерации при прохождении через узлы сети. В связи с этим возникает задача оценивания ЭПС для узла в тандеме, на вход которого поступает регенеративный входной поток.

В работах [1, 2] рассматривалась задача вычисления и была предложена оценка ЭПС для системы с регенеративным входным потоком,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

где рассуждения опирались на использование рекурсии Линдли для незавершенной работы $W(n)$ (в дискретном времени):

$$W(n+1) = [W(n) + v_n - C]^+, \quad n \geq 0,$$

где v_n - величина работы, поступившей в систему в момент n (за единичный интервал времени), процесс $\{W(n)\}$ образует марковскую цепь с общим пространством состояний. Однако, такая модель не очень удобна для оценивания ЭПС в тандемной сети, поскольку необходим переход от непрерывной шкалы времени к дискретной.

В данной работе предлагается обобщение регенеративной оценки ЭПС на случай рекурсии Линдли, построенной по моментам прихода заявок:

$$W(n+1) = [W(n) + v_{n+1} - C\tau_n]^+, \quad n \geq 0,$$

где τ_n - интервал между приходами n -ой и $n+1$ -ой заявки.

Тогда для оценивания ЭПС узла можно использовать следующую аппроксимацию:

$$C = \frac{\ln \mathbf{E} e^{\theta^* \hat{X}}}{\theta^* \mathbf{E} D},$$

где \hat{X} - типичная нагрузка, поступившая на цикле регенерации, D - типичная длина цикла регенерации в непрерывном времени, искомый параметр θ^* согласно теории больших уклонений [3, 4] определяется приближением:

$$\theta^* = -\ln \Gamma/b.$$

Список литературы

- [1] Бородина А. В., Морозов Е. В. *Сравнение двух оценок эффективной пропускной способности системы обслуживания*, 2012, Труды Карельского научного центра РАН, No 5, с. 8-17.
- [2] I. Dyudenko, E. Morozov, M. Pagano. *Regenerative estimator for effective bandwidth*, Proceedings of the International Conference "Mathematical methods for analysis and optimization of information telecommunication networks, Minsk, Belarusian State University, С. 58 - 60, 2009.

- [3] A. Ganesh, N. O'Connell and D. Wischik. *Big Queues*, 2004, Springer-Verlag, Berlin.
- [4] P. W. Glynn, W. Whitt. *Logarithmic asymptotics for steady-state tail probabilities in a single-server queue*, JAP, 31, 1994, pp. 131-156.

Expected time of the first exit from a domain in large social networks

V.V.Breer, A.D.Rogatkin

V.A.Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Moscow

M.Granovetter's social network model is used. Due to random fluctuations of agents parameters, social network state may significantly deviate from its equilibrium state. In this work expected times of such large deviations are estimated.

Model description

Social network consists of n agents. Each agent has one of the two available actions $\omega_i \in \{0, 1\}$. Each agent is described by one constant $\theta_i \in [0, 1]$ which can be treated as agent's resistance to public opinion. According to M.Granovetter, agent i chooses his action ω_i to maximize his objective function

$$u_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \omega_j - \theta_i \right) \omega_i. \quad (1)$$

It can be shown that evolution of such systems can be described by only one variable $x \in \mathbb{R}$ which is equal to the mean action of agents

$$x = \frac{1}{n} \sum_i \omega_i. \quad (2)$$

The evolution is then described by the following recurrent equality

$$x_{k+1} = F_n(x_k), \quad (3)$$

where

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^n \chi(x \geq \theta_i) \quad (4)$$

is empirical distribution of agents thresholds θ_i . In this work it's assumed that agents thresholds are i.i.d random variables with distribution $F(x)$ and fluctuate in time, i.e. we have a new realisation of threshold vector for each time step k . Thresholds and empirical distribution thus can be written as θ_{ik} and F_{nk} .

The finite difference scheme of the network's dynamics can be rewritten as follows

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_{nk}(x_k), \\ x_{k+1} - x_k &= F(x_k) - x_k + (F_{nk}(x_k) - F(x_k)). \end{aligned} \quad (5)$$

The random part has the following property

$$\text{Var}(F_n(x) - F(x)) = \frac{1}{n}F(x)(1 - F(x)). \quad (6)$$

Therefore for large n , by the central limit theorem, we can approximate it by a gaussian random variable

$$\sqrt{n} \cdot (F_n(x) - F(x)) \rightarrow^{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, F(x)(1 - F(x))). \quad (7)$$

The discrete-time stochastic process for the system is

$$x_{k+1} - x_k = b(x_k) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(x_k)\xi_{k+1}. \quad (8)$$

where

$$b(x) = F(x) - x, \quad (9)$$

$$\sigma(x) = \sqrt{F(x)(1 - F(x))}. \quad (10)$$

To obtain useful estimates we study its continuous analog

$$\dot{x} = b(x(t)) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(x(t))\dot{w}, \quad (11)$$

where \dot{w} is a standard Wiener process. The main challenge in studying this system is that noise is dependent on the space variable.

Problem

Let social network be in a stable equilibrium state

$$F(x_0) = x_0, \tag{12}$$

$$F(x) - x > 0, x \in (x_1, x_0) \tag{13}$$

$$F(x) - x < 0, x \in (x_0, x_2) \tag{14}$$

Due to random fluctuations of agents thresholds at infinite time its state can be found far from the interval (x_1, x_2) . Denote the exit time as

$$\tau_e = \inf_t \{t : x(t) \notin (x_1, x_2)\} \tag{15}$$

The reasonable question is how much time does it take to observe such deviation

$$E\tau_e - ? \tag{16}$$

Results

Quasipotential for the continuous-time system was found

$$V(x) = \int_{x_0}^x \frac{(F(u) - u)}{F(u)(1 - F(u))} du. \tag{17}$$

The large deviation principle for the exit time is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(E\tau_e) = -\min\{V(x_1), V(x_2)\}. \tag{18}$$

Which can heuristically be expressed as

$$E\tau_e \sim e^{-n \cdot \min\{V(x_1), V(x_2)\}}. \tag{19}$$

References

1. *Бреер В.В.* Теоретико-игровые модели конформного поведения. Автоматика и телемеханика. // АиТ. 2012. N 10. С. 111-126.
2. *Granovetter M.* Threshold Models of Collective Behavior // The American Journal of Sociology. – 1978. – Vol. 83, N 6. – P. 1420–1443.

3. *Gulinsky O.V., Veretennikov A.Yu.* Large Deviations for Discrete-Time Process with Averaging. // Utrecht, The Netherlands, 1993.
4. *Ventzel A.D., Freidlin M.I.* Fluctuations in Dynamic Systems under the Action of Small Random Perturbations. // Moscow, Nauka, 1999.

Price of An efficient and fair solution for communication graph games

René van den Brink¹, Anna Khamelnitskaya²,
Gerard van der Laan³

A cooperative game with transferable utility, shortly TU-game, is a pair consisting of a finite set of players and a characteristic function assigning a worth to each coalition of players. Myerson (1977) introduced TU-games with restricted cooperation possibilities represented by an undirected graph which nodes represent the players and the edges *communication links* between the players. Under the assumption that only coalitions of connected players can cooperate, Myerson derived the so-called *restricted game* and proposed the Shapley value of this restricted game as solution for such graph games. This so-called *Myerson value* is characterized by component efficiency and fairness.

Component efficiency states that for each component of the graph the total payoff to its players equals the worth of that component. However, when the characteristic function is not superadditive, component efficiency might be not desirable. Consider, for example, the graph game on $N = \{1, 2, 3\}$ with only players 1 and 2 connected and characteristic function v with worth 5 for coalition $\{1, 2\}$ as well as for the single player coalition $\{3\}$, and worth 8 for the grand coalition N . A solution satisfying component efficiency allocates 5 to players 1 and 2 together and also 5 to player 3, which is more than the worth of the grand coalition. But also

¹J.R. van den Brink, Department of Econometrics and Tinbergen Institute, VU University, De Boelelaan 1105, 1081 HV Amsterdam, The Netherlands. E-mail: jrbrink@feweb.vu.nl

²A.B. Khamelnitskaya, Saint-Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics, Universitetskii prospekt 35, 198504, Petergof, Saint-Petersburg, Russia. E-mail: a.khamelnitskaya@math.utwente.nl

³G. van der Laan, Department of Econometrics and Tinbergen Institute, VU University, De Boelelaan 1105, 1081 HV Amsterdam, The Netherlands. E-mail: glaan@feweb.vu.nl

under superadditivity efficiency might be required instead of component efficiency. For example, consider a research fund that has money available to distribute amongst individual researchers. Every researcher that submits a proposal takes part in the distribution of the budget. However, the fund has the policy to stimulate interdisciplinary research and therefore proposals submitted by two or more researchers receive relatively bigger amounts of money. Therefore, a subset of connected researchers can secure a bigger grant by submitting a joint proposal. Although usually not all researchers are connected to each other, still the full research budget is available and will be distributed. This requires a value to satisfy efficiency.

We introduce an efficient value for graph games that is characterized by efficiency and two other axioms, namely the Myerson's *fairness* axiom saying that deleting a link between two players affects both players' payoff equally, and a new axiom *fair distribution of the surplus* that compares for every component the total payoff to this component in the game itself to the total payoff of this component in the subgame induced by this component. For the research fund example it is obvious that the presence of joint proposals affects the size of the grant. The fair distribution of the surplus condition requires that these effects are balanced. The value for graph games characterized by the three axioms equals the Shapley value when the graph is complete and is equal to the equal surplus division when the graph is empty. Recently, also Casajus (2007) proposed an efficient value for graph games. Using the coalition structure given by components of the graph this value assigns to each player his Myerson value of the Owen's modified game restricted by the graph within the component the player belongs to. We provide an example where Casajus' value favors stand-alone players, whereas our value favors cooperating players.

Regarding Web Site Structure Improvements

Denis Chernobrovkin¹, Andrey Pechnikov²

¹Saint-Petersburg State University,
Saint-Petersburg, Russia

²Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Center of RAS
Petrozavodsk, Russia

E-mail: 8ezhikov@gmail.com, pechnikov@krc.karelia.ru

Keywords: webometrics, web-site structure graph, Nash arbitration scheme

Let's denote $G_S = G_S(V, E)$ as a web-site graph, where a set of vertices is V and E is a set of edges. By v_{01} we denote starting vertex with level equal to 0, and by v_{ij} - j th vertex of i th level, $i > 0$. So in graph with k levels $V = \{v_{01}, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{k1}, v_{k2}, \dots\}$.

As a weight vector for G_S graph lets define $W = \{w_{01}, w_{11}, w_{12}, \dots, w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{k1}, w_{k2}, \dots\}$. As a weight for G_S we can take web-site analog for PageRank[1], frequency of page visiting [2], result of simulation model [3,4] or we can take site hit counter statistic. Main idea here is that there exists the way to calculate W for the selected G_S graph and $w_{ij} \geq 0$ for any selected i and j . It is obvious, that changes in G_S structure will produce changes in vector W both in its structure and its values.

So it will be interesting to estimate the results of G_S graph structure change in means of utility for selected site. We will investigate one problem from wide side of potentially appearing problems – question of moving one web-site page one level deeper. This problem appears, when web-site has large number of 1st level pages. So our aim is to reduce their number.

Let's define an operation “plunging vertex A under vertex B” on graph G_S .

Let in the graph G_s there will be chosen two vertices v_{nr} on the level n and v_{ms} located on the level m . Operation of plunging vertex v_{nr} under v_{ms} can be split into three actions:

1. Delete all existing edges pointing on vertex v_{nr} , which starting vertex will be located on the levels, higher then m : $i \leq m$.
2. Add edge $(v_{ms}, v_{m+1, r})$
3. Vertex v_{nr} will be renamed to vertex $v_{m+1, N(m+1)+1}$, where $N(i)$ – number of vertices on the level i .

It's clear, that as the result of plunging operation we will get new graph G_s , for which there will be new weight vector W' . Experiments and researches show, that most of the time, when we lower the page level, its weight $w_{m+1, N(m+1)+1}$, will lower too. And when we will raise it its weight will be increased too.

Let's investigate the special case of plunging operation, when both vertexes (A and B) are located on the first level. In this case we will have $N(1)$ vertexes of the first level $\{v_{01}, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1N(1)}\}$, from which we should choose one to perform its plunging.

In this interpretation this problem can be reduced to problem of the general form of negotiations, for which there exists a solution described by Nash arbitration scheme [4]. In this case for all $1 \leq j \leq N(1)$ we can regard $w_{ij} > 0$, so for plunging there will be selected such page r , for which there will be a maximum for multiplication: $U(W) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{N(1)} w_{1j}$.

To perform experiments authors extended already existing software package "BeeBot"[5] with new module called "BeeKnife". This module has two ways of usage. In first mode it can consume XML data from "BeeDrone" and perform plunging operation of selected page A to target parent page B and save result in the XML format. In the second mode BeeKnife do the following:

1. Consumes XML data from BeeDrone.
2. Finds all possible combinations for page plunging for level which was selected by user (the number of possible combinations for level i is equal to $(N(i) - 1) * N(i)$)

3. For each found combination performs plunging operation and produce new G'_S graph.
4. For each G'_S graph calculates vector W' using imitation model from "AntHill" module.
5. Calculates the multiplication and shows to user results in sorted order.

So as a result of program execution web-master will get the recommendation, which pages should be moved down in the first place.

After set of experiments on the web-site, which were performed on the web-site <http://www.apmath.spbu.ru> (Faculty of Applied Mathematics from Saint-Petersburg State University), there were found out, that it will be good to move most of the links in "Photo album", "Alumni", and "Admission" sections to deeper level.

References

- [1] Brin S., Page L. The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine // Computer Networks and ISDN Systems. 1998. № 30. P. 107-117.
- [2] Горубнов А.Л. Марковские модели посещаемости веб-сайтов // Интернет математика 2007. 2007. С. 65-73.
- [3] Печников А.А., Чернобровкин Д.И. Об исследованиях веб-графа сайта // Материалы конференции «Управление в технических, эргатических организационных и сетевых системах». - СПб.: «Концерт ЦНИИ «Электроприбор», 2012, С. 1069-1072.
- [4] Чернобровкин Д.И. Об исследованиях веб-графа сайта с использованием имитационной модели // Информационная среда вуза XXI века: материалы VI Международной научно-практической конференции (4-10 декабря 2012 г.). Куопио, 2012. С. 151-153.
- [5] Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения. СПб.: Лань, 2010. 448 с.

Optimal quorum for the model of computational grid with redundancy ¹

Ilya A. Chernov

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre RAS;
Petrozavodsk State University;
Petrozavodsk, Russia

E-mail: `chernov@krc.karelia.ru`

Abstract

We consider a model of grid computing system solving recognition problems. Computers produce the correct answer with some known probability. Each problem is solved up to the fixed number (quorum) of identical answers; this redundancy allows reducing the risk of producing the wrong answer. The cost function is the sum of the computational time and penalty in case of the wrong answer. We reveal the conditions when such redundancy is advantageous and show how the optimal quorum can be determined.

Keywords: grid, optimal quorum, replication

Mathematical model of a grid system

Let us consider the grid computing system (or its part) solving numerous recognition problems (i.e. "yes-no" problems;

¹The work is supported by the grant of Russian Foundation for Basic Research (13-07-00008_a) and by the Program of strategic development of Petrozavodsk State University, within measures on improvement of scientific research activity.

here we consider only such problems in the sake of simplicity). Computational errors, malfunction, and malicious actions are possible, so the correct answer has some probability $0.5 < q < 1$. In order to reduce the risk of producing the wrong answer, the problems are solved several times, until ν identical answers are obtained. This answer is given to the user and can possibly still be wrong. The user figures out if the answer is correct or not, in the latter case some kind of penalty F is added to the time spent on the computation (or the cost of this time) forming the cost function J . Therefore we have an optimisation problem: for large redundancy the cost is high, but the risk of the wrong answer and thus of penalty is lower; while for no replication the cost is the lowest possible, but high penalty can be too expensive.

Optimal quorum

The cost function is a random variable with finite number of possible values:

Values:	$\nu + i, i = 0 : \nu - 1$	$\nu + i + F, i = 0 : \nu - 1$
Probabilities:	$\binom{\nu+i-1}{\nu-1} q^\nu p^i$	$\binom{\nu+i-1}{\nu-1} p^\nu q^i$

The first set of values correspond to the correct answer, i is the number of false answers, the last answer must be correct (otherwise the calculation would have be over earlier); the second set is for the false answer, the cost consists not only on the number of tries, but also on the penalty F , the last answer is false.

The expectation of this random variable is

$$E_F(\nu) = \nu + p^\nu F g_\nu(q) + q^\nu p g'_\nu(p) + p^\nu q g'_\nu(q),$$

where the function

$$g_\nu(x) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \binom{\nu+i-1}{\nu-1} x^i$$

is differentiable with respect to x (a polynomial), $g_\nu(0) = 1$, $g_\nu(x)$ and $g'_\nu(x)$ (derivative with respect to x) grow with respect to both x and ν . Indeed,

$$\binom{\nu+i}{\nu} = \binom{\nu+i-1}{\nu-1} \cdot \frac{\nu+i}{\nu} > \binom{\nu+i-1}{\nu-1},$$

so corresponding terms are greater, and one more positive term is added. For the derivative the proof is similar.

In order to determine the optimal quorum we need to compare $E_F(\nu)$ and $E_F(\nu+1)$. Obviously $E_F(\nu)$ grows with respect to ν if ν is large, at least linearly. This is natural, because excessive replication of tasks demands much time but reduces the risk of the wrong answer only slightly. Thus either $E_F(1)$ is the lowest (no replication), or there exists the minimum at some integer $\nu > 1$. Consider the difference $G(\nu) = E_F(\nu) - E_F(\nu+1) = A(p)F - B(p)$ and write down the factor $A(p)$:

$$A(p) = p^\nu \sum_{i=0}^{\nu-1} \binom{\nu+i-1}{\nu-1} q^i - p^{\nu+1} \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu+i}{\nu} q^i.$$

This is equal to (we omit the details)

$$A(p) = p^\nu q^\nu \left(\sum_{k=2}^{\nu+1} \binom{2\nu-k}{\nu-1} - 2p \binom{2\nu-1}{\nu-1} \right).$$

Analysing the Pascal triangle, it is easy to check that the sum equals $\binom{2\nu-1}{\nu-1}$. Finally we get $A(p) = \binom{2\nu-1}{\nu-1} p^\nu q^\nu (1 - 2p)$.

As for $B(p)$, it equals $E_0(\nu+1) - E_0(\nu)$, i.e. for "no penalty" case; in other words, it is the average number of additional tries to get more identical answers, and thus it is positive.

Now we see that if $p \geq 0.5$ then $G < 0$, i.e. replication is anyway unnecessary. Though, the risk of the wrong answer

is so high, that using such computers is questionable (we demanded $p < 0.5$).

On the other hand, if $0 < p < 0.5$ and

$$F > F_\nu = \frac{E_0(\nu + 1) - E_0(\nu)}{\binom{2\nu-1}{\nu-1}(1-2p)p^\nu q^\nu}$$

we have $G > 0$, i.e. replication helps to reduce the cost reducing the risk of getting the penalty. The sequence F_ν increases up to $+\infty$.

Also note that both low (≈ 0) and high (≈ 0.5) probability of error makes redundancy less useful: in the first case the penalty is unlikely, while in the second it is cheaper to pay the penalty without hopeless costly attempts to avoid it.

This formula allows solving useful problems: if the penalty F is given, it is easy to determine such ν that $F_{\nu-1} \leq F < F_\nu$, i.e. the optimal quorum; given the desired upper bound of probability of producing the wrong answer, we are able to calculate the necessary quorum ν and then evaluate the penalty F that makes such replication optimal; finally, we can find the minimal value $F_\nu^* = F_\nu(p^*)$ of F as a function of p for a given ν . This value p^* is the critical level of reliability: as we have said earlier, for higher values replication is not advantageous because of too high risk of the wrong answer and thus the estimated penalty.

References

- [1] Foster I., Kesselman C., Tieske S., The Anatomy of the Grid: Enabling Scalable Virtual Organizations, International Journal of High Performance Computing Applications. 2001. Vol. 15. No 3. P. 200–222.

- [2] Li Y., Mascagni M. Improving Performance via Computational Replication on a Large-Scale Computational Grid // Cluster Computing and the Grid, 2003 IEEE/ACM International Symposium on.

Price of Anarchy in Machine Load Balancing Game

Julia V. Chirkova

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Russia

E-mail: julia@krc.karelia.ru

The Machine Load Balancing Game with N machines is considered. A set of n jobs is to be assigned to a set of N machines with different speeds. Jobs choose machines to minimize their own delays. The social cost of a schedule is the maximum delay among all machines, i.e. *makespan*. For this model the upper bound estimation of the Price of Anarchy is obtained. Conditions, when this upper bound estimation is an exact estimation of the Price of Anarchy, are found. Conditions of Braess's Paradox appearing in the system are found. For the case of 3 machines the exact value of Price of Anarchy is obtained numerically with the algorithm that was developed. The work is supported by Russian Foundation for Basic Research and the Division of Mathematical Sciences of RAS.

Игры в цензуру, подсказку и угадывание в задаче оптимального выбора

Доценко С.И., Маринич А.В.

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко

E-mail: sergei204@ukr.net, marynych@unicyb.kiev.ua

Рассмотрен ряд игровых постановок в задаче оптимального выбора, в которой принимают участие два игрока (цензура, подсказка, угадывание). Целью одного из игроков, как и в классической задаче, является нахождение наилучшего элемента. Другой игрок не принимает непосредственного участия в поиске и его целями могут быть помощь первому игроку или наоборот, создание ему помех. Для всех случаев найдены оптимальные стратегии игроков, образующие равновесие по Нэшу и исследовано асимптотическое поведение найденных стратегий для случая, когда количество просматриваемых элементов стремится к бесконечности. Далее будут использованы такие обозначения: n – количество элементов, k – номер просматриваемого элемента, $t = \lim_{n,k \rightarrow \infty} k/n$ в предположении, что k и n стремятся к бесконечности так, что этот предел существует.

Игра в цензуру. Цензор просматривает каждый элемент перед тем, как его просмотрит выбирающий. Он имеет некоторые полномочия, которые заключаются в частичном

запрете или ограничении прав выбирающего на просмотр элементов. Его целью является минимизация вероятности выбора наилучшего элемента просматривающим. Рассмотрено два варианта полномочий цензора:

- 1) Цензор один раз за игру может запретить просмотр элемента. После этого его полномочия исчерпываются. В этом случае оптимальной стратегией выбирающего будет остановиться на первом максимальном элементе, начиная с $e^{-3/2}n$. Оптимальной стратегией цензора будет запретить просмотр первого максимального элемента, встретившегося после $e^{-1}n$. Вероятность нахождения наилучшего элемента выбирающим при условии, что оба игрока придерживаются своих оптимальных стратегий, стремится, при $n \rightarrow \infty$, к $e^{-3/2}$.
- 2) Цензор один раз за игру может закрыть просмотр любого элемента, выбирающий может открыть закрытый элемент (но тогда он должен закончить просмотр и выбрать закрытый элемент), либо продолжить просмотр дальше (и полномочия цензора на этом исчерпываются). В этом случае если цензор будет закрывать только максимальные элементы, то просматривающий имеет полномочия обойти этот запрет, и, таким образом, запретительные функции цензора сводятся к нулю. Поэтому цензору иногда следует блефовать, т.е. закрывать просмотр не максимальных элементов, заставляя тем самым выбирающего угадывать, действительно ли закрытый элемент является максимальным. Оптимальной стратегией цензора будет закрыть первый максимальный элемент, встретившегося после $e^{-1}n$ и при этом блефовать (также начиная с $e^{-1}n$) с интенсивностью $p(t) = -\frac{1}{n} \frac{1+\ln t}{t \ln t}$. Оптимальной стратегией выбира-

ющего будет при $e^{e-4} \leq t \leq e^{-1}$ остановиться на первом максимальном элементе, а при $t \geq e^{-1}$ – останавливаться на первом максимальном элементе, если он не закрыт цензором, и открывать его с вероятностью $y(t) = 1 + \frac{t-1-t \ln t}{t \ln^2 t}$, если закрыт. При этом вероятность нахождения наилучшего элемента просматривающим составляет $e^{e-4} \approx 0.278$.

Игра в подсказку. Пусть первый игрок просматривает каждый элемент перед тем, как его просмотрит второй игрок. За нахождение наилучшего элемента второй игрок получает единичный выигрыш. Первый игрок не может получить плату за обнаружение наилучшего элемента, но он может помочь сделать это второму, дав подсказку и получив за это от него плату, величину которой он устанавливает заранее. При появлении очередного максимального элемента первый игрок имеет возможность просмотреть все элементы до конца и предложить второму игроку купить за установленную ранее цену информацию о том, является ли данный максимальный элемент наилучшим или нет. Такую возможность первый игрок имеет один раз, после чего он выбывает из игры.

Оказывается, что оптимальная величина подсказки, которую следует установить первому игроку, равна 0.14. При этом средние выигрыши игроков составляют 0.085 и 0.480 соответственно, а цена анархии равна 1.006.

Игра в угадывание. В этой игре два игрока одновременно просматривают последовательность элементов, как в классической задаче оптимального выбора. Первый игрок один раз на протяжении просмотра должен задать вопрос второму игроку – является ли текущий просматриваемый элемент максимальным или нет? Если второй игрок отвечает правильно, то он выигрывает, если нет – то выиг-

рывает первый игрок. Если на протяжении просмотра вопрос не был задан, то победа присуждается второму игроку. Очевидно, вопросы следует задавать только относительно максимальных элементов. Оптимальная стратегия второго игрока простая – отвечать "да если просматривается максимальный элемент и $t \geq 1/2$, в противном случае отвечать "нет". Оптимальная стратегия первого игрока состоит в том, чтобы пропустить $1/4$ от общего числа элементов и задать вопрос относительно первого встретившегося после этого максимального элемента. При этом вероятность выигрыша первого игрока составляет $1/4$.

Список литературы

- [1] МАЗАЛОВ, В. В. (2010). *Математическая теория игр и приложения*. Изд-во "Лань СПб.", 446 с.
- [2] ДОЦЕНКО, С. И., МАРИНИЧ, А. В. (2013). Игра в цензуру в задаче оптимального выбора. *Кибернетика и системный анализ*, **5**, в печати.

Optimizing workflow in BOINC–based Desktop Grid ¹

Evgeny E. Ivashko, Aleksander S. Rumiantsev

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Russia

E-mail: {ivashko,ar0}@krc.karelia.ru

Abstract

The paper deals with mathematical model of BOINC–based Desktop Grid [1]. A number of computational nodes are connected to BOINC–server. Server assigns workunits that are parts of a sophisticated computational problem to nodes. After execution of calculus, the assignee returns to server the result of computations related to the workunit. At the same time nodes may also temporary disappear from the Grid or return a wrong result. The aim is to develop a policy of sharing workunits so as to achieve maximum performance of BOINC–grid provided that for each computational node the characteristics of availability and results validity are known.

Keywords: Desktop Grid, BOINC, reliability, performance

Mathematical model of BOINC–based Desktop Grid

BOINC–based Desktop Grid consists of, say, M of computational nodes C_1, C_2, \dots, C_M that compute workunits transferred

¹The reported study was partially supported by RFBR, research projects No. 12-07-31147_mol_a and 13-07-00008_a

to them by BOINC-server. Each node is characterized by the set of its resources (CPU, RAM, GPU, hard drive), estimation of availability and estimation of results validity [2]. Resources are used to compute workunits (i. e. they are related to the performance of the computational node). Availability is an estimation of probability of temporary unavailability of the node [3]. Validity is an estimation of probability of getting the wrong result by the node.

To increase reliability of the computational system the server may be configured for duplication of workunits to diverse nodes [4, 5]. The duplication order shows how many copies of workunit should be sent to the specific group of nodes. Also server chooses for each workunit the quorum that accepts result. Quorum q means that q first equal results of the same workunit returned by different nodes will be accepted as a correct result.

High duplication order increases the probability of getting the correct final result but decreases performance of the grid.

The aim of the server is to choose such duplication policy in order to maximize the performance keeping low level of probability of acceptance of wrong results.

References

- [1] BOINC <http://boinc.berkeley.edu/>
- [2] Kondo D., Taufer M., Brooks C., Casanova H., Chien A. Characterizing and evaluating desktop grids: An empirical study // Parallel and Distributed Processing Symposium, 2004. Proceedings. 18th International. http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=1302936

- [3] Kondo D. et al. Characterizing resource availability in enterprise desktop grids // *Future Generation Computer Systems*. 2007. Vol. 23, No 7. P. 888–903.
- [4] Heien E., Kondo D., Gainaru A., LaPine D., Kramer B., Cappello F. Modeling and tolerating heterogeneous failures in large parallel systems // *High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC)*, 2011 International Conference for. http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=6114447
- [5] Kondo D., Javadi B., Iosup, A., Epema D. The failure trace archive: Enabling comparative analysis of failures in diverse distributed systems // *Cluster, Cloud and Grid Computing (CC-Grid)*, 2010 10th IEEE/ACM International Conference on. http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5493457

N-threshold approximation of continuous equilibrium in internet auction

Aleksei Y. Kondratev

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Russia

E-mail: `kondratev@krc.karelia.ru`

Keywords: bargaining model, N-threshold equilibrium, internet auction.

When concluding deals on the market internet-auctions are held. The participants are the sellers and buyers. We consider a game-theoretic bargaining model with incomplete information [1-3]. A participant (buyer or seller) has a private information about his reserved price. Reserved prices are random variables with known probability distributions. Each participant declares a price which depends on his reserved price. If the bid price is above the ask price, the good is sold for the average of two prices. Otherwise, there is no deal.

Continuous equilibrium with uniform distribution for reserved prices was derived in [1]. N-threshold equilibrium has only N available values for bid price and ask price. For $N=1,2,\dots$ we find an explicit N-threshold solutions, which approximate continuous solution.

The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (project 13-01-91158-ГФЕН_a) and the Division of

Mathematical Sciences of RAS (the program "Algebraic and combinatorial methods of mathematical cybernetics and new information system").

References

1. *Chatterjee K., Samuelson W.* Bargaining under incomplete information // *Operations Research*. 1983. Vol. 31. N 5. P. 835–851.
2. *Mazalov V. V., Tokareva J. S.* Equilibrium in bargaining model with non-uniform distribution for reservation prices // *Game theory and applications*, 2011. Vol. 3. Issue 2. P. 37-49.
3. *Mazalov V. V., Kondratyev A. Y.* Bargaining model with incomplete information // *Vestnik St. Petersburg University*. Ser. 10. 2012. Issue 1. P. 33–40.

Power-Law Random Graphs and Fire Robustness

M.M. Leri, Yu.L. Pavlov

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Russia

We consider power-law random graphs of N vertices numbered from 1 to N . Vertex degrees $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ are drawn independently from the following distribution:

$$\mathbf{P}\{\xi \geq k\} = k^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

where $\tau > 1$ is the distribution parameter. The distribution (1) defines the number of stubs for each vertex, i.e. the number of edges coming out of the vertex for which the connected vertices are not yet defined. Since the sum of vertex degrees has to be even, one stub is added to a random vertex if the sum is odd. Then the graph is constructed by joining all the stubs equiprobably to form edges.

Such graphs are called configuration random graphs. Last decades research (see e.g. [1, 2]) showed that power-law random graphs are deemed to be a good implementation of complex networks, e.g. Internet. Therefore many works concerning the analysis of the structure and dynamics of power-law random graphs have recently appeared (see [3, 4]).

The study of power-law graphs robustness to different types of breakdowns is one of the important trends in random graphs' field [3, 5, 6]. In [7] we considered graph resilience to random

and to targeted vertex destructions from a viewpoint of preserving graph connectivity. In the first case vertices along with connected edges were removed equiprobably, while in the second case we withdrew vertices with the highest degrees. In [7] we assumed that $\tau \in (1, 2)$ because these values of the distribution (1) parameter are viewed to be the most typical for real networks [1, 2]. The research was done on our simulation model of the power-law random graph. The results showed that such graphs are quite robust to “random breakdowns” and rather vulnerable to “targeted attacks”.

In this work we consider random graph resilience from a different point of view. Let’s assume that the graph destruction process starts from a chosen vertex. When it is removed from a graph, the destruction force passes on along the incident edges to the connected vertices which are also removed from the graph with a given probability. The main task is to find the optimal values of parameter τ for which there remains a maximum number of vertices as it depend on a given probability of edge destruction. This approach could be used in modeling forest fires as well as banking system defaults in order to minimize their negative effects [8].

Let graph vertices be placed in the nodes of a square lattice sized 100×100 . And edges connect vertices in a “closest neighbour” manner. This means that under a full packing every vertex has 8 adjacent vertices (neighbours). Taking into consideration that graph vertex degrees are defined by the distribution (1) and taking into account that vertex degree can’t be more than 8 and the overall number of vertices doesn’t exceed 10000, we found that graph size N is related to parameter τ by the following regression function with $R^2 = 0.97$.

$$N = 9256 \cdot \tau^{-1.05}, \quad (2)$$

For the simulation modeling we consider two types of breakdowns: “random start” when the first removed vertex is chosen equiprobably and “target start” with the destruction process starting from a vertex with the highest degree. We assume that as the graph destruction starts a propagation process expands along incident edges to connected vertices with a given probability $0 < p \leq 1$. This process is similar to spreading of fire or disease emission. The aim of the research was to find the optimal value of parameter $\tau = \tau(p)$ for which the number of vertices remained in the graph reaches its maximum. Simulations were carried out for the values parameter τ from the interval (1, 3.5) with a step 0.01 and the values for $0 < p \leq 1$ with a step 0.01. Graph sizes N come from the equation (2). For all pairs of values τ and p there were generated 100 random graphs.

In both cases of “breakdown start” for each value of p there were obtained regression dependencies of the number of vertices remained in a graph g from parameter τ . For each regression we found τ for which the function g reaches its maximum value g_{max} . Below are given regression relations between the maximum number of remained vertices g_{max} and the value of p in the cases of “random start” (3) and “target start” (4).

$$g = 3507.9 - 1513.6 \cdot \ln \tau \quad (R^2 = 0.93) \quad (3)$$

$$g = 2980.3 - 1157.8 \cdot \ln \tau \quad (R^2 = 0.98) \quad (4)$$

Below are shown regression relations between the value of τ for which the maximum number of remained vertices g_{max} is reached and the value of p in the cases of “random start” (3) and “target start” (4).

$$g = 2.59 + 2.34 \cdot \ln \tau \quad (R^2 = 0.92) \quad (5)$$

$$g = 2.82 + 1.33 \cdot \ln \tau \quad (R^2 = 0.95) \quad (6)$$

The study was supported by the Strategic Development Programme of the Petrozavodsk State University for years 2012–2016.

References

- [1] Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the internet topology. *Computer Communications Rev.* 1999. Vol. 29, pp. 251–262.
- [2] Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55, pp. 3–23.
- [3] Durrett R. *Random Graph Dynamics.* Cambridge: Cambridge Univ. Press. 2007.
- [4] Hofstad R. *Random Graphs and Complex Networks.* Eindhoven University of Technology. 2011.
- [5] Cohen R., Erez K., Ben-Avraham D., Havlin S. Resilience of the Internet to Random Breakdowns. *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, pp. 4626–4628.
- [6] Norros I., Reittu H. Attack resistance of power-law random graphs in the finite mean, infinite variance region. *Internet Mathematics.* 2008. Vol. 5, N 3, pp. 251–266.
- [7] Leri M. M. On robustness of power-law random graphs. *Transactions of the Karelian Research Centre of RAS: Mathematical Modeling and Information Technologies.* 2012. N 5, pp. 49–53. (in Russian)

- [8] Arinaminparty N., Kapadia S., May R. Size and complexity model financial systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*. 2012. Vol. 109, pp. 18338–18343.

On the overflow probability asymptotics for a class of gaussian queues

Oleg V. Lukashenko, Evsey V. Morozov

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk State
University, Petrozavodsk, Russia

E-mail: lukashenko-oleg@mail.ru, emorozov@karelia.ru

We consider the so-called fluid queue with a constant service rate C driven by the input process $A(t)$ which is defined as follows:

$$A(t) = mt + X(t),$$

where $m > 0$ is the mean input rate and the process X is a sum of the independent fractional Brownian motions (fBm's), in general, with different Hurst parameters. The process $A(t)$ describes the amount of data (input traffic) arrived within time interval $[0, t]$. Such input processes arise as aggregation of a large number of independent heavy-tailed heterogeneous on-off sources after appropriate time scaling, see Taquu et al. [1].

The present work is focused on the asymptotic analysis of the overflow probability $P(Q > b)$ that the stationary workload Q exceeds a (large) threshold b . Such a probability is an important ingredient of the QoS analysis of the telecommunication systems. We present the logarithmic asymptotics of

the overflow probability in the described system. The proof is mainly based on the technique developed by Duffield and O'Connell [2].

Acknowledgements. This work is done under financial support of the Program of Strategy development of PetrSU in the framework of the research activity.

References

- [1] Taqqu M., Willinger W., Sherman R. (1997). Proof of a fundamental result in self-similar traffic modelling. *Computer Communication Review*, **27**, 5–23.
- [2] Duffield N., O'Connell N. (1995). Large deviations and overflow probabilities for the general single server queue, with applications, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **116**, 363–374.

Pricing and transportation costs in queueing system

Anna V. Mazalova

St.Petersburg State University,
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,
Universitetskii pr. 35, St.Petersburg, 198504, Russia

E-mail: annamazalova@yandex.ru

A non-cooperative four-person game which is related to the queueing system $M/M/2$ is considered. There are two competing stores and two competing transport companies which serve the stream of customers with exponential distribution with parameters μ_1 and μ_2 respectively. The stream forms the Poisson process with intensity λ . The shops declare the price for the produced product. After that transport companies declare the price of the service and carry passengers to the stores. The problem of pricing and determining the optimal intensity for each player in the competition is solved.

Keywords: Duopoly, equilibrium prices, queueing system.

References

[Hotelling, 1929] Hotelling H. (1929). *Stability in Competition*.
In: Economic Journal, Vol. 39, pp. 41–57.

- [D'Aspremont, Gabszewicz, Thisse, 1979] D'Aspremont C. Gabszewicz J. Thisse J.-F.(1979). *On Hotelling's "Stability in Competition"*. In: *Econometrica*, Vol. 47, pp. 1145–1150.
- [Mazalova, 2012] Mazalova A. V. (2012). *Hotelling's duopoly on the plane with Manhattan distance*. In: *Vestnik St. Petersburg University*, Ser. 10, pp. 33–43. (in Russian).
- [Altman, Shimkin, 1998] Altman E. Shimkin N. (1998). *Individual equilibrium and learning in processor sharing systems*. In: *Operations Research*, Vol. 46, pp. 776–784.
- [Levhari, Luski, 1978] Levhari D. Luski I. (1978). *Duopoly pricing and waiting lines*. In: *European Economic Review*, N. 11, pp. 17–35.
- [Hassin, Haviv, 2003] Hassin R. Haviv M. (2003). *To Queue or Not to Queue / Equilibrium Behavior in Queueing Systems*, Springer.
- [Luski, 1976] Luski I. (1976). *On partial equilibrium in a queueing system with two services*. In: *The Review of Economic Studies*, Vol. 43, pp. 519–525.
- [Koryagin 2008] Koryagin M. E. (1986). *Competition of public transport flows*. In: *Autom. Remote Control*, 69:8, pp. 1380–1389.
- [Saati, 1961] Saati T. L. (1961). *Elements of Queueing Theory with Applications*, Dover.
- [Mazalova, 2013] Mazalova, A. V. (2013). *Duopoly in queueing system*. In: *Vestnik St. Petersburg University*, Ser. 10, (submitted).

CUSUM method in detection of a change point for Bernoulli distribution¹

Mazalov V. V., Nikitina N. N.

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Russia

Abstract

We consider a problem of detection of a change point in distribution of a stochastic sequence describing the flow of jobs arriving to a server. A change point may indicate a change in significant characteristics of the job flow, such as occurrence of a large number of artificially generated jobs aimed at compromising server's availability (denial-of-service attack). The stochastic sequence of our interest is a sequence of r.v. taking values 0 or 1 according to Bernoulli distribution. Such r.v. may describe events happening to jobs upon their arrival, e.g. whether a job is served immediately or has to wait in queue. We apply the CUSUM method to detect the change and present the explicit solutions for the mean number of observations between false alarms and the mean delay before detecting a change.

The CUSUM (cumulative sum) method to detect the change in characteristics of a stochastic process was first introduced in [1]. One of the possible applications of the method is detection of a change in distribution parameter of a sequence of non-negative, independent and equally distributed r.v. $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Let us suppose that before change the distribution

¹Supported by the Division of Mathematical Sciences of RAS and the Russian Fund for Basic Research (13-01-91158, 13-01-00033).

is $x_n \sim F(x, \alpha_0)$ and after change at time moment $\theta \geq 0$ it becomes $x_n \sim F(x, \alpha)$, where $\alpha \neq \alpha_0$. The method implies construction of a sequence of cumulative sums

$$S_n = (S_{n-1} + q(x_n))^+, \quad (1)$$

where $z^+ = \max(0, z)$, $q(x) = \log \frac{dF(x, \alpha)}{dF(x, \alpha_0)}$, $S_0 = s \geq 0$.

A signal that a change has been detected is given on step τ_b as soon as the value of the cumulative sum first exceeds the threshold value b :

$$\tau_b = \inf\{n > 0 : S_n \geq b\} \quad (2)$$

We consider two important characteristics of the change detection process. ARL or Average Run Length is the mean number of observations before a signal is given, upon the condition that the change in distribution never happens ($\theta = \infty$), thus representing the mean number of observations between false alarms. AD or Average Delay is the mean number of observations to detect a change that occurred at $\theta = 0$. Having the initial condition $S_0 = s$, expressions for ARL and AD may be written as $ARL = j_\infty(s) = \mathbb{E}_s\{\tau_b | \theta = \infty\}$ and $AD = j_0(s) = \mathbb{E}_s\{\tau_b | \theta = 0\}$.

It can be shown that for CUSUMs of a linear form $S_n = (S_{n-1} + x_n - a)^+$, where $a = \text{const}$, the function $j_\infty(s) < \infty$ is a solution of an integral equation

$$j(s) = 1 + \mathbb{E}_s\{I(0 < S_1 < b)j(S_1)\} + \mathbb{P}_s\{S_1 = 0\}j(0), \quad s < b. \quad (3)$$

Here \mathbb{P}_s and \mathbb{E}_s are the probability measure and expectation corresponding to the initial condition $S_0 = s$. The equation for AD is similar to (3) with assumption that $\theta = 0$.

We derive the explicit expressions for ARL and AD in the case of r.v. x_n having Bernoulli distribution with

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \alpha_0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

We assume that after change the parameter becomes $\alpha > \alpha_0$. In case of $\alpha < \alpha_0$, the solutions also hold true after rewriting $\alpha'_0 = 1 - \alpha_0$ and $\alpha' = 1 - \alpha$.

In case of Bernoulli distribution, $q(x_n)$ takes form

$$\begin{aligned} q(x_n) &= \log \frac{\alpha^{x_n}(1 - \alpha)^{1-x_n}}{\alpha_0^{x_n}(1 - \alpha_0)^{1-x_n}} = \\ &= \left(\log \frac{\alpha}{\alpha_0} - \log \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha_0} \right) x_n + \log \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha_0} = \gamma x_n + \beta. \end{aligned} \quad (4)$$

According to logarithm properties and the condition $\alpha > \alpha_0$, we have $\gamma > 0$, $\beta < 0$ and $\gamma + \beta > 0$. We write the functional equation for ARL, using (3). We derive a linear functional equation:

$$j(s) = \begin{cases} 1 + \alpha_0 j(s + \gamma + \beta) + (1 - \alpha_0) j(s + \beta)^+, & 0 \leq s < b \\ 0, & s = b \end{cases} \quad (5)$$

The functional equation for AD has the similar form with the coefficient α_0 replaced by α .

For α_0 and α given, we approximate the values of the parameters with integers and solve (5) explicitly. Next we consider the possible cases and present the solutions.

1. Let $\gamma + \beta > -\beta$, that is $\begin{cases} 0 < \alpha_0 < 0.5, \\ \alpha_0 < \alpha < 1 - \alpha_0. \end{cases}$ Without loss of generality, assume $\beta = -1$, $b^* = \frac{b}{-\beta}$, $z = \frac{\gamma + \beta}{-\beta}$. Let

$m = [z]$. In the new notation, equation (5) takes form

$$j(s) = 1 + \alpha_0 j(s+m) + (1 - \alpha_0) j(s-1)^+, 0 \leq s < b^* \quad (6)$$

The solution for $\alpha_0 \neq \frac{1}{m+1}$ is

$$j(s) = \frac{s}{1 - \alpha_0(m+1)} + \sum_{i=0}^m C_i z_i^s, \quad (7)$$

where z_1, \dots, z_m are the roots of the polynomial $\alpha_0 \sum_{i=0}^m z^i - 1 = 0$ and C_0, \dots, C_m are found from the system of linear equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m C_i (1 - z_i^m) = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{m}{1 - \alpha_0(m+1)} \\ \alpha_0 C_0 + \sum_{i=1}^m C_i (z_i^{b^*-1} - (1 - \alpha_0) z_i^{b^*-2}) = \frac{\alpha_0(b^*-1+m)}{\alpha_0 - 1 + \alpha_0 m} \\ \dots \\ \alpha_0 C_0 + \sum_{i=1}^m C_i (z_i^{b^*-m} - (1 - \alpha_0) z_i^{b^*-m-1}) = \frac{\alpha_0 b^*}{\alpha_0 - 1 + \alpha_0 m} \end{array} \right. \quad (8)$$

The solution for $\alpha_0 = \frac{1}{m+1}$ is

$$j(s) = -\frac{s^2}{m} + \sum_{i=0}^m C_i z_i^s, \quad (9)$$

where z_1, \dots, z_m are the roots of the polynomial $\alpha_0 \sum_{i=0}^m z^i - 1 = 0$ and C_0, \dots, C_m are found from the system of linear equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^m C_i (1 - z_i^m) = 1 \\ \sum_{i=0}^m C_i (z_i^{b^*-2} (z_i - \frac{m}{m+1})) = \frac{(b^*-1+m)^2}{m(m+1)} \\ \dots \\ \sum_{i=0}^m C_i (z_i^{b^*-m-1} (z_i - \frac{m}{m+1})) = \frac{b^{*2}}{m(m+1)} \end{array} \right. \quad (10)$$

2. Let $\gamma + \beta < -\beta$, that is $\begin{cases} 0 < \alpha_0 \leq 0.5, \\ \alpha > 1 - \alpha_0, \end{cases}$ or else $0.5 < \alpha_0 < 1$. Without loss of generality, assume $\gamma + \beta = 1, b^* = \frac{b}{\gamma + \beta}, z = \frac{-\beta}{\gamma + \beta}$. Let $m = [z]$. In the new notation, equation (5) takes form

$$j(s) = 1 + \alpha_0 j(s+1) + (1 - \alpha_0) j(s-m)^+, 0 \leq s < b^* \quad (11)$$

The solution for $\alpha_0 \neq \frac{m}{m+1}$ is

$$j(s) = \frac{A}{1 - \alpha_0} (s - b^*) + \sum_{i=1}^m \frac{C_i (1 - z_i^{b^*-s})}{(1 - \alpha_0) z_i^{b^*+1}}, \quad (12)$$

$$j(0) = -A(b^* + 1) + B + \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{(1 - \alpha_0) z_i^{b^*+1}}, \quad (13)$$

where z_1, \dots, z_m are the roots of the polynomial $\sum_{i=1}^m z^i - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} = 0$ and A, B, C_1, \dots, C_m are found from the system of linear equations

$$\left\{ \begin{array}{l} B + \sum_{i=1}^m C_i = 0 \\ A + \sum_{i=1}^m C_i(z_i - 1) = 0 \\ \dots \\ A + \sum_{i=1}^m C_i z_i^{m-2}(z_i - 1) = 0 \\ A - \frac{B}{1-\alpha_0} + \sum_{i=1}^m C_i \left(\frac{-2\alpha_0}{(1-\alpha_0)z_i} + \frac{z_i^{m-1}-1}{z_i-1} \right) = 1 \\ A \frac{\alpha_0}{\alpha_0-1} + B \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} + \sum_{i=1}^m C_i \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_0)z_i} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

The solution for $\alpha_0 = \frac{m}{m+1}$ is

$$\begin{aligned} j(s) = & 0.5(m+1) \left(A(n(1-n) - b^*(1-b^*)) - \right. \\ & \left. B(n(n+1) - b^*(b^*+1)) - \right. \\ & \left. - C((n+2)(n+1) - (b^*+2)(b^*+1)) \right) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{D_i(1 - z_i^{b^*-s})}{z_i^{b^*+1}}, \end{aligned} \quad (15)$$

where z_1, \dots, z_{m-1} are the roots of the polynomial $\sum_{i=1}^{m-1} iz^{m-i} + m = 0$ and $A, B, C, D_1, \dots, D_{m-1}$ are found from the sys-

tem of linear equations

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A + B + \sum_{i=1}^{m-1} D_i(z_i - 1) = 0 \\ \dots \\ (m-1)A + (m-2)B + (m-3)C + \\ + \sum_{i=1}^{m-1} D_i \left(-\frac{m}{z_i} + \frac{6-3m+(3m-3)z_i-3z_i^{m-1}}{(z_i-1)^2} \right) = 0 \\ mA + (m-1)B + (m-2)C + \\ + \sum_{i=1}^{m-1} D_i \left(\frac{3m}{z_i} + \frac{2-m+(m-1)z_i-z_i^{m-1}}{(z_i-1)^2} \right) = 0 \\ mB + (m-1)C + \\ + \sum_{i=1}^{m-1} D_i \left(-\frac{3m}{z_i} + \frac{2-m+(m-1)z_i-z_i^{m-1}}{(z_i-1)^2} \right) = 1 \\ mC + \sum_{i=1}^{m-1} D_i \frac{m}{z_i} = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

3. Let $\gamma + \beta \leq -\beta$ and suppose that $[\frac{\beta}{\gamma+\beta}] = 1$. Equation (5) takes form

$$j(s) = 1 + \alpha_0 j(s+1) + (1 - \alpha_0) j(s-1)^+, 0 \leq s < b^* \quad (17)$$

The solution for $\alpha_0 \neq 0.5$ is

$$j(s) = \frac{b^* - s}{2\alpha_0 - 1} + \frac{1}{(2\alpha_0 - 1)^2} \left(\frac{(1 - \alpha_0)^{b^*+1}}{\alpha_0^{b^*}} - \frac{(1 - \alpha_0)^{s+1}}{\alpha_0^s} \right) \quad (18)$$

The solution for $\alpha_0 = 0.5$ is

$$j(s) = b^*(b^* + 1) - s(s + 1) \quad (19)$$

Having $j(s)$ for given α_0 and α and using the properties of $j(s)$, we find the value of b^* that provides desired level of ARL. Then we find the value of corresponding AD.

Example: Let $\alpha_0 = 0.4$, $\alpha = 0.7$. Then $q(x_n) = 1.25x_n - 0.69$, $m = 1$ and $j(s)$ is found by (19). With $S_0 = 0$, we find that for ARL=1000 $b^* = 11$, then $b = b^*(\gamma + \beta) = 6.16$ is the value that minimizes AD at value 25.6.

In table (1) we present selected results of evaluating ARL and AD using the derived solutions. The direct solution of (5) gives the same numerical results.

α_0	α	b	ARL	AD	α_0	α	b	ARL	AD
0.1	0.3	4.02	1000	26.6	0.45	0.9	6.24	1000	12.2
0.1	0.6	5.68	1000	8.3	0.6	0.8	5.47	1000	43.8
0.45	0.8	5.18	1000	18.8	0.6	0.9	5.68	1000	21.7

Table 1: ARL and AD for given distribution parameters α_0 and α .

References

- [1] Page, E. S. Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*, 41, 100-114. 1954.
- [2] Vardeman, S., Ray, D. Average Run Lengths for CUSUM Schemes When Observations Are Exponentially Distributed. *Technometrics*, 3 Vol. 27, No.2, 145-150. 1985.
- [3] Mazalov, V. V., Zhuravlev, D. N. About the Cumulative Sums Method in the Problem of Change Detection in the Traffic of Computer Networks. *Programming*, Vol. 6. 156-162. 2002. (in Russian)

Задача целевого распределения ресурсов в двухуровневых иерархических системах управления

Угольницкий Г.А., Горбанева О.И.

Южный Федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: ougoln@mail.ru, gorbaneva@mail.ru

Будем рассматривать двухуровневую систему управления, состоящую из одного элемента верхнего уровня и одного элемента нижнего уровня. Верхний уровень имеет некоторое количество ресурсов, которое примем за 1. Часть полученных средств он передает нижнему уровню на общие цели, оставшуюся часть оставляет на нецелевое использование. В свою очередь, нижний уровень забирает часть средств на свои нужды, а остальное расходуется на общие цели. И верхний, и нижний уровни участвуют в доходе от системной деятельности и имеют свои функции выигрыша. Нужно определить, при какой схеме распределения средств внутри системы возникнет равновесие.

Модель строится в виде игры двух лиц, в которой находится равновесие по Штакельбергу.

В функцию выигрыша каждого из двух участников включаются два слагаемых: доход от нецелевой деятельности и соответствующая доля дохода от целевой деятельности системы.

Функции выигрыша имеют вид:

$$g_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1, u_2) + b(u_1, u_2) \cdot c(u_1, u_2) \rightarrow \max_{u_1};$$

$$g_2(u_1, u_2) = a_2(u_1, 1 - u_2) + b(u_1, u_2) \cdot c(u_1, u_2) \rightarrow \max_{u_2}.$$

при ограничениях

$$0 \leq u_i \leq 1, i = 1, 2,$$

и условиях на функции a , b , и c

$$a_i \geq 0; \frac{\partial a_i}{\partial u_i} \leq 0, \frac{\partial a_i}{\partial u_{j \neq i}} \geq 0, i = 1, 2,$$

$$b_i \geq 0; \frac{\partial b_i}{\partial u_i} \geq 0, i = 1, 2, \frac{\partial c}{\partial u_i} \geq 0, i = 1, 2.$$

Здесь индекс 1 относится к характеристикам верхнего уровня, индекс 2 относится к характеристикам нижнего уровня, u_i - доля ресурсов, выделенных i -м уровнем на развитие системы (соответственно, $1 - u_i$ - остается на нецелевое использование ресурсов в личных интересах),

g_i - функция выигрыша i -го уровня,

a_i - функция частного выигрыша i -го уровня,

b_i - доля от дохода общей деятельности, получаемая i -м уровнем;

c - целевой доход системы.

В качестве функций a и c рассматриваются степенные, линейные, показательные и логарифмические функции относительно переменных u_1 и u_2 и кумулятивные по их совокупности, т.е.

$$a_1 = a_1(1 - u_1),$$

$$a_2 = a_2(u_1(1 - u_2))$$

$$c = c(u_1 u_2)$$

Соотношения $a_1 = a_1(1 - u_1)$, $a_2 = a_2(u_1(1 - u_2))$ отражают иерархическую структуру системы. Доход от нецелевой деятельности верхнего уровня не зависит от того, какую часть средств нижний уровень направит на общие цели. Но доход от нецелевой деятельности нижнего уровня зависит от того, какую часть средств передаст ему верхний уровень на общие цели.

Рассматриваются следующие виды распределений b :

1) равномерное, при котором доли участия в доходе от целевой деятельности одинаковы для всех участников, в частности при $n = 2$

$$b_i = \frac{1}{2}, i = 1, 2$$

2) пропорциональное, при котором доли участия в доходе от целевой деятельности пропорциональны долям, выделенным соответствующим уровнем на общие цели, т.е.

$$b_1 = \frac{u_1}{u_1 + u_2},$$
$$b_2 = \frac{u_2}{u_1 + u_2},$$

В общем случае $b_1 + b_2 \leq 1$, т.е. соотношение между b_1 и b_2 может быть произвольным в пределах самого дохода, т.е. в общем случае возможна ситуация, когда не весь доход от целевой подлжит распределению.

В данной работе рассматривается случай, когда излишков нет, т.е. весь доход распределен между двумя игроками системы, т.е. все, что не достается верхнему уровню, достается нижнему:

$$b_1 + b_2 = 1$$

Данная модель является иерархической игрой с двумя участниками.

Стратегией игрока системы является доля u_i от имеющихся у него средств, направленных на общие цели. Право первого хода принадлежит игроку верхнего уровня, который выбирает и сообщает игроку нижнего уровня значение u_1 , после чего второй игрок, зная решение первого, выбирает оптимальное для себя значение u_2 .

Цель исследования: изучить влияние соотношения функций a_1, a_2, b_1, b_2, c на решение игры.

Рассмотрим случай, когда $a_1(u_1, u_2) = 1 - u_1$, $a_2(u_1, u_2) = u_1(1 - u_2)$, $c_2(u_1, u_2) = u_1u_2$.

Тогда $g_1(u_1, u_2) = 1 - u_1 + \frac{u_1u_2}{2}$, $g_2(u_1, u_2) = u_1 - \frac{u_1u_2}{2}$. Как видно, это игра с постоянной суммой. Функция g_2 убывает по u_2 , поэтому оптимальное $u_2^* = 0$, при котором $g_1(u_1, 0) = 1 - u_1$. Функция g_1 убывает по u_1 , поэтому оптимальное $u_1^* = 0$.

То есть, равновесие по Штакельбергу в данной игре $ST_1 = \{(0, 0)\}$, при этом выигрыши игроков $g_1 = 1, g_2 = 0$, то есть оба игрока используют стратегии крайнего эгоизма (направляют весь имеющийся ресурс на личные интересы), однако верхний уровень получает максимальный выигрыш, а нижний уровень лишь нулевой.

Рассмотрим случай, когда $a_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1)$, $a_2(u_1, u_2) = a_2u_1(1 - u_2)$, $c_2(u_1, u_2) = (u_1u_2)^k$ производственная степенная функция.

При этом возможны 2 принципиально различных случая:

1) $k = 1$ (линейная производственная функция);

При этом $g_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1) + b_1u_1u_2$, $g_2(u_1, u_2) = a_1u_1(1 - u_2) + b_2u_1u_2$.

Найдем оптимальную стратегию нижнего уровня:

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2} = (b_2 - a_2)u_1,$$

$$u_2^* = \begin{cases} 1, & b_2 > a_2, \\ 0, & b_2 < a_2. \end{cases}$$

Верхнему уровню предстоит оптимизировать свою функцию выигрыша:

$$g_1(u_1, u_2^*) = \begin{cases} a_1(1 - u_1) + b_1 u_1 u_2, & b_2 > a_2, \\ a_1(1 - u_1), & b_2 < a_2. \end{cases}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial u_1} = \begin{cases} b_1 - a_1, & b_2 > a_2, \\ -a_1, & b_2 < a_2. \end{cases}$$

Т.е., его оптимальная стратегия равна:

$$u_1^* = \begin{cases} 1, & (b_2 > a_2) \wedge (b_1 > a_1), \\ 0, & (b_2 < a_2) \vee (b_1 < a_1). \end{cases}$$

Итак, при $b_2 > a_2$ и $b_1 > a_1$ оба игрока применяют стратегии альтруизма ($u_1^* = u_2^* = 1$), при этом $g_1 = b_1$, $g_2 = b_2$. В остальных случаях ведущий игрок ведет себя эгоистично ($u_1^* = 0$), при этом, $g_1 = a_1$, $g_2 = 0$.

2) $0 < k < 1$ (степенная производственная функция).

При этом $g_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1) + b_1(u_1 u_2)^k$, $g_2(u_1, u_2) = a_1 u_1(1 - u_2) + b_2(u_1 u_2)^k$.

Найдем оптимальную стратегию нижнего уровня:

$$\frac{\partial g_2}{\partial u_2} = -a_2 u_1 + k b_2 (u_1 u_2)^{k-1} = 0,$$

$$u_2^* = \frac{\left(\frac{a_2}{k b_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}{u_1}.$$

Верхнему уровню предстоит оптимизировать свою функцию выигрыша:

$$g_1(u_1, u_2^*) = b_1 \frac{\left(\frac{a_2}{kb_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} k^{-1} u_1}{+} a_1 (1 - u_1).$$

Так как функция g_1 убывает по u_1 , то $u_1^* = 0$. Как видно, в экономической постановке (побуждение) в подавляющем случае рассмотренных моделей верхний игрок ведет себя эгоистично, направляя все имеющиеся у него ресурсы на нецелевое использование ($u_1^* = 0$). Для выбора верхним уровнем стратегии $u_1^* > 0$ требуется либо принуждение (ограничение на выбор стратегии в виде $u_1 \geq \hat{u}_1$) либо выбор положительной стратегии по добровольному (внеэкономическому) убеждению.

An application of the inspection paradox to stability analysis of some telecommunication systems

Lyubov Potakhina¹, Evsey Morozov¹, Koen De Turck²

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian
Research Centre RAS and Petrozavodsk university,
Petrozavodsk, Russia¹
S.M.A.C.S, University of Ghent, Ghent, Belgium²

E-mail: lpotakhina@gmail.com, emorozov@karelia.ru,
kdeturck@telin.ugent.be

The inspection (or renewal time) paradox means that the mean stationary remaining (and attained) renewal time contains the 1st and the 2nd moments of the original interrenewal time (Asmussen [1], Feller [2]). The inspection paradox is also formulated for the mean interval covering instant t in limit as $t \rightarrow \infty$. In this work, we use numerical simulation to study the rate of convergence in the paradox for various interrenewal time distributions.

Then we apply the inspection paradox to analyze the loss probability for a class of the non-conventional loss systems (Tikhonenko [4]). In such a system, each customer has both service time and size, and the system has infinite capacity for the queue-size, but a finite capacity M for the total size of the awaiting customers. Thus, the arriving customer is lost if he meets total size N in the system and his size v is such that

$v + N \geq M$. In this work, we confirm by simulation the conjecture that for M large the mean loss size approaches to the mean covering interval obtained from the inspection paradox for the renewal process generated by the customer sizes.

Then a system with the optical buffers is considered. In that system, signals travel from host to host in the form of light and buffering by means of a set of fiber delay lines (FDL) *with deterministic values*. Thus the set of possible waiting times is not a continuum but a denumerable set, with each value corresponding to the length of a delay line. As a result, in general arriving signals have to wait for service longer than in the classic case. A sufficient stability condition for the systems with optical buffers has been recently obtained (Rogiest *et al.* [3]). In this work we present and verify by simulation a tighter sufficient condition which stems from the inspection paradox.

Another contribution of this work is that we also consider the optical system *with the random differences between fiber line lengths*. To motivate such a setting we note that for the heavily-loaded modern networks, a large number of the lines is required. These lines constitute a huge number of possible paths between hosts and users. As a first-order approximation, it seems appropriate to describe the differences between their lengths as random variables to reflect a variability of the paths.

Acknowledgements This work is financially supported by the Program of Strategy development of PetrSU in the framework of research activity.

References

- [1] Asmussen S. (2003) Applied probability and queues. Springer-Verlag New York.

- [2] Feller W. (1971) An introduction to probability theory and its applications. *Wiley*.
- [3] Rogiest W., Morozov E., Fiems D., Laevens K., Bruneel H. (2010) Stability of single-wavelength optical buffers. *European Transactions Telecommunications*, **21**, 202–212.
- [4] Tikhonenko O. M. (2010) Queuing systems with processor sharing and limited resources. *Automation and Remote Control*, **vol. 71, No. 5**, 803–815.

Two-Stage Communication Games

Leon Petrosyan, Artem Sedakov

St Petersburg University
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes
35 Universitetsky prospekt, Petrodvorets,
St Petersburg, 198504, Russia

We consider an n -person game with a finite set of players $N = \{1, \dots, n\}$ and suppose that players may communicate with each other. Communication between any two players means that there exist a link connecting them. Denote a network by a pair (N, g) . Here N is a set of nodes (and it coincides with the set of players), and $g \in N \times N$ is a set of links. If element $ij \in g$, there is a link between i and j , generating communication between them.

Consider a two-stage game: in the first stage, players choose their communication preferences, which form a network. In the second stage, players choose their strategies subject to the communication structure. More details can be found below.

First stage. Let $a_i \in \{1, \dots, n\}$ be the maximal number of links which player i can maintain. A strategy of player $i \in N$ in the first stage is an n -dimensional profile $g_i = (g_{i1}, \dots, g_{in})$:

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \text{ wants to form a link with } j \in N \setminus i, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1)$$

subject to capacity constrains

$$\sum_{j \in N} g_{ij} \leq a_i, \quad i \in N. \quad (2)$$

Denote a set of strategies of player $i \in N$ satisfying (1)–(2), by G_i .

If profile (g_1, \dots, g_n) is realized, network g consists of link ij such that $g_{ij} = g_{ji} = 1$.

Second stage. Let U_i be a set of strategies of player $i \in N$, and element $u_i \in U_i$ is a strategy of player in the second stage.

Denote neighbors of player i in network g by $N_i(g) = \{j \in N \setminus i : ij \in g\}$ and strategy profile of player i 's neighbors by $u_{N_i(g)} = (u_{i_1}, \dots, u_{i_{|N_i(g)|}})$, $u_{i_j} \in U_{i_j}$, $i_j \in N_i(g)$ for all $j = 1, \dots, |N_i(g)|$.

Let $K_i(u_i, u_{N_i(g)})$ be a payoff function of player $i \in N$ defined on the set $U_i \times \prod_{j \in N_i(g)} U_j$, suppose that:

$$K_i(u_i, u_{N_i(g)}) = \sum_{j \in N_i(g)} k_i(u_i, u_j). \quad (3)$$

Here $k_i(u_i, u_j) \geq 0$ for all $i \in N$, $u_i \in U_i$, $u_j \in U_j$.

Cooperation in second stage. Non-empty subset $S \subseteq N$ we call a coalition. For all coalitions define a characteristic function $v : g^N \times 2^N \mapsto R$ as follows:

$$\begin{aligned} v(g, N) &= \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i \in N} K_i(u_i, u_{N_i(g)}) \\ &= \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g)} k_i(u_i, u_j), \\ v(g, S) &= \max_{u_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g) \cap S}) \\ &= \max_{u_i, i \in S} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g) \cap S} k_i(u_i, u_j), \quad S \subset N, \\ v(g, \emptyset) &= 0, \end{aligned}$$

provided that network g is fixed.

As an allocation consider the Myerson value $\mu(g) = (\mu_1(g), \dots, \mu_n(g))$:

$$\mu_i(g) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|N| - |S|)! (|S| - 1)!}{|N|!} [V(g, S) - V(g, S \setminus \{i\})]. \quad (4)$$

Here function $V(g, S)$ is defined as

$$V(g, S) = \begin{cases} \sum_{T \in S|g} v(g, T), & S \subseteq N, \quad S \neq \emptyset, \\ 0, & S = \emptyset, \end{cases} \quad (5)$$

and $S|g$ is a set of coalitions, satisfying two conditions: (i) there is a path in g between any two players from the same coalition, (ii) there is no path in g between any two players from different coalitions.

Formally, we can define normal-form game $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N})$, where:

- N : set of players;
- $X_i = G_i \times U_i$ set of strategies of player $i \in N$. Here G_i satisfies (1)-(2), and choices $g_i \in G_i$ and $u_i \in U_i$ are independent;
- H_i : payoff function of player $i \in N$, defined on set $\prod_{i \in N} X_i$ as $H_i(g, u_1, \dots, u_n) = \mu_i(g)$. Network g is formed by profile (g_1, \dots, g_n) .

One may note, that in game Γ there exists at least one Nash equilibrium in pure strategies.

Cooperation in both stages. In this setting, players are supposed to form the network and choose their strategies jointly. Acting as one player, the grand coalition maximizes the value

$\sum_{i \in N} K_i(u_i, u_{N_i(g)})$. Let

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} K_i(u_i^*, u_{N_i(g^*)}^*) &= \max_{u_i \in U_i, i \in N} \max_{g_i \in G_i, i \in N} \sum_{i \in N} K_i(u_i, u_{N_i(g)}) \\ &= \max_{u_i \in U_i, i \in N} \max_{g_i \in G_i, i \in N} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g)} k_i(u_i, u_j), \end{aligned}$$

and profile g_1^*, \dots, g_n^* generates network g^* .

In this case the characteristic function is defined similar to the previous one:

$$\begin{aligned} v(g^*, N) &= \max_{u_i \in U_i, i \in N} \max_{g_i \in G_i, i \in N} \sum_{i \in N} K_i(u_i, u_{N_i(g)}) \\ &= \max_{u_i \in U_i, i \in N} \max_{g_i \in G_i, i \in N} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g)} k_i(u_i, u_j), \\ v(g^*, S) &= \max_{u_i \in U_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g^*) \cap S}) \\ &= \max_{u_i \in U_i, i \in S} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g^*) \cap S} k_i(u_i, u_j), \quad S \subset N, \\ v(g^*, \emptyset) &= 0, \end{aligned}$$

The Myerson value $\mu(g^*) = (\mu_1(g^*), \dots, \mu_n(g^*))$ in this game is calculated by the formula:

$$\mu_i(g^*) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|N| - |S|)! (|S| - 1)!}{|N|!} [V(g^*, S) - V(g^*, S \setminus \{i\})]. \quad (6)$$

Keywords: network, network formation, cooperation, Nash equilibrium, Myerson value.

References

1. Dutta B., van den Nouweland A., Tijs S. (1998) Link formation in cooperative situations // *International Journal of Game Theory*. 27:245–256.
2. Jackson M. O. and Wolinsky, A. (1996) A Strategic Model of Social and Economic Networks // *J. Econom. Theory* 71, pp. 44–74.
3. Myerson R. (1977) Graphs and cooperation in games // *Mathematics of Operations Research*. 2:225-229.
4. Nash J. (1951) Non-cooperative games. *Ann. of Math.* 54, pp. 286–295.
5. Petrosyan L. and Sedakov A. (2011) On A Multistage Link Formation Game // *Contributions to Game Theory and Management. Collected papers ed. by L. Petrosyan and N. Zenkevich, Vol. 4*, pp. 354–363.
6. Shapley L. S. (1953) A Value for n -Person Games // *Contributions to the Theory of Games II*, Princeton: Princeton University Press, pp. 307–317.

On multistage bidding games with positive bid-ask spread

Marina Sandomirskaja

SPbEMI RAS, St.Petersburg

E-mail: `sandomirskaya_ms@mail.ru`

An approach to analysis of stock price dynamics in terms of the theory of repeated games with incomplete information was introduced by B. De Meyer and H. Moussa Saley in [1]. They consider a model of multistage bidding between two differently informed players for shares of one-type risky asset. Before bidding starts a chance move chooses the liquidation price from two possible values. Player 1 is informed on the price, but Player 2 is not. At each stage of bidding players propose arbitrary prices for a share. The maximal bid wins and one share is transacted at this price. In this model Player 2 should use the history of Player 1's moves to update his beliefs about the state of nature. Thus Player 1 must maintain a balance between taking advantage of his private information and concealing it from Player 2.

Discrete analogue of the model with integer admissible bids was developed by V. Domansky in [2]. The n -stage games $G_n^m(p)$ are considered with two possible values of liquidation price, positive integer m with probability p and 0. Both players know p . Domansky shows that the sequence of values of the games $G_n^m(p)$ is bounded. This makes reasonable to consider the infinite games $G_\infty^m(p)$. These games are solved in [2].

The fastest optimal strategy σ^m provides Player 1 the maximal possible expected gain $1/2$ per step. For this strategy the posterior probabilities perform a simple symmetric random walk over the grid l/m , $l = 0, \dots, m$, with absorbing extreme points 0 and 1.

In previously developed models players propose only one price for a share at each step, i.e. bid and ask prices coincide. Here we remove this restriction. We assume that at each step of bidding both players simultaneously propose their bid and ask prices for one share. The bid-ask spread s is fixed by rules of bidding. Transaction occurs from seller to buyer by bid price. We make an attempt to extend the results of simplified model [2] to the case of any positive integer spread. Note that the model [2] corresponds to the case $s = 1$. For the sake of simplicity we assume that $m \bmod s = 0$.

Upper bound for $V_n^{m,s}(\mathbf{p})$. We generalize the optimal strategy of the uninformed player in the model [2] in the following way. For the initial probability $p \in \left[\frac{sk}{m}, \frac{s(k+1)}{m} \right)$ the first move of Player 2 strategy $\tau^{k,m,s}$ is to propose bid price sk . Then at step t , $t = 2, 3, \dots$, Player 2 shifts his bid price by s upwards or downwards depending on the insider's bid at previous step:

$$\tau_t^{w,m,s}(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - s, & i_{t-1} \leq j_{t-1} - s; \\ j_{t-1}, & |i_{t-1} - j_{t-1}| < s \\ j_{t-1} + s, & i_{t-1} \geq j_{t-1} + s; \end{cases}$$

The upper bound for the game value is established by the following theorem.

Theorem 1. For any n functions $V_n^{m,s}$ are bounded from above by a function $H^{m,s}$ that is continuous, concave, and piecewise linear with m/s linearity domains $[sk/m, s(k+1)/m]$, $k =$

$0, 1, \dots, m/s - 1$. $H^{m,s}$ is completely determined with its values at the peak points $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \dots, m/s$:

$$H^{m,s}(p_k) = \frac{m^2}{2s} p_k (1 - p_k). \quad (1)$$

Applying $\tau^{k,m,s}$ Player 2 ensures the loss not greater than certain function independent of the number of steps as $n \rightarrow \infty$. Thus it is reasonable to consider bidding of unlimited duration.

Lower bound for $V_\infty(\mathbf{p})$. By analogy with the model [2] it is natural to examine insider's strategies that generate the simple random walk on the lattice of posterior probabilities $\{\frac{sk}{m} \mid k = 0, \dots, m/s\}$. Denote the set of such strategies by Σ^{SRW} . Observe that the lattice sk/m in the model with bid-ask spread equal s is a natural analogue of the lattice k/m in the model with $s = 1$ since the price jump by s in the former model corresponds to the price jump by 1 in the latter one.

We introduce the following notation.

$$\begin{aligned} g(d) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \dots + \frac{1}{s-d}, \\ d^* &= \max\{d \mid g(d) \leq 1\}, \\ \varepsilon^* &= 1 - g(d^*). \end{aligned}$$

For probability $p_k = sk/m$ the first move of insider's strategy $\sigma^{k,m,s}$ is to mix bid prices $\{sk - 2s\}$ and $\{sk, sk + 1, \dots, sk +$

$d^*, sk + d^* + 1\}$ in accordance with total probabilities

$$\begin{aligned}\sigma_1^{k,m,s}(sk - 2s|H) &= \frac{1}{2}, \\ \sigma_1^{k,m,s}(sk + d|H) &= \frac{1}{2(s-d)}, \quad d = 0, 1, \dots, d^*, \\ \sigma_1^{k,m,s}(sk + d^* + 1|H) &= \frac{1}{2}\varepsilon^*.\end{aligned}$$

Conditional probabilities of these bids are calculated so that corresponding posterior probabilities of high share price will be the following

$$\begin{aligned}p(i = sk - 2s) &= s(k-1)/m = p_{k-1}, \\ p(i = sk + d) &= s(k+1)/m = p_{k+1}, \quad d = 0, 1, \dots, d^*, d^* + 1.\end{aligned}$$

At the next step insider must apply the same strategy, but for the calculated at previous step posterior probability.

This strategy generates the simple random walk over the lattice sk/m with absorption at extreme points, insider's profit per step being equal to $V(1)$ given by

$$V_1(s) = \frac{1}{2}(d^* + 1 + \varepsilon^*(s - d^* - 1)). \quad (2)$$

The strategy $\sigma^{k,m,s}$ introduced above is the best one in the class Σ^{SRW} . However, it is not optimal insider's strategy as we improve it in the case of minimal nontrivial case $s = 2$.

Theorem 2. *The function $V_\infty^{m,s}$ is bounded from below by a function $L^{m,s}$ that is continuous, concave, and piecewise linear with m/s linearity domains $[sk/m, s(k+1)/m]$, $k = 0, 1, \dots, m/s - 1$. $L^{m,s}$ and the following values at the peak points $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \dots, m/s$:*

$$L^{m,s}(p_k) = V_1(s) \frac{m^2}{s^2} p_k(1 - p_k). \quad (3)$$

Nonoptimality of the insider's strategy $\sigma^{k,m,s}$ generating the simple random walk on the lattice of posterior probabilities indicates that structure of price fluctuations (random walk) on stock market is more complicated.

Relationship between upper and lower bounds. Solution of the game [2] (model without spread) results from the current model as a special case if $s = 1$, upper and lower bounds coincide and give a game value at points $p_k = k/m$: $H^{m,1} = L^{m,1} = \frac{m^2}{2}p_k(1 - p_k) = V_\infty^{m,1}$.

In the case of minimal nontrivial bid-ask spread $s = 2$ at the points $p_k = 2k/m$: $L^{m,2}(p_k) = 3/4H^{m,2}(p_k)$.

As $s \rightarrow \infty$ the ratio between L and H decreases and in the limit yields $L^{m,s}(p_k) \approx 0,63 \cdot H^{m,s}(p_k)$.

As shown above, bid-ask spread plays a role of regulator for transaction activity on stock market. As bid-ask spread increases transactions occur less frequently and expected insider's profit falls at least by s times over against the simplified model [2].

Countable state space. The results are generalized to the case of countable set of possible values for a share price. We analyze the model where this price can take values on the lattice sk , $k \in \mathbb{Z}$ by analogy with the paper of V. Domansky and V. Kreps [3]. The principal idea is to represent distributions on the integer lattice with given first moment as convex combinations (probability mixtures) of two-point distributions with the same first moments. It is shown that upper and lower bounds obtained above preserve their form with replacement of the term $sk(m - sk)$ by the variance $\mathbf{D}(\mathbf{p})$ for distributions

with mean values $\mathbf{E}(\mathbf{p}) = sk, k \in \mathbb{Z}$. We construct the insider's strategies for these games as probability mixtures of strategies for two-point games implementing a preliminary additional lottery for the choice of two-point distribution.

References

- [1] De Meyer B., Moussa Saley H. (2002) On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance // *Int. J. Game Theory*. Vol. 31, 285-319.
- [2] Domansky V. (2007) Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets // *Int. J. Game Theory*. Vol. 36(2), 241-257.
- [3] Domansky V., Kreps V. (2011) Game-theoretic bidding model: strategic aspects of price-setting on stock markets // *Journal of the New Economic Association*. Vol. 11, 39-62 (in Russian).

Repeated games with incomplete information and slowly growing value

Sandomirskii Fedor

Repeated zero-sum games with incomplete information (RGII) were introduced by R. Aumann and M. Maschler in the sixties (see [1]). Their aim was to develop a theory of multi-stage two-player interactions with participants having different amount of information about the interaction. Multi-stage structure allows players to obtain additional information about the interaction observing their opponents actions at previous stages.

Let us briefly describe such a game $G_N(p)$. Before the game starts a random state k is chosen from the set of states K according to a prior distribution p . Player 1 is informed of k and Player 2 is not. Then at each stage $n = 1, \dots, N$ Player 1 and Player 2 simultaneously select their actions (i_n, j_n) from the sets of actions $I = J$ using the information they have at this stage. Before the next stage the selected actions are publicly announced. One-stage payoff (i.e., the contribution of this stage to the total gain of Player 1) is given by A_{i_n, j_n}^k where A^k is one-stage payoff matrix at a state k . After the last stage Player 2 pays $\sum_{n=1}^N A_{i_n, j_n}^k$ to Player 1.

Of course, players are allowed to randomize their actions using behavioral strategies. Hence the value is defined as usual, i.e., $V[G_N(p)]$ is the average total gain of Player 1 when both players play optimally.

The main feature of RGII is that the impact of information asymmetry on the game value represents the price of information in long interactions. So it is natural to consider only the games where the private information is the only strategic advantage of Player 1. In other words, we will assume that the non-revealing game, i.e., matrix game with the matrix $A(p) = \int_K dp(k)A^k$ (this game arise if Player 1 forgets his private information) has zero value for any $p \in \Delta(K)$. For such games $V[G_N(p)]$ is itself the price of information. One of the main questions of the theory is about asymptotic behavior of $V[G_N(p)]$ as $N \rightarrow \infty$.

It is well-known (see [1] and [4]) that for some games with finite K , I and J the value can grow like $C\sqrt{N}$ and can not grow faster (this property is usually called “ \sqrt{N} -law”). It was recently shown in [5] that for infinite K “ \sqrt{N} -law” can be violated and examples of games with the value behaving like $CN^{\frac{1}{2}} + \alpha$ for any $\alpha \in (0, 1)$ were constructed. On the other hand, it is interesting to describe classes of RGII with slower value growth. For the discrete models of finance market with asymmetric information it was recently observed (see [2] and [3]) that the value remains bounded as $N \rightarrow \infty$. Games considered in these papers have the following property: the optimal strategy of Player 2 in the non-revealing game is piecewise constant as a function of p . Our aim is to describe how this property affects the asymptotic behavior in general case. The main result is the following theorem.

Theorem: *Assume that a RGII $G_N(p)$ has the following properties:*

- K , I and J are finite sets;
- the value of the non-revealing game $A(p) = \int_K dp(k)A^k$ is zero for any $p \in \Delta(K)$;
- there exists a piecewise constant function $y : \Delta(K) \rightarrow \Delta(J)$ with finite number of different values and such that the vector $y(p)$ is an optimal strategy of Player 2 in $A(p)$ for any p .

Then there exists $C > 0$ such that for any p and $N \geq 1$

$$V[G_N(p)] \leq C \ln N.$$

The study is supported by the grants 13-01-00462-a and 13-01-00784-a of Russian Foundation for Basic Research and by the Chebyshev Laboratory (Faculty of Mathematics and Mechanics, St Petersburg State University) under the grant 11.G34.31.0026 of the Government of the Russian Federation.

References:

- [1] R. Aumann, M. Maschler (1995) Repeated Games with incomplete information. MIT, Cambridge, London.
- [2] B. De Meyer, A. Marino (2005) Continuous versus discrete market game. Cowles Foundation discussion paper 1535.

- [3] V. Domansky (2007) Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets. *Int. Journal of Game Theory* 36(i.2):241-257.
- [4] J.-F. Mertens, S. Zamir (1976) The Normal Distribution and Repeated Games *Int. Journal of Game Theory* 4(i.4):187-197.
- [5] F. Sandomirskii (2012) Variation of measure-valued martingales and repeated games with incomplete information. arXiv preprint: 1205.6791.

One problem of determine a Nash equilibrium in the game of choice of three service companies

Anna Sergeeva, Vladimir Bure

St. Petersburg State University,
Universitetskaya nab. 7/9, St. Petersburg, 199034, Russia

E-mail: sergeeva_a_a@mail.ru, vlb310154@gmail.com

We investigate the model of market where three different companies offers there services to customers. The main parameters which distinguish every company are costs of service and the time of customer order fulfillment. Each company sells the same service but use its own way to construct the model of customer service. The first company takes customers on service one by one so they generate a queue in the first company system. Only the fixed cost of whole order fulfillment charged for the customer by the first company management. Parameter μ_1 describe the first company service time and it distributed exponentially with density function

$$f_1(t) = \frac{1}{\mu_1} e^{-\frac{1}{\mu_1}t}, \quad t > 0.$$

The second firm takes all customers on service where they immediately start carried. Customer charged not only fixed cost for order fulfillment but also a time unit cost. Parameter μ_2 describe the second company service time and it distributed exponentially with density function

$$f_2(t) = \frac{1}{\mu_2} e^{-\frac{1}{\mu_2}t}, \quad t > 0.$$

The third company takes customers on service one by one as the first company so customers generate a queue in the third company system. Only the time unit cost charged for the customer by the third company. Parameter μ_3 describe

the third company service time and it distributed exponentially with density function

$$f_3(t) = \frac{1}{\mu_3} e^{-\frac{1}{\mu_3}t}, \quad t > 0.$$

We assume that there is a bunch of n customers comes to service at the same time. They spread out by companies trying to minimize the overall losses for service.

The model of n -person game with perfect information is suggested in this paper.

Define the non-antagonistic game in normal form: $\Gamma = \langle N, \{p_i^{(j)}\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle$, where

$N = \{1, \dots, n\}$ - set of players,

$\{p_i^{(j)}\}_{i \in N}$ - set of strategies, $p_i^{(j)} \in [0, 1]$, $j = 1, 2, 3$,

$\{H_i\}_{i \in N}$ - set of payoff functions.

$$H_i = -(p_i^{(1)}Q_{1i} + (1 - p_i^{(1)} - p_i^{(3)})Q_{2i} + p_i^{(3)}Q_{3i}) = \\ -(p_i^{(1)}(Q_{1i} - Q_{2i}) + p_i^{(3)}(Q_{3i} - Q_{2i}) + Q_{2i}),$$

where players are customers, $p_i^{(1)}$ is the probability that player i choose the first company, $p_i^{(3)}$ - is the probability that player i choose the third company, $p_i^{(2)} = 1 - p_i^{(1)} - p_i^{(3)}$ - is the probability that player i choose the second company.

Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{3i} - player i mean expected loss for the service of first, second and third company respectively.

$$Q_1 = E\tilde{Q}_1 = r(t_{11} + t_{12}) + c_1,$$

$$Q_2 = E\tilde{Q}_2 = (r + c_{22})t_{22} + c_{21},$$

$$Q_3 = E\tilde{Q}_3 = (r + c_{32})t_{32} + rt_{31}.$$

where r is the customer specific loss which associated with some missed opportunities while waiting for order fulfillment, c_{j1} - fixed cost of customer order fulfillment and c_{j2} - cost of time unit service, $t_i^{(j1)}$ - the mean time of waiting service, $t_i^{(j2)}$ - the mean time of service for the company j , $j = 1, 2, 3$ and player i , $i = 1, \dots, n$. For the first and second companies we have $t_i^{(1)} = t_i^{(11)} + t_i^{(12)}$ and $t_i^{(3)} = t_i^{(31)} + t_i^{(32)}$ respectively, and for the second company we have $t_i^{(2)} = t_i^{(22)}$.

We consider the casualty functions: $h_i = -H_i$, $i = 1, \dots, n$. Customers choose order fulfillment schemes trying to minimize casualty function h_i .

In this work we obtain the Nash equilibria on the three company market for different adjusted numbers of customers. The existence and uniqueness in some cases of these equilibria is proved.

References

- [1] V. Bure, "Game-theoretical model of a queueing system.", *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta*, St. Petersburg, No. 9, 3-5 (2002).
- [2] V. Bure, A. Sergeeva, "Competition in the logistics market." *Contributions to the game theory and management*. St. Petersburg, Volume 5, 249-251 (2012).
- [3] V. Feller, *Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Moscow: Nauka, (1984).
- [4] A. Langevin, D. Riopel *Logistics systems: design and optimization.*, New York: Springer, (2005).
- [5] L. Petrosyan , N. Zenkevich , E. Syomina, *Game Theory*, Moscow: Nauka, (1998).
- [6] N. Vorobev, *Game theory for cybernetic economists* Moscow: Nauka. (1985).

Location-price competition in airline networks

Anna Shchiptsova

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre RAS, Petrozavodsk, Russia

The classical Hotelling duopoly model is dedicated to analysis of competitive behavior on a line segment. This work studies extension of location-price game on graphs.

We consider a game-theoretic model of competition in airline market. Each airline $k \in K$ holds its route network and route assigned aircrafts. Particular route is characterized by origin-destination city pair, subset of legs in airline network and route price.

The model is formulated as a two-stage game. In the first stage each player (airline) chooses its network structure. Route prices are set on the second stage of the game and passenger demand is allocated. The solution concept is defined as subgame perfect Nash equilibrium.

The player's profit of using route j is defined as $h_{ij} = p_{ij}M_{ij}(p_j, n_j)d_j$. M_{ij} is player's share in passenger demand for origin-destination city pair of route j , which is described using multinomial logit analysis. Passenger demand depends on the number of alternative routes.

We present computational results for proposed model using route network in Russian airline market.

References

- [1] *Hotelling H.* Stability In Competition // The Economic Journal. 1929. Vol. 39. Issue 153. P. 41–57.
- [2] *Mazalov V. V., Sakaguchi M.* Location Game On The Plane // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5. N 1. P. 1–13.
- [3] *Adler N., Smilowitz K.* Hub-and-spoke network alliances and mergers: Price location competition in the airline industry // Transportation Research Part B. 2007. 41(4). P. 394–409.

- [4] *McFadden D.* Conditional logit analysis of qualitative choice behavior // Ed. P. Zarembka. *Frontiers in econometrics*. 1973. New York: Academic Press. P. 105-142.

Многошаговая игра формирования сети с экспоненциальной выплатой

Б.Т. Цынгугев

Забайкальский государственный университет
Чита, Россия

E-mail: btsynguev@gmail.com

Ключевые слова: сетевые игры, стабильные сети, многошаговые игры, игры формирования сети, модель симметрической связности.

В статье расширяется модель симметрической связности (symmetric connection model) с экспоненциальной выплатой, изложенная в [5]. Предыдущие работы [2] и [5], исследовавшие модели симметрической связности, не рассматривали игру формирования сети в контексте многошаговой игры с конкретными правилами перехода хода между игроками.

В данной работе процесс формирования сети рассмотрен как многошаговая игра с полной информацией с экспоненциальными выплатами.

Модель симметрической связности описывает игру формирования сети, где результатом игры является сеть, связывающая игроков. Выигрыши игроков зависят от всей структуры сети. Игроки формируют связи недалеко-видно и эгоистично. Модель симметрической связности описывается тремя параметрами (c, δ, n) , принадлежащими множеству $R \times (0, 1) \times N$, где c - стоимость прямой связи, δ - выигрыш от прямой связи и n - число игроков.

Введем обозначения: u_i - выигрыш i -го игрока, $dist(i, j)$ - расстояние между игроками i и j , т.е. минимальное число ребер на пути между i и j .

Игрок i получает выигрыш δ от каждой прямой связи ($dist(i, j) = 1$). От каждой косвенной связи ($dist(i, j) > 1$) игрок i получает $\delta^{dist(i, j)}$. Также игрок должен заплатить за поддержание каждой прямой связи стоимость c , т.е. выигрыш от каждой прямой связи составляет $\delta - c$.

В данной работе используются следующие правила удаления и формирования связей между игроками:

- связь между игроками формируется, если это выгодно обоим игрокам;

- существующая связь может быть удалена любым из двух игроков без согласования со вторым игроком.

Существуют другие модели, где связь может быть установлена одним игроком без согласования со вторым (см. [3]). В классической интерпретации понятие равновесия по Нэшу не применяется в играх формирования сети. Более удобным в таких случаях является понятие парной стабильности (pairwise stability), которое подробно рассмотрено в [4]. В данной статье мы будем использовать понятие стабильности в данной интерпретации.

Сеть называется *стабильной*, если ни один из игроков не может увеличить свой выигрыш путем удаления существующей связи или согласованного добавления новой связи с любым другим игроком сети.

В данной работе процесс формирования сети рассматривается как многошаговая игра для случая $c \in (\delta - \delta^2, \delta)$, где правило перехода хода между игроками аналогично с [1]. Начальные условия игры задаются графом (пустым или полным), все игроки пронумерованы и игрок под номером 1 делает первый ход. За один ход игрок может согласовать и установить связь с одним из других игроков с которым не установлена прямая связь или разорвать одну из своих существующих связей.

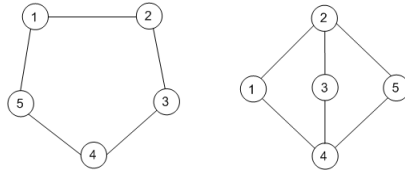
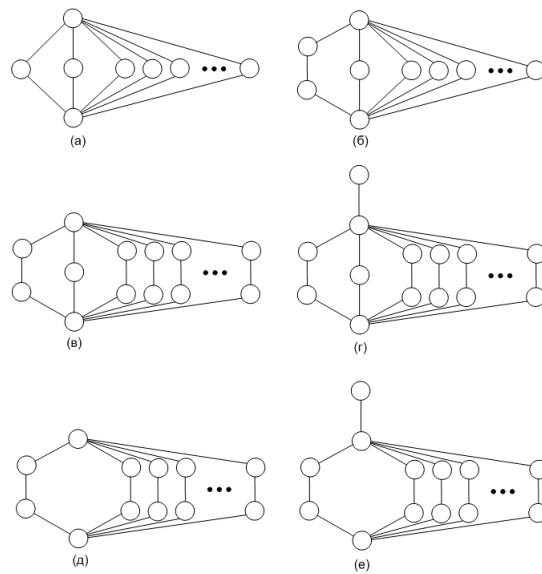
Связь устанавливается, если она увеличивает выигрыш обоих игроков формирующих связь. Игрок, делающий ход выбирает наиболее выгодный для себя из возможных вариантов действий. Право следующего хода переходит к игроку, с которым установлена или удалена связь. В случае, когда игроку делающему ход не выгодно добавление новых связей или удаление существующих, то право хода переходит к следующему по нумерации игроку. В случае, когда формируемая сеть является стабильной, то игра считается завершенной.

Исследуя игровой процесс формирования сети при малых n получаем следующие промежуточные результаты. В игре с $n = 4$, где игра начинается с пустого графа, стабильной итоговой сетью игры будет:

- кольцо, при условии $c \in (\delta - \delta^2, \delta - \delta^3)$
- и цепь, при условии $c \in (\delta - \delta^3, \delta)$.

Для $n = 5$ выясняем, что при $c \in (\delta - \delta^2, \delta - \delta^3)$ результат игры с равной вероятностью может прийти к одной из стабильных сетей, представленных на рисунке 1.

Если игра начинается с полного графа, то при $n = 4$ игровой процесс всегда придет к стабильной и эффективной звезде на всем интервале $c \in (\delta - \delta^2, \delta)$. Отметим, что центром звезды становится игрок, который не успел сделать ход или другими словами, не успел улучшить свой выигрыш путем удаления связи.

Рис. 1: Стабильные сети формируемые при $n = 5$.Рис. 2: Стабильные сети формируемые при $n \geq 6$.

Для $n = 5$ и $c \in (\delta - \delta^2, \delta)$, где игра начинается с полного графа, для достижения структуры звезды, необходимо соблюдение дополнительного правила: в случае, когда игроку удаление одной из своих связей приносит равный выигрыш, то необходимо удалять связь с игроком, у которого осталось меньше прямых связей. Соблюдение этого правила необходимо для "сохранения" будущего центра звезды, т.е. центром звезды станет игрок, у

которого сохранились все начальные связи. Если данное правило не соблюдается, то игра придет к неэффективным, но стабильным сетям.

Основной результат представлен на рисунке 2, здесь изображены стабильные сети формируемые процессом многошаговой игры при $n \geq 6$.

При $c \in (\delta - \delta^2, \delta - \delta^3)$ и при $\delta^2 > \delta^4 + \delta^5$ с равной вероятностью формируются стабильные сети вида (а) и (б), представленные на рисунке 2. Если $c \in (\delta - \delta^3, \delta)$ и $\delta^2 > 2\delta^3$ формируется стабильная сеть вида (б).

При условии $c \in (\delta - \delta^3, \delta)$ и $\delta^2 \in (\delta^3 + \delta^4, 2\delta^3)$, а также при $c \in (\delta - \delta^3, \delta - \delta^4)$ и $\delta^2 \in (\delta^4 + \delta^5, \delta^3 + \delta^4)$ формируются сети вида (в) и (г) рисунка 2. Если n - нечётное, то формируется сеть вида (в) и формируется сеть вида (г) при чётном n .

При условии $c \in (\delta - \delta^4, \delta - \delta^6)$ и $\delta^2 \in (\delta^4 + \delta^5, \delta^3 + \delta^4)$ формируются стабильные сети вида (д) и (е), при чётном и нечётном n соответственно.

Список литературы

1. Петросян Л.А., Седаков А.А. Многошаговые сетевые игры с полной информацией // Математическая теория игр и её приложения. 2009. Вып. 2. Т. 1. С. 66-81.
2. Baumann N., Stiller S. The Price of Anarchy of Network Creation Game with Exponential Payoff // Lecture Notes in Computer Science. 2008. Vol. 4997. P. 218-229.
3. Jackson M. O. A survey of models of network formation: stability and efficiency // Group Formation in Economics: Networks, Clubs and Coalitions. 2004. P. 11-57.
4. Jackson, M.O., Watts A. The Existence of Pairwise Stable Networks // Seoul Journal of Economics. 2001. Vol. 14, No. 3, P. 299-321.
5. Jackson M. O., Wolinsky A. A Strategic Model of Social and Economic Networks // Journal of Economic Theory. 1996. Vol. 71. P. 44-74.

Теоретико-игровой анализ механизмов рынка электроэнергии

Васин А.А.

МГУ им. Ломоносова

E-mail: vasin@cs.msu.su

Более 20 лет назад в целом ряде стран начали развиваться оптовые рынки электроэнергии. Важной проблемой при их формировании было ограничение рыночной власти крупных производителей.

Обычно потребители не играют активной роли на таких рынках. Их поведение характеризуется общеизвестной функцией спроса с низкой эластичностью. Проблема ограничения "рыночной власти" в данном случае не может быть решена стандартным методом дробление рынка на мелкие компании - в силу сопутствующего снижения надежности поставок электроэнергии и увеличения издержек. Альтернативным способом решения является выбор механизма рынка, минимизирующего отклонение рыночной цены от конкурентного равновесия, оптимального с точки зрения суммарного выигрыша участников (Debreu, 1954).

В литературе различные формы организации рынка моделируют в виде игр, где игроками являются производители, а функции выигрыша определяют их прибыли в зависимости от выбранных стратегий. В качестве моделей поведения рассматриваются равновесия Нэша или их модификации (например, СПР - совершенное подыгровое равновесие).

Важнейшим элементом оптового рынка электроэнергии является рынок на сутки вперед (РСВ). На большинстве реальных рынков РСВ организован как аукцион единой цены, на котором заявка производителя представляет собой монотонную функцию, определяющую предлагаемое количество товара в зависимости от цены. Рыночная цена определяется пересечением суммарной заявки производителей и функции спроса. На практике аукционы РСВ значительно различаются по допустимой форме заявки и сроку, на который она подается. В настоящем обзоре рассматриваются теоретические

модели различных вариантов аукциона единой цены, аукционов Викри и с оплатой по заявкам.

Васин, Васина, Рулева (2007) рассматривают аукционы единой цены, на которых стратегией (заявкой) каждого товаропроизводителя является неубывающая кусочно-постоянная функция фактического предложения товара в зависимости от цены. Доказано, что для всех равновесий Нэша цены отсекаются лежат между ценой конкурентного равновесия и ценой Курно, и наоборот, каждой цене из этого диапазона отвечает равновесие Нэша. Но только равновесие по Нэшу, соответствующее исходу Курно, устойчиво по отношению к адаптивной динамике стратегий.

Модели Baldick, Grant, Kahn (2000), Green, Newbery (1992), Klemperer, Meyer (1989) описывают аукцион функций предложения с непрерывными заявками как игру в нормальной форме и характеризуют точки равновесия Нэша. Клемперег и Меуег исследовали модель с произвольными функциями предложения, включая немонотонные. Они получили множество равновесий по Нэшу, соответствующих всем ценам выше цены Вальраса. Green и Newbery (1992) рассмотрели симметричную дуополию с линейными функциями предложения и спроса и линейными заявками и получили формулы для расчета равновесия Нэша. Baldick, Grant, Kahn обобщают их результаты для несимметричной олигополии. Abolmasov, Kolodin (2002) и Dyakova (2003) применяют этот подход для изучения рынков электроэнергии в двух российских регионах. Они используют аффинную аппроксимацию истинных функций предложения и приходят к выводу о значительном снижении рыночной власти производителей в аукционе функции предложения по сравнению с аукционом Курно.

Существенной особенностью рынка электроэнергии является неопределенность спроса связанная с его колебаниями в течение времени, на которое подается заявка. В этом контексте большой интерес представляет модель Клемперег, Меуег (1989), в которой заявка продавца подается в виде непрерывной монотонной функции, а спрос зависит от случайного фактора. В каждый момент времени цена отсекается определяется из баланса текущей функции спроса и суммарной заявки всех участников. Набор стратегий является равновесием в функциях предложения (РФП), если в каждый момент времени при любом значении случайного фактора заявка каждого участника обеспечивает максимизацию его прибыли при фиксированных заявках остальных. Для симметричной олигополии авторы описывают множество равновесных решений и отмечают, что цена, формирующаяся в РФП, значительно ниже цены Курно.

Однако вычисление заявок РФП является довольно сложной задачей. Кроме того в общем случае для вычисления равновесных заявок требует-

ся полная информация о функции спроса и функциях издержек каждого производителя, которая на практике отсутствует. Подобная проблема возникает для многих игровых моделей в экономике. Традиционный подход к ее решению основан на исследовании адаптивной динамики при повторении рассматриваемой игры. В этой модели не требуется ни полной информированности, ни учета рациональности партнеров при выборе стратегии. Достаточно уметь вычислять выигрыши для текущей и альтернативной стратегий. Если при этом стратегии сходятся к равновесию Нэша, то можно ожидать соответствующего поведения в реальности.

Васин, Гусев (2011) и Vasin, Dolmatova, Weber (2013) рассматривают игру, соответствующую аукциону функций предложения для симметричной олигополии. Исследуются два варианта: с линейными предельными издержками и постоянными издержками при ограниченной мощности. Устойчивость равновесия изучается с помощью динамики наилучших ответов. Доказано, что в первом случае динамика сходится к РФП с геометрической скоростью. Во втором случае заявки, являющейся наилучшим ответом, на некотором шаге нередко не существует. Более того, если последовательность наилучших ответов существует, она зачастую имеет циклический характер, так что сходимость к РФП не имеет места.

Альтернативной возможностью организации РСВ (см. Ausubel, Cramton (1999); Volle (2004); Васин, Васина, Рулева (2007)) является использование аукциона Викри. На таком аукционе цена отсечения и объемы выпуска определяются так же, как на аукционе единой цены. Однако оплата товара, купленного у данного производителя, производится по резервным ценам, которые вычисляются в зависимости от объема как минимум из предельных издержек его выпуска, исходя из заявок прочих производителей, и резервной цены для потребителей. В данном случае заявка, отражающая реальные издержки, является доминирующей стратегией, а правило расчета резервных цен определяет минимальные цены, обеспечивающие реализацию максимального благосостояния в отсутствие априорной информации об издержках производителей.

Еще одна форма - это аукцион с оплатой по заявкам. Объемы продаж определяются так же, как на аукционе единой цены, но оплата каждому участнику производится согласно ценам, указанным в его заявке. Данная форма аукциона использовалась на рынке Англии и Уэльса, а также в России на рынке мощности. Однако, она обладает серьезными недостатками. Даже в условиях совершенной конкуренции подача заявки, соответствующей реальным издержкам, неразумна. Продавец должен рассчитать цену конкурентного равновесия и предложить по этой цене соответствующий объем. В случае несовершенной конкуренции типична ситуация, ко-

гда равновесия по Нэшу в соответствующей игре не существует (Wolfram (1999), Durakovich, Vasin, Vasina, 2003). Такая ситуация толкает продавцов к заключению картельного соглашения как средства обеспечить стабильное функционирование рынка. Поэтому следует согласиться с С. Wolfram, не рекомендующей использовать этот тип аукциона.

Научное издание

Сетевые игры и менеджмент

Расширенные тезисы докладов
Международный семинар

*Печатается по решению Ученого совета
Института прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Оригинал-макет подготовлен:
Ю. В. Чирковой