

Archiv-Ex.:

FZR-239

Oktober 1998

André Peshier

**Zur Zustandsgleichung heißer
stark wechselwirkender Materie -
konsistente Beschreibungen
stark gekoppelter Quantensysteme**

Herausgeber:
FORSCHUNGSZENTRUM ROSSENDORF
Postfach 51 01 19
D-01314 Dresden
Telefon +49 351 26 00
Telefax +49 351 2 69 04 61
<http://www.fz-rossendorf.de/>

Als Manuskript gedruckt
Alle Rechte beim Herausgeber

Institut für Theoretische Physik
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
Technische Universität Dresden

**Zur Zustandsgleichung heißer
stark wechselwirkender Materie -
konsistente Beschreibungen
stark gekoppelter Quantensysteme**

Dissertation
zur Erlangung des
Doktorgrades der Naturwissenschaften
(Doctor rerum naturalium)

vorgelegt von
André Peshier
geboren am 27. März 1971 in Mittweida

Dresden 1998

Eingereicht am 29. April 1998

1. Gutachter: Prof. Dr. G. Soff
2. Gutachter: PD. Dr. B. Kämpfer
3. Gutachter: Prof. Dr. H. Stöcker

Verteidigung am 7. Oktober 1998

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
I	Einschleifen-Selbstenergien bei endlichen Temperaturen	15
2	Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen	17
2.1	Zum Formalismus	17
2.2	Die Hochtemperatur- und die HTL-Approximation	23
3	Einschleifen-Selbstenergien in QED und QCD bei endlichen Temperaturen	31
3.1	Die Photon-Selbstenergie	31
3.2	Die Gluon-Selbstenergie	43
3.3	Die Fermion-Selbstenergie	52
II	Perturbative Thermodynamik	67
4	Betrachtungen zu perturbativen Entwicklungen	69
4.1	Ein einfaches Beispiel	69
4.2	Approximationen für $Z(g^2)$	72
4.3	Perturbative QCD bei endlichen Temperaturen	80
5	Konsistente thermodynamische Approximationen	87
5.1	Eine funktionalanalytische Formulierung der Thermodynamik	87
5.2	Zur Thermodynamik der φ^4 -Theorie	92
III	Zur Thermodynamik des Quark-Gluon-Plasmas	103
6	Ein effektives Quasiteilchen-Modell für das heiße QCD-Plasma	105
6.1	Effektive Thermodynamik der φ^4 -Theorie	105
6.2	Das SU(3)-Gluon-Plasma nahe des Deconfinement-Phasenübergangs	109
6.3	Das QCD-Plasma mit vier leichten Quark-Flavors	121
6.4	Das Quark-Gluon-Plasma mit seltsamen Quarks	124
7	Resumé und Ausblick	131

IV	Anhang	133
A	Konventionen und Bezeichnungen	135
B	Ergänzungen zum Teil I	137
B.1	Die Frequenzsummen $T \sum_{k_0} k_0^m q_0^n \Delta_{s_1}(K) \Delta_{s_2}(Q)$	137
B.2	$\Pi_L^\gamma(p_0, p)$ für $p_0 \sim p$	139
B.3	Π_T^g in der HTL-Approximation	141
B.4	Die Integraldarstellungen von $T_{1,2}^\xi$	142
B.5	Zur Fermion-Dispersionsrelation im chiralen Limes	143
C	Ergänzungen zum Teil II	145
C.1	Die Funktion $T \not{\int} \Delta_{m^2}$	145
D	Ergänzungen zum Teil III	147
D.1	Die Entwicklung der Bag-Funktion $B(m(T))$	147
	Literaturverzeichnis	149

1 Einleitung

Es ist ein wichtiges Anliegen der physikalischen Beschreibung der Natur, die Vielfalt der beobachtbaren Erscheinungen auf eine kleine Anzahl fundamentaler Tatsachen und Gesetze zurückzuführen. Diesen Anspruch stellt sich insbesondere auch die Elementarteilchenphysik, die die Untersuchung der elementaren Bausteine der Materie und deren Wechselwirkungen zum Ziele hat. Nach heutigem Verständnis lassen sich die Elementarteilchen in zwei Gruppen einordnen: die Leptonen und die Quarks, und beide Gruppen werden jeweils noch in drei Familien unterteilt. Die beobachtbaren Phänomene sollten sich zumindest im Prinzip auf die Wechselwirkung dieser Elementarteilchen zurückführen lassen. Man kennt heute vier fundamentale Kräfte: die elektromagnetische, die schwache und die starke Kraft sowie die Gravitation. Diese Wechselwirkungen lassen sich durch Eichfeldtheorien verstehen, die durch ein einheitliches Prinzip aus den Invarianzeigenschaften der entsprechenden wechselwirkungsfreien Theorien unter gewissen Symmetrietransformationen folgen. Die Quantisierung einer Eichfeldtheorie führt auf eine Quantenfeldtheorie (QFT), und die Quanten der Eichfelder ergänzen die Liste der Elementarteilchen. In Verbindung mit der Renormierungstheorie hat sich die quantenfeldtheoretische Beschreibung der elektromagnetischen, der schwachen und der starken Wechselwirkung bisher als überaus erfolgreich erwiesen. Die Kombination dieser beiden an sich separaten Konzepte bildet den Rahmen des Standardmodells der Wechselwirkung, das zur Erklärung der massiven Eichfelder der schwachen Kraft zusätzlich noch die Existenz von Higgs-Teilchen annimmt. Obgleich die Gravitation bislang noch nicht vollständig als Quantentheorie verstanden ist und trotz einiger konzeptioneller Schwierigkeiten, die auf die Notwendigkeit weiterführender Entwicklungen hinweisen, liefert das Standardmodell somit bereits ein recht einheitliches Bild für die Vielzahl der physikalischen Erscheinungen.

In der vorliegenden Arbeit werden im Rahmen des Standardmodells Systeme mit starker Wechselwirkung sowie als exemplarisches Modell die skalare φ^4 -Theorie betrachtet. Durch die starke Kraft wird die Wechselwirkung zwischen Hadronen bestimmt. Ehe die Quantenchromodynamik (QCD) als heute allgemein akzeptierte Theorie der starken Wechselwirkung etabliert wurde, erfolgte die Beschreibung der Hadronen-Wechselwirkung zunächst durch verschiedene effektive Theorien. Auch heutzutage besitzen effektive Beschreibungen der starken Wechselwirkung, die man nunmehr streng aus der QCD abzuleiten versucht, eine große Bedeutung. Diese Tatsache liegt auch in einem Spezifikum der starken Wechselwirkung begründet, nämlich der normalerweise zu beobachtenden *Confinement*-Eigenschaft, die kurz erläutert werden soll. Die QCD geht von Quarks als farbgeladenen fundamentalen Teilchen (Fermionen) und Gluonen (Eichbosonen) als Vermittlern der Wechselwirkung aus, welche aufgrund der nicht-Abelschen $SU(3)$ -Eichsymmetriegruppe der QCD ebenfalls eine Farbladung tragen. Aufgrund der daraus resultierenden Selbstkopplung der Gluonen nimmt man an, daß Quarks und Gluonen nicht als freie Vakuumzustände detektierbar sind, sondern als Partonensysteme farbneutrale Hadronenzustände aufbauen, die beobachtet werden

können. Dadurch erhält der in jeder QFT verankerte Vielteilchenaspekt für die QCD von vornherein eine besondere Bedeutung.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der QCD, die auch mit der des Confinements in Beziehung steht, ist die sogenannte *asymptotische Freiheit*. Darunter versteht man, daß bei Elementarprozessen mit großem Impulsübertrag bzw. auf kleinen Längenskalen die Kopplungsstärke klein ist. Dies war historisch ein erster Hinweis darauf, daß sich die elementaren Teilchen in hadronischen Systemen mit kleinen typischen Teilchenabständen quasi-frei verhalten sollten.

Tatsächlich sprechen weitere heuristische Überlegungen dafür, daß hadronische Materie bei extrem hohen Teilchendichten und/oder Temperaturen in einen *Deconfinement-Zustand* übergeht, in dem die Quarks und Gluonen über längere Distanzen quasi-frei propagieren können, und der als Quark-Gluon-Plasma (QGP) bezeichnet wird. Obwohl bislang noch nicht eindeutig geklärt ist, ob es sich dabei um einen Phasenübergang bzw. um einen kontinuierlichen Übergang (*crossover*) handelt, soll hier der Einfachheit halber und einer üblichen Konvention in der Literatur folgend von dem Deconfinement-Phasenübergang gesprochen werden, zumal einige theoretische Hinweise auf einen Phasenübergang erster Art deuten. Der Begriff des Phasenübergangs wird hier also nicht primär im thermodynamischen Sinne gebraucht, sondern um zu betonen, daß sich die relevanten Freiheitsgrade von Hadronen zu Quarks und Gluonen ändern.

In einem auf Polyakov zurückgehenden Argument [Pol79] betrachtet man Mesonen in einem naiven String-Modell. Wie in der Abbildung 1.1(a) schematisch dargestellt, werden

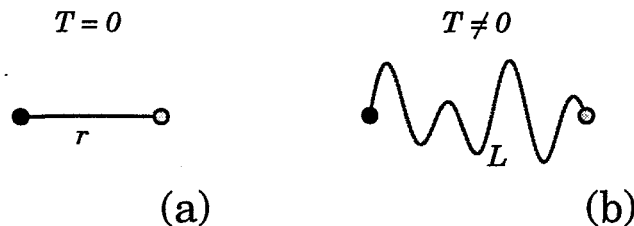


Abbildung 1.1: Ein Meson im naiven String-Modell bei (a) verschwindender bzw. bei (b) endlicher Temperatur. Für endliche Temperaturen ist der mittlere Abstand r der Quarks proportional zur Länge L des Strings.

die Mesonen hierbei als ein Quark-Antiquark-Paar angesehen, das durch ein schlauchförmiges starkes Kraftfeld (*string*) gebunden wird. In einer groben Näherung kann das effektive Potential zwischen den Quarks als

$$V(r) = \frac{\lambda}{r^2} - \frac{\alpha}{r} + \sigma r$$

angenommen werden [Kap89]. Außer der in gleicher Form im nichtrelativistischen 2-Körperproblem mit elektrischer Wechselwirkung auftretenden Zentrifugalrepulsion $\sim r^{-2}$ und dem attraktiven Term $\sim r^{-1}$ existiert zwischen den farbgeladenen Quarks ein lineares Confinement-Potential σr . Der Parameter σ wird als *string tension* bezeichnet. Der Abstand des Quark-Antiquark-Paares, d. h., die Größe des Mesons, wird bei verschwindender Temperatur durch die Lage des Minimums des effektiven Potentials $V(r)$ festgelegt. Bei der endlichen Temperatur T bestimmt dagegen das Minimum der Freien Energie $F = V - ST$ den

Grundzustand des Mesons; der String muß dann nicht mehr geradlinig zwischen den Quarks verlaufen (siehe Abbildung 1.1(b)). Die Entropie S als logarithmisches Maß für die Zahl der möglichen Mikrokonfigurationen ist proportional zur Länge L des Strings, d. h., $S = sL$. Daher wird die Stringlänge durch das Minimum der Funktion

$$F(L) = \frac{\lambda}{L^2} - \frac{\alpha}{L} + (\sigma - sT)L$$

bestimmt. Daraus ist unmittelbar ersichtlich, daß oberhalb einer bestimmten Temperatur die Freie Energie $F(L)$ kein absolutes Minimum mehr besitzt und die Quarks nicht länger gebunden sind, was als Deconfinement der Quarks interpretiert werden kann. Dieses Resultat ist allein Folge des Vorzeichenwechsels des in L linearen Terms der Freien Energie $F(L)$ und somit nicht von der genauen Gestalt des Quark-Potentials abhängig.

Die Temperatur dieses Phasenübergangs kann ebenfalls leicht abgeschätzt werden. Bei hohen Temperaturen verhalten sich in einem Hadronengas die Dichten der leichten Hadronen aus Dimensionsgründen in erster Näherung wie T^3/\hbar^3 . Da die Hadronen eine typische Ausdehnung von 1 fm besitzen, wird bei einer Temperatur $T \sim \hbar/1 \text{ fm} \sim 200 \text{ MeV}$ das gesamte Volumen von Hadronen ausgefüllt sein. Dies ist ein Hinweis darauf, daß oberhalb dieser Temperatur die Beschreibung der Materie durch Hadronenzustände nicht länger adäquat ist.

Ein Ergebnis der gleichen Größenordnung liefert in einem ganz anderen Zugang die Hagedorn-Beschreibung [Hag73] des experimentell gefundenen Massenspektrums der Hadronen. Wie sich auch theoretisch begründen läßt, besitzt die Zustandsdichte ν der hadronischen Resonanzen mit der Masse m näherungsweise die Form

$$\nu(m) \sim m^{-a} \exp\{m/\tilde{T}\},$$

wobei die Parameter als $a \approx 3$ und $\tilde{T} \approx 160 \text{ MeV}$ angegeben werden [Kap89]. Der Parameter \tilde{T} besitzt in diesem zunächst rein phänomenologischen Modell, welches ursprünglich nicht von Quarks und Gluonen als Bestandteilen der Hadronen ausgeht, die Bedeutung einer Grenztemperatur. Die durch die Integration mit dem Maß $\nu(m) dm$ über das Massenspektrum bestimmte Zustandssumme eines Hadronensystems divergiert nämlich für $T \rightarrow \tilde{T}$ und ist oberhalb von \tilde{T} nicht definiert. Diese Eigenart der hadronischen Zustandsgleichung, die in ähnlicher Weise auch in anderen Zugängen, wie z. B. der relativistischen Transport-Theorie [Bas98] bestätigt wird, weist wie die vorangegangene Überlegung darauf hin, daß oberhalb einer gewissen Temperatur von etwa 100...200 MeV keine Hadronen mehr existieren. Auf genauere numerische Untersuchungen zum Phasenübergang in stark wechselwirkenden Systemen durch die sogenannte Gitter-Eichfeldtheorie, welche die aufgeführten qualitativen Betrachtungen bestätigen, wird an gegebener Stelle eingegangen.

Die Kenntnis der Eigenschaften des QGP sowie des Phasenübergangs ist von großer Wichtigkeit für das Verständnis der kosmologischen Evolution. Viele Abschnitte dieser Entwicklung können in einer guten Approximation durch thermodynamische Betrachtungen beschrieben werden. Dies liegt zum einen in der Tatsache begründet, daß die typische Zeitskala der lokalen Äquilibrierungsprozesse deutlich kleiner als jene der globalen dynamischen Entwicklung ist; andererseits ist der Kosmos die beste überhaupt denkbare Realisierung eines Vielteilchensystems. Demnach läßt sich der globale Zustand des Kosmos durch die Angabe der Temperatur und durch die den erhaltenen Ladungen zugeordneten chemischen Potentiale kennzeichnen.

In seiner Frühphase bestand der Kosmos aus einem heißen Elementarteilchen-Plasma, das sich, von einigen möglichen Phasen des Wiederaufheizens abgesehen, im Zeitverlauf abkühlte. Etwa 10^{-6} Sekunden nach dem Urknall war die Temperatur des Kosmos auf etwa 200 MeV (das entspricht ca. $2 \cdot 10^{12}$ Kelvin) abgesunken, worauf in dem einsetzenden Phasenübergang der Quark-Gluon-Anteil des Elementarteilchen-Plasmas hadronisierte. Das im Kosmos beobachtete Verhältnis von Hadronen zu Photonen von $1:10^9$ ist ein Anzeichen dafür, daß der kosmologische Phasenübergang bei einem sehr kleinen hadro-chemischen Potential, d. h., im Strahlungskosmos stattfand. Die genauen Bedingungen, unter denen diese Hadronisierung vonstatten ging, sind heute, etwa 10^{17} Sekunden später, nur noch indirekt feststellbar. Daraus erwächst aber für viele kosmologisch bedeutsame Fragen die Notwendigkeit der genauen Kenntnis der Eigenschaften des heißen Elementarteilchen-Plasmas und insbesondere des QGP. Der kosmologische Hintergrund ist somit eine wichtige Motivation für die intensive Forschung auf diesem Gebiet.

Im Zusammenhang mit der asymptotischen Freiheit wurde bereits die Vorstellung angesprochen, daß stark wechselwirkende Materie auch bei kleinen Temperaturen, aber sehr großer Hadronendichte (bzw. bei großem hadro-chemischen Potential), in den Deconfinement-Zustand übergehen kann. Auch die unter solchen Bedingungen vorliegende Zustandsform der Materie, die als kaltes QGP oder auch Quarkmaterie bezeichnet wird, besitzt nach theoretischen Überlegungen eine große Relevanz für die Astrophysik. Es bestehen nämlich berechnete Gründe zu der Annahme, daß im Inneren kalter Neutronensterne die Materie derart komprimiert ist, daß dort die kritische Teilchendichte für den Phasenübergang erreicht wird. Die Größenordnung dieser kritischen Dichte kann aus ähnlichen heuristischen Überlegungen wie im Falle des Hochtemperatur-Phasenübergangs abgeschätzt werden. Sie liegt bei verschwindender Temperatur bei etwa $1 \text{ Nukleon}/\text{fm}^3$, was ungefähr der 10-fachen Kerndichte entspricht.

Es wird angenommen, daß zwischen dem Phasenübergang bei hoher Temperatur und dem bei hoher Dichte die Phasengrenze durch eine kontinuierliche Funktion gegeben ist. Damit ergibt sich das in der Abbildung 1.2 qualitativ dargestellte Phasendiagramm hadronischer Materie. Dieses bislang noch hypothetische Bild nicht nur theoretisch zu fundieren, sondern auch experimentell zu verifizieren, ist das erklärte Ziel einer Vielzahl von Arbeitsgruppen und Kollaborationen. Im Labor läßt sich Materie durch Stöße von hochenergetischen schweren Atomkernen derart verdichten bzw. erhitzen, daß das Erreichen der extremen Bedingungen für den hadronischen Phasenübergang möglich erscheint. Erste experimentelle Hinweise auf die Formierung eines QGP glaubt man in bereits existierenden Schwerionen-Experimenten am AGS (Alternating Gradient Synchrotron, Brookhaven) und am SPS (Super Proton Synchrotron, CERN) gefunden zu haben; ein eindeutiger Nachweis steht jedoch noch aus. Diesen hofft man endgültig mit den sich im Bau bzw. in der Planung befindlichen Kollider-Maschinen RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider, Brookhaven) und LHC (Large Hadron Collider, CERN) zu erbringen, bei denen mit Schwerpunktsenergien von etwa 200 GeV bzw. 5 TeV pro Nukleon im Schwerionen-Betrieb die höchsten bisher experimentell erreichten Energien zur Verfügung stehen werden. RHIC ist ein dedizierter Schwerionen-Kollider, und die geplanten Experimente zielen auf den Nachweis des QGP ab. Erste experimentelle Ergebnisse werden bereits vor dem Jahr 2000 erwartet. Aber auch am LHC wird ein Teil der Meßzeit der Suche nach dem QGP dienen. Entsprechend den Schwerpunktsenergien kann davon ausgegangen werden, daß man bei LHC-Experimenten noch weiter in den Deconfinement-Bereich vordringen kann und der Phasenübergang bei etwas höheren Temperaturen stattfinden wird als beim RHIC. In beiden Fällen kann jedoch

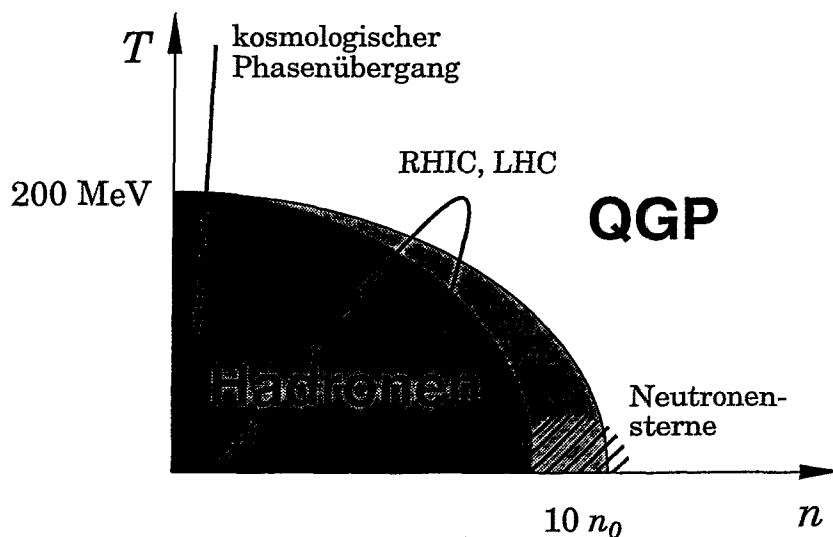


Abbildung 1.2: Das Phasendiagramm hadronischer Materie (schematisch). Angedeutet sind die Verläufe der erwarteten Phasenübergänge bei RHIC und LHC sowie des kosmologischen Phasenübergangs. Schraffiert markiert ist der vermutete Materiezustand im Inneren kalter Neutronensterne. Hellgrau dargestellt ist der im Falle eines Phasenübergangs erster Ordnung zu erwartende Phasen-Mischzustand.

im Unterschied zum kosmologischen Phasenübergang die Hadronendichte ein Mehrfaches der normalen Kerndichte n_0 betragen.

Ein wichtiges Problem der Schwerionen-Experimente ist die eindeutige Unterscheidung eines möglicherweise kurzzeitig und in einem kleinen Volumen erzeugten QGP von einem Zustand hochangeregter hadronischer Materie. Eine unter den vielen vorgeschlagenen Signaturen des QGP, die derzeit diskutiert werden, ist der Nachweis der Unterdrückung der J/Ψ -Produktion in Schwerionen-Stößen. Dieser auf Matsui und Satz [MS86] zurückgehende Vorschlag beruht auf der Tatsache, daß das J/Ψ -Meson als $c\bar{c}$ -Zustand im heißen Plasma aufgrund der Abschirmeffekte nicht stabil ist und daher schnell zerfällt. Dieser Mechanismus ist aber wahrscheinlich schwer von dem zum konventionellen experimentellen Untergrund beitragenden Effekt zu unterscheiden, daß der Zerfall des J/Ψ -Meson auch durch Stöße und Abschirmeffekte im heißen Hadron-Medium katalysiert wird.

Eine zweite derzeit stark debattierte QGP-Signatur ist das Spektrum der in Kern-Kern-Stößen emittierten Dileptonen und Photonen. Diese elektromagnetischen Proben geben direkten Aufschluß über die Bedingungen in der Reaktionszone, da sie nahezu ohne jede weitere Wechselwirkung in das Detektorsystem gelangen können. Für die Analyse dieser elektromagnetischen Signale ist ebenfalls ein genaues Verständnis der relevanten Prozessen im hochangeregten hadronischen Medium vonnöten, da diese als starker Untergrund zu den Meßergebnissen beitragen können.

Bereits diese kurzen Diskussionen zeigen, daß zur Auswertung der Experimente eine recht

detaillierte theoretische Beschreibung nötig ist. Diese Beschreibung kann jedoch aufgrund der Komplexität des physikalischen Prozesses 'ultrarelativistischer Schwerionen-Stoß' (und der Komplexität der zugrunde liegenden QCD) nur unter vereinfachenden Annahmen erfolgen. Einen möglichen Rahmen für die Beschreibung der ersten Stadien des Stoßes liefern z. B. Kaskaden-Modelle, welche die dynamische Entwicklung der kollidierenden Kerne im wesentlichen durch binäre Wechselwirkungsprozesse auf der Partonen-Ebene beschreiben [Gei95]. All diesen dynamischen Modellen ist gemein, daß sich in dem System durch die anfänglichen harten, durch die perturbative QCD beschreibbaren Wechselwirkungen zwischen den Partonen sehr schnell ein lokales thermisches Gleichgewicht einstellt. Für RHIC-Energien beträgt die typische Zeitskala der Thermalisierung etwa $0.5 \text{ fm}/c$.

Diese Tatsache rechtfertigt, das System nach der kurzen Prä-Äquilibriumphase durch thermo-hydrodynamische Modelle [SG86] zu beschreiben, zumal viele observable Größen durch die thermalisierte Phase mit einer Lebensdauer von einigen $10 \text{ fm}/c$ bestimmt werden. In diesem Bild, das auch durch andere relativistische Transport-Theorien gestützt wird, stellt sich die Kern-Kern-Kollision als eine überwiegend longitudinale Expansion eines anfänglich sehr heißen, stark komprimierten Mediums dar. Die relativistisch-hydrodynamische Expansion wird dabei durch die Zustandsgleichung des Mediums bestimmt. Daraus ergeben sich neben den zwei bereits erwähnten Signaturen weitere Möglichkeiten des Existenznachweises des QGP. Diese sogenannten kinetischen Proben beruhen auf der im Vergleich zur hadronischen Phase großen Anzahl der thermodynamischen Freiheitsgrade des QGP, so daß sich beim Phasenübergang der Druck und die Energiedichte in einem sehr kleinen Temperaturbereich stark ändern. Der hohe Druck des QGP führt selbst in zentralen Stößen während der longitudinalen Expansion zu einer kollektiven transversalen Expansion (*transverse flow*), die sich in verschiedenen observablen Größen äußert. So erlaubt z. B. die Messung des mittleren transversalen Impulses $\langle p_T \rangle$ und der Rapiditätsverteilung dN/dy der detektierten Hadronen Rückschlüsse auf die Zustandsgleichung. Daneben können durch Teilchen-interferometrische Methoden [Pra86] Abmessungen und Lebensdauer des expandierenden Mediums bestimmt werden, die ebenso auf die Zustandsgleichung schließen lassen. Wie für die kosmologische Evolution stellen sich somit trotz der initialen Nicht-Gleichgewichtsphase und der dynamischen Aspekte der Schwerionen-Kollision thermodynamisch-statistische Betrachtungen und insbesondere die Kenntnis der Zustandsgleichung des QGP als sehr wichtig heraus.

Thermodynamische Größen des QGP lassen sich mit den Methoden der Statistischen QFT berechnen. Allgemein hat sich die Verbindung der Statistischen Physik mit der QFT als sehr fruchtbar erwiesen, was sich in eleganten funktionalanalytischen Formulierungen äußert [AGD75], die dem Vielteilchenaspekt beider Theorien gerecht werden. Obwohl die Statistische QFT prinzipiell auch die Beschreibung von Systemen außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichts ermöglicht, werden in dieser Arbeit mit der angegebenen Motivation nur thermisch äquilibrierte Systeme betrachtet.

Die Statistische QCD kann analytisch nur approximativ durch Störungsentwicklungen ausgewertet werden. Die Anwendung dieser perturbativen Resultate zur Beschreibung des QGP im Bereich des Phasenübergangs ist jedoch aufgrund der dort großen Kopplungsstärke nicht ohne weiteres möglich. Numerische Monte-Carlo-Simulationen der QCD durch die Gitter-Eichfeldtheorie erlauben hingegen auch im Regime starker Kopplung im Prinzip exakte Berechnungen aller relevanten thermodynamischen Größen, wobei der erforderliche Rechenaufwand allerdings beträchtlich ist. Heute ist die Zustandsgleichung daher nur für einige Modellsysteme wie das reine $SU(3)$ -Gluon-Plasma [Boy96] und das stark wechselwirkende Plasma mit zwei oder vier leichten Quark-Flavors [Ber97, Eng97] verlässlich bekannt,

wobei die Quarkmassen aus technischen Gründen als $m_q \sim T$ angenommen werden müssen. Genügend genaue Rechnungen, die von realistischen Quarkmassen ausgehen, oder für den physikalisch interessanten Fall endlicher chemischer Potentiale konnten bislang noch nicht durchgeführt werden.

Dies ist eine Motivation, in der vorliegenden Arbeit die numerischen Ergebnisse existierender Gitterrechnungen im Sinne 'experimenteller' Tatsachen zu interpretieren. Es zeigt sich, daß die bekannten thermodynamischen Daten durch ein Modell zu verstehen sind, das die stark wechselwirkenden Quarks und Gluonen als Quasiteilchen mit effektiven Eigenschaften annimmt. Mittels dieses Modells wird dann eine Abschätzung der Zustandsgleichung des QGP mit realistischen Quarkmassen angegeben, wobei insbesondere die seltsamen Quarks berücksichtigt werden. Aufgrund ihrer Masse von etwa 150 MeV, die in der Größenordnung der QCD-Renormierungskonstante Λ_{QCD} liegt, können die s-Quarks häufig nicht wie die u- und d-Quarks in guter Approximation als masselos angenommen werden. Andererseits ist für viele Fragestellungen die Masse der seltsamen Quarks nicht groß genug, um sie als schwere Teilchen-Freiheitsgrade zu vernachlässigen. Daß unterschiedliche Näherungen dieser Art durchaus auch zu qualitativ verschiedenen Resultaten führen können, zeigt ein weiterer wichtiger Gesichtspunkt der starken Wechselwirkung, auf den kurz eingegangen werden soll.

Die Lagrange-Dichte der QCD ist unter der Annahme masseloser Quarks chiral symmetrisch. Der nichtperturbative Niederenergiesektor der starken Wechselwirkung ist neben der Confinement-Eigenschaft jedoch durch die spontane Brechung der chiralen Symmetrie gekennzeichnet. Die Brechung einer exakten chiralen Symmetrie hätte die Existenz eines masselosen hadronischen Goldstone-Multipletts zur Folge. Im Falle der u- und d-Quarks ist die explizite Verletzung der chiralen Symmetrie klein, was die kleine Masse der Pionen durch ihre Interpretation als Goldstone-Bosonen erklärt.

Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie äußert sich durch endliche Vakuumerwartungswerte verschiedener Operatoren. In dem zu betrachtenden Zusammenhang ist dabei insbesondere das sogenannte Quark-Kondensat $\langle q\bar{q} \rangle \sim (240 \text{ MeV})^3$ wichtig. Der endliche Wert des Quark-Kondensates resultiert beispielsweise darin, daß fast masselose (Strom-) Quarks in Hadronen als Teilchen mit einer Konstituentenmasse von einigen 100 MeV erscheinen. Nun folgt aus Gitterrechnungen ebenso wie durch allgemeine Überlegungen, daß der Wert des Quark-Kondensates mit steigender Temperatur abnimmt und bei einer Temperatur der Größenordnung von 150 MeV verschwindet [Leu91]. Die Möglichkeit einer solchen Wiederherstellung einer spontan gebrochenen Symmetrie bei hohen Temperaturen ist durch andere Erscheinungen wie dem ferromagnetischen Phasenübergang wohlbekannt. Daher ist die Annahme naheliegend, daß auch die Restauration der chiralen Symmetrie durch einen Phasenübergang erfolgt, wobei der Wert des Quark-Kondensats die Rolle eines Ordnungsparameters übernimmt. Der Charakter dieses chiralen Phasenübergangs wird wesentlich durch die Anzahl der masselosen Quark-Flavors bestimmt. Aus Universalitätsargumenten kann man im Fall von zwei chiralen Flavors auf einen Phasenübergang zweiter Ordnung schließen, während für drei masselose Flavor-Sorten ein Phasenübergang erster Ordnung vorausgesagt wird [PW84]. Dieses ist eins der Argumente, welche die genauere Betrachtung des seltsamen Freiheitsgrades auch in anderen Zusammenhängen motivieren. Es wird noch bemerkt, daß einige Anzeichen darauf hindeuten, daß der Deconfinement- und der chirale Phasenübergang zusammenfallen, obwohl dafür bislang noch keine allgemeinen Gründe gefunden werden konnten.

Trotz der relativ großen Masse der s-Quarks existieren deutliche Anzeichen einer näherungsweise chiralen 3-Flavor-Symmetrie, die historisch einen wichtigen Beitrag zum Ver-

ständnis der starken Wechselwirkung lieferten. Als Konsequenz der stärkeren expliziten Brechung der chiralen Invarianz der Theorie besitzen seltsame Hadronen und insbesondere die als Goldstone-Moden interpretierbaren K-Mesonen eine höhere Masse als die entsprechenden nicht-seltsamen Partner. In einem engen Zusammenhang dazu steht die Tatsache, daß hadronische Materie unter normalen Bedingungen, d. h., in Atomkernen im Grundzustand, explizit keine seltsamen Komponenten enthält. Nach den vorangegangenen Diskussionen ist aber klar, daß in hochenergetischen Schwerionenstößen die seltsamen Freiheitsgrade ange-regt werden, woraus sich weitere experimentell nachweisbare QGP-Signaturen ergeben. Eine Übersicht über aktuelle Entwicklungen zur Rolle des seltsamen Freiheitsgrades im QGP so-wie weitere Referenzen dazu findet man in [Sto97].

Die allgemeine Einleitung abschließend, sollen hier noch die ausführlichere Übersicht [HM96] über die umfangreichen theoretischen und experimentellen Aspekte der Physik des QGP erwähnt werden, wo auch eine Vielzahl weiterer Referenzen aufgeführt ist, sowie die Proceedings (Elsevier, Amsterdam) zu den regelmäßig stattfindenden *Quark-Matter*-Konferenzen.

Wie oben bereits angedeutet, wird in der vorliegenden Arbeit aus dem skizzierten Themen-kreis der Teilaspekt der Zustandsgleichung stark wechselwirkender Materie bei hohen Tem-peraturen behandelt. Mit Methoden der Statistischen QFT werden selbstkonsistente Appro-ximationen der Thermodynamik stark gekoppelter Systeme untersucht und die Möglichkeit der Ableitung von Quasiteilchen-Modellen dargestellt.

Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Der Teil I beginnt mit einer knappen Darstellung des allgemeinen Formalismus der Statistischen QFT. Es schließen sich Betrachtungen zu den Propagationseigenschaften von Anregungsmoden im heißen Medium an, die durch 2-Punkt-Greensche Funktionen beschrieben werden. Im Mittelpunkt steht dabei die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der effektiven HTL-Resummation von Propagatoren nach Braaten und Pisarski [BP90a]. Die Anwendung dieser zunächst nur für kleine Kopplungsstärken zu recht-ferdigenden Methode erweist sich bei einer Vielzahl von perturbativen Berechnungen als not-wendig, um konsistente Resultate zu erzielen. Damit erhaltene Ergebnisse müssen dann zu den praktisch interessierenden großen Kopplungsstärken in der Hoffnung extrapoliert wer-den, daß man so eine zumindest qualitativ richtige Beschreibung des jeweiligen Phänomens findet. Im Kapitel 3 werden Argumente dafür angeführt, daß dieses pragmatische Verfah-ren tatsächlich häufig gerechtfertigt ist. Betrachtet werden dazu als repräsentative Fälle die Propagatoren und die Selbstenergien in der Einschleifen-Näherung von Photonen und Elek-tronen, deren Wechselwirkung durch die Quantenelektrodynamik (QED) beschrieben wird, sowie die von Quarks und Gluonen in QCD-Plasmen.

Diese Frage nach der Anwendbarkeit perturbativer Methoden bei großen Kopplungsstär-ken stellt ein generelles Problem dar, auf das im Teil II, Kapitel 4 im Zusammenhang mit der Berechnung thermodynamischer Größen näher eingegangen wird. Die dort angeführ-ten Argumente belegen, daß perturbative Resultate auch bei der Extrapolation zu großen Kopplungsstärken noch brauchbare Informationen enthalten können, wenn man sich da-bei auf *niedrige* Ordnungen von eventuell geeignet umorganisierten Störungsentwicklungen beschränkt. Unter diesem Blickwinkel wird im Kapitel 5 die Thermodynamik der skala-ren φ^4 -Theorie in der weitgehend analytisch behandelbaren Tadpole-Näherung betrach-tet. Anwendung findet dabei der Luttinger-Ward-Formalismus, mit dessen Hilfe aus den Einteilchen-Eigenschaften globale thermodynamische Größen des Systems elegant und kon-sistent berechnet werden können.

Im Teil III dieser Arbeit wird die Thermodynamik des QGP in dem bereits erwähnten Quasiteilchen-Modell untersucht, wobei auf die Resultate der Teile I und II zurückgegriffen wird. Dieses Modell reproduziert zum einen die bekannten thermodynamischen Daten aus Monte-Carlo-Simulationen stark wechselwirkender Systeme im Deconfinement-Zustand durch Anpassen von (im wesentlichen) zwei Parametern, welche die Abhängigkeit der effektiven Kopplungsstärke von der Temperatur festlegen. Andererseits geht die Quasiteilchen-Beschreibung für sehr hohe Temperaturen in das bekannte störungstheoretische Resultat über, wobei zwischen dem nichtperturbativen und dem asymptotisch freien Regime glatt interpoliert wird. Darüber hinaus liefert das Quasiteilchen-Bild eine Basis für weiterführende Betrachtungen. So wird gezeigt, daß das Modell auch Aussagen über mikroskopische Eigenschaften wie die Debye-Abschirmung in heißen Plasmen erlaubt. Als wichtige Vorhersage des Modells wird im Kapitel 6 eine Abschätzung der Zustandsgleichung des QGP einschließlich der seltsamen Quark-Flavors angegeben. Diese Zustandsgleichung ist für dynamische Modelle von Schwerionen-Reaktionen und damit für die Voraussage experimenteller Signaturen des QGP bedeutsam. Einige mögliche Signaturen, die unmittelbar aus dem Quasiteilchen-Charakter der Quarks und Gluonen im Plasma folgen, werden ebenfalls angeführt.

Um bei längeren Rechnungen die Übersicht zu wahren, wurden Nebenrechnungen in den Anhang verlegt. Das Resumé und der Ausblick beschließen diese Arbeit.

Einige der hier vorgestellten Resultate und Vorarbeiten dazu wurden bereits in [PST97], [Pes98] und [Pes94, Käm95a, Käm95b, Pes96, Käm97a] sowie in den Proceedings [Pes95a, Käm95c, Käm96, Käm97b, Käm97c] publiziert.

Teil I

Einschleifen-Selbstenergien bei endlichen Temperaturen

2 Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen

2.1 Zum Formalismus

Im folgenden wird der in diesem Teil der Arbeit benötigte Formalismus in einer recht gedrängten Form dargestellt. Ausführlichere Darstellungen, die jedoch zum Teil auf nicht-relativistische Theorien beschränkt sind, findet man z.B. in der Referenz [AGD75]. Die statistische Beschreibung in verschiedenen Formulierungen mit dem Schwerpunkt auf relativistischen Quantenfeldtheorien ist in [LW87] ausführlich erläutert. Viele Aspekte der QFT bei endlichen Temperaturen und endlichen chemischen Potentialen finden sich auch in den Monographien [Kap89] und [lBe96].

Die kanonische Zustandssumme des durch den Hamilton-Operator H beschriebenen Systems ist definiert als

$$Z := \sum_n \exp\{-E_n/T\} = \text{tr} \exp\{-H/T\}; \quad (2.1)$$

wobei tr die Spur über alle physikalischen Zustände des Systems bezeichnet, dessen Gleichgewicht durch die Temperatur T charakterisiert wird. Liegen im System erhaltene Ladungen N_i vor, so erfolgt der Übergang zum großkanonischen Ensemble durch die Einführung der zugeordneten chemischen Potentiale μ_i sowie die Ersetzung $H \rightarrow H - \mu_i N_i$ in Gleichung (2.1). Dies erlaubt eine einheitliche Formulierung der QFT bei endlicher Temperatur und bzw. oder endlichen chemischen Potentialen. Z hängt dann außer vom Systemvolumen V von den Zustandsgrößen T und μ_i ab.

Der thermische Erwartungswert eines Operators A ist definiert durch

$$\langle A \rangle := Z^{-1} \text{tr} [A \exp\{-H/T\}] = \text{tr} [A \exp\{(\Omega - H)/T\}], \quad (2.2)$$

wobei die Größe

$$\Omega := -T \ln Z \quad (2.3)$$

eingeführt wurde. Insbesondere sind die Erwartungswerte von Operatoren, die makroskopischen Größen entsprechen und somit Funktionen von H und N_i sind, durch die Zustandssumme $Z(T, \mu_i, V)$ bzw. die Funktion $\Omega(T, \mu_i, V)$ und deren Ableitungen vollständig bestimmt. $\Omega(T, \mu_i, V)$ heißt daher thermodynamisches Potential.

Im Grenzfall verschwindender Temperatur spielt bei der thermischen Mittelung (2.2) nur noch der Grundzustand des Systems eine Rolle, und der Formalismus geht in die Beschreibung des Vielteilchensystems im Vakuum über. Es ist daher klar, daß sich auch bei endlichen

Temperaturen bis auf wenige Ausnahmen nur freie Quantenfeldtheorien in geschlossener analytischer Form lösen lassen. Bei der Behandlung physikalisch relevanter Theorien ist man daher neben numerischen Simulationen auf perturbative Methoden angewiesen. Es zeigt sich, daß die perturbative Auswertung einer QFT bei endlichen Temperaturen weitgehend parallel zu dem bekannten Formalismus der Vakuum-Theorie erfolgen kann. Formal kann man nämlich das Boltzmann-Maß bei der Bildung des Erwartungswertes eines Operators als Resultat der Wirkung eines Entwicklungsoperators in einer komplexen Zeitvariablen auffassen,

$$e^{H/T} A(t) e^{-H/T} = A(t - iT^{-1}). \quad (2.4)$$

Die auf diese Weise ins Komplexe fortgesetzte Zeit, deren Imaginärteil mit der inversen Temperatur zusammenhängt, kann aus analytischen Gründen nicht beliebige Werte annehmen. So ist der Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle A(t)B(t') \rangle &= Z^{-1} \sum_n e^{-E_n/T} \langle n | A(t)B(t') | n \rangle \\ &= Z^{-1} \sum_{m,n} e^{-iE_m(t-t')} e^{iE_n(t-t'+iT^{-1})} \langle n | A(0) | m \rangle \langle m | B(0) | n \rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

offensichtlich nur für Zeiten, welche die Bedingung

$$-T^{-1} \leq \text{Im}(t - t') \leq 0 \quad (2.6)$$

erfüllen, wohldefiniert. Eine wichtige Eigenschaft des Erwartungswertes (2.5), der auch Korrelator der Größen A und B genannt wird, folgt aus der zyklischen Vertauschbarkeit der Operatoren vor der Spurbildung,

$$\begin{aligned} \langle A(t)B(t') \rangle &= \text{tr} [e^{-H/T} A(t)B(t')] \\ &= \text{tr} [e^{-H/T} e^{H/T} B(t') e^{-H/T} A(t)] \\ &= \langle B(t' - iT^{-1})A(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ein Spezialfall dieser Beziehung ist die Kubo-Martin-Schwinger-Relation, die weiter unten verwendet wird.

Bei der perturbativen Auswertung der Theorie spielt der Korrelator von zwei Feldoperatoren, der sogenannte Propagator, eine zentrale Rolle. Aus Gründen der Einfachheit wird im folgenden der Propagator-Begriff anhand der skalaren masselosen Feldtheorie diskutiert; die Verallgemeinerung zu realistischen Theorien ist offensichtlich. Der Propagator ist als eine Greensche Funktion durch eine definierende Differentialgleichung noch nicht eindeutig festgelegt: unterschiedliche Randbedingungen ergeben unterschiedliche Formen des Propagators. Im folgenden werden einige dieser Propagatoren eingeführt sowie ihre Zusammenhänge untereinander erläutert.

In der Formulierung der Störungstheorie spielt insbesondere der sogenannte Kontur-geordnete Propagator eine Rolle. Dieser ist definiert durch

$$\begin{aligned} D_C(x, x') &:= \langle T_C(\varphi(x)\varphi(x')) \rangle \\ &= \Theta_C(x_0 - x'_0) D_+(x, x') + \Theta_C(x'_0 - x_0) D_-(x, x') \end{aligned}$$

mit $D_+(x, x') := \langle \varphi(x)\varphi(x') \rangle$, $D_-(x, x') := \langle \varphi(x')\varphi(x) \rangle$. (2.8)

Der Kontur-Ordnungsoperator T_C ist die Verallgemeinerung des Zeit-Ordnungsoperators der Vakuum-QFT. Er ordnet Operatoren entlang des Weges \mathcal{C} in der komplexen Ebene, d. h., falls x'_0 in einer geeigneten Parametrisierung von \mathcal{C} vor x_0 liegt, ist $\Theta_C(x_0 - x'_0) = 1$, sonst ist $\Theta_C = 0$. Die orientierte Kontur \mathcal{C} unterliegt entsprechend der Bedingung (2.6) der Einschränkung, in der komplexen Zeit-Ebene nicht-steigend zu sein. Die konkrete Wahl der Kontur bestimmt dann die jeweilige Formulierung der Störungstheorie mit den entsprechenden Feynman-Regeln.

Wie man leicht sieht, hängen die Propagatoren D_{\pm} als Funktion von x_0 und x'_0 nur von deren Differenz ab. Für isotrope Systeme gilt dies entsprechend auch für die räumlichen Koordinaten. Zwischen den Propagatoren D_+ und D_- besteht dabei nach der Gleichung (2.7) die Beziehung

$$D_+(x_0 - x'_0) = D_-(x_0 - (x'_0 - iT^{-1})). \quad (2.9)$$

Das ist die bereits erwähnte Kubo-Martin-Schwinger-Relation, die auch kurz als KMS-Relation bezeichnet wird.

Der Zusammenhang der Greenschen Funktionen D_+ und D_- zueinander sowie zu den anderen gebräuchlichen Propagatoren wird durch nur eine Funktion ρ bestimmt. Etwas lax kann man sagen, daß diese nur Informationen über die definierende Differentialgleichung der Greenschen Funktionen und damit über die Art der Wechselwirkung im System enthält. Die Informationen über die Randbedingungen folgen hingegen aus den entsprechenden Spektraldarstellungen der Propagatoren, von denen weiter unten einige aufgeführt werden.

Die Funktion ρ wird zunächst in der Impulsdarstellung angegeben. Dazu wird die Impulsdarstellung der Propagatoren D_{\pm} betrachtet,

$$D_{\pm}(K) = \int d^4x e^{iKx} D_{\pm}(x).$$

Als Konsequenz der KMS-Relation (2.9) besteht zwischen den beiden Propagatoren in der Fourier-Darstellung der Zusammenhang

$$D_+(K) = e^{k_0/T} D_-(K).$$

Definiert man nun die sogenannte Spektralfunktion als

$$\rho(K) := D_+(K) - D_-(K), \quad (2.10)$$

so erhält man

$$\begin{aligned} D_-(K) &= n_B(K) \rho(K), \\ D_+(K) &= (1 + n_B(K)) \rho(K), \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei n_B die Bose-Einstein-Funktion bezeichnet,

$$n_B(K) = \frac{1}{e^{k_0/T} - 1}. \quad (2.12)$$

Ausgedrückt durch die Spektralfunktion lautet der Kontur-geordnete Propagator

$$D_C(x) = \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} e^{-iKx} \rho(K) [\Theta_C(x_0) + n_B(K)]. \quad (2.13)$$

Die Spektralfunktion ρ ist nach den Definitionen (2.8) und (2.10) der Erwartungswert des Kommutators der Feldoperatoren. Als solcher ist ρ nicht nur reell, sondern besitzt zudem noch einige weitere bemerkenswerte Eigenschaften wie

$$\begin{aligned}\rho(-k_0) &= -\rho(k_0), \\ \operatorname{sgn}(k_0)\rho(k_0) &\geq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \rho(k_0) &= 1.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Diese Eigenschaften folgen z. B. aus der Lehmann-Darstellung der Spektralfunktion, deren explizite Form in der Literatur angegeben ist (siehe z. B. [AGD75]).

Aufgrund der formalen Beziehung (2.4) ist es klar, daß man wie in der Vakuum-QFT auch bei endlichen Temperaturen ein generierendes Funktional für den Propagator sowie für andere Greensche Funktionen angeben kann. Dieses Funktionalintegral kann näherungsweise durch eine perturbative Entwicklung, formuliert durch freie Greensche Funktionen, bestimmt werden. Diese Tatsache erklärt die oben gemachte Feststellung über die Relevanz des Kontur-geordneten Propagators, da zur perturbativen Auswertung des Funktionalintegrals die Kontur in der komplexen Zeit-Ebene festgelegt werden muß. Unter allen denkbaren Konturen, die der Bedingung genügen, in der komplexen Zeit-Ebene nicht-steigend zu sein, ist die einfachste die sogenannte Matsubara-Kontur. Diese geht von $t = 0$ aus und verläuft in einer vertikalen Linie zu $t = -iT^{-1}$. Die Wahl dieser Kontur bestimmt die Feynman-Regeln im Imaginärzeit-Formalismus. Dieser wird so bezeichnet, weil es bequem ist, von der Zeitvariablen t zu der imaginären Zeit $-i\tau$ überzugehen.

Der Imaginärzeit-Propagator Δ ist als Funktion der Zeit τ in dem Intervall $[-T^{-1}, T^{-1}]$ definiert. Entsprechend ist die Fourier-Darstellung von Δ nur für diskrete Energien, nämlich für ganzzahlige Vielfache von πT erklärt. Nach der KMS-Bedingung (2.9) läßt sich Δ jedoch als eine auf dem Intervall $[0, T^{-1}]$ definierte, periodisch fortgesetzte Funktion auffassen. Daher gilt für die Impulsdarstellung des Imaginärzeit-Propagators

$$\begin{aligned}\Delta(\tau, \mathbf{x}) &= iT \sum_{k_0} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-k_0 \tau} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Delta(k_0, \mathbf{k}), \\ \Delta(k_0, \mathbf{k}) &= \int_0^{T^{-1}} d\tau \int d^3 x e^{k_0 \tau} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Delta(\tau, \mathbf{x}).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Die Bezeichnung \sum_{k_0} wird symbolisch für die Summe über die natürlichen Zahlen $-\infty < n < +\infty$ verwendet, welche die bosonischen Matsubara-Frequenzen

$$k_0 = i2n\pi T\tag{2.16}$$

definieren.

Aus der Schreibweise (2.13) kann man durch die Fourier-Transformation (2.15) die Spektraldarstellung des Matsubara-Propagators erhalten,

$$\begin{aligned}\Delta(k_0, \mathbf{k}) &= \int_0^{T^{-1}} d\tau \int d^3 x e^{k_0 \tau} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int \frac{d^4 K'}{(2\pi)^4} e^{-iK'x} \rho(K') [\Theta(\tau) + n_B(K')] \\ &= \int_0^{T^{-1}} d\tau e^{k_0 \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-\omega\tau} \rho(\omega, \mathbf{k}) [1 + n_B(\omega)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega, \mathbf{k}) \frac{1}{\omega - k_0} \quad \text{mit } k_0 = i2n\pi T.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Diese Darstellung kann mit der des sogenannten analytischen Propagators, der für beliebige komplexe Energien k_0 , $\text{Im}(k_0) \neq 0$, durch

$$D_{\text{ana}}(K) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega, \mathbf{k}) \frac{1}{\omega - k_0} \quad (2.18)$$

definiert ist, verglichen werden. Offensichtlich ist $\Delta(K)$ gerade die Einschränkung des analytischen Propagators auf die diskrete Menge der Matsubara-Frequenzen,

$$\Delta(K) = D_{\text{ana}}(K)|_{k_0 = i2n\pi T} . \quad (2.19)$$

Bei der Berechnung von Selbstenergien im Imaginärzeit-Formalismus, wie im nächsten Kapitel ausgeführt, ist jedoch die folgende Feststellung, gewissermaßen eine Umkehrung des gerade gezeigten Zusammenhangs, wichtiger. Der analytische Propagator kann nämlich auch aus dem Matsubara-Propagator $\Delta(k_0, \mathbf{k})$ bestimmt werden. Zunächst kann $\Delta(k_0, \mathbf{k})$ in die komplexe k_0 -Ebene fortgesetzt werden, indem man statt der Matsubara-Frequenzen k_0 beliebige komplexe Werte für k_0 zuläßt. Diese triviale Fortsetzung \mathcal{T} ist allerdings nicht eindeutig, da auch die Fortsetzungen $f(\exp\{k_0 T^{-1}\})\mathcal{T}$ mit Funktionen f der Eigenschaft $f(1) = 1$ auf den Matsubara-Frequenzen mit \mathcal{T} übereinstimmen. Jede andere als die triviale Fortsetzung kann jedoch ausgeschlossen werden, wenn man fordert, daß die auf die Weise erhaltene Funktion tatsächlich die analytischen Eigenschaften eines Propagators besitzt [BM60]. Der Beweis beruht auf dem bekannten Satz von Cauchy aus der Funktionentheorie über die Fortsetzbarkeit von punktweise definierten Funktionen [CH93].

Als letzte der hier betrachteten Ausführungen der 2-Punkt-Greenschen Funktion werden der sogenannte retardierte und der avancierte Propagator eingeführt. Diese ergeben sich als Grenzwerte des analytischen Propagators bei der Annäherung an die reelle k_0 -Achse von oben bzw. unten als

$$\begin{aligned} D_{\text{ret}}(k_0) &:= D_{\text{ana}}(k_0 + i0^+), \\ D_{\text{av}}(k_0) &:= D_{\text{ana}}(k_0 - i0^+) \quad \text{mit } k_0 \text{ reell.} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sie beschreiben das dynamische Verhalten des untersuchten Systems in der wirklichen Zeit unter Berücksichtigung der Kausalität. So lautet z. B. die Darstellung von D_{ret} im Konfigurationsraum

$$D_{\text{ret}}(x, x') = \Theta(t - t') \langle [\varphi(x), \varphi(x')] \rangle.$$

In der Spektraldarstellung

$$D_{\text{ret}}(k_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega, \mathbf{k}) \frac{1}{\omega - (k_0 + i0^+)} \quad (2.21)$$

wird die Kausalstruktur durch den infinitesimalen positiven Imaginärteil bestimmt. Wie üblich, ist dieser im Cauchyschen Sinne zu handhaben, d. h., wenn P den Hauptwert bezeichnet, gilt

$$\frac{1}{A + i\epsilon} = P \frac{1}{A} - i\pi\delta(A). \quad (2.22)$$

Die kausalen Propagatoren (2.20) treten beispielsweise in der linearen Antwort-Analyse der Zeitentwicklung des Systems bei kleinen Abweichungen vom Gleichgewicht auf und bestimmen daher auch die Dispersionsrelationen von Anregungen im System. Aus der Paritätseigenschaft der Spektralfunktion (2.14) folgt

$$D_{\text{ret}}(-k_0) = D_{\text{ret}}^*(k_0), \quad (2.23)$$

d. h., daß der Realteil (Imaginärteil) des retardierten Propagators eine gerade (ungerade) Funktion von k_0 ist.

Nach dem bisher gesagten ist es klar, wie man z. B. den retardierten Propagator aus dem Matsubara-Propagator erhält, nämlich durch die analytische Fortsetzung

$$\Delta(k_0, \mathbf{k})|_{k_0=i2n\pi T} \xrightarrow{k_0 \in \mathcal{R}} \Delta(k_0 + i0^+, \mathbf{k}) = D_{\text{ret}}(k_0, \mathbf{k}). \quad (2.24)$$

Mit Hilfe dieser Vorschrift lassen sich somit Resultate, die im Imaginärzeit-Formalismus abgeleitet wurden und daher zunächst keine Dynamik beschreiben, zu reellen Energien bzw. Zeiten fortsetzen. Umgekehrt kann man aus D_{ret} und D_{av} auch leicht die Spektralfunktion ρ erhalten, da diese gerade die Diskontinuität des analytischen Propagators an der reellen Achse ist,

$$\begin{aligned} \rho(k_0) &= \frac{1}{i} [D_{\text{ana}}(k_0 + i0^+) - D_{\text{ana}}(k_0 - i0^+)] \\ &= \frac{1}{i} [D_{\text{ret}}(k_0) - D_{\text{av}}(k_0)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Durch die analytische Fortsetzung (2.24) kann man aus dem Matsubara-Propagator somit auf einfache Weise auch die Spektralfunktion bestimmen.

Gegenüber anderen Formulierungen der Störungstheorie besitzt der Imaginärzeit-Formalismus den Vorteil, daß die Feynman-Regeln fast die gleichen wie in der Vakuum-QFT sind¹. Die einzige und intuitiv leicht einzusehende Modifikation ergibt sich aus der bereits diskutierten Tatsache, daß die Zeit hier euklidisch und beschränkt ist. Daher ist auch der freie Imaginärzeit-Propagator nur auf den Matsubara-Frequenzen (2.16) definiert und lautet

$$\Delta_0(K) = \frac{1}{k_0^2 - k^2} \quad \text{mit } k_0 = i2n\pi T. \quad (2.26)$$

In entsprechender Weise ist die Schleifen-Integration über intermediäre Teilchenzustände zu ersetzen,

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \longrightarrow iT \sum_{k_0} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (2.27)$$

Abgesehen von zusätzlichen Tensor- oder Spinorstrukturen lassen sich auch die freien Propagatoren in realistischen Theorien auf skalare Propagatoren zurückführen. Dabei muß für den fermionischen Propagator allerdings bemerkt werden, daß dieser nicht auf den

¹Wie bereits bemerkt wurde, werden die Feynman-Regeln durch die Wahl der Kontur \mathcal{C} in der komplexen Zeit-Ebene bestimmt. Im sogenannten Keldysh-Formalismus verläuft die Kontur zum Teil auf der reellen Achse. Als eine Realzeit-Methode erlaubt dieser Formalismus daher die direkte Bestimmung dynamischer Größen. Allerdings wird hier der Propagator matrixwertig, und es muß ein neuer Typ von Vertizes eingeführt werden.

geraden bosonischen Matsubara-Frequenzen wie in (2.26), sondern nur für die ungeraden Energien

$$k_0 = i(2n + 1)\pi T \quad (2.28)$$

definiert ist. Das folgt aus der Tatsache, daß spinorwertige Feldoperatoren antikommutierende Objekte sind. Daher muß im Gegensatz zum bosonischen Fall (2.15) die Fortsetzung des auf dem τ -Intervall $[0, T^{-1}]$ eingeschränkt erklärten Propagators antiperiodisch erfolgen, um den Propagator auf dem gesamten Definitionsbereich $[-T^{-1}, T^{-1}]$ zu erhalten. Um den statistischen Charakter der skalaren Propagatoren deutlich zu machen, werden diese künftig mit den Indizes B bzw. F gekennzeichnet.

2.2 Die Hochtemperatur- und die HTL-Approximation

Im folgenden Kapitel werden die Selbstenergien von elektromagnetisch und stark wechselwirkenden Teilchen bei endlichen Temperaturen untersucht. Für diese Selbstenergien erhält man selbst in der Einschleifen-Näherung, die die Quantenkorrektur niedrigster Ordnung zu den freien Propagatoren ergibt, recht komplizierte Ausdrücke, die sich nicht durch elementare Funktionen darstellen lassen.

Im weiteren sind insbesondere Systeme bei sehr hohen Temperaturen von Interesse. Gelegentlich werden solche heiße, wechselwirkende Vielteilchensysteme auch als Plasmen bezeichnet. Deren Temperatur T wird dabei im folgenden oft als wesentlich größer als die Masse der Teilchen angenommen, so daß die Teilchen dann als masselos angesehen werden können. Diese Annahme ist für Elektronen und die u - und d -Quarks insbesondere im Hinblick auf die später betrachteten stark wechselwirkenden Plasmen bei Temperaturen um $T \sim 200$ MeV gerechtfertigt. Unter dieser Voraussetzung hoher Temperatur lassen sich für die im folgenden Kapitel betrachteten Selbstenergien, die die Wechselwirkung des jeweiligen Teilchens mit dem Plasma beschreiben, Approximationen in analytischer Form angeben. Diese Approximationen können als Entwicklung nach dem dimensionslosen Parameter P/T angesehen werden, wobei P der Impuls des betrachteten Teilchens ist². Im Falle der Selbstenergie von z. B. Photonen, Gluonen und Elektronen bzw. Quarks besitzt das führende Glied dieser Hochtemperatur-Entwicklung bemerkenswerte Eigenschaften. Bevor diese diskutiert werden, soll jedoch zunächst exemplarisch die Einschleifen-Selbstenergie der skalaren Feldtheorie mit Selbstkopplung, die durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2] - \frac{1}{4!} g^2 \varphi^4 \quad (2.29)$$

beschrieben wird, untersucht werden. Nicht gezeigt sind in (2.29) die nötigen Vakuum-Counterterme. Dieses denkbar einfachste Beispiel einer wechselwirkenden und renormierbaren QFT ermöglicht eine übersichtliche Darstellung der Auswertemethoden und zeigt zudem bereits einige der relevanten Eigenschaften von Selbstenergien in realistischen Theorien. Im folgenden wird dabei häufig von dem Spezialfall masseloser Teilchen mit $m = 0$ ausgegangen.

Der führende Term der perturbativen Entwicklung der skalaren Selbstenergie ist der in der Abbildung 2.1 dargestellte Einschleifen-Prozeß. Im Vakuum ergibt das Feynman-

²Im Imaginärzeit-Formalismus ist P eine kleine Größe, wenn jede Komponente klein ist. Für einen minkowskischen 4-Vektor müßte man entsprechend die Kleinheit der zeitlichen und räumlichen Komponenten getrennt fordern.

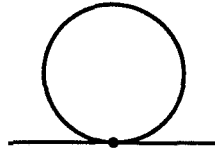


Abbildung 2.1: Der Einschleifen-Beitrag zur Selbstenergie in der skalaren Feldtheorie mit φ^4 -Wechselwirkung.

Diagramm einen quadratisch divergenten Beitrag,

$$\Pi^{T=0} = -\frac{i}{2} g^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} D_0(K) \quad \text{mit} \quad D_0(K) = \frac{1}{K^2 - m^2}. \quad (2.30)$$

Es ist klar, daß die Selbstenergie, die durch die Selbstwechselwirkung an einem Punkt im Konfigurationsraum bestimmt wird, keine Impulsabhängigkeit besitzen kann. Nach der Separation der Divergenz in der Selbstenergie äußerte sich die Einschleifen-Selbstwechselwirkung daher lediglich in der renormierten (physikalischen) Masse des Teilchens.

Bei der Temperatur T erhält man entsprechend den modifizierten Feynman-Regeln (2.26) und (2.27) im Imaginärzeit-Formalismus für die Selbstenergie den Ausdruck

$$\Pi = -\frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} \Delta_B(K) \quad \text{mit} \quad \Delta_B(K) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 - m^2}. \quad (2.31)$$

Die Summe über die Matsubara-Frequenzen $k_0 = i2n\pi T$ kann in bekannter Weise durch ein Wegintegral in der komplexen k_0 -Ebene ausgedrückt werden [Kap89]. Zunächst wird die Summe über k_0 als Summe über die Residuen des Produkts $f(\omega)n_B(\omega)$ bei den Polstellen $\omega = k_0$ der Bose-Verteilungsfunktion $n_B(\omega) = [\exp\{\omega/T\} - 1]^{-1}$ formuliert, was aufgrund der Beziehung $\text{Res}[n_B(\omega)]|_{\omega=k_0} = T$ möglich ist. Ist die Funktion $f(\omega)$ entlang der Imaginärachse regulär, folgt durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel nach einer Deformation des

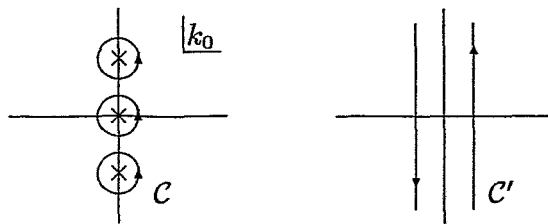


Abbildung 2.2: Die Deformation des Integrationswegs zur Auswertung der Matsubara-Summe.

Integrationsweges entsprechend der Abbildung 2.2 und einer Koordinatentransformation $\omega \rightarrow -\omega$

$$T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(i2n\pi T) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-i\infty}^{+i\infty} d\omega f(\omega) + \int_{-i\infty+0^+}^{+i\infty+0^+} d\omega (f(\omega) + f(-\omega)) n_B(\omega) \right], \quad (2.32)$$

wobei die Relation $n_B(-\omega) = -(1 + n_B(\omega))$ ausgenutzt wurde. Diese Schreibweise macht deutlich, daß die Selbstenergie (2.31) die Summe von zwei separaten Termen ist, $\Pi = \Pi^{T=0} + \Pi^T$. Der erste Term ist temperaturunabhängig und gerade der Vakuum-Anteil (2.30) der Selbstenergie. Der zweite Summand ist daher der temperaturabhängige Anteil der Selbstenergie. Für diesen erhält man

$$\Pi^T = \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} n_B(k) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{m^2 + k^2}. \quad (2.33)$$

Es ist bereits in dieser Form leicht zu sehen, daß Π^T endlich ist; die im Vakuum-Anteil für die UV-Divergenz verantwortlichen Beiträge werden durch die thermische Verteilung n_B unterdrückt. Der thermische Anteil der Selbstenergie bedarf daher keiner Renormierung, er ist also renormierungsunabhängig. Darüber hinaus kann man einfach sehen, daß Π^T mit der Temperatur wie T^2 skaliert³. Daher ist der im folgenden oft betrachtete reine Temperatur-Anteil von Selbstenergien in heißen Plasmen zugleich eine gute Approximation der gesamten Selbstenergie.

Die Schleifen-Summation in (2.31) kann auch elegant mit der sogenannten Saclay-Methode ausgewertet werden, siehe z. B. [Pi88]. Angewendet auf den vorliegenden Fall, beruht diese auf der Feststellung, daß $T \sum_{k_0} f(k_0) = T \sum_{k_0} \exp\{k_0 \tau\} f(k_0)|_{\tau=0}$ gerade die Fourier-Transformierte \tilde{f} von $f(k_0)$ zum Zeitpunkt $\tau = 0$ ist,

$$T \sum_{k_0} f(k_0) = \tilde{f}(\tau = 0). \quad (2.34)$$

Um die Matsubara-Summe in der Gleichung (2.31) zu berechnen, benötigt man nur noch die sogenannte τ -Darstellung des Propagators. Diese kann man z. B. mit Hilfe der Beziehung (2.32) direkt berechnen und erhält

$$\Delta_B(\tau, k) = T \sum_{k_0} e^{k_0 \tau} \Delta_B(k_0, k) = -\frac{1}{2\omega} \left[(1 + n_B(\omega)) e^{-\omega \tau} + n_B(\omega) e^{\omega \tau} \right]. \quad (2.35)$$

Noch einfacher ist es, die Gültigkeit der Umkehr-Transformation zu zeigen,

$$\Delta_B(k_0, k) = \int_0^{T^{-1}} d\tau e^{-k_0 \tau} \Delta_B(\tau, k), \quad (2.36)$$

die aufgrund der Eindeutigkeit der Fourier-Transformation auch die Darstellung (2.35) beweist. So erhält man mit (2.34) und $\Delta_B(\tau = 0) = -(1 + 2n_B)/(2\omega)$ wieder die Darstellung (2.33) für Π^T .

Im Falle einer nicht-verschwindenden Masse m in der Lagrange-Dichte (2.29) läßt sich der Ausdruck für Π^T nicht durch elementare Funktionen darstellen, sondern führt auf die Integraldarstellung

$$\Pi^T = g^2 \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{e^{\omega/T} - 1} \frac{1}{\omega}. \quad (2.37)$$

Ähnlich wie oben bereits für die QED- und QCD-Selbstenergien erwähnt, läßt sich auch für diese Darstellung eine Hochtemperatur-Entwicklung angeben. Diese lautet [Ber74]

$$\Pi^T = \frac{1}{4!} g^2 T^2 \left[1 - \frac{3}{\pi} \frac{m}{T} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{m}{T} \right)^2 \ln \frac{m}{T} \right) \right]. \quad (2.38)$$

³Dies ist insbesondere im masselosen Fall klar, weil dann T die einzige zur Verfügung stehende Größe der Dimension einer Energie ist.

Bereits an dem einfachsten nicht-trivialen Beispiel einer wechselwirkenden QFT wird deutlich, daß die Hochtemperatur-Entwicklung von Selbstenergien keinesfalls trivial ist. Außer im speziellen Fall masseloser Teilchen ist die Entwicklung der Selbstenergie nach dem dimensionslosen Parameter $(m/T)^2$ nicht-analytisch. Einige Überlegungen zur Konvergenz solcher Reihenentwicklungen findet man in [Pes95b].

Eng verknüpft mit der Hochtemperatur-Approximation sind die Begriffe der sogenannten *hard thermal loops* und das Resummations-Schema nach Braaten und Pisarski [BP90a]. Einige wichtige Grundgedanken dazu sollen zunächst anhand der skalaren φ^4 -Theorie erläutert werden.

Die Dyson-Gleichung

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1} - \Pi \quad (2.39)$$

verknüpft die Selbstenergie Π mit dem inversen vollen Propagator Δ^{-1} . Der volle Propagator beschreibt nämlich auch sogenannte reduzible Wechselwirkungsprozesse, die schematisch durch

$$\text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \dots, \quad (2.40)$$

dargestellt werden können, wobei der Vollkreis die irreduzible Selbstenergie und die Linie den freien Propagator Δ_0 symbolisieren. Diese Resummation des Propagators wird im allgemeinen dann besonders wesentlich sein, wenn die Selbstenergie von der gleichen Größenordnung wie der inverse freie Propagator ist.

Im vorliegenden Fall ist Π bzw. Π^T eine Konstante. Bei der Integration in (2.37) geben aufgrund des Integrationsmaßes $k^2 n_B$ die Impulse $k \sim T$ die Hauptbeiträge zu der Selbstenergie, die selbst von der Ordnung $g^2 T^2$ ist (2.38). Nach der Konvention von Braaten und Pisarski [BP90a] werden diese Impulse als *hart* bezeichnet. Damit ist klar, daß die Resummation (2.39) insbesondere für äußere Impulse der Größenordnung gT oder kleiner wesentlich ist. Die Verwendung der Einschleifen-Approximation für die Selbstenergie ist aber von vornherein nur für kleine Kopplungsstärken $g \ll 1$ zu rechtfertigen. Daher sind in diesem Fall die Skalen der weichen äußeren Impulse $P \sim gT$, für welche die Resummation besonders wichtig ist, und die der harten Impulse, welche die Hauptbeiträge zur Selbstenergie liefern, deutlich verschieden.

Durch Braaten und Pisarski [BP90a] wurde gezeigt, daß der eben dargestellte Sachverhalt nicht nur für die betrachtete skalare QFT gültig ist. Auch in anderen Theorien kann sich die Resummation von Propagatoren ebenso wie die weiterer Greenscher Funktionen als wesentlich erweisen, weil bei weichen äußeren Impulsen Anteile der Wechselwirkungskorrekturen von der gleichen Größenordnung wie die nackten Größen sein können. Diese relevanten Wechselwirkungsbeiträge werden nach Braaten und Pisarski als *hard thermal loops* bezeichnet, weil sich generell zeigen läßt, daß diese aus Schleifen-Integrationen über harte Impulse stammen⁴. Für die Bezeichnung *hard thermal loops* wird im folgenden oft die gebräuchliche Abkürzung HTL verwendet.

Die Propagatoren in realistischen Quantenfeldtheorien sind tensor- oder spinorwertig. Diese Theorien besitzen daher eine wesentlich kompliziertere Struktur als die skalare Theorie. Zudem hängen alle Selbstenergien, die nicht durch Feynman-Diagramme mit *Tadpole*-Topologie (wie das in der Abbildung 2.1) beschrieben werden, vom äußeren Impuls ab. In

⁴Schließt man z. B. bei der Schleifen-Integration (2.33) für die skalare Selbstenergie die weichen Impulse aus, ändert das das Resultat nur in der Ordnung $\mathcal{O}(g^3 T^2)$.

solchen Fällen existieren neben der Temperatur auch weitere Größen von der Dimension einer Energie. Es ist daher nicht von vornherein klar, welche Greensche Funktionen HTL-Anteile haben. Die Greenschen Funktionen mit HTL-Komponenten wurden in [BP90a] genau klassifiziert. Außerdem sind dort und in [Pi89a, Pi89b] Eigenschaften der HTL sowie nützliche *power-counting* Regeln angegeben.

Wie aus dem vorangegangenen hervorgeht, sind die HTL-Anteile von Selbstenergien gerade die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(g^2 T^2)$ der entsprechenden Hochtemperatur-Entwicklung. Als solche sind die HTL-Resultate Approximationen der Einschleifen-Selbstenergien. Somit ist auch der durch die HTL-Selbstenergie resummierte Propagator eine approximierete Größe, in der nur einige der wichtigsten Wechselwirkungsbeiträge berücksichtigt sind.

Es werden nun einige wichtige Eigenschaften der *hard thermal loops* anhand des repräsentativen Beispiels des sogenannten transversalen Gluon-Propagators aufgeführt, der im Abschnitt 3.2 genau definiert wird. Die Ableitung der HTL-Selbstenergie ist im Anhang B.3 angegeben und liefert das Resultat

$$\Pi_T^{\text{HTL}}(P) = \frac{3}{2} m_g^2 \frac{p_0^2}{p^2} \left[1 - \left(1 - \frac{p^2}{p_0^2} \right) \frac{p_0}{2p} \ln \frac{p_0 + p}{p_0 - p} \right], \quad (2.41)$$

wobei $m_g^2 = \frac{1}{3} g^2 T^2$ definiert wurde, g die starke Kopplungskonstante bezeichnet, und $P = (p_0, p)$ der 4-Impuls des Gluons ist. Dieser Ausdruck für die transversale Gluon-Selbstenergie besitzt vernünftige physikalische Eigenschaften, die die Bedeutung der HTL-Approximation erklären. Zunächst kann man feststellen, daß die Approximation Π_T^{HTL} entsprechend den Ausführungen im Abschnitt 2.1 eine Spektralfunktion ρ_T^{HTL} definiert, welche den grundlegenden Erfordernissen (2.14) genügt. So ist ρ_T^{HTL} semi-positiv definit, und transversale Gluon-Anregungen im Plasma werden gedämpft, da für positive Energien p_0 der Imaginärteil der retardierten Selbstenergie nicht-negativ ist. Ebenso besitzt ρ_T^{HTL} die Paritätseigenschaft von Spektralfunktionen. Zudem ist diese so bestimmte approximative Spektralfunktion richtig normiert, d. h., ρ_T^{HTL} erfüllt die in (2.14) angegebene Summenregel exakt, und zwar für beliebige Werte der Kopplungskonstante g bzw. von m_g . Wie in der Abbildung 2.3 dargestellt ist, sind dabei die Beiträge, die von den Singularitäten und den Schnitten von ρ_T^{HTL} stammen, je nach Wert der Kopplungskonstante g unterschiedlich groß. Für kleine Kopplungsstärken ist die Summenregel fast ausschließlich durch den Polbeitrag ausgeschöpft, weshalb man in diesem Fall die Gluonen als Quasiteilchen ansehen kann. Obwohl sich bei starker Kopplung die Lage des Pols deutlich von der im wechselwirkungsfreien Fall mit $p_0 = p$ unterscheidet, ist auch dann die Summenregel in guter Näherung durch den Polbeitrag allein erfüllt⁵.

Des weiteren sind die verschiedenen Fortsetzungen der HTL-Selbstenergie in den jeweiligen Gebieten der komplexen p_0 -Ebene analytisch, so daß die entsprechenden resummierten Propagatoren den allgemeinen Kausalitätsforderungen genügen, die im Abschnitt 2.1 besprochen wurden. Dies läßt sich nicht nur für die skalaren Projektionen des Propagators zeigen, sondern auch für den tensorwertigen Gluon-Propagator selbst [Hen96]. Ein analoges Argument für den Fermion-Propagator in der HTL-Näherung findet man z. B. in [Elm97].

Schließlich ist für das effektive Resummations-Schema nach Braaten und Pisarski die Eichinvarianz der HTL-Selbstenergien von großer Bedeutung. Obwohl im allgemeinen die Gluon-Selbstenergie eichabhängig ist, ergeben die eichabhängigen Terme keinen Beitrag in

⁵Bemerkenswerterweise wächst für größere Werte der Kopplung der Quasiteilchen-Anteil in der Summenregel wieder.

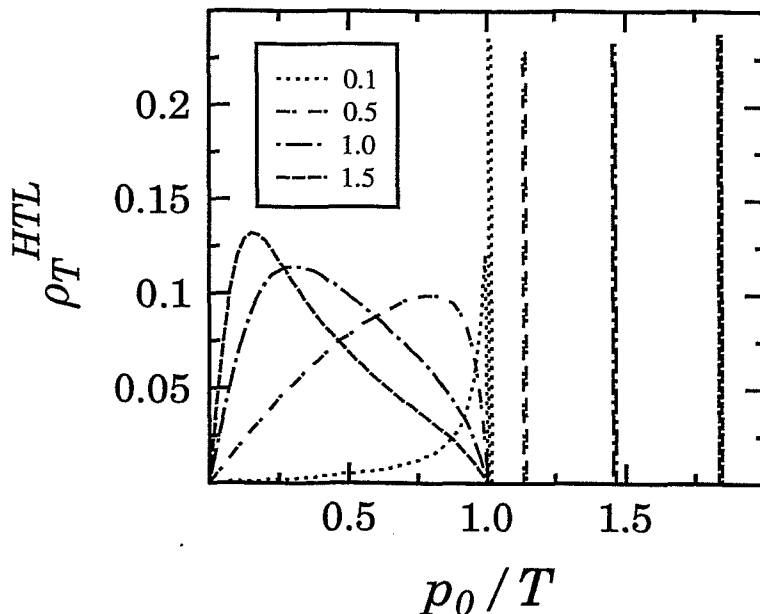


Abbildung 2.3: Die transversale Gluon-Spektralfunktion $\rho_T^{HTL}(p_0, p)$ in der HTL-Approximation für $p/T = 1$. Durch unterschiedliche Linientypen sind die Resultate für Werte von $m_g/T = 0.1, 0.5, 1$ und 1.5 dargestellt. Unterhalb von $p_0/T = p/T = 1$ liegen die Beiträge aus den Schnitten der Selbstenergie, oberhalb liegen die singulären Pol- bzw. Quasiteilchen-Anteile. Diese sind schematisch durch Gauß-Funktionen kleiner endlicher Breite dargestellt, deren Höhe proportional zum Anteil der Pole in der Summenregel (2.14) ist, wobei die volle Ordinatenlänge 100% entspricht.

der führenden Ordnung der Hochtemperatur-Entwicklung⁶. Dies wurde für verschiedene Klassen von Eichungen explizit gezeigt. Die Eichinvarianz beliebiger Greenscher Funktionen im HTL-Limes kann unter recht allgemeinen Voraussetzungen der QFT auch formal bewiesen werden [KKR91].

Die HTL-Greenschen Funktionen erfüllen Ward-Identitäten, und es läßt sich eine nicht-lokale effektive Lagrange-Dichte angeben, aus der die HTL-Propagatoren als nackte, effektive Größen folgen [BP92, FT92]. Im Sinne der Renormierungsgruppentheorie beschreibt diese Lagrange-Dichte eine effektive Theorie, in der die harten Freiheitsgrade der ursprünglichen Theorie ausintegriert wurden. Perturbative Entwicklungen in dieser effektiven Theorie stellen eine Umordnung der ursprünglichen Störungsreihe dar. Dieses Vorgehen ermöglicht eine konsistente perturbative Berechnung von bestimmten Größen, die in der ursprünglichen Störungstheorie nicht durch eine naive, endliche Schleifen-Entwicklung zugänglich sind. Bei endlichen Temperaturen können nämlich unter Umständen aufgrund des Verhaltens der

⁶Das steht in einem gewissen Zusammenhang mit der Tatsache, daß die HTL-Approximation für Abelsche und nicht-Abelsche Bosonen-Selbstenergien bis auf einen Faktor übereinstimmen. Die Eichinvarianz der Abelschen Selbstenergie in der Einschleifen-Näherung ist aber offensichtlich.

Bose-Verteilung bei weichen Impulsen $p/T \sim g \ll 1$,

$$n_B = \frac{1}{e^{p/T} - 1} \sim \frac{T}{p} \sim \frac{1}{g},$$

Diagramme beliebig hoher Ordnung in der Schleifen-Entwicklung zu einer bestimmten Ordnung der Störungsreihe in der Kopplungskonstanten g beitragen. Mit anderen Worten: die effektive Resummation nach Braaten und Pisarski berücksichtigt zumindest in führender Ordnung, daß bei endlichen Temperaturen der Zusammenhang zwischen den Ordnungen der Entwicklung nach der Zahl der Schleifen bzw. den Potenzen von g nicht mehr streng gilt.

Eine Größe, die bereits in niedrigster Ordnung $\mathcal{O}(g)$ eine Resummation der HTL-Anteile der Selbstenergie entsprechend (2.40) erfordert, ist die weiter unten diskutierte Gluon-Dämpfungsfunktion. Hier sei nur bemerkt, daß eine naive Schleifen-Entwicklung zu inkonsistenten Resultaten für diese Größe führt, weil dadurch nicht alle für eine gegebene Ordnung relevanten Beiträge erfaßt werden.

Wie aus den oben dargestellten Überlegungen hervorgeht, erlauben Vorgehensweisen wie die effektive HTL-Resummation im Prinzip die konsistente perturbative Berechnung aller interessierender Eigenschaften heißer Plasmen. Betont werden sollen an dieser Stelle noch einmal die Voraussetzungen der Braaten-Pisarski-Methode. Diese sind

$$\begin{aligned} g &\ll 1, \\ P_{\text{weich}} &\ll K_{\text{hart}} \triangleq gT \ll T. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Die erste Forderung sichert, daß die in der Schleifen-Entwicklung einer Greenschen Funktion führenden Terme wesentlich größer als die folgenden Glieder sind. Aus dieser Forderung kann dann durch die gleichlautende zweite Voraussetzung der in der Hochtemperatur-Entwicklung führende Beitrag bestimmt werden. In stark wechselwirkenden Plasmen, die höchstwahrscheinlich in naher Zukunft in relativistischen Schwerionenstößen erzeugt werden können, wird die Kopplungsstärke jedoch mit Sicherheit nicht klein sein. Es stellt sich daher die Frage nach der Anwendbarkeit der HTL-Resummation bei starker Kopplung.

Nun kann die HTL-Resummation zunächst als eine rein formale Berechnungsmethode angesehen werden, um Divergenzen der Theorie bzw. relevante Anteile in reduzierbaren Wechselwirkungsprozessen handhaben zu können und so zu formal korrekten Resultaten zu gelangen. Als solche ist diese Resummation mit einer gewissen Willkür behaftet. Das bedeutet aber, daß man generell, und z. B. auch bei großen Kopplungsstärken, mit effektiven, resummierten Einschleifen- oder auch HTL-Propagatoren rechnen kann (was aber eventuell, wie es sich auch tatsächlich andeutet, nicht alle Divergenzen beseitigt).

Die Resummation gerade der *hard thermal loops* ist jedoch physikalisch motiviert. Diese Resummation berücksichtigt die Modifikation der in einem bestimmten (perturbativen) Sinne wichtigsten Teilchenzustände im Medium. Die entsprechend organisierte Störungstheorie geht dann von diesen als 'freien' Zuständen aus und liefert so eine angepaßtere Beschreibung als bei Verwendung der eigentlichen freien Zustände als perturbative Basis. Mit dieser Interpretation der HTL-Propagatoren stehen auch die oben aufgezählten Eigenschaften im Zusammenhang, welche die *hard thermal loops* in gewisser Weise vor anderen Resummationsmöglichkeiten auszeichnen.

Unter diesen Gesichtspunkten ist daher insbesondere die zweite der Voraussetzungen (2.42) wichtig, wenn mittels der Braaten-Pisarski-Methode berechnete Resultate zu größeren

Kopplungsstärken extrapoliert werden. Die zu untersuchende Frage ist also: Sind die HTL-Selbstenergien, zu Impulsen $gT \sim T$ für $g \sim 1$ extrapoliert, noch immer die Hauptbeiträge der Einschleifen-Selbstenergien wie im eigentlichen Gültigkeitsbereich der Approximation? Diese Frage wird im folgenden Kapitel für heiße Plasmen untersucht, deren Wechselwirkung durch die Quantenelektrodynamik (QED) bzw. durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben wird.

3 Einschleifen-Selbstenergien in QED und QCD bei endlichen Temperaturen

3.1 Die Photon-Selbstenergie

In diesem Abschnitt wird der Einschleifen-Beitrag zur Photon-Selbstenergie $\Pi_{\mu\nu}^\gamma$ bei endlichen Temperaturen berechnet. Gelegentlich wird $\Pi_{\mu\nu}^\gamma$ auch als Polarisationsstensor bezeichnet. Das relevante Feynman-Diagramm ist in der Abbildung 3.1 dargestellt. Unter Verwen-

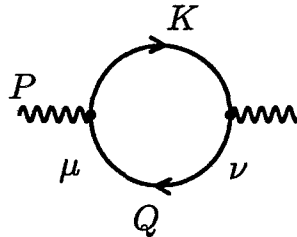


Abbildung 3.1: Einschleifen-Beitrag zur Photon-Selbstenergie.

dung der Konventionen und Feynman-Regeln nach [IZ80] lautet der Vakuum-Beitrag zum Polarisationsstensor

$$\Pi_{\mu\nu}^\gamma(P) = -ie^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma_\mu S^{(0)}(-Q) \gamma_\nu S^{(0)}(K)], \quad (3.1)$$

wobei $S^{(0)}(K) = [\not{K} - m_e]^{-1}$ der freie Elektron-Propagator und $Q = P - K$ ist. Dieser Ausdruck ist divergent und erfordert eine Renormierung [IZ80]. Auf diese Vakuum-Renormierung wird an dieser Stelle nicht eingegangen, da hier ausschließlich die Effekte der endlichen Temperatur des Mediums studiert werden sollen.

Bei der Berechnung der Photon-Selbstenergie bei sehr hohen Temperaturen $T \gg m_e \sim 0.5 \text{ MeV}$ kann man die Masse m_e der Elektronen vernachlässigen und den Propagator $S^{(0)}$ als

$$S^{(0)}(K) = \not{K} \Delta_F(K) \quad \text{mit} \quad \Delta_F(K) = 1/K^2 \quad (3.2)$$

schreiben. Der Index an $\Delta_F(K)$ deutet auf den fermionischen Charakter des skalaren Propagators hin. Im Imaginärzeit-Formalismus ist $S^{(0)}(K)$ nur für die ungeraden Matsubara-Frequenzen $k_0 = i(2n + 1)\pi T$ definiert.

Nach dem Auswerten der Spur,

$$\text{tr} [\gamma_\mu \not{Q} \gamma_\nu \not{K}] = 4 [K_\mu Q_\nu + K_\nu Q_\mu - (KQ) g_{\mu\nu}],$$

und der Ersetzung der k_0 -Integration in (3.1) durch die Summe über die Matsubara-Frequenzen entsprechend (2.27) folgt für den Polarisationsensor im thermischen Medium

$$\Pi_{\mu\nu}^\gamma(P) = -4e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} [K_\mu Q_\nu + K_\nu Q_\mu - (KQ) g_{\mu\nu}] \Delta_F(K) \Delta_F(Q). \quad (3.3)$$

Es ist klar, daß nicht alle Komponenten des Polarisationsensors unabhängig voneinander sind¹. Vielmehr schränkt die Forderung nach lokaler Eichinvarianz, formal durch die Slavnov-Taylor-Identitäten ausgedrückt, die allgemeine Gestalt des Photon-Propagators $D_{\mu\nu}^\gamma(P)$ ein. Dieser muß der Beziehung

$$P^\mu D_{\mu\nu}^\gamma = (\xi - 1) P_\nu \frac{1}{P^2} \quad (3.4)$$

genügen, wobei ξ der Parameter der gewählten kovarianten Eichung ist [IZ80]. Die Gültigkeit der Identität (3.4) bei endlichen Temperaturen ist in [Wel97] bewiesen.

Im Lorentz-symmetrischen Vakuum ist $\Pi_{\mu\nu}^\gamma$ eine Linearkombination der Tensoren $g_{\mu\nu}$ und $P_\mu P_\nu$. Aus der Beziehung (3.4) folgt dann die Ward-Identität $P^\mu \Pi_{\mu\nu}^\gamma(P) = 0$. Damit hängt die Selbstenergie hier von nur einer skalaren Funktion $\Pi(P^2)$ der Lorentz-Invarianten P^2 ab, d. h., es gilt $\Pi_{\mu\nu}^\gamma = (g_{\mu\nu} - P_\mu P_\nu / P^2) \Pi(P^2)$.

Bei endlichen Temperaturen zeichnet das thermische Medium ein Bezugssystem aus. Die Lorentz-Symmetrie $O(1,3)$ des Vakuums ist daher zur $O(3)$ -Symmetrie, charakterisiert durch die 4-Geschwindigkeit des Mediums, gebrochen. Die Darstellung eines allgemeinen $O(3)$ -symmetrischen Tensor erfordert aber eine größere Basis als die eines Lorentz-symmetrischen Tensors. Wenn u_μ die 4-Geschwindigkeit des Wärmebades ist, kann die Tensor-Basis $[g_{\mu\nu}, P_\mu P_\nu]$ beispielsweise um die Tensoren $u_\mu u_\nu$ und $P_\mu u_\nu + P_\nu u_\mu$ erweitert werden. Zur Darstellung des Polarisationsensors und des Propagators ist es jedoch zweckmäßig, zu einer anderen, den physikalischen Freiheitsgraden besser angepaßten Tensor-Basis überzugehen. Durch Linearkombinationen der vier Tensoren lassen sich genau zwei zueinander orthogonale Tensoren bilden, die bezüglich des 4-Impulses P transversal sind, die also $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{T,L} P^\mu = 0$ erfüllen. Diese haben die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu\nu}^T &= - \left(g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{P^2} - \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}^L}{n^2} \right), \\ \mathcal{P}_{\mu\nu}^L &= n_\mu n_\nu \quad \text{mit } n_\mu := \frac{P_\mu P u - u_\mu P^2}{(P u)^2 - P^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Transversalität dieser Tensoren zu P sowie ihre Orthogonalität untereinander sind aufgrund der Relationen $P n = 0$ und $(\mathcal{P}^L)^2 = n^2 \mathcal{P}^L$ unmittelbar klar. Die Indizes T und L wurden in (3.5) eingeführt, weil die angegebenen Tensoren auf den zum 3-Vektor \mathbf{p} transversalen bzw. longitudinalen Unterraum projizieren. Diese Eigenschaften sind bei der expliziten

¹Die Selbstenergie ist nach der Dyson-Gleichung der Wechselwirkungsbeitrag im inversen Propagator. Als Erwartungswert eines Korrelators zweier Feldoperatoren enthält dieser, wie im vorliegenden Falle, redundante Informationen, wenn die Feldoperatoren neben den physikalischen auch unphysikalische Freiheitsgrade beschreiben.

Darstellung der Tensoren im lokalen Ruhesystem des Mediums offensichtlich. So hat beispielsweise \mathcal{P}^T dort die Gestalt

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^T|_{\text{ruh}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_{mn} - \hat{p}_m \hat{p}_n \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet \hat{p}_m entsprechend den im Anhang A aufgeführten Konventionen die m -te Komponente von $\hat{\mathbf{p}}$. Zur expliziten Darstellung der verbleibenden zwei Tensoren wird auf [Wel97] verwiesen, da diese im weiteren keine Rolle spielen. Aus (3.4) folgt nämlich auch bei endlichen Temperaturen und trotz der 4-dimensionalen $O(3)$ -Tensor-Basis die Transversalität des Polarisationsensors, $P^\mu \Pi_{\mu\nu}^\gamma(P) = 0$. Dies ist auch von vornherein zu erwarten, da die Ward-Identität Ausdruck der Stromerhaltung ist und daher auch bei endlichen Temperaturen gelten muß.

Die Photon-Selbstenergie hängt somit bei endlichen Temperaturen von zwei skalaren Funktionen des Impulses ab und lautet in allgemeiner Form²

$$\Pi_{\mu\nu}(P) = \mathcal{P}_{\mu\nu}^T \Pi_T(P) + \mathcal{P}_{\mu\nu}^L \Pi_L(P). \quad (3.6)$$

Die Funktionen Π_T und Π_L heißen transversale bzw. longitudinale Selbstenergie. Betont werden muß an dieser Stelle noch, daß diese Größen zunächst beliebige Funktionen von p_0 und p sein können, während im Vakuum Lorentz-invariante Größen nur von der Kombination $P^2 = p_0^2 - p^2$ abhängen können.

In der angegebenen Notation lautet der Eichboson-Propagator

$$D_{\mu\nu} = \mathcal{P}_{\mu\nu}^T \Delta_T + \mathcal{P}_{\mu\nu}^L \Delta_L + \xi \frac{P_\mu P_\nu}{P^4}$$

mit $\Delta_T = \frac{1}{P^2 - \Pi_T}$, $\Delta_L = \frac{1}{p^2 - \Pi_L}$. (3.7)

Der erste Term beschreibt die Propagation der $\text{tr}[\mathcal{P}^T] = 2$ transversalen Vakuum-Moden im thermischen Medium. Die durch den zweiten Term beschriebene, longitudinale Anregung existiert im Vakuum nicht als physikalischer Freiheitsgrad, sondern ist ein kollektiver Effekt und Konsequenz der gebrochenen Lorentz-Symmetrie. Es ist klar, daß dieser Freiheitsgrad für sehr harte Bosonen, auf die die Einwirkung des Mediums sehr gering ist, verschwinden muß.

Explizit lauten die Komponenten der Selbstenergie im lokalen Ruhesystem des Mediums ($u^\mu = (1, \mathbf{0})$)

$$\begin{aligned} \Pi_{00} &= \Pi_L, \\ \Pi_{i0} &= \Pi_{0i} = -\frac{p_i p_0}{p^2} \Pi_L, \\ \Pi_{ij} &= (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \Pi_T + \hat{p}_i \hat{p}_j \frac{p_0^2}{p^2} \Pi_L, \end{aligned}$$

so daß man für Π_T und Π_L

$$\begin{aligned} \Pi_T &= \frac{1}{2} (\delta^{ij} - \hat{p}^i \hat{p}^j) \Pi_{ij}, \\ \Pi_L &= \Pi_{00} \end{aligned} \quad (3.8)$$

²Einige der folgenden Tensor-Darstellungen finden später auch für die Betrachtung der Gluon-Polarisation in der Feynman-Eichung Verwendung. In diesen wird daher der Index γ weggelassen.

erhält.

In der Einschleifen-Approximation folgt aus der Gleichung (3.3) für die beiden Komponenten der Photon-Selbstenergie

$$\begin{aligned}\Pi_T^\gamma(P) &= -4e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} (k_0 q_0 - (\hat{\mathbf{p}}\mathbf{k})(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{q})) \Delta_F(K) \Delta_F(Q), \\ \Pi_L^\gamma(P) &= -4e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} (k_0 q_0 + \mathbf{k}\mathbf{q}) \Delta_F(K) \Delta_F(Q).\end{aligned}\quad (3.9)$$

Wie im Anhang B.1 gezeigt wird, ist die Berechnung der auftretenden Summen elegant mit der bereits im Abschnitt 2.2 verwendeten Saclay-Methode durchzuführen. Als Ergebnis erhält man

$$\begin{aligned}F_{FF}^{(1,1)} &= T \sum_{k_0} k_0 q_0 \Delta_F(K) \Delta_F(Q) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ [1 - n_F(q) - n_F(k)] \left(\frac{1}{p_0 + k + q} - \frac{1}{p_0 - k - q} \right) \right. \\ &\quad \left. + [n_F(q) - n_F(k)] \left(\frac{1}{p_0 + k - q} - \frac{1}{p_0 - k + q} \right) \right\}, \\ F_{FF}^{(0)} &= T \sum_{k_0} \Delta_F(K) \Delta_F(Q) \\ &= \frac{1}{4kq} \left\{ [1 - n_F(q) - n_F(k)] \left(\frac{1}{p_0 + k + q} - \frac{1}{p_0 - k - q} \right) \right. \\ &\quad \left. - [n_F(q) - n_F(k)] \left(\frac{1}{p_0 + k - q} - \frac{1}{p_0 - k + q} \right) \right\},\end{aligned}\quad (3.10)$$

wobei $n_F(k)$ die Fermi-Verteilungsfunktion bezeichnet,

$$n_F(k) = \frac{1}{\exp\{k/T\} + 1}.\quad (3.11)$$

Damit sind Π_T^γ und Π_L^γ auf 3-dimensionale Integrale zurückgeführt,

$$\begin{aligned}\Pi_T^\gamma(P) &= -4e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [F_{FF}^{(1,1)} - (\hat{\mathbf{p}}\mathbf{k})(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{q}) F_{FF}^{(0)}], \\ \Pi_L^\gamma(P) &= -4e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [F_{FF}^{(1,1)} + \mathbf{k}\mathbf{q} F_{FF}^{(0)}].\end{aligned}\quad (3.12)$$

Die hier berechneten Selbstenergien (bzw. die Größen $F_{FF}^{(1,1)}$ und $F_{FF}^{(0)}$) sind als Funktionen von p_0 zunächst nur für die bosonischen Matsubara-Frequenzen $i2n\pi T$ definiert. Wie jedoch im Kapitel 2 diskutiert wurde, kann man aus diesen leicht die retardierten Selbstenergien für die reelle Energie p_0 durch die analytische Fortsetzung der Matsubara-Frequenzen zu $p_0 + i0^+$ erhalten (vergleiche dazu (2.24)). Bei der Diskussion der Real- und Imaginärteile der retardierten Selbstenergien kann man sich auf die Betrachtung von positiven Energien p_0 beschränken, da entsprechend der Beziehung (2.23) für den Propagator auch für retardierte Selbstenergien

$$\Pi_{\text{ret}}(-p_0) = \Pi_{\text{ret}}^*(p_0)\quad (3.13)$$

gelten muß.

In den Ausdrücken (3.12) für die Photon-Selbstenergie ist der Vakuum-Anteil (3.1) enthalten. Zu diesem tragen alle Terme der Funktionen $F_{FF}^{(1,1)}$ und $F_{FF}^{(0)}$ aus (3.10) bei, die für $T \rightarrow 0$ nicht verschwinden, d. h., alle Terme, die keine thermische Verteilungsfunktion enthalten. Da der verbleibende Mediumanteil endlich ist, erfolgt die Renormierung der Selbstenergie bei endlichen Temperaturen wie im Vakuum, was $\Pi_r = \Pi_r^{T=0} + \Pi^T$ ergibt. Bei allen folgenden Diskussionen der Realteile von Selbstenergien wird immer nur der eigentliche Mediumanteil Π^T betrachtet werden. Dieser ist unabhängig von der Renormierungsskala und liefert für hohe Temperaturen T aufgrund des Skalierungsverhaltens $\Pi^T \sim T^2$ den Hauptbeitrag zur Selbstenergie. Die Imaginärteile sind, wie sich herausstellen wird, ohnehin endlich und daher nicht von der Renormierung abhängig. Die Imaginärteile der Selbstenergien werden in den folgenden Abschnitten sowohl mit als auch ohne Vakuum-Anteil dargestellt.

Die Integraldarstellungen (3.12) der Selbstenergien können nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden. Allerdings können für sie unter der Hochtemperatur-Voraussetzung $P/T \ll 1$ Approximationen in analytischer Form abgeleitet werden. Für die hier betrachtete transversale und longitudinale Photon-Selbstenergie führt dies gerade auf die bekannten HTL-Ergebnisse [KK80, Wel82b]. Deren Ableitung kann analog zu der Berechnung der Gluon-Selbstenergie im Anhang B.3 erfolgen. Hier werden nur die Ergebnisse angegeben:

$$\begin{aligned}\Pi_T^{\text{HTL}}(P) &= \frac{3}{2} m_\gamma^2 \frac{p_0^2}{p^2} \left[1 - \left(1 - \frac{p^2}{p_0^2} \right) \frac{p_0}{2p} \ln \frac{p_0 + p}{p_0 - p} \right], \\ \Pi_L^{\text{HTL}}(P) &= -3m_\gamma^2 \left[1 - \frac{p_0}{2p} \ln \frac{p_0 + p}{p_0 - p} \right].\end{aligned}\quad (3.14)$$

Diese Darstellung liefert neben den Realteilen auch die entsprechenden Imaginärteile. In (3.14) wurde die Größe

$$m_\gamma = \frac{1}{3} eT \quad (3.15)$$

definiert, deren Bezeichnung als thermische Photonmasse später klar werden wird.

Die Realteile

Zur Bestimmung der Realteile der analytisch fortgesetzten Selbstenergien (3.12) verbleiben drei Integrationen, die in Kugelkoordinaten ausgeführt werden. Die Integration über φ ist trivial und ergibt $\int d\varphi = 2\pi$. Auch die Integration über $\cos\theta = \hat{p}\hat{k} =: x$ kann analytisch durchgeführt werden. Dazu bemerkt man, daß bei einer Substitution $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{k}$ in allen Termen, welche die Verteilungsfunktion $n_F(q)$ enthalten, diese durch $n_F(k)$ ersetzt wird. $n_F(k)$ hängt aber nicht mehr von x ab und die Integrationen über $x^n/(A+q)$ mit $q = (p^2 + k^2 - 2pkx)^{1/2}$ sind elementar. Die verbleibende Integration über k hat die Gestalt $\int_0^\infty dk k n_F(k) f(k, P)$ mit einer gewissen Funktion f und muß numerisch ausgeführt werden. Bei allen numerischen Integrationen in diesem Kapitel findet ein adaptives Gauß-Chebyshev-Verfahren Anwendung [Pre92], welches die logarithmischen Polstellen der Funktion $f(k, P)$ berücksichtigt. Alle numerischen Rechnungen wurden mit doppelter (16 Byte-) Stellenzahl durchgeführt, wobei die Genauigkeit der Resultate stets durch Veränderung der maximalen Intervallbreite kontrolliert wurde.

Es wird nun auf die in Abschnitt 2.2 aufgeworfene Frage zurückgekommen, inwiefern die Fortsetzung der unter der Voraussetzung $p_0, p \ll T$ abgeleiteten HTL-Resultate (3.14) zu

beliebigen Impulsen gerechtfertigt ist. Dazu sind in den Abbildungen 3.2 und 3.3 die Ergebnisse für die Realteile der beiden Komponenten der Photon-Polarisation in der vollständigen Einschleifen-Rechnung denen der HTL-Approximationen (3.14) gegenübergestellt. Der

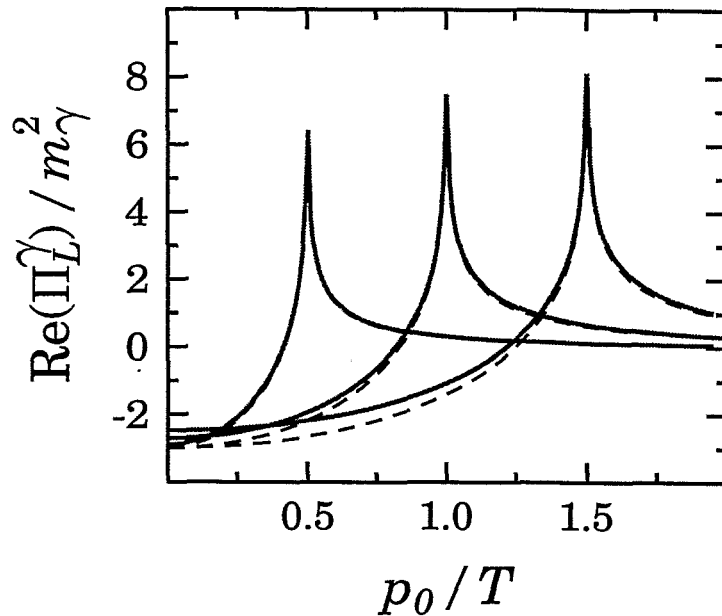


Abbildung 3.2: Der Realteil der longitudinalen Photon-Selbstenergie in der Einschleifen- und der HTL-Approximation (volle bzw. gestrichelte Linien) für die Impulse $p/T = 0.5, 1, 1.5$. Die Selbstenergie zeigt bei $p_0 = p$ ein singuläres Verhalten, was in der Abbildung aufgrund der endlichen Linienbreite nur andeutungsweise zum Ausdruck kommt.

Vergleich erfolgt dabei in einem Gebiet, wo der Parameter P/T der Hochtemperatur-Entwicklung von der Größenordnung Eins ist, also für Impulse, welche die HTL-Voraussetzung $p_0, p \ll T$ verletzen.

Wie in der Abbildung 3.2 dargestellt ist, stimmen im Falle der longitudinalen Komponente die Resultate beider Zugänge überraschend gut überein. Abweichungen werden bei den gewählten Impulsen p lediglich für kleine Werte von p_0/T deutlich. In diesem Grenzfall wird in der vollständigen Rechnung der Einfluß der in der Hochtemperatur-Entwicklung dem HTL-Beitrag folgenden Terme deutlich. Der nächstfolgende Term ist von der Ordnung $\mathcal{O}(PT)$ und dominiert gegenüber den nachfolgenden Termen offensichtlich auch bei Impulsen $p \sim T$ durch näherungsweise lineare Abweichungen von dem HTL-Resultat $\Pi_L^{HTL}(p_0 = 0, p) = -3m_\gamma^2$. Der entsprechende Term wird später für die Gluon-Selbstenergie genauer diskutiert. Für große Energien $p_0 \geq p$ stimmen beide Approximationen wieder sehr gut überein. In der Nähe des Lichtkegels, d. h., für $p_0 \sim p$, läßt sich die Äquivalenz beider Approximationen sogar analytisch zeigen. Wie im Anhang B.2 begründet wird, liefert die vollständige Rechnung für $p_0 \rightarrow p$ das gleiche singuläre Verhalten wie die HTL-

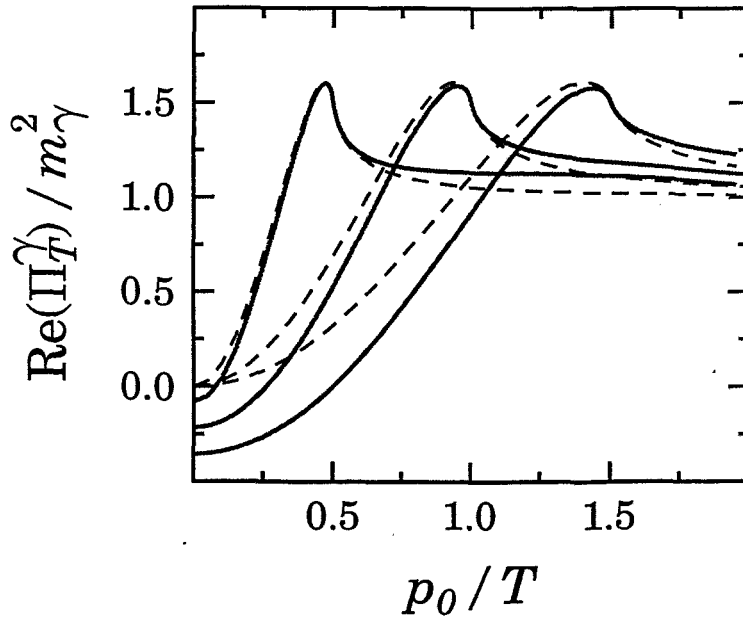


Abbildung 3.3: Einschleifen- und HTL-Resultate (volle bzw. gestrichelte Linien) für den Realteil der transversalen Photon-Selbstenergie. Die Impulse p wurden wie in der Abbildung 3.2 gewählt.

Approximation (3.14), nämlich

$$\Pi_L^\gamma(p_0 \sim p) = 3m_\gamma^2 \left[\frac{p_0}{2p} \ln \frac{p_0 + p}{p_0 - p} + \dots \right]. \quad (3.16)$$

Für die transversale Selbstenergie sind die Abweichungen der extrapolierten HTL-Resultate von der vollständigen Rechnung für die gleichen Impulse etwas größer. Die Abbildung 3.3 zeigt insbesondere im Limes $p_0/T \rightarrow 0$, $p \neq 0$ wieder Unterschiede zwischen beiden Zugängen. Diese sind offensichtlich auch hier durch das dem HTL-Term folgende Glied $\mathcal{O}(PT)$ der Hochtemperatur-Entwicklung bestimmt, da sich $\text{Re}(\Pi_T^\gamma(0, p))$ annähernd linear zu $pT/m_\gamma^2 \sim p/T$ verhält. Für $p_0 = 0$, $p \rightarrow 0$ gehen beide Approximationen gegen Null. Das ist aufgrund der allgemein (nichtperturbativ) gültigen Tatsache, daß die magnetische Photonmasse verschwindet [Fra65], zu erwarten. Es wird jedoch auch im Falle der transversalen Selbstenergie deutlich, daß beide Approximationen nicht nur im eigentlichen Gültigkeitsbereich der HTL-Näherung, sondern auch für große Impulse in der Umgebung des Lichtkegels übereinstimmen.

Diese Tatsache ist insofern von Bedeutung, als daß die physikalischen Eigenschaften der Photonen wesentlich von den Eigenschaften ihres Propagators (3.7) an dessen Polen bestimmt werden. Dispersionsrelationen und Dämpfung beschreiben die Lage der Pole, und die Residuen sind ein Maß für den Quasiteilchen-Charakter der Photonen. Wie nun aber festgestellt wurde, sind die Abweichungen der Hochtemperatur-Approximation von der vollständigen Rechnung gerade nahe des Lichtkegels klein und somit auch, zumindest für nicht allzu

große Kopplungsstärken, in der Nähe der Pole. Daher kann man erwarten, daß die genannten Charakteristika im allgemeinen gut durch die HTL-Resultate beschrieben werden.

Die Photon-Dispersionsrelationen

Um die gemachte Aussage quantitativ zu belegen, wird hier untersucht, wie stark sich die Unterschiede zwischen der Einschleifen-Rechnung und der HTL-Approximation in den Dispersionsrelationen der Photonen äußert. Allgemein ist die Dispersionsrelation $\omega(p)$ als Realteil der Polstellen des Propagators definiert. Der inverse Propagator kann zu einem gegebenen Impuls p mehrere Nullstellen besitzen. In diesem Fall sagt man, daß die Dispersionsrelation mehrere Zweige besitzt. Für den Photon-Propagator (3.7) erhält man zwei Zweige entsprechend den zwei propagierenden Photon-Moden. Unter der Annahme kleiner Imaginärteile des Propagators nahe der Pole, was einer schwachen Dämpfung der propagierenden Moden entspricht, folgen die Dispersionsrelationen aus den Nullstellen des Realteils des inversen Propagators. Inwiefern diese Annahme gerechtfertigt ist, wird im folgenden Unterabschnitt deutlich.

In der Abbildung 3.4 sind die Resultate für die Dispersionsrelation transversaler und lon-

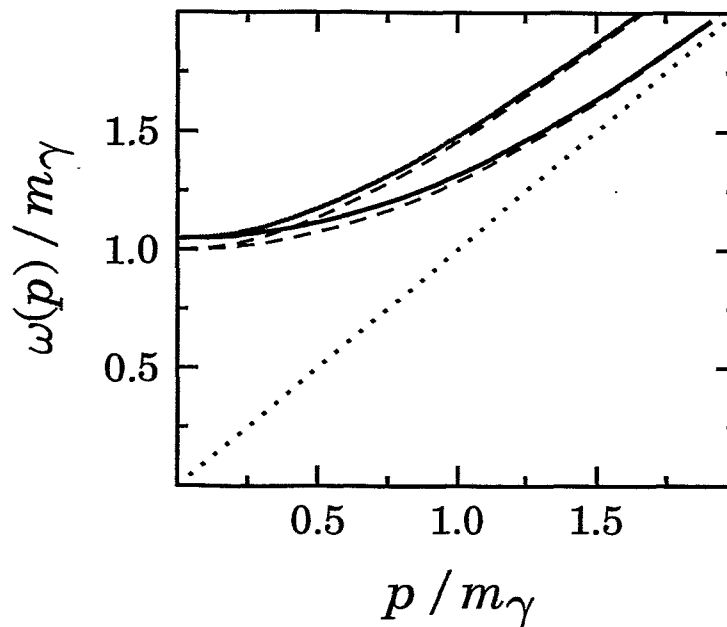


Abbildung 3.4: Transversale und longitudinale Photon-Dispersionsrelation (jeweils oberer bzw. unterer Zweig) in der Einschleifen- (volle Linien) und der HTL-Approximation (gestrichelt) für eine angenommene Kopplungsstärke von $e = 3$. Die Dispersion freier Photonen auf dem Lichtkegel $\omega = p$ ist gepunktet dargestellt.

gitudinaler Photonen dargestellt. Die HTL-Selbstenergien (3.14) führen dabei nach der Gleichung (3.7) auf eine implizite, aber analytische Darstellung der HTL-Dispersionsrelation. In beiden Approximationen haben diese zwei Zweige für kleine Impulse den gleichen Grenzwert.

Dies ist klar, da Photonen mit verschwindendem Impuls keine Polarisation zugeschrieben werden kann, was allein aus der Tensor-Darstellung (3.6) folgt. In der HTL-Näherung ist dieser Grenzwert gerade die in der Gleichung (3.15) eingeführte Größe $m_\gamma = eT/3$, was deren Bezeichnung als thermische Photonmasse rechtfertigt.

Im Grenzfall verschwindender Kopplungsstärke, $e \rightarrow 0$, gehen die Einschleifen-Dispersionsrelationen in die HTL-Resultate über. Diese Tatsache ist für Impulse $p \sim m_\gamma$ offensichtlich, da dann sowohl p_0 als auch p von der Größenordnung $gT \ll T$ sind und somit der HTL-Voraussetzung genügen. Es zeigt sich jedoch, daß die Einschleifen-Dispersionskurven auch für größere Impulse durch die HTL-Resultate beschrieben werden. Dieses Ergebnis bestätigt quantitativ die im Anhang B.2 vorgenommene Abschätzung. Entsprechend gut ist die Extrapolation der HTL-Resultate zu größeren Kopplungsstärken. Selbst wenn für die Kopplungsstärke ein fiktiver Wert von $e = 3$ angenommen wird, liegen die Abweichungen zwischen beiden Zugängen unter 5%. Dabei ist zu bemerken, daß Abweichungen nur für weiche Impulse deutlich werden. Auch das ist nach dem Ergebnis des Anhangs B.2 zu erwarten. Schließlich wird noch festgestellt, daß durch geeignetes Skalieren von m_γ die Übereinstimmung zwischen beiden Approximationen noch wesentlich verbessert werden kann.

Das ist ein Indiz dafür, daß die Verwendung der Hochtemperatur-Selbstenergien (3.14) in resummierten HTL-Propagatoren auch für große Kopplungsstärken e , wenn wegen $P \sim eT \sim T$ die HTL-Voraussetzung $P \ll T$ nicht erfüllt ist, noch zu zumindest qualitativ richtigen Aussagen führen sollte.

Die Imaginärteile

Abschließend werden in diesem Abschnitt die Imaginärteile der Einschleifen-Selbstenergien betrachtet. Bei deren Berechnung erlauben die auftretenden δ -Funktionen entsprechend Gleichung (2.22) die vollständig analytische Auswertung der Integrale (3.12). Die Imaginärteile sind endlich und bedürfen keiner Renormierung. Um jedoch auch hier die Medium-Effekte in beiden Approximationen zu vergleichen, wird in der Einschleifen-Näherung neben dem vollständigen Imaginärteil (also einschließlich des Vakuum-Beitrags) zusätzlich der temperaturabhängige Anteil $\text{Im}(\Pi^T) := \text{Im}(\Pi - \Pi^{T=0})$ betrachtet³. Dabei handelt es sich *nicht* um eine renormierte Größe. Insbesondere muß dieser Anteil der retardierten Selbstenergie daher auch nicht der allgemeinen Forderung $\text{Im}(\Pi^T)(p_0) \leq 0$ für reelle Energien $p_0 \geq 0$ genügen, was einer positiven Dämpfungsrate entspricht. Es ist weiter klar, daß $\text{Im}(\Pi)$ und $\text{Im}(\Pi^T)$ für Impulse $p_0 < p$, d. h., unterhalb der Schwelle für die Produktion der hier als masselos angenommenen Elektronen, zusammenfallen. Allerdings ist auch klar, daß nur $\text{Im}(\Pi^T)$ eine integrierbare Funktion ist, da $\text{Im}(\Pi)$ über die Dispersionsrelation mit dem divergenten, nicht-renormierten Realteil der Selbstenergie verknüpft ist. Insbesondere verschwindet $\text{Im}(\Pi^T)$ für große Impulse, da harte Teilchen kaum mit dem Medium wechselwirken, nicht aber $\text{Im}(\Pi)$.

Zum Imaginärteil der Photon-Selbstenergie in der Einschleifen-Approximation tragen die in der Abbildung 3.5 schematisch dargestellten Prozesse der Paar-Erzeugung sowie der Absorption eines Teilchens bzw. Antiteilchens aus dem Wärmebad durch das Photon bei. Die Zuordnung jedes dieser Prozesse zu den Energie-Nennern in Gleichung (3.10) ist dabei offensichtlich. Während die Paar-Erzeugung auch im Vakuum möglich ist, handelt es sich bei

³ Π^T ist nicht zu verwechseln mit der transversalen Komponente Π_T des Polarisationstensors.

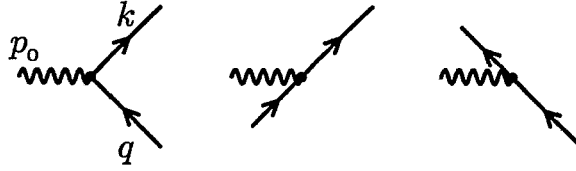


Abbildung 3.5: Die Beiträge zum Imaginärteil der Photon-Selbstenergie.

den Absorptionsprozessen um einen typischen Mediumeffekt, der auch als Landau-Dämpfung bezeichnet wird.

Die Selbstenergie besitzt in der HTL-Approximation (3.14) nur für Impulse $p_0 < p$ nicht-verschwindende Imaginärteile. Photonen werden in dieser Näherung also ausschließlich durch Teilchen aus dem Medium Landau-gedämpft. Das ist aus kinematischen Gründen klar. Ein entsprechend der HTL-Annahme weiches Photon kann nicht das harte Elektron-Positron-Paar erzeugen, welches den HTL-Beitrag zur Selbstenergie liefert. Im Gegensatz dazu tragen in der vollständigen Einschleifen-Rechnung alle in der Abbildung 3.5 gezeigten Prozesse zum Imaginärteil der Selbstenergie bei.

Der quantitative Vergleich beider Rechnungen ist in den Abbildungen 3.6 und 3.7 dargestellt. Ähnlich wie für die Realteile wird auch für die Imaginäranteile der Selbstenergie der Übergang der Einschleifen-Resultate in die HTL-Ergebnisse schon bei Impulsen $p_0, p \sim T$ deutlich. Außerdem stimmen wieder beide Näherungen am Lichtkegel überein.

Neben den eigentlichen Medium-Anteilen zur Einschleifen-Selbstenergie sind in den Abbildungen 3.6 und 3.7 auch die Resultate einschließlich der Vakuum-Beiträge [IZ80]

$$\begin{aligned}\Pi_T^{\gamma, T=0} &= -\frac{3}{4\pi} \frac{p_0^2 - p^2}{T^2} m_\gamma^2 \Theta(p_0^2 - p^2), \\ \Pi_L^{\gamma, T=0} &= -\frac{3}{4\pi} \frac{p^2}{T^2} m_\gamma^2 \Theta(p_0^2 - p^2)\end{aligned}\quad (3.17)$$

angegeben. Wie bereits vorwegnehmend diskutiert, geben diese nur oberhalb des Lichtkegels einen endlichen, und zwar negativen Beitrag. Dieser kompensiert den positiven Medium-Beitrag der Imaginärteile. Photonen-Anregungen werden also in der Einschleifen-Approximation, entsprechend der Bedingung $\text{Im}(\Pi) \leq 0$, im Plasma tatsächlich gedämpft, was der Erwartung an eine vernünftige Approximation entspricht.

In dieser Hinsicht unterscheiden sich die beiden Approximationen also qualitativ, wenn auch die quantitativen Abweichungen selbst bei Impulsen $P \sim T$ nicht sehr groß sind. Der qualitative Unterschied zwischen beiden Näherungen wird jedoch in anderen Größen deutlicher, z. B. der Erzeugungsrate von Dileptonen im Plasma. Diese ist entsprechend

$$\mathcal{R} = \frac{dN}{d^4p} = \frac{\alpha}{12\pi^4} \frac{1}{e^{p_0/T} - 1} \frac{1}{P^2} \text{Im}(\Pi_\mu^\mu(P))\quad (3.18)$$

mit dem Imaginärteil der Spur des retardierten Photon-Polarisationstensors verknüpft, siehe z. B. [lBe96]. Während die Dileptonenrate in der Einschleifen-Approximation der Selbstenergie endlich ist und den Born-Term der Störungsentwicklung von \mathcal{R} darstellt, ist die Spur des

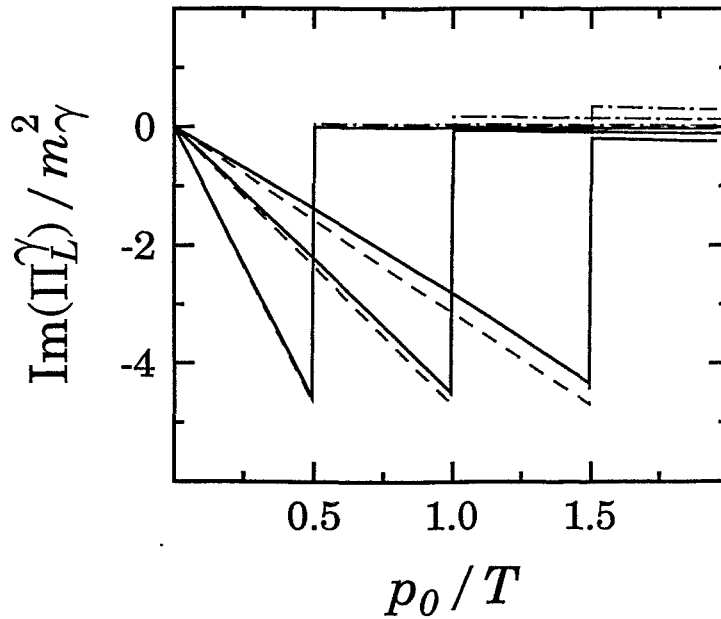


Abbildung 3.6: Der Vergleich der Imaginärteile der longitudinalen Photon-Selbstenergie in der HTL-Approximation (gestrichelt) und der Einschleifen-Näherung (volle Linien). Durch die strich-punktierten Linien ist der eigentliche Einschleifen-Medium-Anteil $\text{Im}(\Pi^T)$ dargestellt, die vollen Kurven enthalten zusätzlich den Vakuum-Beitrag. Die 3-Impulse sind auch hier $p/T = 0.5, 1, 1.5$.

HTL-Polarisationstensors rein reell, $\text{tr}[\Pi^{HTL}] = -3m_\gamma^2$. Ein so beschriebenes Plasma würde überhaupt keine Dileptonen emittieren können.

Dieser Abschnitt schließt mit zwei Bemerkungen. Zum einen wird festgestellt, daß die bei der Betrachtung der Dispersionsrelation gemachte Annahme über die Imaginärteile der Polarisationsfunktionen tatsächlich gerechtfertigt ist. Der Vergleich der Abbildungen 3.2 und 3.6 bzw. 3.3 und 3.7 zeigt nämlich, daß die Imaginärteile knapp oberhalb des Lichtkegels erheblich kleiner als die Realteile sind und somit in guter Näherung vernachlässigt werden können.

Die zweite Bemerkung betrifft die Vernachlässigung der Masse der intermediären Fermionenzustände. Diese hier vorgenommene Vereinfachung der Betrachtung ist für die im weiteren relevanten Plasmen bei Temperaturen von oder über $T \sim 200$ MeV für Elektronen sowie für u- und d-Quarks gerechtfertigt. Einige Betrachtungen zum Einfluß der schwereren s-Quarks werden im Abschnitt 6.4 durchgeführt.

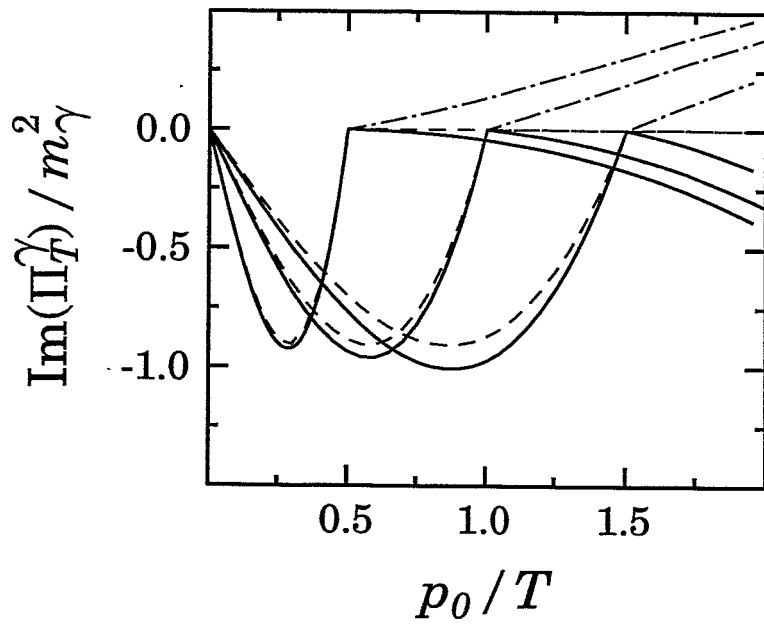


Abbildung 3.7: Wie Abbildung 3.6, hier jedoch für den Imaginärteil der transversalen Photon-Selbstenergie.

3.2 Die Gluon-Selbstenergie

Im Gegensatz zum Polarisationsensor der QED tragen zur Gluon-Selbstenergie Π^S selbst in der Einschleifen-Näherung infolge der nicht-Abelschen Selbstwechselwirkung auch Gluonen bei. Bereits diese Tatsache ist ein Hinweis darauf, daß Π^S eine eichabhängige Größe und daher nicht von der gleichen physikalischen Relevanz wie der QED-Polarisationsensor ist. In der Tat würde eine meßbare, eichinvariante Polarisierbarkeit Π^S die Existenz klassischer Color-Ladungen erfordern. Es ist jedoch intuitiv klar, daß physikalisch relevante, in Π^S enthaltene Informationen, wie z. B. die Dispersionsrelation physikalischer Freiheitsgrade, eichinvariant sein müssen. Dies läßt sich für den exakten Gluon-Polarisationsensor tatsächlich formal beweisen [KKR90]. Andererseits ist es jedoch auch klar, daß dies für (z. B. durch Entwicklung nach der Zahl der Schleifen) approximierete Selbstenergien im allgemeinen nicht gelten muß. Diese Frage der durch Approximation entstehenden Eichabhängigkeit prinzipiell meßbarer Größen wird im folgenden Abschnitt für Fermionen anhand ihrer Dispersionsrelationen betrachtet. Die Berechnung der Gluon-Selbstenergie erfolgt dagegen hier in einer festen Eichung.

Auch in diesem Abschnitt finden die Konventionen und Feynman-Regeln entsprechend [IZ80] Verwendung. Im folgenden wird für den Gluon-Propagator die Feynman-Eichung gewählt. Diese Festlegung der Eichung hat für die sich anschließenden Betrachtungen einige Vorteile. Zum einen läßt sich nämlich dann die Selbstenergie in einer Weise darstellen, die der Abelschen Form (3.3) recht nahe ist und dadurch eine einfache Diskussion des HTL-Limes erlaubt. Zum anderen ist in einer allgemeinen kovarianten Eichung die nicht-Abelsche Selbstenergie nicht transversal und hängt dann von drei skalaren Funktionen ab [Wel97]. Nur in der Feynman-Eichung gilt in der Einschleifen-Näherung wie in der QED die Beziehung $P^\mu \Pi_{\mu\nu}(P) = 0$, und die Selbstenergie kann wieder durch die zwei Projektionen Π_T und Π_L beschrieben werden.

Zur Gluon-Polarisation tragen nur jene n_f Quark-Flavors bei, deren Ruheenergie m_f nicht wesentlich größer ist als die typische Energie T , die jedes Teilchen im Medium besitzt. Die Quark-Kopplung an ein a -farbiges Gluon ist aber bis auf t^a , dem Generator der Eich-Gruppe in der Fundamentaldarstellung, gleich dem Elektron-Photon-Vertex. In der Einschleifen-Näherung entsprechen die Quark-Beiträge daher bis auf die Ersetzung $e^2 \rightarrow \text{tr}(t^a t^b) n_f g^2 = \delta^{ab} \frac{1}{2} n_f g^2$ der Photon-Polarisation. Im folgenden werden deshalb nur die in der Abbildung 3.8 dargestellten, reinen Eichanteile der Gluon-Polarisation betrachtet, und es wird $n_f = 0$ angenommen. Es ist klar, daß auch diese Beiträge zur Gluon-Polarisation diagonal in der

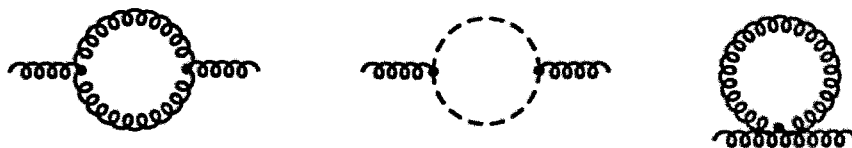


Abbildung 3.8: Einschleifen-Eichbeiträge zur Gluon-Selbstenergie. Durch die gestrichelten Linien sind die Geist-Felder dargestellt.

Farbstruktur sein müssen und somit $\Pi^{ab} = \delta^{ab}\Pi$ erfüllen, so daß die Farbindizes von nun an unterdrückt werden.

Bei endlichen Temperaturen lautet der freie Gluon-Propagator in der Feynman-Eichung

$$D_{\mu\nu}^{(0)}(K) = -g_{\mu\nu} \Delta_B(K) \quad \text{mit} \quad \Delta_B(K) = 1/K^2. \quad (3.19)$$

Der skalare Propagator $\Delta_B(K)$ ist bosonisch, d. h., er ist nur für die geraden Matsubara-Frequenzen $k_0 = i 2n\pi T$ definiert.

Die unphysikalischen Freiheitsgrade von $D_{\mu\nu}^{(0)}(K)$ werden durch Faddeev-Popov-Geister kompensiert. Obwohl diese durch antikommutierende, fermionische Hilfsfelder beschrieben werden, müssen sie sich entsprechend der adjungierten Darstellung der Eich-Gruppe transformieren, um die globale Invarianz der Lagrange-Dichte zu gewährleisten [IZ80]. Dementsprechend ist bei endlichen Temperaturen der in der Abbildung 3.8 gestrichelt dargestellte Geist-Propagator \mathcal{G} nur für die *bosonischen* Matsubara-Frequenzen definiert,

$$\mathcal{G}(K) = \Delta_B(K). \quad (3.20)$$

Durch eine geeignete Wahl der Schleifen-Impulse ist es möglich, die Selbstenergie in Feynman-Eichung in der Form

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{g,F}(P) = & -N_c g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} \left[P^2 g_{\mu\nu} - P_\mu P_\nu \right. \\ & \left. - 2(K_\mu Q_\nu + K_\nu Q_\mu - K Q g_{\mu\nu}) \right] \Delta_B(K) \Delta_B(Q) \end{aligned} \quad (3.21)$$

zu schreiben. In dieser Darstellung setzt sich $\Pi^{g,F}$ aus einem offensichtlich transversalen Anteil $\Pi_1 \sim (P^2 g_{\mu\nu} - P_\mu P_\nu)$ und einem Beitrag Π_2 , dessen Struktur analog zum Photon-Polarisationstensor Π^γ ist, zusammen. Damit ist die oben vorweggenommene Behauptung über die Transversalität von $\Pi^{g,F}$ gezeigt. Es ist weiter klar, daß im Hochtemperatur-Limes der Anteil Π_1 in (3.21) vernachlässigt werden kann, da er von der Ordnung $\mathcal{O}(P^2)$ ist. Der verbleibende Anteil Π_2 unterscheidet sich von Π^γ in (3.3) nur durch den statistischen Charakter der Propagatoren. Wie im Anhang B.3 gezeigt wird, macht dies jedoch im Hochtemperatur-Limes lediglich einen konstanten Faktor aus. Man erhält somit für die Gluon-Selbstenergie im Hochtemperatur-Limes die gleichen Ausdrücke wie für die Photon-Selbstenergie (3.14), wenn dort m_γ^2 durch

$$m_g^2 = \frac{N_c}{9} g^2 T^2 \quad (3.22)$$

ersetzt wird. Dabei bezeichnet N_c die Zahl der Farbladungen, d. h., die Ordnung der nicht-Abelschen Eichgruppe $SU(N_c)$ der Wechselwirkung. Für die QCD gilt $N_c = 3$. Nimmt man zu dem reinen Eichanteil der Polarisation noch den der Quarks hinzu, so ist $m_g^2 = \frac{1}{9} (N_c + \frac{1}{2} n_f) g^2 T^2$.

Wie bereits diskutiert, wird der Einschleifen-Polarisationstensor in der Feynman-Eichung durch die zwei in der Gleichung (3.8) definierten skalaren Funktionen beschrieben. Nach Ausführung der Summation in der Gleichung (3.21) lauten die transversale und longitudinale Gluon-Selbstenergie

$$\begin{aligned} \Pi_T^{g,F} &= N_c g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[2F_{BB}^{(1,1)} + (p_0^2 - p^2 - 2(\hat{p}\mathbf{k})(\hat{p}\mathbf{q})) F_{BB}^{(0)} \right], \\ \Pi_L^{g,F} &= N_c g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[2F_{BB}^{(1,1)} + (p^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{q}) F_{BB}^{(0)} \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Funktionen $F_{BB}^{(1,1)}$ und $F_{BB}^{(0)}$ entsprechen bis auf die Ersetzung $-n_F \rightarrow n_B$ den fermionischen Funktionen (3.10) (siehe Anhang B.1). Dies sieht man am einfachsten an der τ -Darstellung der skalaren Propagatoren, die ebenfalls im Anhang B.1 angeführt sind.

Die Einschleifen-Näherung und die HTL-Approximation

Hier wird die Gluon-Selbstenergie in der Einschleifen-Approximation dem HTL-Resultat gegenübergestellt.

Der quantitative Vergleich der Realteile in den Abbildungen 3.9 und 3.10 zeigt für die gleichen äußeren Impulse wie im Abschnitt 3.1 deutlichere Unterschiede zwischen beiden Approximationen als im nicht-Abelschen Fall. Beiden Fällen ist jedoch gemein, daß bei

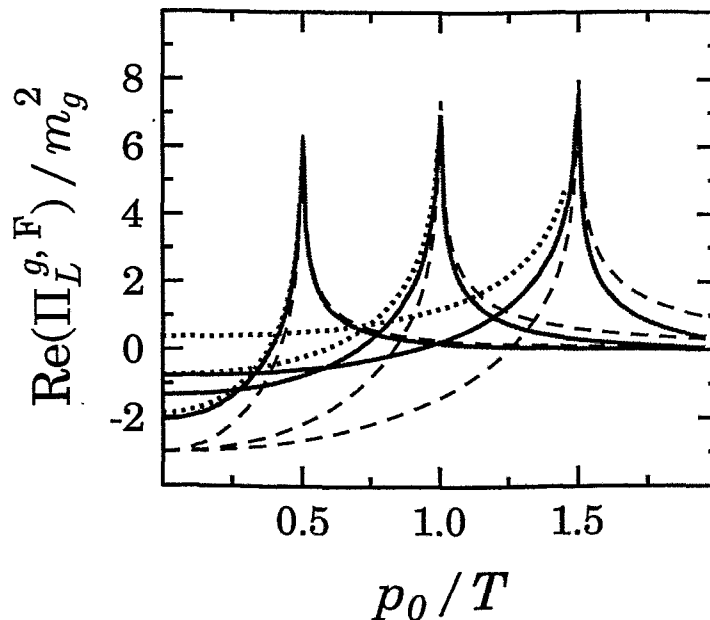


Abbildung 3.9: Vergleich der Einschleifen- und der HTL-Approximation (volle bzw. gestrichelte Linien) des Realteils der longitudinalen Gluon-Selbstenergie in der Feynman-Eichung für die Impulse $p/T = 0.5, 1, 1.5$. Die gepunkteten Linien stellen die Hochtemperatur-Entwicklung einschließlich des Terms der nächst-folgenden Ordnung dar. Das singuläre Verhalten der Selbstenergie bei $p_0 = p$ kommt darstellungsbedingt nur andeutungsweise zum Ausdruck.

der Extrapolation der HTL-Approximation die longitudinale Komponente weniger sensitiv als die transversale ist. Erwartungsgemäß verschwinden die Abweichungen für kleine Impulse; praktisch werden sie schon für $p_0, p \lesssim 0.5T$ klein. Es wird jedoch wie im Abelschen Fall festgestellt, daß die Abweichungen zudem auch für große Impulse nahe des Lichtkegels verschwinden. Bei harten Impulsen $p \sim T$ und kleinen Energien $p_0 \lesssim p$ ergeben sich Abweichungen zwischen den betrachteten Näherungen der Selbstenergie, die in ähnlicher Form bereits für die Photon-Polarisation festgestellt wurden. Diese lassen sich qualitativ selbst bei den großen betrachteten Werten der Impulse durch das in der Hochtemperatur-Entwicklung

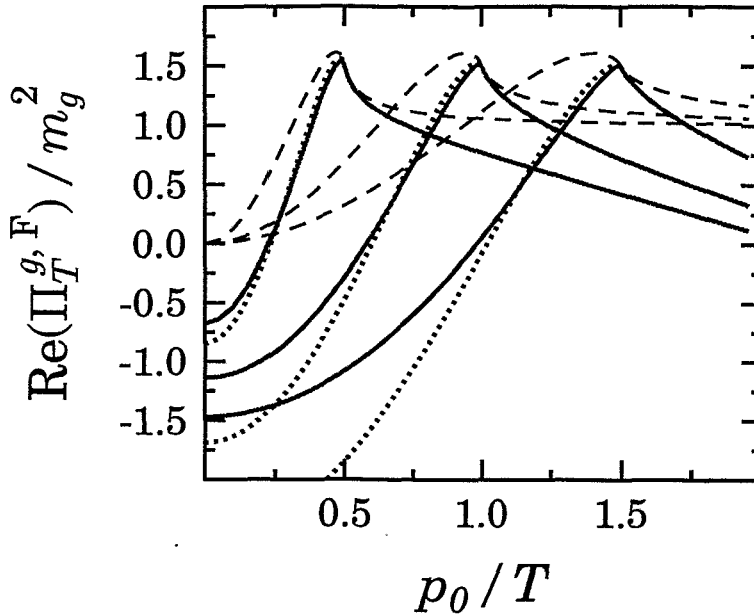


Abbildung 3.10: Wie Abbildung 3.9, hier ist jedoch der Realteil der transversalen Gluon-Selbstenergie dargestellt.

dem HTL-Term nächst-folgende Glied $\delta^{\text{nl0}}\Pi$ beschreiben. Die Korrektur-Terme zu den HTL-Resultaten sind von der Ordnung $\mathcal{O}(PT)$ und lauten [Wel82a] (nach einer typographischen Korrektur)

$$\begin{aligned}\delta^{\text{nl0}}\Pi_T^{g,F} &= -\frac{9m_g^2}{16T} \frac{p^2 - p_0^2}{p} \left(3 - \frac{p_0^2}{p^2}\right) \Theta(p^2 - p_0^2), \\ \delta^{\text{nl0}}\Pi_L^{g,F} &= \frac{9m_g^2}{4T} \left(p - \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{p}\right) \Theta(p^2 - p_0^2).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Obwohl diese Terme für $p \gtrsim T$ und $p_0 < p$ die führenden HTL-Terme etwas überkompensieren, geben sie, wie aus den Abbildungen 3.9 und 3.10 deutlich wird, dennoch die richtige Tendenz zu den Einschleifen-Resultaten an. Bemerkenswert ist die Konvergenz der Hochtemperatur-Entwicklung auch in der nächst-führenden Ordnung nahe des Lichtkegels.

Der Vergleich der beiden Approximationen für die Imaginärteile der Selbstenergie ist in den Abbildungen 3.11 und 3.12 gezeigt. Die Einschleifen-Imaginärteile bedürfen dabei einer etwas genaueren Erläuterung. Wie bereits im Abschnitt 3.1 diskutiert wurde, erfüllen die Imaginärteile der durch *hard thermal loops* genäherten Selbstenergien die Forderung $\text{Im}(\Pi^{\text{HTL}}) \leq 0$ für $p_0 \geq 0$. Diese Forderung wird aber offensichtlich von den Einschleifen-Selbstenergien für $p_0 \geq p$ verletzt⁴! Der Imaginärteil der Selbstenergie bestimmt jedoch die Gluon-Dämpfungsrate γ_g . Diese beschreibt die Äquilibration eines durch die Verteilungsfunktion $f(P, t)$ charakterisierten Nichtgleichgewichts-Zustandes entsprechend

⁴Im Falle der Photon-Selbstenergie kompensierten die Vakuum-Anteile den positiven Medium-Beitrag.

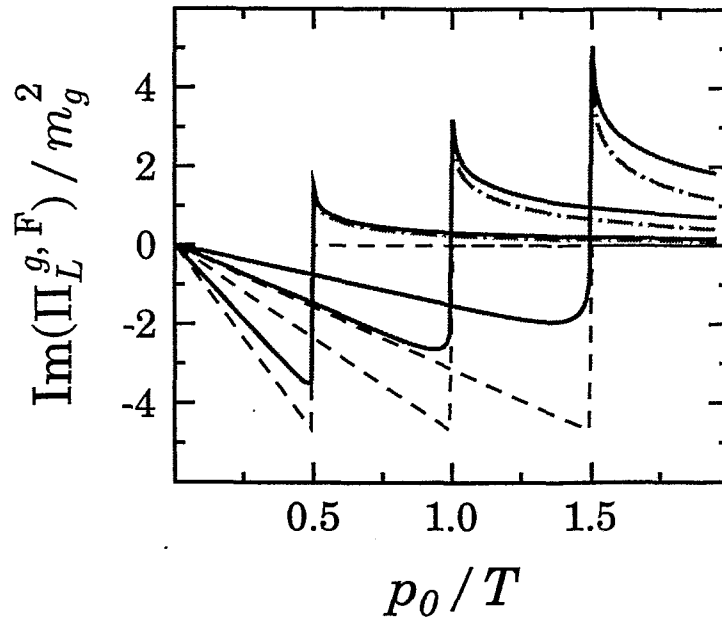


Abbildung 3.11: Der Vergleich der Einschleifen- mit der HTL-Approximation (gestrichelte Linien), hier für den Imaginärteil der longitudinalen Gluon-Selbstenergie in Feynman-Eichung. Die volle Linien kennzeichnen den kompletten Einschleifen-Beitrag, die strich-punktiierten hingegen nur den eigentlichen Medium-Anteil. Die Funktion wurde für die Impulse $p/T = 0.5, 1, 1.5$ dargestellt.

$f(P, t) \approx f_0(P) + (f(P, 0) - f_0(P)) \exp\{-\gamma_g t\}$. Die positiven Imaginärteile der Selbstenergie ergäben aber für die Gluon-Dämpfung γ_g einen negativen Wert und ein Gluon-Plasma besäße daher keinen stabilen Gleichgewichtszustand [KK80]. Wie ebenfalls lange bekannt ist, erweist sich darüber hinaus die im Prinzip meßbare Größe γ_g in der Einschleifen-Näherung als eichabhängig (wobei es auch Eichungen mit $\gamma_g > 0$ gibt).

Dieses Problem führte in der Vergangenheit zu kontroversen Diskussionen. Gelöst wurde es durch Braaten und Pisarski [BP90b], die ausgehend von der Annahme, daß γ_g physikalisch und daher wohldefiniert sei, argumentierten, daß die bis dahin durchgeführten Einschleifen-Rechnungen unvollständig sind, da auch komplexere als Einschleifen-Diagramme in gleicher Ordnung wie diese zu γ_g beitragen. In der Tat ist das Ergebnis der in der Kopplungskonstante g vollständigen Berechnung von γ_g durch HTL-resummierte effektive Propagatoren frei von den genannten formalen Widersprüchen [BP90b].

Diese Argumentation kann man auch umkehren. Wenn man von einer konsistenten Gluon-Polarisation mit negativem Imaginärteil ausgeht, zeigt die vollständige Einschleifen-Rechnung, wie groß der Beitrag aller Diagramme jenseits der Einschleifen-Ordnung sein muß. Aus den Abbildungen 3.11 und 3.12 erkennt man, daß diese oberhalb des Lichtkegels für die betrachteten Impulse von der gleichen Größenordnung wie die HTL-Beiträge unterhalb des Lichtkegels sein müssen.

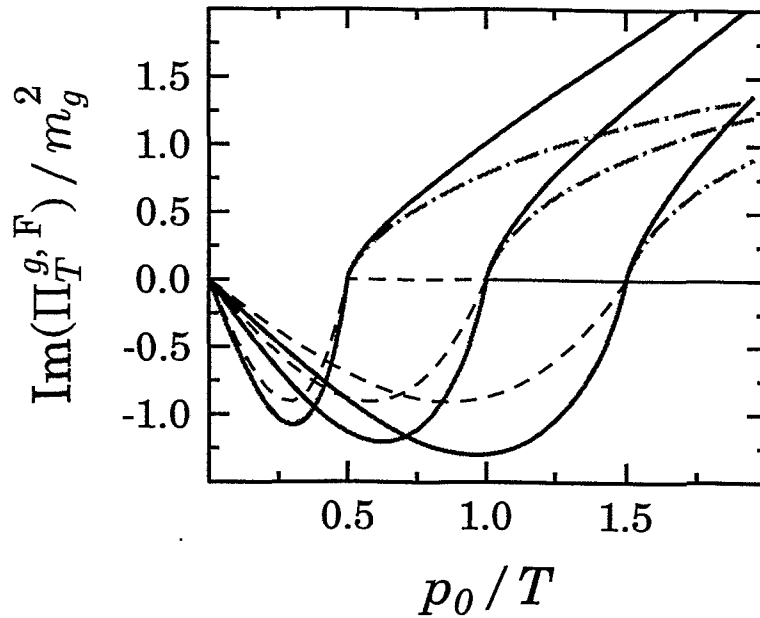


Abbildung 3.12: Betrachtung des Imaginärteils der transversalen Gluon-Selbstenergie in Feynman-Eichung entsprechend der Abbildung 3.11.

Die Gluon-Dispersionsrelationen

Abschließend werden in diesem Abschnitt die Dispersionsrelationen der Gluon-Anregungen im Medium betrachtet. Der Gluon-Propagator besitzt wie der Photon-Propagator die Gestalt (3.7) und somit zwei auch physikalisch relevante Polstellen, deren Realteile die Dispersionsgesetze der transversalen und longitudinalen Gluonen ergeben. Die Dispersionsrelationen werden wie für die Photonen wieder unter der Annahme kleiner Dämpfungsraten aus den Realteilen der Polarisationsfunktionen bestimmt. Aufgrund der soeben diskutierten Inkonsistenzen der Imaginärteile der Gluon-Polarisation in der naiven Einschleifen-Approximation kann hier diese Annahme nur durch eine konsistente Bestimmung der Polarisation gerechtfertigt werden. Diese Berechnung überstiege die hier verfolgte Zielsetzung jedoch bei weitem, so daß die im folgenden bestimmten Dispersionsrelationen als eine erste Abschätzung über die bekannten HTL-Resultate hinaus angesehen werden müssen.

Die im Vergleich zur Photon-Selbstenergie größeren Abweichungen zwischen der Einschleifen- und HTL-Approximation sollten sich auch in den Gluon-Dispersionsrelationen widerspiegeln. Tatsächlich findet sich das quantitativ in der Abbildung 3.13 bestätigt, wobei für einen direkten Vergleich mit der Photon-Dispersion in der Abbildung 3.4 die starke Kopplungskonstante ebenfalls als $g = 3$ angenommen wurde.

Die Einschleifen-Dispersionsrelation der Gluonen ist im Gegensatz zu der der Photonen 'weicher' als in der HTL-Approximation. Insbesondere ist die sogenannte Gluon-Plasmafrequenz $\omega_{pl} := \omega(p = 0)$ im Vergleich zu dem Resultat führender Ordnung $\omega_{pl}^{lo} = m_g = \frac{1}{3} \sqrt{N_c} gT$ kleiner. Die in der Hochtemperatur-Entwicklung dem HTL-Term folgenden Glieder liefern jedoch nur einen der Beiträge bei der konsistenten Berechnung der Plasma-

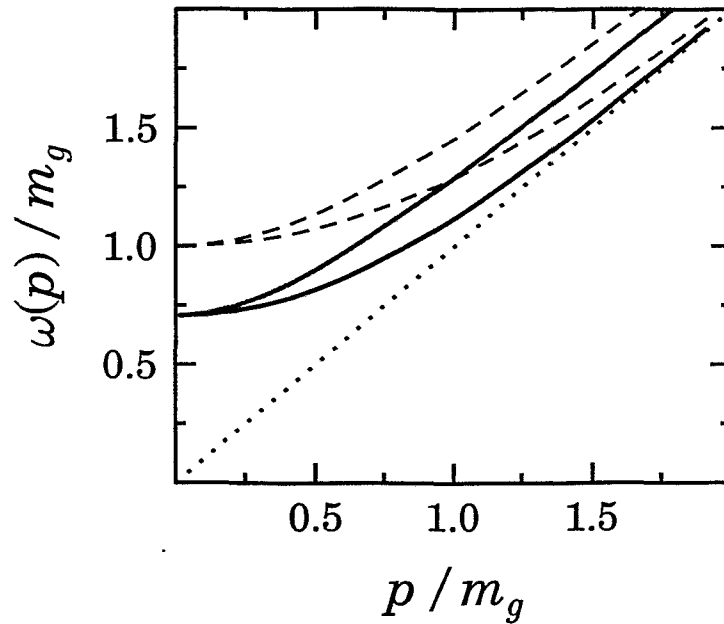


Abbildung 3.13: Transversale und longitudinale Gluon-Dispersionsrelation (jeweils oberer bzw. unterer Zweig) für $g = 3$. Die vollen Linien ergeben sich aus den Einschleifen-Selbstenergien in der Feynman-Eichung, die gestrichelten aus den HTL-Approximationen. Der Lichtkegel $\omega = p$ ist gepunktet dargestellt.

frequenz über die führende Ordnung $\mathcal{O}(g)$ hinaus. Die weiteren Beiträge ergeben sich aus den resummierten Einschleifen-Diagrammen sowie aus nackten Zweischleifen-Diagrammen. Die perturbative Korrektur der Plasmafrequenz longitudinaler Gluonen wurde mittels der Braaten-Pisarski-Methode durch Schulz [Sch94] berechnet und erweist sich als negativ. Die longitudinale Gluon-Energie für verschwindenden Impuls lautet

$$\omega_{pl}(g) = m_g(1 - 0.18N_c g + \dots). \quad (3.25)$$

Dieses perturbative Ergebnis genügt bei einer spekulativer Extrapolation zu großen Werten von g der intuitiven Erwartung, daß bei einer kritischen Kopplung die kollektiven Anregungen verschwinden und das System in den Confinement-Zustand übergeht⁵.

Die genaue Analyse in [Sch94] ergibt, daß die nächst-folgenden Terme der Hochtemperatur-Entwicklung der Einschleifen-Selbstenergie zu ω_{pl} nur einen $g^4 \ln g$ -Beitrag liefern und somit nicht in die dort betrachtete Ordnung eingehen. In der Tat läßt sich die Abhängigkeit der Einschleifen-Plasmafrequenz von g durch einen Ansatz

$$\omega_{pl}^2 = m_g^2 (1 - \tilde{\eta} g^2 \ln(ag)) \quad (3.26)$$

⁵Es ist klar, daß das angegebene Ergebnis wie auch das für den Gluon-Druck, $p/T^4 \sim (1 - cg^2 + \dots)$ zunächst nur als ein perturbatives Indiz gewertet werden kann [Sch94]. Allerdings erlauben die führenden Glieder einer Störungsentwicklung oft einen qualitativen Schluß auf das exakte Ergebnis. Ein Beispiel dafür ist die Hochtemperatur-Entwicklung der Gluon-Selbstenergie in nächst-führender Ordnung im vorangegangenen Unterabschnitt. Weitere Beispiele dafür sind im zweiten Teil dieser Arbeit der Gegenstand der Untersuchung.

bis zu großen Werten der Kopplungskonstanten parametrisieren. In der Abbildung 3.14 beschreibt die Wahl $\tilde{\eta} = 0.073$, $a = 0.16$ die Funktion $\omega_{pl}^2(g)$ sehr gut in dem Fit-Intervall $g \in [0, 3]$.

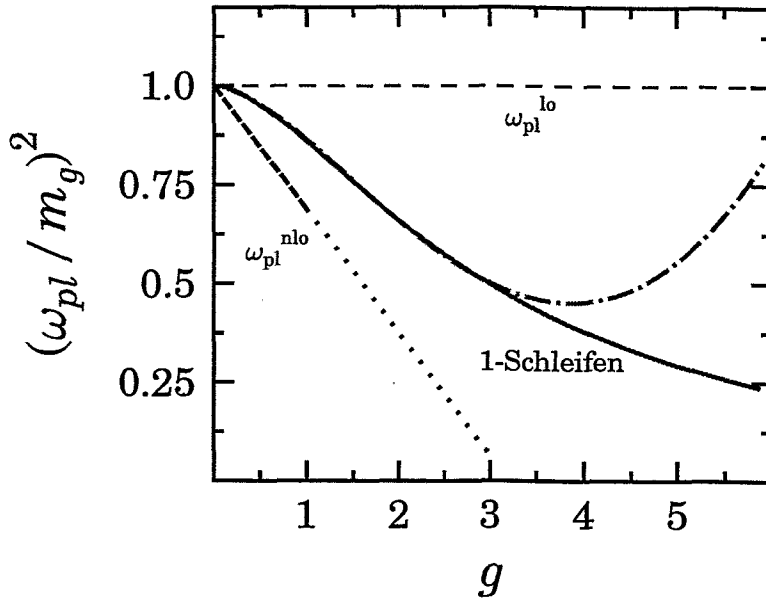


Abbildung 3.14: Die Abhängigkeit der Gluon-Plasmafrequenz von der Kopplungskonstante g . Dargestellt sind die führende und nächst-führende perturbative Ordnung ω_{pl}^{lo} bzw. ω_{pl}^{nlo} und die Einschleifen-Näherung (Feynman-Eichung) sowie strich-punktiert deren Parametrisierung durch den Ansatz (3.26). Gefittet wurden die Parameter $\tilde{\eta}$ und a für $g \in [0, 3]$.

Es kann noch bemerkt werden, daß die Verwendung der Plasmafrequenz ω_{pl} anstelle der thermischen Gluonmasse m_g in den HTL-Selbstenergien nicht nur für langwellige Gluonen-Anregungen eine recht gute Approximation der Einschleifen-Dispersionsrelationen ergibt. Die entsprechend skalierten HTL-Dispersionskurven sind in der Abbildung 3.15 gezeigt. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, daß die Voraussagen, die durch die Resummation der HTL-Selbstenergien gewonnen werden, auch bei der Extrapolation zu größeren Werten der Kopplungskonstante noch qualitativ korrekte Resultate liefern.

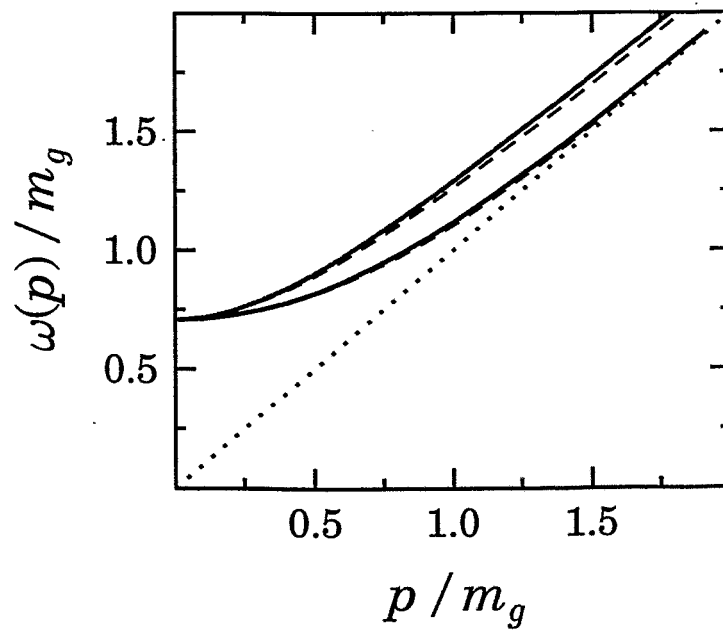


Abbildung 3.15: Die Gluon-Dispersionsrelationen in der HTL-Näherung (gestrichelt) bei Verwendung der Einschleifen-Plasmafrequenz ω_{pl} anstelle von m_g in den Selbstenergien im Vergleich zur Einschleifen-Approximation. Wie in der Abbildung 3.13 wurde auch hier $g = 3$ gewählt.

3.3 Die Fermion-Selbstenergie

In diesem Abschnitt wird die Fermion-Selbstenergie in der Einschleifen-Näherung berechnet und mit der HTL-Approximation verglichen. Das Augenmerk wird hier insbesondere auf die Eichabhängigkeit der Einschleifen-Resultate gerichtet. Diese Fragestellung ist interessant, weil in der HTL-Approximation alle eichabhängige Terme der Selbstenergie verschwinden, wie bereits im Abschnitt 2.2 bemerkt wurde. Um die abzuleitenden Ausdrücke übersichtlich zu halten, wird sich bei den anschließenden Betrachtungen auf den repräsentativen Fall masseloser Fermionen beschränkt. Zur Rechtfertigung dieser vereinfachenden Annahme wird auf die Bemerkungen am Ende des Abschnittes 3.1 verwiesen.

Der Betrachtung der Selbstenergie in der Einschleifen-Approximation seien einige allgemeine Bemerkungen vorangestellt. Die Brechung der Lorentz-Symmetrie des Vakuums führt dazu, daß im Medium ein Fermion-Mode propagieren kann, der im Vakuum nicht existiert. Dieser Mode ist kollektiver Natur und besitzt als solcher eine gewisse Analogie zu den schon diskutierten longitudinalen Boson-Anregungen im Medium. Die $O(3)$ -Symmetrie des thermischen Mediums erlaubt der Fermion-Selbstenergie im chiralen Limes, bei im Vergleich zur Fermionmasse hohen Temperaturen $T \gg m$, von einer Linearkombination der Spinoren \not{P} und \not{u} abzuhängen, wobei P der 4-Impuls des Fermions und u die 4-Geschwindigkeit des Wärmebades sind⁶. Im lokalen Ruhesystem, wo $u^\mu = (1, \mathbf{0})$ gilt, hat die chiral symmetrische Selbstenergie somit die allgemeine Gestalt

$$\Sigma(P) = -a\not{P} - b\gamma_0. \quad (3.27)$$

Die skalaren Funktionen a und b sind Funktionen von P . Sie lassen sich durch die Größen

$$\begin{aligned} T_1 &:= \text{tr}[\gamma_0 \Sigma], \\ T_2 &:= \text{tr}[\not{P} \Sigma] \end{aligned} \quad (3.28)$$

ausdrücken,

$$\begin{aligned} a &= \frac{T_2 - p_0 T_1}{4p^2}, \\ b &= \frac{P^2 T_1 - p_0 T_2}{4p^2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die in der Abbildung 3.16 dargestellte Einschleifen-Korrektur zum freien Fermion-Propagator unterscheidet sich für die Fälle der starken bzw. der elektromagnetischen Wechselwirkung nur durch einen Faktor. Dieser berücksichtigt in der QCD im Vergleich zur QED die Farbstruktur t^a des Quark-Gluon-Vertex und ergibt sich daher als quadratische Casimir-Konstante $C_R = (N_c^2 - 1)/(2N_c)$ der adjungierten Darstellung der Color-Gruppe $SU(N_c)$, da $t^a t_a = C_R \mathbf{1}$ gilt. Aus dem im weiteren betrachteten Ausdruck für die Quark-Selbstenergie erhält man also durch die Ersetzung $C_R g^2 \rightarrow e^2$ die Elektron-Selbstenergie.

Werden die Impulse entsprechend Abbildung 3.16 gewählt, ist der Vakuum-Anteil der Quark-Selbstenergie

$$\Sigma(P) = iC_R g^2 \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}^{(0)}(Q) \gamma^\mu S^{(0)}(K) \gamma^\nu. \quad (3.30)$$

⁶Im Vakuum beschreibt eine chiral invariante Lagrange-Dichte unabhängig von perturbativen Entwicklungen eine Theorie mit chiraler Symmetrie. Insbesondere werden durch die Wechselwirkung keine divergenten Beiträge generiert, welche die Einführung von nicht chiral invarianten Countertermen erfordern würden. Es ist klar, daß dies auch bei endlichen Temperaturen gelten muß [Wel82b].

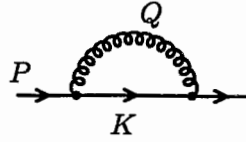


Abbildung 3.16: Einschleifen-Beitrag zur Quark-Selbstenergie. Wird das umlaufende Gluon durch ein Photon ersetzt, erhält man die QED-Selbstenergie.

Die Festlegung der Eichung erfolgt innerhalb der Klasse der linearen kovarianten Eichungen. In dieser lautet der freie Gluon-Propagator (die Farb-Indizes sind wieder unterdrückt)

$$D_{\mu\nu}^{(0)}(Q) = -g_{\mu\nu} \frac{1}{Q^2} + \xi \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^4}. \quad (3.31)$$

Die Wahl des Eichparameters $\xi = 0$ heißt Feynman-Eichung, oft verwendet wird auch die Landau-Eichung mit $\xi = 1$.

Der Ausdruck für die Selbstenergie bei endlicher Temperatur folgt aus der Gleichung (3.30) nach der Ersetzung der k_0 -Integration durch die Summe über die Matsubara-Frequenzen $k_0 = i(2n+1)\pi T$ des Fermion-Propagators (3.2). Bei der Ausführung der Frequenz-Summen erweist es sich als zweckmäßig, den im Gluon-Propagator auftretenden Term $1/Q^4$ umzuschreiben [BKS92],

$$\frac{1}{Q^4} = \partial_{m^2} \frac{1}{Q^2 - m^2} \Big|_{m^2=0}.$$

Damit lautet der kovariant geeichte Gluon-Propagator bei endlichen Temperaturen

$$D_{\mu\nu}^{(0)}(Q) = (-g_{\mu\nu} + \xi Q_\mu Q_\nu \partial_{m^2}) \Delta_B(Q) \Big|_{m^2=0}, \quad (3.32)$$

wobei jetzt $\Delta_B(Q)$ den skalaren Propagator eines Bosons der Masse m bezeichnet. Diese Darstellung des Propagators hat den Vorteil, daß die Frequenz-Summation wieder über Ausdrücke erfolgt, die das Produkt von nur zwei Termen enthalten, welche die Gestalt von skalaren Propagatoren haben. Damit ist die Struktur der Summen die gleiche wie die in den vorangegangenen Abschnitten. Nach der Summation erfolgt die Ableitung nach m^2 und anschließend wird $m = 0$ gesetzt.

Entsprechend der Struktur (3.32) des Gluon-Propagators ergibt sich auf diese Weise die Darstellung der Quark-Selbstenergie als Summe des Anteils in der Feynman-Eichung mit $\xi = 0$ und eines zu ξ proportionalen Beitrags,

$$\Sigma(P) = \Sigma^F(P) + \Sigma^\xi(P), \quad (3.33)$$

$$\text{mit} \quad \Sigma^F(P) = -2C_R g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} \not{K} \Delta_F(K) \Delta_B(Q),$$

$$\Sigma^\xi(P) = -\xi C_R g^2 \partial_{m^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} \not{K} \not{Q} \not{K} \Delta_B(K) \Delta_F(Q) \Big|_{m=0}.$$

In dem ξ -abhängigen Beitrag wurde dabei eine Substitution $K \leftrightarrow Q$ vorgenommen, was die folgende Auswertung etwas vereinfacht. Die Matsubara-Summation erfolgt in diesem Ausdruck über die bosonischen Frequenzen k_0 des Propagators $\Delta_B(K)$.

Der Feynman-Beitrag Σ^F zur Selbstenergie

In diesem Unterabschnitt wird die Selbstenergie Σ^F in der Feynman-Eichung untersucht. Diese ist entsprechend der Gleichung (3.33) einer der beiden Beiträge zur Selbstenergie in einer beliebigen kovarianten Eichung.

Der Feynman-Eichbeitrag zu den in (3.28) definierten Funktionen T_1 und T_2 ergibt sich mit der Beziehung $\text{tr}[\gamma_\mu \not{K}] = 4K_\mu$ aus der Gleichung (3.33) zu

$$\begin{aligned} T_1^F &= -8C_R g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} k_0 \Delta_F(K) \Delta_B(Q) \\ &= -8C_R g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} F_{FB}^{(1)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

und

$$\begin{aligned} T_2^F &= -8C_R g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} (p_0 k_0 - \mathbf{p} \mathbf{k}) \Delta_F(K) \Delta_B(Q) \\ &= -8C_R g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (p_0 F_{FB}^{(1)} - \mathbf{p} \mathbf{k} F_{FB}^{(0)}) . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Die Bezeichnungsweise der hier eingeführten Funktionen $F_{FB}^{(0)}$ und $F_{FB}^{(1)}$ folgt der vorangegangener Abschnitte. Die Berechnung der Frequenz-Summationen erfolgt im Anhang B.1 und ergibt

$$\begin{aligned} F_{FB}^{(0)} &= \frac{1}{4kq} \left\{ [1 - n_F(k) + n_B(q)] \left(\frac{1}{p_0 + k + q} - \frac{1}{p_0 - k - q} \right) \right. \\ &\quad \left. + [n_F(k) + n_B(q)] \left(\frac{1}{p_0 + k - q} - \frac{1}{p_0 - k + q} \right) \right\} , \\ F_{FB}^{(1)} &= -\frac{1}{4q} \left\{ [1 - n_F(k) + n_B(q)] \left(\frac{1}{p_0 + k + q} + \frac{1}{p_0 - k - q} \right) \right. \\ &\quad \left. + [n_F(k) + n_B(q)] \left(\frac{1}{p_0 + k - q} + \frac{1}{p_0 - k + q} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (3.36)$$

In dieser Darstellung sind wieder die Vakuum-Anteile (3.30) der Selbstenergie enthalten. Die Realteile der Vakuum-Beiträge müssen renormiert werden und können dann bei hohen Temperaturen gegenüber den Medium-Anteilen, wie in den vorangegangenen Abschnitten diskutiert, vernachlässigt werden. Formal werden also bei der Berechnung der Realteile der Funktionen T_1^F und T_2^F wieder alle Terme in den Funktionen $F_{FB}^{(0)}$ und $F_{FB}^{(1)}$, die nicht die thermischen Verteilungsfunktionen enthalten, weggelassen.

Im Hochtemperatur-Limes gehen die Einschleifen-Selbstenergien in die HTL-Resultate über. Diese erweisen sich wie die *hard thermal loops* der Eichbosonen als eichunabhängig. Der Hochtemperatur-Limes für die Funktionen T_1 und T_2 kann mit den im Anhang B.3 verwendeten Vereinfachungen leicht berechnet werden. Hier werden wieder nur die Resultate angegeben,

$$\begin{aligned} T_1^{\text{HTL}}(P) &= 2m_f^2 \frac{1}{p} \ln \frac{p_0 + p}{p_0 - p} , \\ T_2^{\text{HTL}}(P) &= 4m_f^2 . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Die Größe

$$m_f^2 := \frac{1}{8} C_R g^2 T^2 \quad (3.38)$$

hat, wie sich bei der Betrachtung der Quark-Dispersionsrelation herausstellen wird, die Bedeutung einer thermisch generierten Masse. Diese Masse ist dynamischer Natur und bricht, wie einleitend diskutiert, nicht die chirale Symmetrie, da die Selbstenergie und daher auch der resummierte Propagator mit γ_5 kommutieren. Insbesondere ist die Tatsache, daß m_f mit der Temperatur steigt, streng von der Fragestellung der Restaurierung der chiralen Symmetrie bei hohen Temperaturen zu trennen.

Der Übergang von den im Imaginärzeit-Formalismus definierten Funktionen zu den entsprechenden retardierten Größen erfolgt wieder durch die Fortsetzung der Funktionen von den Matsubara-Frequenzen $i(2n+1)\pi T$ zu den reellen Energien $p_0 + i0^+$, versehen mit einem infinitesimalen positiven Imaginärteil. Die so erhaltenen Ergebnisse der vollständigen Einschleifen-Berechnung der Realteile der Funktionen T_1^F und T_2^F sind in den Abbildungen 3.17 und 3.18 denen der HTL-Approximation gegenübergestellt. Wie für die bosonischen

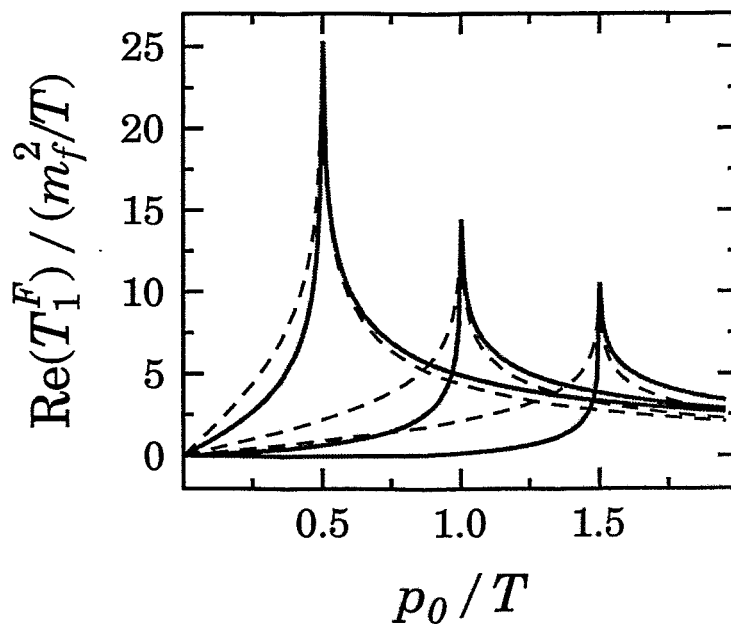


Abbildung 3.17: Realteil der Selbstenergie-Funktion T_1 in Feynman-Eichung in der Einschleifen- und der HTL-Approximation (volle bzw. gestrichelte Linien) für die Impulse $p/T = 0.5, 1, 1.5$. Am Lichtkegel ist T_1^F logarithmisch divergent.

Selbstenergien in den vorangegangenen Abschnitten wird auch hier für die Funktionen $T_{1,2}^F$ festgestellt, daß sie sich neben der erwarteten Übereinstimmung bei weichen Impulsen auch für große Impulse nahe des Lichtkegels an die HTL-Resultate angleichen. So gilt insbesondere $\text{Re}(T_2^F(p_0 = p)) = 4m_f^2 \equiv \text{Re}(T_2^{HTL})$.

Zum Vergleich der Imaginärteile in beiden Approximationen werden in den Abbildungen 3.19 und 3.20 nicht nur die vollständigen Einschleifen-Beiträge dargestellt, sondern mit

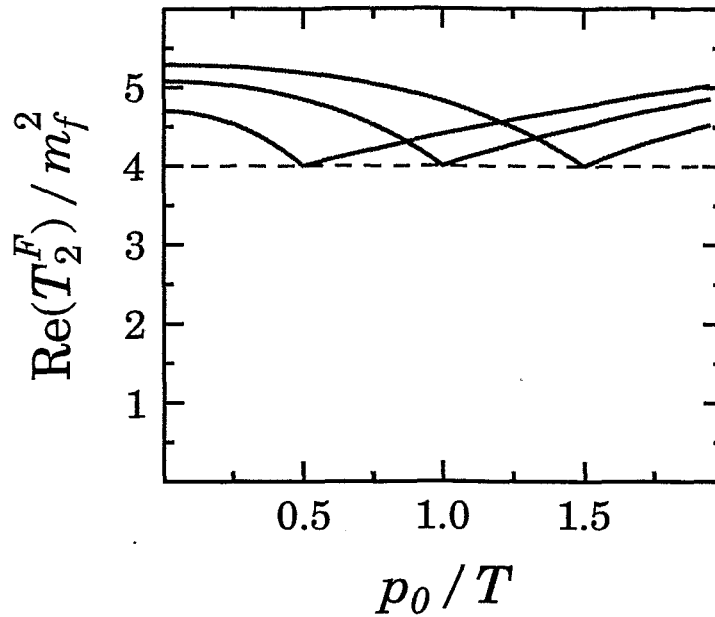


Abbildung 3.18: Die Einschleifen-Ergebnisse (volle Linien) für den Realteil der Funktion T_2^F . Die Impulse p sind hier die gleichen wie in der Abbildung 3.17. Die HTL-Approximation von T_2^F (gestrichelte Linie) ist impulsunabhängig.

$\text{Im}(T^T) = \text{Im}(T) - \text{Im}(T^{T=0})$ ebenfalls die temperaturabhängigen Medium-Anteile. Auch diese reinen Medium-Beiträge verschwinden nicht für $p_0 \geq p$, wo die HTL-Selbstenergien aus den gleichen kinematischen Gründen, die für die bosonischen Selbstenergien in den vorangegangenen Abschnitten erläutert wurden, nicht zum Imaginärteil beitragen⁷. In dem vollständigen Einschleifen-Imaginärteil ist zusätzlich noch der Vakuum-Beitrag des Prozesses $q \rightarrow gq$ enthalten, der erst oberhalb der Schwelle $p_0 = p$ möglich ist.

Der Beitrag Σ^ξ zur Selbstenergie

Wie bereits mehrfach erwähnt wurde, ist der führende Term der Hochtemperatur-Näherung, d. h., die HTL-Approximation, auch im Falle der Fermion-Selbstenergie eichunabhängig. Das bedeutet aber, daß die vom Eichparameter ξ abhängige Größe Σ^ξ , die den Feynman-Beitrag Σ^F zur Selbstenergie in einer beliebigen kovarianten Eichung ergänzt, in der HTL-Approximation verschwindet. Somit ist Σ^ξ eine Größe, durch welche die in diesem Teil der vorliegenden Arbeit diskutierten Unterschiede zwischen der HTL-Näherung und der vollständigen Einschleifen-Rechnung direkt zum Ausdruck kommen.

Die ξ -abhängigen Beiträge der Selbstenergie zu den in (3.28) definierten Größen T_1 und T_2 enthalten Spuren über 4 Spinoren. Diese lassen sich als Polynome in der Summationsva-

⁷ T_2^{HTL} besitzt z. B. überhaupt keinen Imaginärteil.

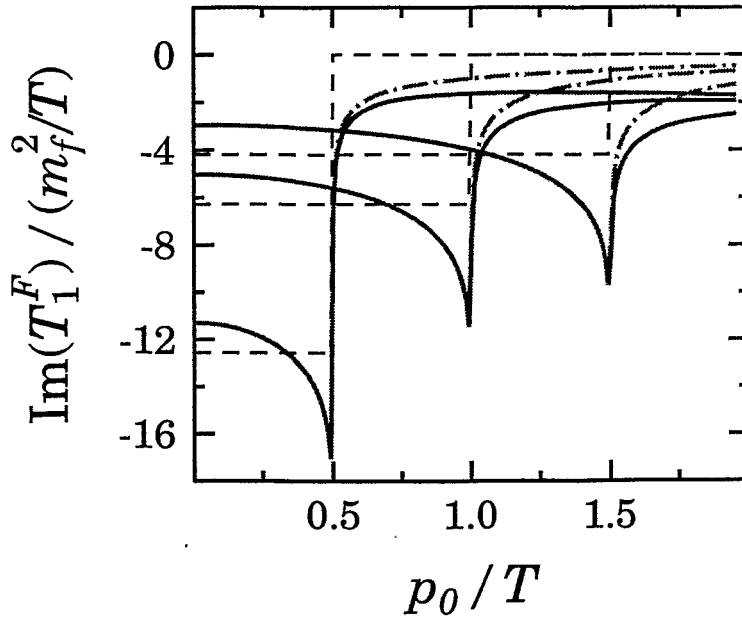


Abbildung 3.19: Darstellung der den in der Abbildung 3.17 gezeigten Realteilen der Funktion T_1^F entsprechenden Imaginärteile. Die strichpunktierten Linien zeigen den reinen Medium-Anteil, die vollen Linien dagegen den Einschleifen-Beitrag einschließlich des Vakuums-Anteils. Gestrichelt dargestellt ist die HTL-Approximation.

riable k_0 darstellen,

$$\begin{aligned} \text{tr}[\gamma_0 \not{K} \not{Q} \not{K}] &= 4 \sum_{n=0}^3 a_1^{(n)} k_0^n, \\ \text{tr}[\not{P} \not{K} \not{Q} \not{K}] &= 4 \sum_{n=0}^3 a_2^{(n)} k_0^n. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $a_{1,2}^{(n)}$ hängen von dem äußeren Impuls P sowie von \mathbf{k} ab und sind im Anhang B.4 explizit angegeben.

Die Funktionen $T_{1,2}^\xi$ lassen sich in der nun bereits geläufigen Weise als Integrale über den 3-Impuls schreiben,

$$\begin{aligned} T_{1,2}^\xi &= -4C_R \xi g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \partial_{m^2} \sum_{n=0}^3 a_{1,2}^{(n)} T \sum_{k_0} k_0^n \Delta_B(K) \Delta_F(Q) \Big|_{m=0} \\ &= -4C_R \xi g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \partial_{m^2} \sum_{n=0}^3 a_{1,2}^{(n)} F_{BF}^{(n)} \Big|_{m=0}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Es ist zu bemerken, daß sich die Funktionen $F_{BF}^{(0)}$ und $F_{BF}^{(1)}$ von den bereits bekannten

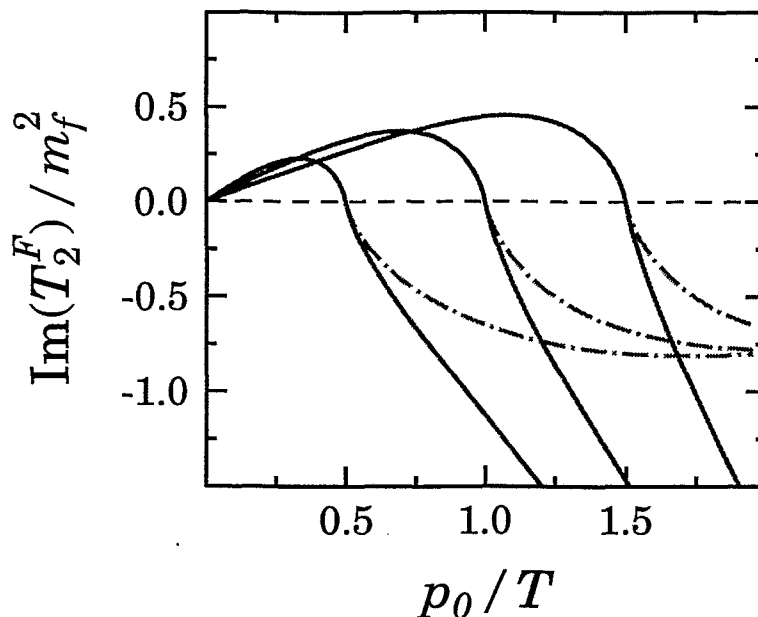


Abbildung 3.20: Vergleich von Einschleifen- und HTL-Approximation für den Imaginärteil der Selbstenergie-Funktion T_2^F analog zur Abbildung 3.19.

Ausdrücken $F_{FB}^{(0)}$ und $F_{FB}^{(1)}$ nicht nur in ihrem statistischen Charakter unterscheiden⁸. Vielmehr ist entsprechend der Formulierung (3.32) des kovarianten freien Gluon-Propagators in $\Delta_B(K)$ und somit auch in den Funktionen $F_{BF}^{(0)}$ und $F_{BF}^{(1)}$ die formal eingeführte Bosonmasse m zu berücksichtigen. Die Masse darf erst nach der Operation ∂_{m^2} Null gesetzt werden.

Die weitere Auswertung der Funktionen $T_{1,2}^\xi$ erfolgt im Anhang B.4 und ergibt

$$\begin{aligned}
 T_1^\xi &= -4C_R \xi g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[p_0 F_{BF}^{(0)} - F_{BF}^{(1)} + 2 \partial_{m^2} \left(p_0 k^2 F_{BF}^{(0)} - \mathbf{p} \mathbf{k} F_{BF}^{(1)} \right) \right]_{m=0}, \\
 T_2^\xi &= -4C_R \xi g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[(p_0^2 + p^2 + \mathbf{p} \mathbf{k}) F_{BF}^{(0)} - p_0 F_{BF}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \partial_{m^2} \left((p_0^2 k^2 + (\mathbf{p} \mathbf{k})^2) F_{BF}^{(0)} - 2 p_0 \mathbf{p} \mathbf{k} F_{BF}^{(1)} \right) \right]_{m=0}. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Im weiteren werden nur die Realteile der analytisch fortgesetzten Funktionen $T_{1,2}^\xi$ betrachtet, da diese die später untersuchten Dispersionsrelationen bestimmen. Von den in den Ausdrücken (3.40) verbleibenden Integrationen können wieder die über die Raumwinkel analytisch ausgeführt werden. Über k ist numerisch zu integrieren.

Das Ergebnis der kompletten Auswertung ist in den Abbildungen 3.21 und 3.22 dargestellt. Der Vergleich dieser Resultate mit der entsprechenden HTL-Näherung erübrigt sich an dieser Stelle fast bis auf die Bemerkung, daß T_1^ξ und T_2^ξ für $p_0 = p$ verschwinden und daher am Lichtkegel wieder mit den generell verschwindenden HTL-Ergebnissen übereinstimmen.

⁸Die Vertauschung der statistischen Indizes entspricht der Vertauschung der Impulse \mathbf{k} und \mathbf{q} , von denen diese Funktionen abhängen.

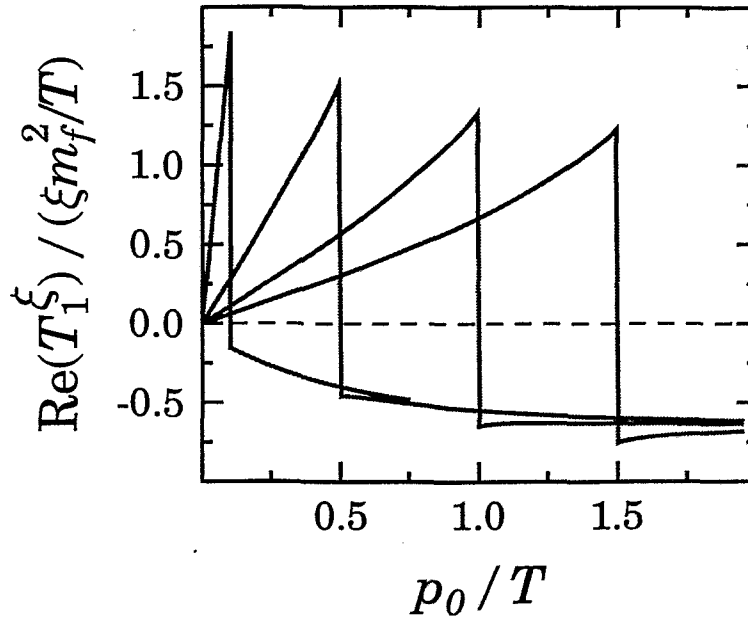


Abbildung 3.21: Der Realteil der Selbstenergie-Funktion T_1^ξ in der Einschleifen-Approximation. Um den Übergang zum HTL-Limes (gestrichelte Linie), der für T_1^ξ identisch verschwindet, zu verdeutlichen, wurde die Funktion hier nicht nur für die bisher immer gewählten Impulse $p/T = 0.5, 1$ und 1.5 dargestellt, sondern zusätzlich noch für $p/T = 0.1$ (am weitesten links liegende Kurve).

Im Limes kleiner Impulse gehen die Einschleifen-Resultate für $T_{1,2}^\xi$ gegen Null, was ebenfalls dem Übergang zu den HTL-Ergebnissen entspricht. Jedoch zeigt die Abbildung 3.21, daß dieser Übergang für T_1^ξ etwas diffiziler ist als in den bisher betrachteten Fällen, da T_1^ξ für $p_0 \lesssim p$ auch für kleine Werte von p nicht generell klein wird⁹. Außerdem skalieren die Funktionen $T_{1,2}^\xi$ zusätzlich mit dem im Prinzip frei wählbaren Parameter ξ . Wie stark der Einfluß dieser eichabhängigen Terme auf die physikalisch relevante Dispersionsrelation ist, wird im folgenden Unterabschnitt untersucht.

Die Fermion-Dispersionsrelationen

Die Dispersionsrelationen der Fermionen im Medium werden durch die Lage der Pole des Propagators beschrieben. Aus der Dyson-Gleichung $S^{-1} = (S^{(0)})^{-1} - \Sigma$ folgt mit der Darstellung (3.27) der Selbstenergie die allgemeine Form des chiral invarianten Fermion-Propagators als

$$S(P) = \frac{(1+a)P + b\gamma_0}{(1+a)^2 P^2 + 2(1+a)bk_0 + b^2}. \quad (3.41)$$

⁹Allerdings ist auch die logarithmische Divergenz des Feynman-Anteils T_1^F für kleine Impulse p zunehmend stärker ausgeprägt (vergleiche Abbildung 3.17).

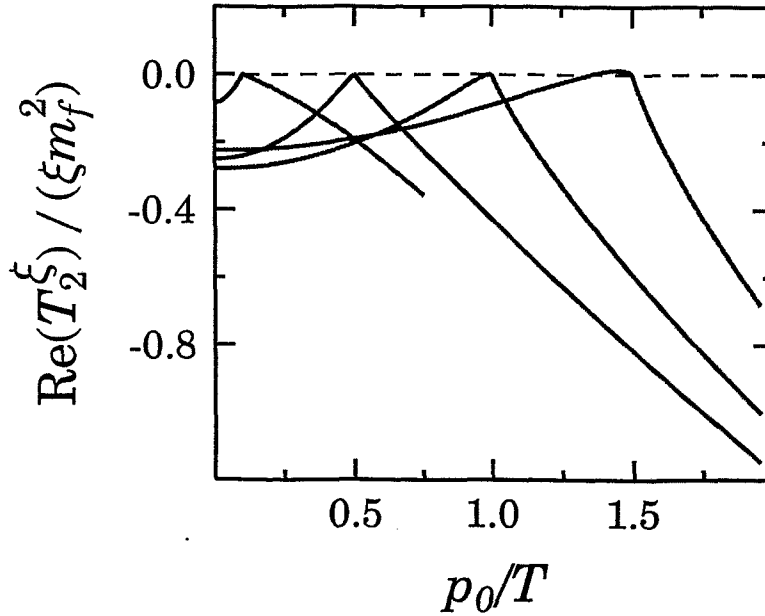


Abbildung 3.22: Die Darstellung des Realteils der Selbstenergie-Funktion T_2^ξ entsprechend der Abbildung 3.21. Knapp unterhalb des Lichtkegels $p_0 = p$ wird T_2^ξ positiv.

Der physikalische Gehalt der in S enthaltenen Informationen wird jedoch in einer alternativen Darstellung des Propagators deutlicher. In der Gestalt

$$S(P) = \frac{\gamma_0 - \hat{p}\gamma}{2D_+} + \frac{\gamma_0 + \hat{p}\gamma}{2D_-} \quad (3.42)$$

ist der Propagator in einen Anteil mit positivem Helizitäts- zu Chiralitätsverhältnis und einen mit negativem Verhältnis zerlegt. Die Größen D_+ und D_- sind als inverse skalare Propagatoren der auf diese Weise klassifizierten Anregungen anzusehen. Ausgedrückt durch die Funktionen T_1 und T_2 lauten sie

$$D_\pm(P) = -p_0 \pm p + \frac{1}{4p} (\pm T_2(P) - (\pm p_0 - p)T_1(P)) . \quad (3.43)$$

Die Fermion-Dispersionsrelation besitzt daher zwei Zweige, die durch die Realteile der Nullstellen der Funktionen D_\pm bestimmt werden.

Bei verschwindender Temperatur muß in dem allgemeinen Ausdruck (3.27) für die Selbstenergie im Plasma der die Lorentz-Symmetrie brechende Term verschwinden, d. h., im Vakuum muß $b \stackrel{!}{=} 0$ gelten. Somit erhält man entsprechend der Propagator-Darstellung (3.41) im Vakuum auch unter Berücksichtigung der Wechselwirkungseffekte nur einen propagierenden Mode mit der trivialen Dispersionsrelation $P^2 = 0$. Die Gleichungen $\omega = \pm p$ beschreiben dabei die Propagation von Fermionen bzw. Anti-Fermionen auf dem Lichtkegel. Die Wechselwirkung unterliegt hier neben der chiralen auch noch der Lorentz-Symmetrie und kann daher nur die Residuen des Propagators, nicht aber die Lage seiner Pole ändern [Wel82b].

Durch die Existenz eines ausgezeichneten Bezugssystems, nämlich des thermischen Mediums, wird die Einschränkung $b \equiv 0$ aufgehoben. Aus den graphischen Darstellungen der Funktionen T_1 und T_2 sowohl in der HTL- als auch in der Einschleifen-Approximation wird deutlich, daß die Funktion b insbesondere auf dem Lichtkegel von Null verschieden ist. Das hat zwei wesentliche Konsequenzen. Zum einen besitzt die Dispersionsrelation dann nicht mehr die triviale Form $\omega^2 = p^2$. Zum anderen ergibt sich eine Verdoppelung der Zahl propagierender Moden.

Im HTL-Limes lassen sich die Dispersionsrelationen analytisch in impliziter Form angeben [KK80, Wel82a]; aus den Gleichungen (3.37) und (3.43) folgt

$$\omega = \pm p + \frac{m_f^2}{p} \left[\pm 1 - \frac{\pm \omega - p}{2p} \ln \frac{\omega + p}{\omega - p} \right]. \quad (3.44)$$

Aus dem im Vakuum existenten Zweig $\omega^2 = p^2$ ergibt sich durch (3.44) mit dem oberen Vorzeichen die durch den Medieeinfluß modifizierte, nicht-triviale Dispersionsrelation von Fermionen- (bzw. Anti-Fermionen-) Anregungen. Wie aus (3.44) ersichtlich, wird dieser Zweig asymptotisch durch $\omega = p + m_f^2/p$ bzw. durch

$$\omega = \sqrt{p^2 + 2m_f^2} \quad \text{für } p \rightarrow \infty \quad (3.45)$$

beschrieben. Zusätzlich findet man einen weiteren Zweig, dessen positiver Ast von Weldon [Wel82b] aufgrund der Darstellung (3.42) als Anti-Fermion-Lochanregung interpretiert wurde. Der kollektive Charakter dieser auch Plasmino genannten Anregung kommt durch ihr Verschwinden bei größeren Impulsen, d. h., bei der Annäherung an den Lichtkegel, zum Ausdruck. Ein weiteres auffallendes Merkmal der Plasmino-Dispersionsrelation ist das Minimum der Energie $\omega_{\min} := \omega(p_{\min})$ bei dem nicht-verschwindenden Impuls p_{\min} . Die Existenz dieses Minimums folgt aus der Tatsache, daß in beiden Näherungen die Anti-Loch-Dispersionsrelation bei $p = 0$ den umgekehrten Anstieg wie die Teilchen-Dispersionskurve (und damit einen negativen Anstieg) besitzt. Andererseits muß sie sich bei großen Impulsen dem Lichtkegel annähern.

Die aus den Nullstellen von $\text{Re}(D_{\pm})$ unter der Annahme einer hinreichend schwachen Dämpfung folgenden Dispersionsrelationen in der HTL- und in der Einschleifen-Approximation sind in der Abbildung 3.23 jeweils für die Fermion- und die Plasmino-Anregung dargestellt. Ausgegangen wurde zunächst von der Selbstenergie in der Feynman-Eichung, wobei der Vergleich der Real- und Imaginärteile der Bestimmungsgleichung (3.43) zeigt, daß die gemachte Annahme schwacher Dämpfung auch bei der hier betrachteten Kopplungsstärke vernünftig ist. Der Unterschied zwischen beiden Approximationen äußert sich hauptsächlich in einer Modifikation der Ruheenergie der Anregungen. Im HTL-Limes kleiner Kopplungsstärken ist diese für beide Zweige gleich der thermischen Fermionmasse m_f , was die gewählte Bezeichnung rechtfertigt. Für wachsende Kopplungen nimmt auch die Ruheenergie zu, besitzt aber aufgrund der $O(3)$ -Symmetrie des Wärmebades für beide Anregungen den gleichen Wert. Diese nichtperturbativ gültige Tatsache folgt aus der allgemeinen Diskussion im Anhang B.5.

Die Anstiege beider Dispersionskurven unterscheiden sich sowohl in der HTL-Näherung als auch in der Einschleifen-Rechnung bei beliebiger kovarianter Eichung nur durch ihr Vorzeichen. Dieser Fakt hängt mit den analytischen Eigenschaften der beiden Approximationen der Selbstenergie für kleine Impulse zusammen. Inwiefern diese Tatsache allgemeingültig ist, muß weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

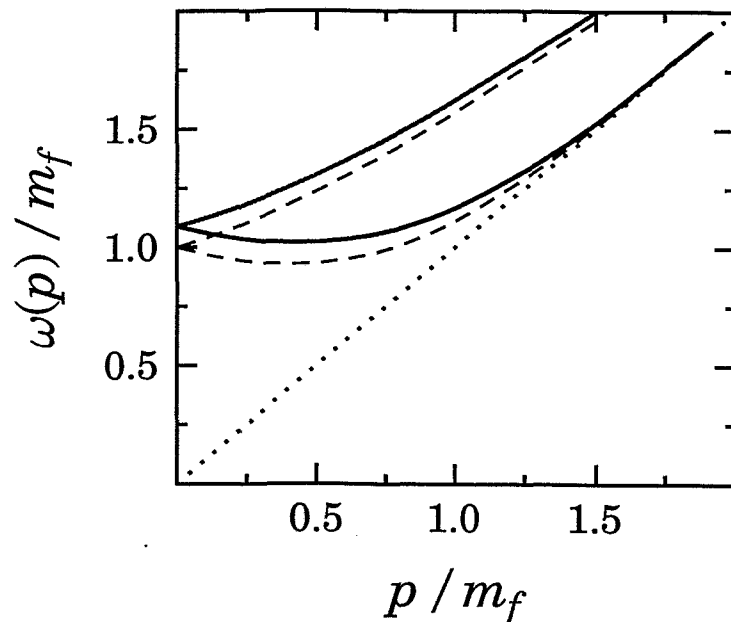


Abbildung 3.23: Dispersionsrelationen der Fermion- und der Plasmino-Anregung (jeweils oberer bzw. unterer Zweig) in der HTL-Näherung (gestrichelt) und der Einschleifen-Approximation (Feynman-Eichung, volle Linien) für $g = 3$. Gepunktet ist der Lichtkegel $\omega = p$ dargestellt.

Wie in der Abbildung 3.24 genauer gezeigt, ist die Lage des Minimums des Plasmino-Zweiges in der Einschleifen-Näherung bei $p_{\min} \approx 0.4 m_f$ in einem großen Intervall der Kopplungsstärke g recht stabil. Die minimale Energie des Plasmons skaliert dagegen ähnlich wie die Ruheenergie; es gilt nämlich $\omega_{\min} \approx 0.9 \omega(p=0)$.

Abschließend wird die Eichabhängigkeit der Fermion-Dispersionsrelation diskutiert. Dispersionsrelationen sind prinzipiell meßbar und müssen daher unabhängig von der Wahl der Eichung sein. Für die im vorangegangenen Unterabschnitt bei der Berechnung der Fermion-Selbstenergie gewählte Klasse der kovarianten Eichungen sollten die Dispersionsrelationen also unabhängig von dem Parameter ξ sein. Die Eichinvarianz der Lage der Pole läßt sich für den exakten Fermion-Propagator formal beweisen [KKR91]. Es ist allerdings keinesfalls zu erwarten, daß auch die Polstellen eines approximierten Propagators eichinvariant sind. Insbesondere erweisen sich die Dispersionsrelationen, die man aus Propagatoren in einer naiven, endlichen Schleifen-Entwicklung erhält, als eichabhängig. Der formale Beweis der Eichinvarianz der physikalischen Polstellen des Propagators macht explizit deutlich, wie sich in einer Entwicklung die eichabhängigen Terme in verschiedenen Ordnungen kompensieren.

In der Abbildung 3.25 ist die Abhängigkeit der Fermion-Dispersionsrelationen von der Eichfixierung anhand von drei speziellen Eichungen gezeigt. Unterschiede werden insbesondere für kleine Impulse $p \lesssim gT$ sichtbar. Das ist zu erwarten, da der volle Propagator bei weichen Impulsen sensitiver als bei harten auf die Resummation der Wechselwirkungseffekte ist, so daß Inkonsistenzen einer approximierten Selbstenergie dort am deutlichsten werden. Die bereits für die Feynman-Eichung diskutierten Konsequenzen der $O(3)$ -Symmetrie, nämlich

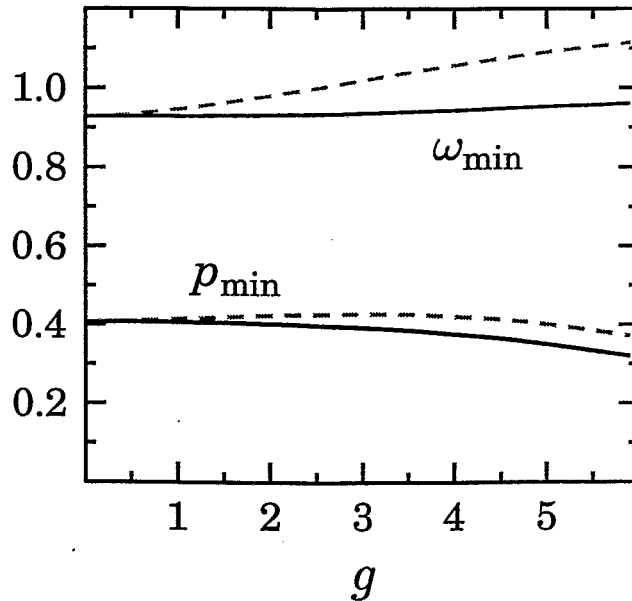


Abbildung 3.24: Die Lage des Minimums p_{\min} der Plasmino-Dispersion und die zugehörige Energie ω_{\min} . Die gestrichelten Kurven sind dabei auf m_f skaliert, die vollen Linien dagegen auf die Ruheenergie $\omega(p=0)$.

der gleiche Grenzwert und der entgegengesetzte Anstieg der beiden Zweige für verschwindenden Impuls, gelten natürlich in einer beliebigen Eichung. Auch die Existenz des Minimums im Plasmino-Zweig ist ein Merkmal, welches nicht an spezielle Eichungen gebunden ist.

Überraschenderweise fallen die Resultate der HTL-Näherung als Limes kleiner Kopplungen und die Ergebnisse der Einschleifen-Rechnung in der Landau-Eichung fast zusammen, siehe dazu Abbildung 3.25. In der Tat stellen sich die Dispersionsrelationen in der Landau-Eichung als fast unabhängig von der Kopplungskonstanten heraus. Dies ist in der Abbildung 3.26 für Werte der Kopplung bis $g = 3$ dargestellt.

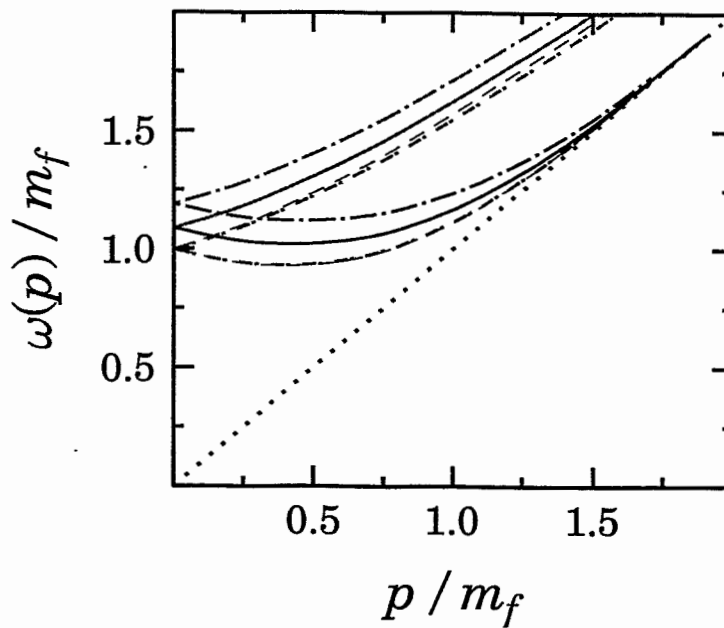


Abbildung 3.25: Die Eichabhängigkeit der fermionischen Dispersionsrelationen. Die Pole des Propagators wurden in der Landau-Eichung ($\xi = 1$, kurz strichpunktiert), in der Feynman-Eichung ($\xi = 0$, volle Linien) und für $\xi = -1$ (lang strich-punktiert) bestimmt. Zum Vergleich ist auch die HTL-Dispersion gestrichelt angegeben, diese fällt fast mit den Resultaten für $\xi = 1$ zusammen. Der Wert der Kopplungskonstante wurde hier wieder als $g = 3$ angenommen.

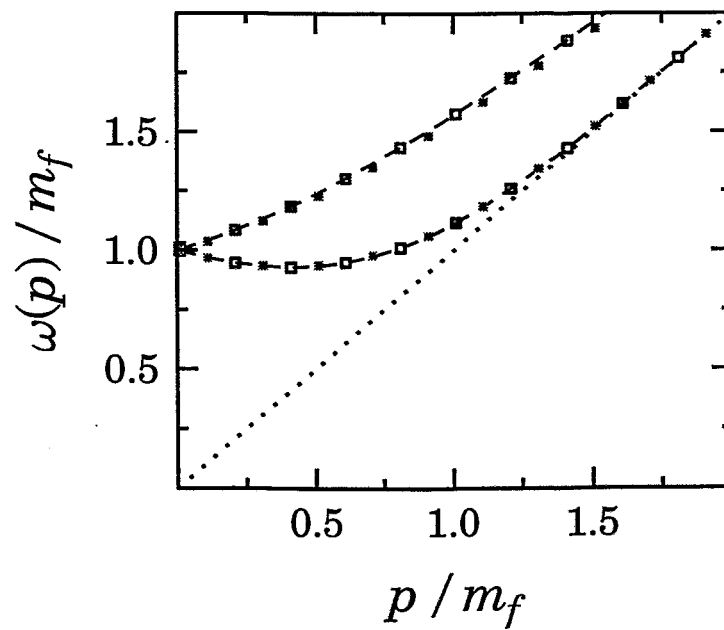


Abbildung 3.26: Die Fermion-Dispersionsrelationen in der Landau-Eichung mit $\xi = 1$ für verschiedene Kopplungskonstanten. Gestrichelt dargestellt ist das HTL-Resultat, was $g \rightarrow 0$ entspricht. Die offenen Quadrate kennzeichnen $g = 1$ und die vollen Symbole $g = 3$.

Teil II

Perturbative Thermodynamik

4 Betrachtungen zu perturbativen Entwicklungen

Im ersten Teil dieser Arbeit wurde anhand verschiedener Selbstenergien untersucht, wie zuverlässig die Resultate der Hochtemperatur-Näherung sind, wenn sie außerhalb ihres eigentlichen Gültigkeitsbereiches angewandt werden. In diesem Teil soll eine ähnliche Fragestellung betrachtet werden, nämlich die nach der Aussagekraft perturbativer Entwicklungen bei Kopplungsstärken, die nicht 'klein' sind. Die Frage, was im mathematisch exakten Sinne 'klein' heißt, also wie verlässlich ein perturbatives Resultat wirklich ist, läßt sich im allgemeinen für die störungstheoretische Auswertung von Quantenfeldtheorien bislang nicht streng beantworten. Das dafür häufig pauschal angenommene Kriterium 'Kopplungsstärke klein gegen Eins' ist recht willkürlich, da als Entwicklungsparameter z. B. auch ' π^2 ·Kopplungsstärke' in Frage käme.

4.1 Ein einfaches Beispiel

Die umrissene Fragestellung soll hier an einem Beispiel diskutiert werden, welches hinreichend einfach ist, um explizite Aussagen abzuleiten, zugleich aber auch wesentliche allgemeine Merkmale aufweist. In [IZ80] wird, allerdings unter einem etwas anderen Blickwinkel, das Integral

$$Z(g^2) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2 - g^2 x^4} \quad (4.1)$$

betrachtet. Dieses Integral stellt gewissermaßen ein 0-dimensionales Funktionalintegral dar, bei dem das Feld, hier mit x bezeichnet, nur auf einem Raum-Zeit-Punkt lebt. Als solches ist es eine Karikatur der Zustandssumme der skalaren φ^4 -Theorie, wobei $\frac{1}{2}x^2$ dem freien kinetischen Teil der Lagrange-Funktion entspricht und $g^2 x^4$ zu dem Wechselwirkungsanteil korrespondiert. Auf den Zusammenhang dieses Integrals mit der φ^4 -Theorie wird weiter unten noch einmal eingegangen.

Selbst das einfache Integral $Z(g^2)$ hat mit physikalisch relevanten Funktionalintegralen gemein, daß es sich bis auf den 'wechselwirkungsfreien' Fall mit $g^2 = 0$ nicht durch elementare Funktionen ausdrücken läßt. Allerdings kann $Z(g^2)$ leicht numerisch berechnet werden. Dies stellt das Analogon zu der numerischen Auswertung physikalischer Quantenfeldtheorien durch Monte-Carlo-Rechnungen dar.

Auch die perturbative Entwicklung eines Funktionalintegrals zur Beschreibung einer QFT besitzt eine einfache Analogie in dem betrachteten Beispiel. Durch eine Entwicklung des Wechselwirkungsanteils im Integranden,

$$e^{-\frac{1}{2}x^2 - g^2 x^4} = e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-x^4)^m (g^2)^m,$$

ergibt sich eine Reihe von Termen steigender Ordnung in der 'Kopplungskonstante' g^2 , die Mittelungen über die Zustände des freien Systems darstellen. Nach einer formalen Vertauschung der Integration mit der Summe über m kann man schreiben

$$\begin{aligned} Z^{(n)}(g^2) &:= \sum_{m=0}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{m!} (-x^4)^m e^{-\frac{1}{2}x^2} \right] (g^2)^m \\ &= \sum_{m=0}^n z_m (g^2)^m \quad \text{mit } z_m = \left(-\frac{1}{4}\right)^m \frac{(4m)!}{m!(2m)!}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

und den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ mit

$$\tilde{Z}(g^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z^{(n)}(g^2) \quad (4.3)$$

bezeichnen. Die oben formulierte Fragestellung betrifft also den Zusammenhang zwischen $Z(g^2)$ und den Entwicklungen $Z^{(n)}(g^2)$ bzw. $\tilde{Z}(g^2)$. Es muß zunächst betont werden, daß der angegebene Ausdruck für $\tilde{Z}(g^2)$ rein formal ist. Es kann nämlich einfach festgestellt werden, daß die Entwicklung (4.2) divergent ist. In einer genügend hohen Ordnung der Entwicklung gehen die Koeffizienten in die asymptotische Form

$$z_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} z_m^{\text{as}} := \frac{(-16)^m}{\sqrt{2} \pi m} m! \sim \left(-\frac{16m}{e}\right)^m \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \quad (4.4)$$

über. Das Quotientenkriterium

$$\frac{z_{m+1}(g^2)^{m+1}}{z_m(g^2)^m} \sim mg^2$$

ergibt dann, daß die Reihe für jeden endlichen Wert von g^2 divergiert. Dieses Ergebnis ist leicht einzusehen. Da der Konvergenzradius einer Laurent-Reihe von der Entwicklungsstelle bis zum nächsten Punkt einer Nicht-Analytizität reicht, die Funktion $Z(g^2)$ in der komplexen g^2 -Ebene aber einen Schnitt entlang der negativen reellen Achse besitzt¹, muß die Reihe für jeden endlichen Wert von g^2 divergieren.

Auch in diesem Punkt deutet sich eine Gemeinsamkeit des Integrals $Z(g^2)$ mit realistischen Funktionalintegralen an. Da man davon ausgehen kann, daß der Übergang von einer physikalischen Theorie zu der entsprechenden Theorie mit dem entgegengesetzten Vorzeichen der Kopplungskonstante nicht analytisch ist, werden auch die perturbativen Entwicklungen solcher Theorien keine konvergenten Reihen sein. Da aber andererseits die mit am besten bestätigte Übereinstimmung zwischen Experiment und einer physikalischen Theorie überhaupt durch die störungstheoretische Auswertung der QED erzielt wird, müssen diese perturbativen Reihen, von denen man meist nur einige der führenden Terme kennt, dennoch wesentliche Informationen über das exakte Funktionalintegral enthalten.

Diese Aussage wird nun für das Integral $Z(g^2)$ und die Reihenentwicklung (4.2) untersucht. Dazu wird der Fehler der bei der Ordnung n abgebrochenen Reihe $Z^{(n)}(g^2)$ betrachtet. Dieser ergibt sich zu

$$\begin{aligned} R_n(g^2) &:= |Z(g^2) - Z^{(n)}(g^2)| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left| e^{-g^2 x^4} - \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} (-x^4)^m e^{-\frac{1}{2}x^2} (g^2)^m \right| \right|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

¹Für Werte von g^2 mit negativem Realteil, die nicht auf der reellen Achse liegen, kann der Integrationsweg so deformiert werden, daß das Integral wohldefiniert ist.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung läßt sich

$$\left| e^{-g^2 x^4} - \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} (-x^4)^m e^{-\frac{1}{2} x^2} (g^2)^m \right| = \frac{1}{(n+1)!} x^{4(n+1)} e^{-\theta g^2 x^4}$$

abschätzen, wobei θ zwischen 0 und 1 liegt. Daher kann man für das Restglied eine obere Schranke angeben, nämlich

$$R_n(g^2) \leq |z_{n+1}(g^2)^{n+1}|. \quad (4.6)$$

Es ist einfach zu sehen, daß bei einem gegebenen Wert von g^2 ein gewisses n^* existiert, bei welchem das Restglied R_n minimal wird. Verwendet man z. B. für die Koeffizienten z_n die trivial ins Reelle fortsetzbare, asymptotische Form (4.4), so liegt das Minimum der Funktion $R(n) := |z_n^{\text{as}}(g^2)^n| \sim (16ng^2)^n$ bei

$$n^* \sim \frac{1}{16g^2}. \quad (4.7)$$

Für große Kopplungsstärken g^2 muß die perturbative Reihe für $Z(g^2)$ also schon bei einer kleinen Ordnung entsprechend (4.7) abgebrochen werden, um eine möglichst gute Approximation des exakten Resultats zu erhalten. Diese prinzipielle Aussage, an der auch die Verwendung der exakten Form der Koeffizienten z_n nichts ändert, entspricht nicht der intuitiven Vorstellung, daß bei starker Kopplung möglichst viele Terme der perturbativen Reihe berechnet werden müssen, um eine vernünftige Näherung zu erhalten. In der Abbildung 4.1 ist dieser Sachverhalt für die ersten sechs Näherungen $Z^{(n)}(g^2)$ dargestellt. Daraus

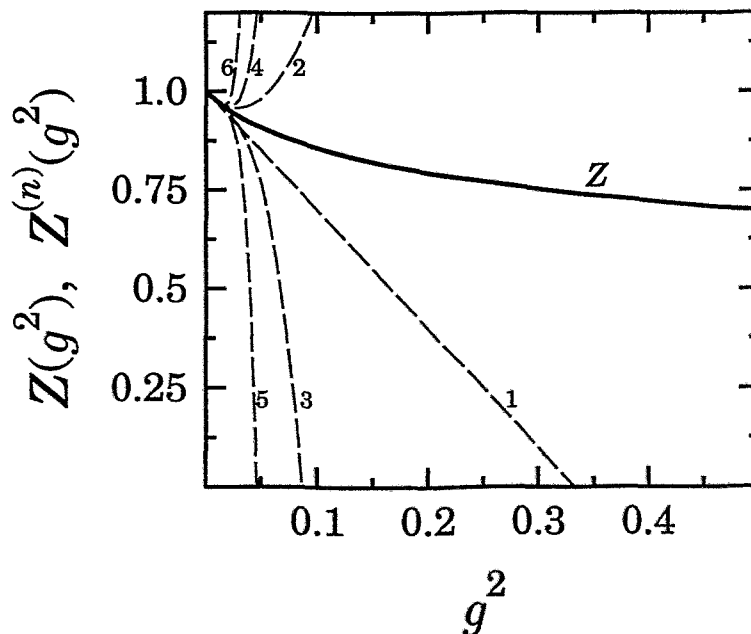


Abbildung 4.1: Die Funktion $Z(g^2)$ sowie die perturbativen Approximationen $Z^{(n)}$ in den Ordnungen $n = 1, \dots, 6$.

wird deutlich, daß die Approximationen in einer hohen Entwicklungsordnung das exakte Resultat für genügend kleine Werte von g^2 recht gut beschreiben. In diesem Bereich sind allerdings die Abweichungen von $Z(g^2)$ zu den Approximationen in niedrigeren Ordnungen, also beispielsweise zu $Z^{(1)}$, ohnehin gering. Andererseits werden für größere Werte von g^2 die Approximationen $Z^{(n)}$ mit wachsendem n zunehmend schlechter, wobei die optimale Ordnung auch für die betrachteten kleinen Werten von n gut durch die abgeschätzte Relation (4.7) beschrieben wird.

Es sollte aus den motivierenden Bemerkungen zur Betrachtung des Integrals (4.1) klar sein, daß ähnliche Überlegungen auch für physikalisch relevante Funktionalintegrale geltend zu machen sind. Tatsächlich kann beispielsweise auch für perturbative Entwicklungen in der QCD die Aussage, daß bei stärkerer Kopplung Terme höherer Ordnung die Approximation nicht verbessern, durch weitere Argumente gestützt werden, worauf im Abschnitt 4.3 näher eingegangen wird.

Schließlich soll noch einmal auf den Zusammenhang des Integrals (4.1) mit der φ^4 -Theorie zurückgekommen werden. Die Koeffizienten z_n hängen nämlich mit der Anzahl bzw. dem Symmetriefaktor der Diagramme in der n -ten Ordnung der perturbativen Entwicklung der thermodynamischen Zustandssumme der φ^4 -Theorie zusammen [IZ80]. Dies ist eine einfache kombinatorische Folgerung aus dem Wickschen Theorem. So ist z. B. $|z_1| = 3/1!$ und entsprechend gibt es drei Zweischleifen-Diagramme der Topologie $\bigcirc\bigcirc$. Für Diagramme höherer Ordnung muß berücksichtigt werden, daß darunter einige unverbundene Graphen existieren. So ist beispielsweise $|z_2| = 105/2!$ und es gibt insgesamt 105 Dreischleifen-Diagramme. Im einzelnen sind dies

$$72 \bigcirc\bigcirc\bigcirc + 24 \bigcirc\text{---}\bigcirc + 3^2 \begin{array}{c} \bigcirc\bigcirc \\ \bigcirc\bigcirc \end{array} .$$

Physikalisch relevant sind jedoch nur die beiden ersten Topologien, da nur diese einen Beitrag zum thermodynamischen Potential Ω liefern. Es kann nämlich allgemein gezeigt werden, daß in der perturbativen Entwicklung meßbarer Größen alle unverbundenen Graphen verschwinden². Die analoge Feststellung ist aus der Vakuum-QFT wohlbekannt. Während aus dem generierenden Funktional $Z[J]$ sämtliche Greenschen Funktionen durch Funktionalableitung folgen, erzeugt das Funktional $W[J] := -i \ln Z[J]$ ausschließlich die verbundenen Greenschen Funktionen [IZ80]. Der dafür verantwortliche logarithmische Zusammenhang zwischen beiden Funktionalen ist aber der gleiche wie der zwischen der Zustandssumme und dem thermodynamischen Potential (2.3).

Dieser Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der perturbativen Entwicklung von $Z(g^2)$ und den Symmetriefaktoren des thermodynamischen Potentials Ω der φ^4 -Theorie ist auch ein erstes Indiz für die Divergenz der Reihenentwicklung von Ω , da man keineswegs annehmen kann, daß die unbegrenzt wachsende Zahl der Feynman-Graphen insgesamt einen endlichen Beitrag ergibt.

4.2 Approximationen für $Z(g^2)$

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, daß die perturbative Entwicklung (4.2) des Parameter-(Funktional)-Integrals $Z(g^2)$ zwar divergiert, aber für nicht zu große Werte von

²Die Zustandssumme an sich ist natürlich nicht direkt meßbar.

g^2 dennoch wichtige Informationen über $Z(g^2)$ enthält. Bei einer Reihe von physikalischen Problemen, wie beispielsweise in der QED, ist die Kopplungsstärke tatsächlich hinreichend klein und perturbative Approximationen erweisen sich dann als sehr erfolgreich bei der Beschreibung von Experimenten. In vielen Fragestellungen, z. B. jenen, die die starke Wechselwirkung betreffen, ist die Kopplung jedoch nicht klein. In diesen Fällen ist der Sinn perturbativer Entwicklungen jeweils gründlich zu untersuchen. Außerdem ist es angebracht, nach approximativen Methoden zu suchen, die über die naive perturbative Entwicklung hinausgehen. In den folgenden Unterabschnitten werden einige solcher Verfahren für das Integral $Z(g^2)$ erläutert.

Konvergenz-Verbesserung durch Borel-Transformation

Das divergente Verhalten der naiven perturbativen Entwicklung (4.2) liegt, wie im vorangehenden Abschnitt festgestellt wurde, an dem unbeschränkten Wachsen der Glieder dieser Reihe mit zunehmender Ordnung, was z. B. an der asymptotischen Form (4.4) der Koeffizienten zu erkennen ist. Es ist daher naheliegend, als eine Näherung von $Z(g^2)$ den formalen Ausdruck

$$\begin{aligned}\tilde{Z}^{(n)}(g^2) &:= \sum_{m=0}^n z_m (g^2)^m + \sum_{m=n+1}^{\infty} z_m^{\text{as}} (g^2)^m \\ &= \left(1 + \sum_{m=1}^n [z_m - z_m^{\text{as}}] (g^2)^m\right) + \sum_{m=1}^{\infty} z_m^{\text{as}} (g^2)^m\end{aligned}\quad (4.8)$$

zu betrachten. Der Ausdruck in der runden Klammer ist offenbar für beliebige, endliche Werte von n wohldefiniert. Die für die Divergenzen verantwortlichen Anteile wurden in (4.8) in Form des zweiten Summanden abgespalten. Es zeigt sich allerdings, daß dieser Anteil, der hier als

$$\tilde{Z}^{\text{as}}(g^2) := \sum_{m=1}^{\infty} z_m^{\text{as}} (g^2)^m \quad (4.9)$$

bezeichnet wird, Borel-summierbar ist [IZ80]. Die Borel-Transformation von \tilde{Z}^{as} wird dabei definiert als

$$\mathcal{B}[\tilde{Z}^{\text{as}}](g^2) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} z_m^{\text{as}} (g^2)^m. \quad (4.10)$$

Der hierbei im Vergleich zu den Gliedern der Reihendarstellung (4.9) von \tilde{Z}^{as} eingeführte Vorfaktor $(m!)^{-1}$ sichert im vorliegenden Fall die Existenz von $\mathcal{B}[\tilde{Z}^{\text{as}}]$. Es ist formal leicht zu sehen, daß die Operation

$$\tilde{Z}_{\mathcal{B}}^{\text{as}}(g^2) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} \mathcal{B}[\tilde{Z}^{\text{as}}](tg^2) \quad (4.11)$$

die Faktoren $(m!)^{-1}$ in der Borel-Transformation in jeder Ordnung kompensiert, und, falls alle auftretenden Ausdrücke wohldefiniert sind, somit gerade die Rücktransformation zu (4.10) ist.

Im betrachteten Fall sind die Koeffizienten z_n^{as} durch (4.4) gegeben und die Borel-Transformation (4.10) liefert das analytische Resultat

$$\mathcal{B}[\tilde{Z}^{\text{as}}](g^2) = -\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \ln(1 + 16g^2).$$

Auch die Rücktransformation läßt sich analytisch ausführen, und man erhält das endliche Ergebnis

$$\tilde{Z}_B^{\text{as}}(g^2) = -\frac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{-1/(16g^2)} \text{Ei}\left(\frac{1}{16g^2}\right), \quad (4.12)$$

wobei $\text{Ei}(x)$ die Exponentialintegral-Funktion bezeichnet. Entsprechend (4.8) erhält man auf diese Weise für $Z(g^2)$ die approximative Darstellung

$$\tilde{Z}^{(n)}(g^2) = \left(1 + \sum_{m=1}^n [z_m - z_m^{\text{as}}] (g^2)^m\right) - \frac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{-1/(16g^2)} \text{Ei}\left(\frac{1}{16g^2}\right). \quad (4.13)$$

$\tilde{Z}^{(n)}(g^2)$ beschreibt die Funktion $Z(g^2)$ bei einem gegebenen Wert von n wesentlich besser als die entsprechende naive perturbative Entwicklung (4.2), was durch den Vergleich der Abbildungen 4.1 und 4.2 deutlich wird. Insbesondere sind die Bereiche, in denen die Funk-

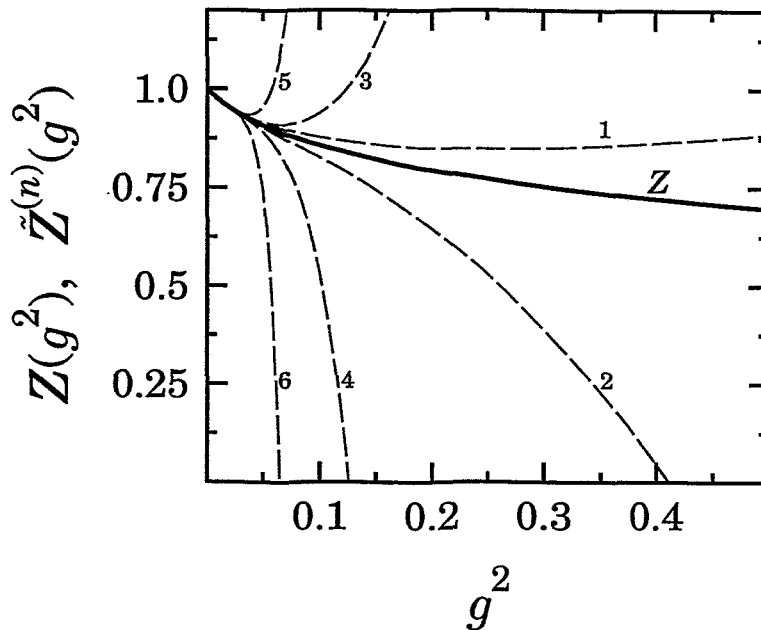


Abbildung 4.2: Die Funktion $Z(g^2)$ sowie die Borel-Approximationen $\tilde{Z}^{(n)}$ in den Ordnungen $n = 1, \dots, 6$.

tionen $\tilde{Z}^{(n)}$ sinnvolle Approximationen von $Z(g^2)$ darstellen, wesentlich größer als für die entsprechenden naiven Entwicklungen (4.2).

Es muß bemerkt werden, daß das beschriebene Verfahren in dieser Art kaum auf nicht-triviale Funktionalintegrale angewandt werden kann, da es z. B. die explizite Kenntnis aller Koeffizienten der naiven perturbativen Entwicklung voraussetzt, was aber im allgemeinen nicht gegeben ist.

Eine asymptotische Darstellung von $Z(g^2)$

Für die Funktion $Z(g^2)$ kann durch eine Umformung vor der Integration (4.1) eine Darstellung gefunden werden, die eine konvergierende Reihenentwicklung um $g = \infty$ besitzt. Ein analoges Vorgehen zur Auswertung physikalisch relevanter Funktionalintegrale ist jedoch auch hier nicht ohne weiteres möglich, da dazu die Kenntnis der Zustände des Systems bei starker Kopplung nötig wäre und man allerdings meist nur die freien Zustände kennt.

Durch die Substitution $gx^2 = z$ in dem Integral (4.1) erhält man für $Z(g^2)$ die Darstellung

$$\hat{Z}(g^2) = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{2\pi g}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z/(2g)-z^2}. \quad (4.14)$$

Die Entwicklung

$$z^{-\frac{1}{2}} e^{-z/(2g)-z^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{1}{2g}\right)^m z^{m-\frac{1}{2}} e^{-z^2}$$

führt dann auf eine Reihe von elementaren Integralen für die in der Ordnung n abgebrochene Entwicklung von \hat{Z} ,

$$\hat{Z}^{(n)}(g^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi g}} \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(\frac{1}{2}m + \frac{1}{4})}{2m!} \left(-\frac{1}{2g}\right)^m. \quad (4.15)$$

Das Quotientenkriterium für die Glieder dieser Reihe,

$$\left| \frac{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(m+1) + \frac{1}{4})}{2(m+1)!} \left(-\frac{1}{2g}\right)^{m+1}}{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}m + \frac{1}{4})}{2m!} \left(-\frac{1}{2g}\right)^m} \right| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2g\sqrt{2m}},$$

zeigt, daß die Reihe für alle nicht-verschwindenden Werte von g konvergiert, und zwar umso besser, je größer g ist. In der Abbildung 4.3 wird diese Tatsache anhand der dargestellten ersten sechs Approximationen deutlich. Dieses Konvergenzverhalten, was man natürlich auch wieder einfach aus den analytischen Eigenschaften des Integrals (4.14) ablesen kann, rechtfertigt die Bezeichnung asymptotische Darstellung für (4.15).

Padé-Approximation

Die beiden in den vorangegangenen Unterabschnitten diskutierten Verfahren eignen sich praktisch kaum zur Approximation von physikalisch relevanten Funktionalintegralen. Im folgenden werden zwei Methoden beschrieben, die sich auch auf kompliziertere Fälle übertragen lassen. Begonnen wird mit der sogenannten Padé-Approximation, die z. B. im Fall der Beschreibung von thermodynamischen Größen des QCD-Plasmas Verwendung findet [Kas97, Hat97]. Auf speziell diese Anwendung wird an geeigneter Stelle noch einmal eingegangen.

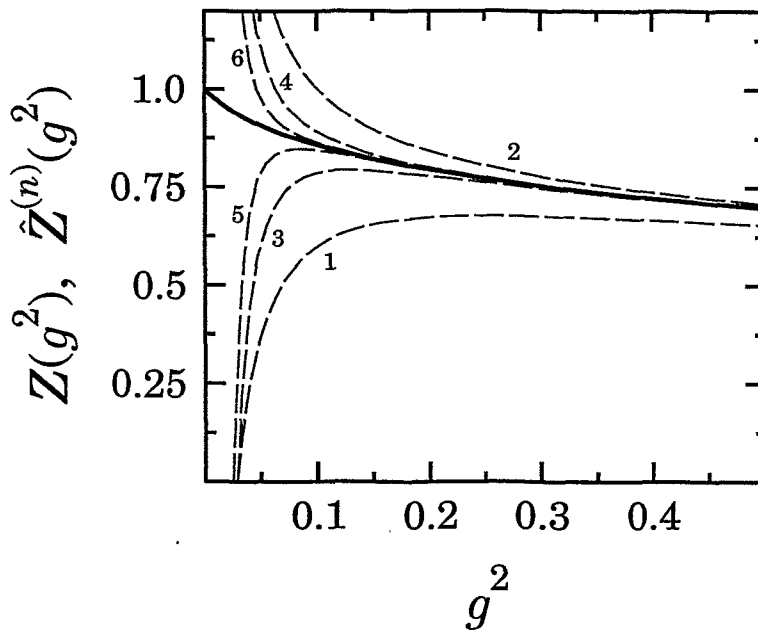


Abbildung 4.3: Die Funktion $Z(g^2)$ (volle Linie) sowie die asymptotischen Approximationen $\hat{Z}^{(n)}$ in den ersten sechs Ordnungen.

Die Idee der Padé-Approximation besteht darin, eine endliche Reihe, wie z. B. die führenden Glieder der Reihendarstellung einer Funktion, durch eine rationale Funktion zu nähern. Die $(1 + N)$ Koeffizienten des Ansatzes

$$f^{[m,n]}(g^2) = \frac{\sum_{k=0}^m p_k (g^2)^k}{1 + \sum_{k=1}^n q_k (g^2)^k} \quad \text{mit } m + n = N \quad (4.16)$$

können so gewählt werden, daß die führenden $(1 + N)$ Glieder der Reihenentwicklung von $f^{[m,n]}$ gerade mit denen der zu approximierenden Reihe

$$f_N(g^2) = \sum_{k=0}^N c_k (g^2)^k \quad (4.17)$$

übereinstimmen. Die weiteren Glieder der Reihenentwicklung von $f^{[m,n]}$ setzen dann die ursprüngliche Reihe (4.17) entsprechend den analytischen Eigenschaften des rationalen Ansatzes fort. Dieses Verfahren wird dann erfolgreich sein, wenn die analytischen Eigenschaften der Funktion f , von der man nur den endlichen Teil (4.17) der Reihendarstellung kennt, und die des rationalen Ansatzes ähnlich sind. Dann ist es möglich, daß durch die Padé-Approximation einer eingeschränkten Reihe f_M mit $M \leq N$ die verbleibenden, nicht in der Näherung berücksichtigten Koeffizienten von f_N richtig reproduziert werden. Dies wird als Erfolg der Methode angesehen; für weitere Details dazu siehe z. B. [Hat97].

Im vorliegenden einfachen Beispiel läßt sich das Padé-Verfahren objektiver bewerten, da die Funktion $Z(g^2)$ numerisch bekannt ist. Als Beispiele werden hier die Padé-Approximationen der endlichen perturbativen Reihen $Z^{(3)}$ und $Z^{(6)}$ betrachtet, die durch (4.2) gegeben sind. Es sind also die Funktionen $Z^{[2,1]}$, $Z^{[1,2]}$ und $Z^{[0,3]}$ sowie die entsprechenden Approximationen für $Z^{(6)}$ zu untersuchen. Die Funktion $Z^{[2,1]}(g^2)$ kann dabei als sinnvolle Näherung für $Z(g^2)$ von vornherein ausgeschlossen werden, da sie mit wachsendem Argument linear und daher unbeschränkt abfällt, während $Z(g^2)$ gegen Null geht. Von den verbleibenden zwei Möglichkeiten stellt sich $Z^{[1,2]}$ als eine durchaus akzeptable Approximation heraus, die Z wesentlich besser als $Z^{(3)}$ beschreibt (vergleiche dazu Abbildung 4.4). Von den Padé-Approximationen höherer Ordnung, die aus der perturbativen Näherung $Z^{(6)}$

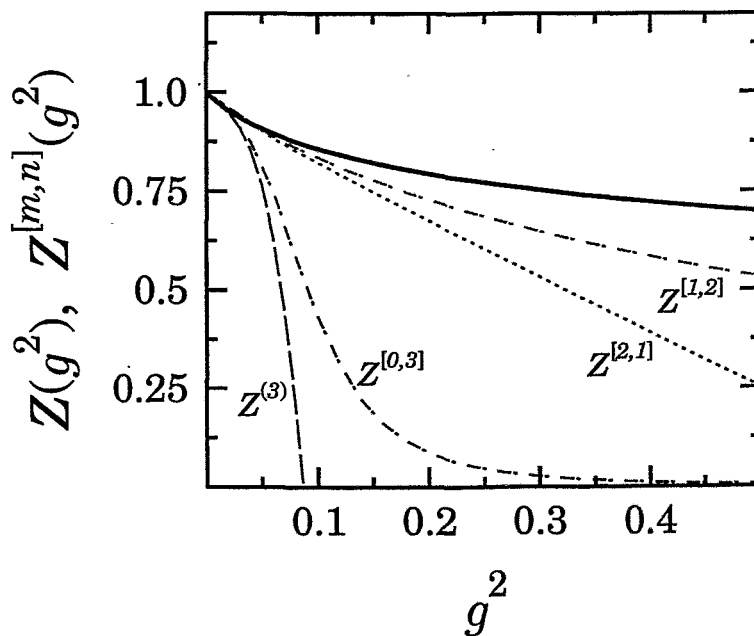


Abbildung 4.4: $Z(g^2)$ (volle Linie) und die Padé-Approximationen, die aus der perturbativen Näherung $Z^{(3)}$ folgen. Die gepunktet dargestellte Funktion $Z^{[2,1]}(g^2)$ kann von vornherein als sinnvolle Näherung ausgeschlossen werden.

folgen, können alle bis auf eine als nicht sinnvoll verworfen werden. Die drei Funktionen $Z^{[m,6-m]}(g^2)$ mit $m < 3$ besitzen nämlich Polstellen für positive Werte von g^2 , während die Funktionen $|Z^{[m,6-m]}|$, $m > 3$ mit dem Argument unbeschränkt wachsen. Die verbleibende Funktion $Z^{[3,3]}$ besitzt zwar für $g^2 \rightarrow \infty$ im Gegensatz zu $Z(g^2)$ einen endlichen Grenzwert, beschreibt aber dennoch, wie aus der Abbildung 4.5 hervorgeht, $Z(g^2)$ in einem großen Bereich der Kopplungsstärke recht gut. Auch hier ist es bemerkenswert, wie groß der Bereich, in dem der Funktionsverlauf von $Z(g^2)$ durch die Padé-Approximation qualitativ reproduziert wird, im Vergleich zu dem von $Z^{(6)}$ ist.

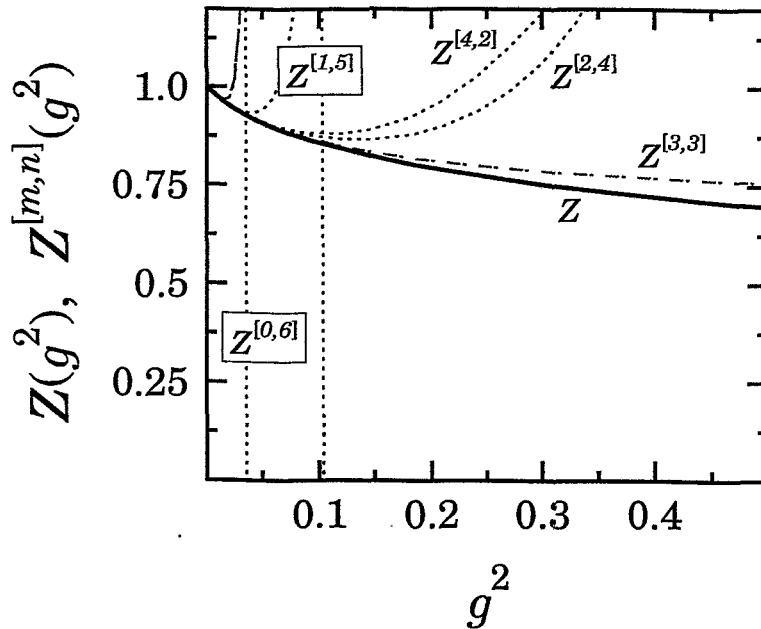


Abbildung 4.5: Die Padé-Approximationen der gestrichelt dargestellten Approximation $Z^{(6)}$. Die gepunktet dargestellten Funktionen können wieder von vornherein ausgeschlossen werden. Ein Teil der Funktion $Z^{[0,6]}$ fällt in dieser Darstellung fast mit $Z^{(6)}$ zusammen.

Eine effektive Approximation

Auch die hier vorgestellte Approximation läßt sich außer auf das einfache Integral $Z(g^2)$ auch leicht auf andere Fälle anwenden, da sie an eine physikalisch motivierte Methode zur Beschreibung von Vielteilchensystemen angelehnt ist. Es zeigt sich nämlich, daß häufig Eigenschaften eines wechselwirkenden Systems denen eines freien Modellsystems weitgehend äquivalent sind. Die Effekte der Wechselwirkung zwischen den Teilchen werden dabei durch entsprechende effektive Eigenschaften der sogenannten Quasiteilchen des freien Systems berücksichtigt. Dieses Konzept der Quasiteilchen geht auf Landau zurück (siehe z. B. [LL89]), der damit eine Reihe Fragestellungen der Festkörperphysik halb-phänomenologisch erklären konnte.

Als Näherung für die Funktion $Z(g^2)$ wird der Ansatz

$$Z_{\text{eff}} := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(1+p)x^2} \quad (4.18)$$

betrachtet. Dieser Ansatz entspricht der Quasiteilchen-Idee: Z_{eff} geht nämlich aus dem Integral $Z(g^2)$ mit $g^2 = 0$ durch eine Modifikation des freien Anteils der Lagrange-Funktion hervor und kann analytisch angegeben werden,

$$Z_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{1+p}}. \quad (4.19)$$

Der Parameter p wird nun wie folgt festgelegt. Da die Funktion $Z(g^2)$ durch Z_{eff} insbesondere bei kleinen Werten von g^2 (im 'perturbativen Limes') approximiert werden soll, wird die formale Entwicklung (4.2) mit der Reihe

$$Z_{\text{eff}} = 1 - \frac{1}{2}p + \frac{3}{8}p^2 + \dots$$

verglichen. Da aber andererseits die Approximation von Z in dem Bereich großer Werte von g^2 gefragt ist, dort aber die Störungsreihe in hohen Ordnungen keine adäquate Beschreibung liefert, wird der Vergleich nur für die führende Ordnung vorgenommen. Das legt den Parameter p als Funktion von g^2 fest als

$$p(g) = 6g^2. \quad (4.20)$$

Der so fixierte Parameter gewährleistet nicht nur im Limes $g^2 \rightarrow 0$ eine in Anbetracht der simplen Näherung gute Übereinstimmung zwischen Z und Z_{eff} . Wie in der Abbildung 4.6 dargestellt ist, gibt Z_{eff} auch für größere Werte von g^2 den Verlauf von Z qualitativ recht gut

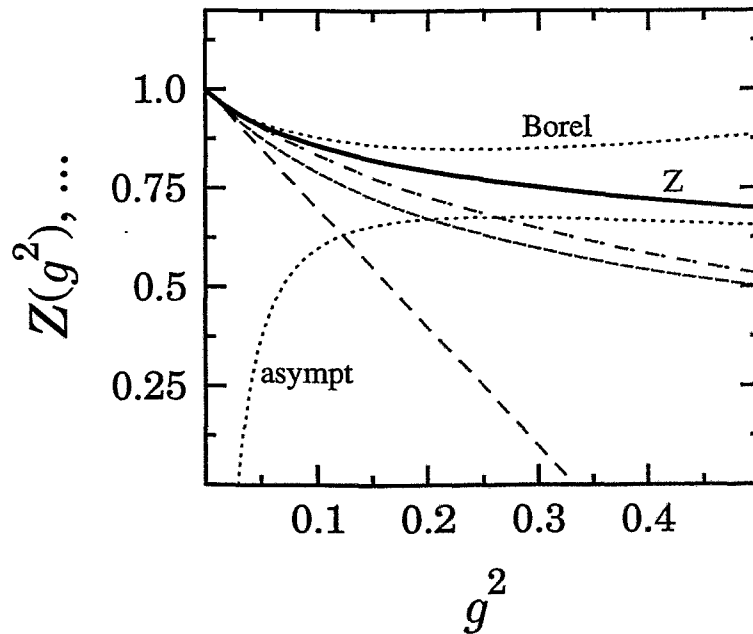


Abbildung 4.6: Die effektive Approximation Z_{eff} (kurz gestrichelt) von $Z(g^2)$. Gezeigt sind zum Vergleich auch die naive perturbative Näherung $Z^{(1)}$ (lang gestrichelt), die Padé-Approximation $Z^{[1,2]}$ (strich-punktiert) sowie die asymptotische und die Borel-Approximation (jeweils erste Ordnung).

wider. Von den bisher diskutierten Verfahren liefern nur einige der Padé-Approximationen eine bessere Beschreibung als Z_{eff} ³. Dazu muß allerdings bemerkt werden, daß zur Konstruktion von z. B. $Z^{[1,2]}$ die Kenntnis von drei Gliedern der Störungsreihe nötig ist, während Z_{eff}

³Die asymptotische Entwicklung und die Borel-Methode sind jedoch nicht ohne weiteres zur Auswertung nicht-trivialer Funktionalintegrale anwendbar.

bereits aus dem Term niedrigster Ordnung folgt. Außerdem verschwinden für $g \rightarrow \infty$ einige der Padé-Funktionen nicht wie Z und Z_{eff} , obwohl sie in einem bestimmten Intervall eine gute Näherung darstellen können.

Abschließend wird die Wahl (4.20) des Parameters p noch unter einem anderen Gesichtspunkt interpretiert. p kann nämlich entsprechend des Ansatzes (4.18) als eine Modifikation des in der Definition (4.1) als 1 angenommenen Masseterms in der Lagrange-Funktion angesehen werden. Daher muß ein Zusammenhang zwischen p und dem Analogon der Selbstenergie für das Modell-Funktionalintegral $Z(g^2)$ bestehen. Nach der Dyson-Gleichung ist die Selbstenergie gerade die Differenz zwischen dem Inversen des exakten und des freien Korrelators des Feldes. In dem betrachteten Beispiel wäre also

$$\Pi = \langle x^2 \rangle^{-1} - \langle x^2 \rangle_0^{-1},$$

wobei der volle Korrelator durch

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2 - g^2 x^4}}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2 - g^2 x^4}}$$

gegeben ist; $\langle x^2 \rangle_0^{-1}$ folgt aus diesem für $g = 0$. Die perturbative Entwicklung von Π lautet

$$\Pi = 12g^2 - 240g^4 + \dots \quad (4.21)$$

Entsprechend den Ausführungen am Ende des Abschnittes 4.1 hängen die Koeffizienten dieser Entwicklung wieder mit der Anzahl der Diagramme für die Selbstenergie der φ^4 -Theorie zusammen. Der Vergleich von (4.20) mit (4.21) ergibt nun, daß der Parameter p gerade die Hälfte der Selbstenergie in führender Ordnung Π^{10} beträgt,

$$p = \frac{1}{2} \Pi^{10}. \quad (4.22)$$

Auf den entsprechenden Zusammenhang bei der effektiven Beschreibung des thermodynamischen QCD-Potentials wird im Kapitel 6 noch einmal eingegangen.

4.3 Perturbative QCD bei endlichen Temperaturen

Die bisher angestellten Betrachtungen zur Konvergenz perturbativer Reihen anhand eines einfachen Beispiels erfolgten nicht ohne die Motivation, daß bereits dieser Fall wesentliche allgemeine Merkmale aufweist. Für perturbative Reihenentwicklungen der QCD können allerdings keine solch strengen Aussagen über deren Konvergenzverhalten wie beispielsweise (4.7) für das dort betrachtete Integral $Z(g^2)$ gemacht werden, da hier nur einige wenige Glieder der Reihen bekannt sind. Um jedoch die Aussage, daß im Bereich großer Kopplungsstärken perturbative Entwicklungen niedriger Ordnung eine bessere Approximation als solche hoher Ordnung liefern, auch für die QCD zu belegen, werden hier zwei weitere Argumente dafür angeführt.

Die Abhängigkeit des thermodynamischen Potentials von der Renormierungsskala

Perturbative Rechnungen in Quantenfeldtheorien führen oft auf divergente Resultate, die renormiert werden müssen. Beispiele dafür sind die im Teil I diskutierten Selbstenergien. Durch die Renormierung wird in den Ergebnissen eine zusätzliche Skala μ eingeführt⁴. Physikalische Größen dürfen aber natürlich nicht von dieser artifiziellen Skala abhängen, was formal durch Renormierungsgruppen-Gleichungen ausgedrückt wird. Wird aber eine (z. B. perturbative) Entwicklung einer physikalischen Größe in einer bestimmten Ordnung abgebrochen, so verbleibt eine Restabhängigkeit von der Renormierungsskala, die von einer höheren als der betrachteten Ordnung ist. Diese Tatsache bietet aber auch eine unabhängige Möglichkeit, die Verlässlichkeit einer Approximation einzuschätzen. Die Approximation einer physikalischen Größen kann nämlich nur dann gut sein, wenn die Restabhängigkeit des Ergebnisses von der Skala μ nicht signifikant ist.

Dieses Kriterium wird nun auf das perturbative Resultat für das thermodynamische Potential Ω des ultrarelativistischen Quark-Gluon-Plasmas angewendet. Ω ist als Reihe in der Kopplungskonstante g bis zur Ordnung $\mathcal{O}(g^5)$ bekannt [ZK95]. Es gibt Argumente dafür, daß diese Ordnung die letzte perturbativ berechenbare ist [Lin80]. Der Beitrag eines $(l+1)$ -Schleifen-Diagramms mit l 4-Vertizes und $2l$ Propagatoren zu Ω kann für $l \geq 3$ nämlich durch

$$\Omega^{(l+1)} \sim (g^2)^l \underbrace{T \int \dots T \int}_{l+1} \prod_{i=1}^{2l} \frac{1}{Q_i^2 + m^2} \sim g^6 T^4 \left(\frac{g^2 T}{m} \right)^{l-3}$$

abgeschätzt werden, wobei $T \int$ die Summe und Integration über einen Schleifenimpuls und Q_i die inneren Impulse bezeichnen. Dasselbe Ergebnis liefert auch die Abschätzung des Beitrags eines Graphen mit $2l$ 3-Vertizes und $3l$ Propagatoren bzw. beliebige $(l+1)$ -Schleifen-Topologien. In dem Propagator $(Q^2 + m^2)^{-1}$ spielt m die Rolle einer Abschirmmasse. Die dafür in Frage kommende magnetische Gluonmasse wird allgemein als von der Ordnung $\mathcal{O}(g^2 T)$ angenommen. Damit können aber Diagramme beliebig hoher Ordnung einen Beitrag $\mathcal{O}(g^6 T^4)$ zu Ω liefern und die Störungstheorie bricht an dieser Schranke zusammen⁵.

Bei hohen Temperaturen, wenn die Massen aller n_f beitragenden Quark-Flavors vernachlässigt werden können, besitzt die perturbative Entwicklung des thermodynamischen Potentials eines stark wechselwirkenden, durch die Eichgruppe SU(3) beschriebenen Systems bei verschwindendem chemischen Potential die Gestalt

$$p = -\frac{\Omega}{V} = \frac{\pi^2 T^4}{90} \left[c_0 + c_2 g^2 + c_3 g^3 + c_4 g^4 + c_5 g^5 + \mathcal{O}(g^6) \right]. \quad (4.23)$$

In dem hier interessierenden thermodynamischen Grenzfall $V \rightarrow \infty$ ist der negative Quotient von Ω und dem Volumen V gerade der Druck p des Systems. Die Koeffizienten der Reihe (4.23) lauten [ZK95]

$$c_0 = 16 + \frac{21}{2} n_f,$$

⁴Im folgenden wird stets die dimensionale Regularisierung im sogenannten $\overline{\text{MS}}$ -Schema [Bar78] verwendet, die auch im Kapitel 5 Anwendung findet.

⁵Weitere Glieder der Störungsreihe können aber durchaus durch nichtperturbative Methoden bestimmt werden, z. B. durch entsprechende Gitterrechnungen [Lue97].

$$\begin{aligned}
c_2 &= -1.5 g^2 \left(1 + \frac{5}{12} n_f\right), \\
c_3 &= 1.9 g^3 \left(1 + \frac{1}{6} n_f\right)^{3/2}, \\
c_4 &= g^4 \left[1.4 \left(1 + \frac{1}{6} n_f\right) \ln \left(g \sqrt{1 + \frac{1}{6} n_f} \right) - 0.21 \left(1 + \frac{5}{12} n_f\right) \left(1 - \frac{2}{33} n_f\right) \ln \frac{\mu}{T} \right. \\
&\quad \left. + 0.28 - 0.12 n_f - 0.014 n_f^2 \right], \\
c_5 &= g^5 \sqrt{1 + \frac{1}{6} n_f} \left[0.40 \left(1 + \frac{1}{6} n_f\right) \left(1 - \frac{2}{33} n_f\right) \ln \frac{\mu}{T} \right. \\
&\quad \left. - 2.0 - 0.11 n_f + 0.0043 n_f^2 \right].
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Die Koeffizienten c_i sind in analytischer Form und auch für andere Eichgruppen als die $SU(3)$ bekannt, wurden aber hier aus Platzgründen nur numerisch genähert angegeben. Für $g = 0$ ist der Druck p gerade der eines idealen Stefan-Boltzmann-Gases mit 16 bosonischen Freiheitsgraden der Gluonen und $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot n_f$ Freiheitsgraden der n_f Farb- und Spin-entarteten Quarks und Antiquarks,

$$p_{\text{SB}} := \frac{\pi^2 T^4}{90} \left(16 + \frac{7}{8} 12 n_f\right). \tag{4.25}$$

Bei der Berechnung des thermodynamischen Potentials bei einer endlichen Kopplungsstärke g ist deren Abhängigkeit von der Renormierungsskala in der entsprechend genäherten Form

$$g^{-2}(\mu) = g^{-2}(T) - \beta_0 \ln \frac{\mu}{T} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \left(1 - \beta_0 g^2(T) \ln \frac{\mu}{T}\right) \tag{4.26}$$

zu berücksichtigen [ZK95]. Die Konstanten β_0, β_1 sind dabei durch

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= -\frac{1}{24\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3} n_f\right), \\
\beta_1 &= -\frac{1}{64\pi^4} \left(51 - \frac{19}{3} n_f\right)
\end{aligned}$$

gegeben.

Die Untersuchung der Abhängigkeit des perturbativen Resultats (4.23) für Ω bei einer fest vorgegebenen Kopplungsstärke $\alpha_s = g^2/(4\pi)$ erfolgt hier für ein rein gluonisches System mit $n_f = 0$. Die Ergebnisse für eine endliche Zahl von Quark-Flavors sind ähnlich. Wie in der Abbildung 4.7 erkennbar ist, unterstützt auch das Renormierungsskalen-Argument die zu belegende Behauptung, daß bei großen Kopplungsstärken perturbative Entwicklungen niedriger Ordnung geeignetere Approximationen als solche hoher Ordnung sind. Bei größeren Kopplungsstärken $\alpha_s \gtrsim 0.1$ weisen nämlich die Näherungen niedriger Ordnung eine weit weniger signifikante Abhängigkeit von μ auf als jene hoher Ordnung. Erst bei sehr kleinen Werten von α_s zeigen diese besser als z. B. das $\mathcal{O}(g^2)$ -Resultat die erwartete, näherungsweise Unabhängigkeit von μ . Für derart kleine Kopplungsstärken sind aber die Abweichungen zwischen den verschiedenen Ordnungen ohnehin sehr gering.

Zwischen der Kopplungsstärke und der Temperatur des Systems besteht eine Relation, die in erster Näherung durch

$$\alpha_s(T) = \frac{g^2(T)}{4\pi} = \frac{2\pi}{11} \ln^{-1} \left(\frac{T}{T^*} \right) \tag{4.27}$$

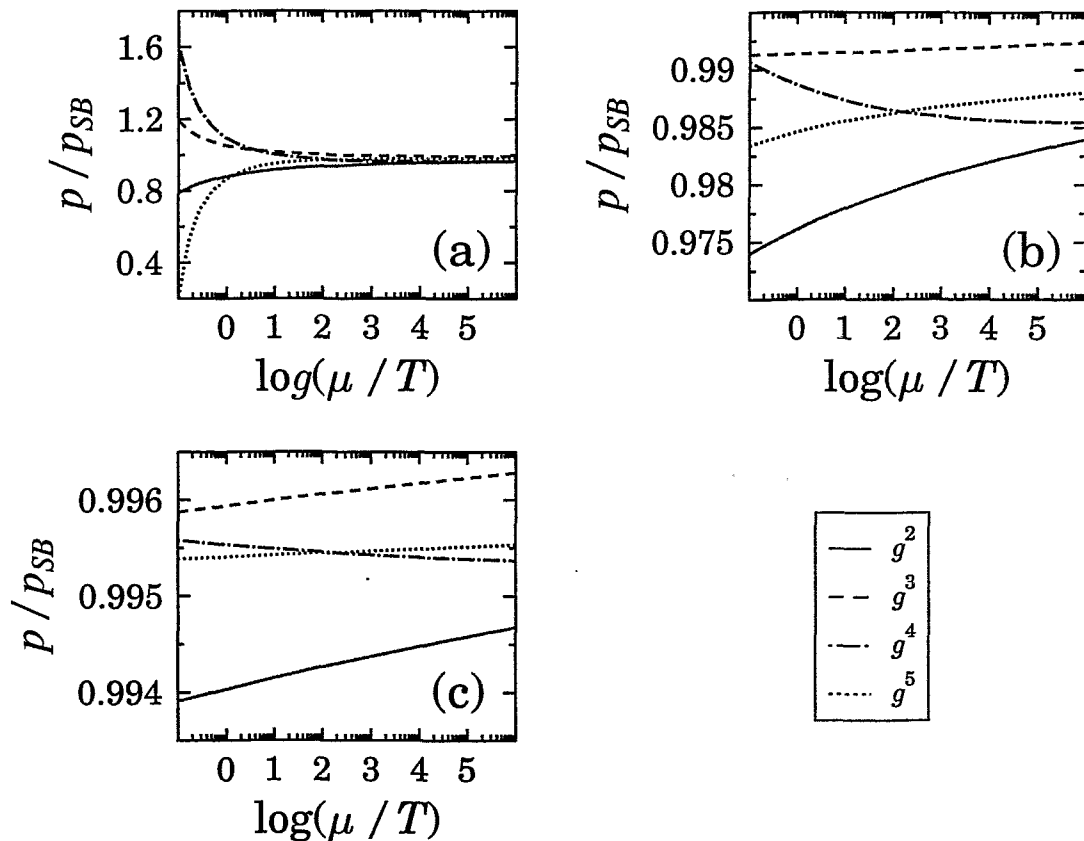


Abbildung 4.7: Die Abhängigkeit des Druckes in Einheiten von p_{SB} von der Renormierungsskala für die perturbativen Ordnungen $\mathcal{O}(g^2)$ bis $\mathcal{O}(g^5)$. In den Teilabbildungen wurden die Kopplungsstärken wie folgt gewählt: $\alpha_s = 0.1 \hat{=} T \sim 100 \text{ GeV}$ (a), $\alpha_s = 0.02 \hat{=} T \sim 10^{12} \text{ GeV}$ (b) und $\alpha_s = 0.005 \hat{=} T \sim 10^{49} \text{ GeV}$ (c).

gegeben ist [Kap89], wobei T^* von der Größenordnung 100 MeV ist. Diese Beziehung ergibt die in der Abbildung 4.7 ebenfalls angegebenen Richtwerte für die den gewählten Werten von α_s entsprechenden Temperaturen. Daraus wird ersichtlich, daß zur thermodynamischen Beschreibung von zukünftigen Experimenten, in denen Maximaltemperaturen von einigen 100 MeV erwartet werden, das perturbative $\mathcal{O}(g^5)$ -Resultat kaum geeignet sein wird. Vom Gesichtspunkt des dargelegten Renormierungsgruppen-Arguments ist dieses Resultat nämlich nur bei Kopplungsstärken sinnvoll, die erst bei Temperaturen über der Planck-Temperatur $T_{pl} \sim 10^{19} \text{ GeV}$ erreicht werden.

Vergleich mit Gitterrechnungen

Ein weiterer Test der Aussagekraft der perturbativen Reihe (4.23) für den Druck p in verschiedenen Ordnungen kann durch einen direkten Vergleich mit Ergebnissen numerischer Simulationen erfolgen. Diese sogenannten Gitterrechnungen sind technisch recht anspruchs-

voll, und es ist erst in jüngster Zeit gelungen, dadurch verlässliche Aussagen über die Thermodynamik stark wechselwirkender Vielteilchensysteme zu erhalten [Boy96, Eng97, Ber97]. Eine der Schwierigkeiten bei diesen Rechnungen ist die Extrapolation der auf einem Gitter mit der Gitterkonstante a und der räumlichen Ausdehnung $n_\sigma a$ berechneten Daten zu dem interessierenden Kontinuumlimes $a \rightarrow 0$ sowie entsprechend des thermodynamischen Grenzfalles zu $n_\sigma \rightarrow \infty$. Die Rechenleistung verfügbarer Computer beschränkt die Gittergröße. Eine typische Gittergröße ist $n_\sigma = 32$, wobei das imaginäre Zeitintervall $T^{-1} = a$ noch etwa $n_\tau = 12$ mal unterteilt werden kann. Geschickte Diskretisierungen der Kontinuumstheorie ermöglichen jedoch trotz dieser 'kleinen' Gitter eine verlässliche Extrapolation zum thermodynamischen Grenzfall, was z. B. durch das Skalierungsverhalten einer auf verschiedenen Gittern berechneten Größe geprüft werden kann. Die so erhaltenen Ergebnisse sind prinzipiell nichtperturbativ und somit geeignet, das Regime starker Kopplung zu untersuchen. Insbesondere erlauben sie eine Beurteilung des Konvergenzverhaltens der Störungsreihe (4.23).

Der Vergleich der perturbativen Reihe mit den Gitterdaten erfolgt hier für ein reines SU(3)-Gluon-Plasma, da dessen thermodynamischen Eigenschaften numerisch genauer als für Systeme mit Quarks bekannt sind. Dies stellt jedoch wie bei den Betrachtungen im vorangegangenen Unterabschnitt keine wesentliche Einschränkung dar. Um die in der Abbildung 4.8 gezeigten Abhängigkeiten zu erhalten, wird nach dem Festlegen der Renormierungsskala μ/T_c die perturbative Approximation durch Bestimmung der Kopplungsstärke $g(\tilde{T})$ an die Gitterkurve bei der Temperatur \tilde{T} angepaßt. Damit sind auch der Wert $g(\mu)$ und somit die Abhängigkeit der Kopplungsstärke von der Temperatur bekannt. Dazu müssen zwei Bemerkungen

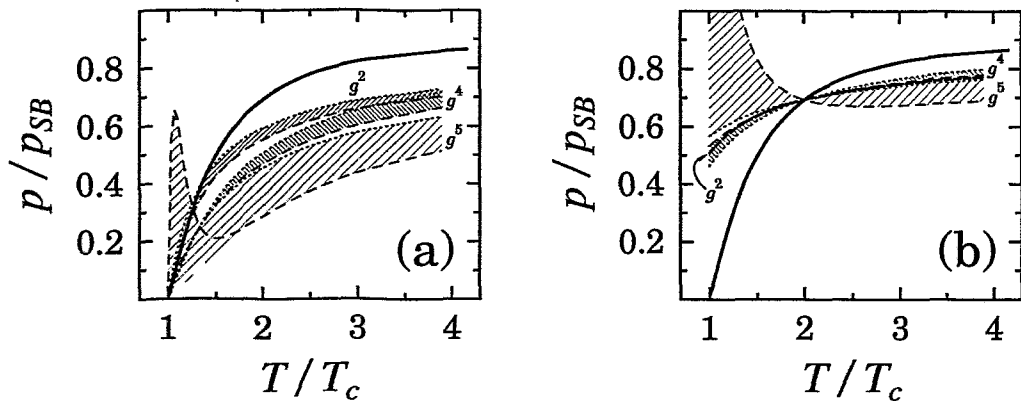


Abbildung 4.8: Der Vergleich der perturbativen Approximationen mit den SU(3)-Gitterdaten [Boy96] (volle Linie). Die Kurven wurden bei $\tilde{T}/T_c = 1$ (a) bzw. bei $\tilde{T}/T_c = 2$ (b) angepaßt. Schraffiert dargestellt ist die Abhängigkeit von der Renormierungsskala für die verschiedenen Ordnungen; dabei kennzeichnen die begrenzenden gepunkteten Linien jeweils den kleinsten Wert von μ und die gestrichelten den größten. Für die Ordnung $\mathcal{O}(g^5)$ wurde μ/T_c von 1...60 variiert, für $\mathcal{O}(g^4)$ von $1.1 \cdot 10^5 \dots 10^6$ und für $\mathcal{O}(g^2)$ von 1... 10^6 . In der Abbildung (b) ist die Skalenabhängigkeit der $\mathcal{O}(g^2)$ -Näherung innerhalb der Linienstärke nicht mehr erkennbar.

kungen gemacht werden. Das $\mathcal{O}(g^3)$ -Resultat für den Druck (4.23) läßt sich nämlich in dem hier betrachteten Temperaturintervall $T_c \leq T \leq 4T_c$ überhaupt nicht an die Gitterdaten mit $p/p_{\text{SB}} \leq 0.9$ anpassen, da $p^{[\mathcal{O}(g^3)]}/p_{\text{SB}}$ als Funktion von g nie kleiner als etwa 0.99 wird. Auch die $\mathcal{O}(g^4)$ -Approximation kann nur unter Annahme von $\mu/T_0 \gtrsim 10^5$ an die Gitterdaten angepaßt werden. Derartige Werte für die Renormierungsskala sind aber physikalisch nicht zu begründen, so daß auch dieser Ordnung der Approximation kaum eine Bedeutung beigemessen werden kann. Von den verbleibenden Kurven approximiert das $\mathcal{O}(g^2)$ -Resultat die Gitterdaten besser als das der Ordnung $\mathcal{O}(g^5)$. Außerdem ist dieses wieder nur wenig sensitiv von μ abhängig, während die $\mathcal{O}(g^5)$ -Näherung insbesondere für $T \sim T_c$ stark mit μ variiert. Wie in der Abbildung 4.8(b) deutlich wird, ist diese Aussage in dem Temperaturbereich, für den Gitterdaten verfügbar sind, nicht daran gebunden, wo die perturbativen Resultate an die Gitterdaten angepaßt werden.

Wenn die $\mathcal{O}(g^2)$ -Näherung die Gitterdaten auch nicht quantitativ erklären kann, so zeigt dieses Ergebnis von allen betrachteten Ordnungen die beste qualitative Übereinstimmung. Auch dieses Argument belegt somit die Aussage, daß bei großen Kopplungsstärken Approximationen niedriger Ordnung (im Gegensatz zu Entwicklungen hoher Ordnung) noch brauchbare Informationen enthalten.

Dieses Kapitel wird mit einem Hinweis auf den Teil III dieser Arbeit abgeschlossen. Dort wird nämlich eine effektive Beschreibung der Thermodynamik stark wechselwirkender Systeme vorgestellt, die durch diese Erkenntnis motiviert ist. Durch eine geeignete Modifikation des perturbativen Resultats lassen sich die in der Abbildung 4.8 gezeigten Gitterdaten dann auch quantitativ reproduzieren.

5 Konsistente thermodynamische Approximationen

Im vorangegangenen Kapitel standen Betrachtungen zum Konvergenzverhalten perturbativer Reihen im Hinblick auf die Zustandssumme bzw. auf das thermodynamische Potential im Mittelpunkt. Hier soll dagegen, und zwar auch unter Beachtung der dort gefundenen Erkenntnisse, der Schwerpunkt des Interesses auf der Konsistenz von Approximationen liegen.

5.1 Eine funktionalanalytische Formulierung der Thermodynamik

Das thermodynamische Potential Ω als Funktion der Temperatur T , eventuell des chemischen Potentials μ sowie des Systemvolumens V hängt entsprechend der Gleichung (2.3) mit der Zustandssumme $Z = \text{tr} \exp\{-H/T\}$ zusammen,

$$\Omega(T, \mu, V) = -T \ln Z.$$

Es ist möglich, die Zustandssumme und damit auch Ω als einen Erwartungswert bezüglich der Zustände des wechselwirkungsfreien Systems (gekennzeichnet durch den Index 0) auszudrücken [AGD75],

$$\Omega = \Omega_0 - T \left\langle \mathbb{T}_\tau \exp \left[\int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \right] - 1 \right\rangle_0^c. \quad (5.1)$$

\mathbb{T}_τ bezeichnet hier den bereits im Kapitel 2.1 eingeführten Ordnungsoperator bezüglich der Imaginärzeit τ , in welcher auch die Wirkung im Exponenten formuliert ist. Die diagrammatische Auswertung dieser Beziehung führt auf geschlossene und verbundene (in (5.1) durch den Index c gekennzeichnet) Feynman-Graphen und liefert die perturbative Reihe für Ω . Da diese Diagramme entsprechend dem Wick-Theorem aus freien Propagatoren aufgebaut sind, spricht man hier zuweilen auch von der naiven Störungsreihe für Ω .

Wie sich jedoch herausstellt, ist diese naive Entwicklung nicht in jedem Falle zweckmäßig zur Beschreibung der thermodynamischen Eigenschaften eines Systems. Stattdessen ist oft, wie auch in den nachfolgenden Untersuchungen, eine partielle Summation von bestimmten Diagrammen nötig, um physikalisch vernünftige Resultate zu erhalten. Für gewisse in der Vakuum-Theorie interessierende Größen kann eine solche Aufsummation graphisch durch das Ersetzen des freien Propagators durch die exakte Greensche Funktion in den entsprechenden Diagrammen erfolgen. Ein solches Vorgehen ist aber zur Auswertung des Ausdrucks (5.1) für das thermodynamische Potential nicht möglich [AGD75]. Da nämlich der im Glied

n -ter Ordnung der Entwicklung von Ω auftretende Faktor $1/n!$ nicht vollständig durch die Anzahl der nach der Wick-Kontraktion topologisch gleichen Graphen kompensiert wird, hängt der Symmetriefaktor der Diagramme stark von deren Ordnung (und Topologie) ab.

Ein weiteres Problem ist das der Konsistenz von notwendigerweise vorzunehmenden Näherungen bei der Berechnung von Ω [Bay62]. So ist beispielsweise die (mittlere) Teilchenzahl im System durch die thermodynamische Relation

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$$

bestimmt. Da aber andererseits der Propagator der Erwartungswert des Produkts zweier Feldoperatoren ist, kann die Teilchenzahl auch durch

$$N = \int d^3x \Delta(t, \mathbf{x}; t + 0^+, \mathbf{x})$$

bestimmt werden (vergleiche dazu Abschnitt 2.1). In einer konsistenten Beschreibung der Thermodynamik des Systems müssen natürlich beide Ausdrücke für die Teilchenzahl ebenso wie entsprechende Ausdrücke für andere Größen übereinstimmen. Beliebig vorgenommene Approximationen können dagegen in dem dargelegten Sinne trotz mikroskopischer, d. h., an den Vertizes geltender Erhaltungssätze fundamentale globale Erhaltungssätze verletzen.

Ein funktionalanalytischer Zugang zur Bestimmung des thermodynamischen Potentials, der vom exakten Propagator ausgeht, wurde von Luttinger und Ward bei der Untersuchung nicht-relativistischer Fermionensysteme bei niedrigen Temperaturen gefunden [LW60]. Durch Baym [Bay62] wurde gezeigt, daß in dieser Formulierung in einer systematischen Weise Approximationen angegeben werden können, die in dem oben diskutierten Sinne konsistent sind. Diese Formulierung beruht wesentlich auf einer allgemeinen, bereits von Lee und Yang [LY60] gefundenen Stationaritätseigenschaft des thermodynamischen Potentials, welche auch eine Verallgemeinerung des Luttinger-Ward-Zugangs auf andere Wechselwirkungstheorien zuläßt. So wurde die Formulierung in [FW71] auf Bosonensysteme angewendet und in [NC75] auf relativistische Theorien erweitert. Hier wird der Luttinger-Ward-Ausdruck für das thermodynamische Potential im Hinblick auf die Anwendung im folgenden Abschnitt für die bereits exemplarisch betrachtete skalare φ^4 -Theorie mit der Lagrange-Dichte (2.29) abgeleitet. Da sich das Theorem jedoch nicht wesentlich auf spezifische Aussagen stützt, ist die Verallgemeinerung auf andere quantenfeldtheoretische Modelle evident.

Die exakte Selbstenergie Π kann bei endlichen Temperaturen aus dem Wechselwirkungsanteil Z^I der Zustandssumme durch den funktionalen Zusammenhang

$$\Pi(P) = 2 \left. \frac{\delta \ln Z^I}{\delta \Delta_0(P)} \right|_{1\text{pi}} \quad (5.2)$$

erhalten werden [Kap89]. Diese Relation ist in der perturbativen Entwicklung leicht einzusehen, da die Funktionalableitung graphisch gerade dem Aufschneiden einer der Propagatorlinien entspricht. So ist z. B.

$$\Pi^{(1)} = 2 \frac{\delta \ln Z^{(1)}}{\delta \Delta_0},$$

was graphisch durch


$$\begin{aligned}\ln Z^{(1)} &= 3 \text{ (diagramm)}, \\ \Pi^{(1)} &= 2 \left[3 \text{ (diagramm)} + 3 \text{ (diagramm)} \right] = 12 \text{ (diagramm)}\end{aligned}$$

repräsentiert werden kann. In (5.2) gehen nur die mit 1pi gekennzeichneten 1-Teilchen-irreduziblen Anteile der Funktionalableitung in die Selbstenergie ein. Wenn $\ln Z^{(n)}$ nämlich den perturbativen Beitrag n -ter Ordnung zu $\ln Z$ bezeichnet, so ist

$$\tilde{\Pi}^{(n)}(P) = 2 \frac{\delta \ln Z^{(n)}}{\delta \Delta_0(P)} \sim (g^2)^n \quad (5.3)$$

zwar ebenfalls von n -ter Ordnung in der Kopplungskonstante, aber im allgemeinen nicht 1-Teilchen-irreduzibel. Aus $\tilde{\Pi}^{(n)}$ kann man umgekehrt auch leicht $\ln Z^{(n)}$ erhalten, und zwar durch

$$\ln Z^{(n)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2n} T \int \Delta_0 \tilde{\Pi}^{(n)} \cdot T^{-1} V. \quad (5.4)$$

Der Faktor $1/(2n)$ berücksichtigt dabei, daß die Feynman-Graphen für $\ln Z^{(n)}$ gerade $2n$ Propagatoren besitzen und daß die Funktionalableitung (5.3) somit wieder auf das richtige Resultat führt. Der Faktor $T^{-1}V$ stammt entsprechend der graphischen Darstellung  von (5.4) aus der 4-Impulserhaltung am Selbstenergieeinschub $\tilde{\Pi}^{(n)}$, der als 2-Vertex aufgefaßt werden kann. Der Beitrag n -ter Ordnung zum thermodynamischen Potential $\Omega = -T \ln Z$ ergibt sich daher als

$$\Omega^{(n)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{2n} TV \int \Delta_0 \tilde{\Pi}^{(n)}. \quad (5.5)$$

Die Existenz eines Zusammenhanges zwischen der (reduziblen) Selbstenergie und dem thermodynamischen Potential ist zwar intuitiv klar, jedoch zeigt der in der Entwicklung (5.5) stark von der Entwicklungsordnung n abhängige Faktor $1/(2n)$, daß dieser Zusammenhang nicht trivial ist. Um zwischen diesen Größen eine nicht nur perturbativ gültige Relation abzuleiten, wird nach einer Idee, die ursprünglich auf Pauli zurückgeht, formal die Kopplungsstärke skaliert: $g^2/4! \rightarrow \lambda g^2/4!$. Mit $\lambda = 1$ erhält man gerade wieder die ursprüngliche Theorie, und $\lambda = 0$ entspricht dem wechselwirkungsfreien Fall. Alle von der Kopplung abhängigen Größen hängen dann auch von λ ab, was durch einen entsprechenden Index gekennzeichnet wird. Nach der Gleichung (5.3) ist nun $\tilde{\Pi}_\lambda^{(n)}$ eine homogene Funktion der Ordnung n in λ , so daß die Reihe für den Ausdruck

$$\begin{aligned}\lambda \frac{\partial \Omega_\lambda}{\partial \lambda} &= \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\Omega^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_\lambda^{(n)} \right] \\ &= -\sum_n \frac{1}{4n} TV \int \Delta_0 n \tilde{\Pi}_\lambda^{(n)} \\ &= -\frac{1}{4} TV \int \Delta_0 \tilde{\Pi}_\lambda\end{aligned}$$

exakt aufsummiert werden kann. Die reduzierbare Selbstenergie $\tilde{\Pi}$ läßt sich jetzt noch leicht durch die irreduzierbare Selbstenergie Π ausdrücken,

$$\tilde{\Pi} = \Pi + \Pi \Delta_0 \Pi + \dots = \frac{\Delta_0^{-1} \Pi}{\Delta_0^{-1} - \Pi} = \Delta_0^{-1} \Delta \Pi.$$

Diese Beziehung gilt entsprechend auch für die λ -skalierten Größen. Somit ergibt sich die wichtige, nichtperturbative Relation

$$\lambda \frac{\partial \Omega_\lambda}{\partial \lambda} = -\frac{1}{4} TV \not\int \Delta_\lambda \Pi_\lambda. \quad (5.6)$$

Die weitere Ableitung des Luttinger-Ward-Theorems erfolgt nun konstruktiv. Zunächst wird dazu das Hilfsfunktional

$$Y = \frac{1}{2} TV \not\int \{ \ln[-\Delta^{-1}] + \Delta \Pi \} + Y' \quad (5.7)$$

betrachtet, wobei der Term Y' weiter unten näher bestimmt wird. Die Variation von Y nach Π bzw. Δ ergibt

$$\begin{aligned} \delta Y &= \frac{1}{2} TV \not\int \delta \left\{ \ln[-(\Delta_0^{-1} - \Pi)] + \frac{\Pi}{\Delta_0^{-1} - \Pi} \right\} + \delta Y' \\ &= \frac{1}{2} TV \not\int \left\{ -\frac{\delta \Pi}{\Delta_0^{-1} - \Pi} + \delta \Pi \Delta + \Pi \delta \Delta \right\} + \delta Y' \\ &= \frac{1}{2} TV \not\int \Pi \delta \Delta + \delta Y'. \end{aligned}$$

Für das weitere ist es wesentlich, daß das Funktional Y bei dieser Variation stationär ist, d. h., es wird nun gefordert

$$\delta Y = 0. \quad (5.8)$$

Dies ist entsprechend (5.7) genau dann erfüllt, wenn die Variation von Y' durch

$$\delta Y' = -\frac{1}{2} TV \not\int \Pi \delta \Delta \quad (5.9)$$

gegeben ist. Wenn $\Pi_s^{(n)}$ der Skelett-Anteil¹ n -ter Ordnung zur Selbstenergie ist, besitzt der Ausdruck

$$Y' = -\sum_n \frac{1}{4n} TV \not\int \Delta \Pi_s^{(n)} \quad (5.10)$$

gerade diese Eigenschaft. Die Variation von Y' ist dann nämlich

$$\begin{aligned} \delta Y' &= -\sum_n \frac{1}{4n} TV \not\int \delta(\Delta \Pi_s^{(n)}) \\ &= -\frac{1}{2} TV \not\int \Pi \delta \Delta, \end{aligned}$$

weil $\Pi_s^{(n)}$ aus $(2n-1)$ Propagatoren Δ aufgebaut ist und die Summe über alle Skelettanteile der Selbstenergie nach der Dyson-Gleichung gerade die exakte Selbstenergie ergibt.

¹Als Skelett-Graphen werden 2-Teilchen-irreduzible Diagramme bezeichnet.

Als nächstes wird der Ausdruck Y_λ für das Funktional (5.7) bei der skalierten Kopplungsstärke betrachtet. Wegen der Stationaritätseigenschaft (5.8) braucht bei der Ableitung

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial Y_\lambda}{\partial \lambda} &= -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_n \frac{1}{4n} TV \int \Delta_\lambda \overset{\downarrow}{\Pi_{s,\lambda}^{(n)}} \\ &= -\sum_n \frac{1}{4n} TV \int \Delta_\lambda n \Pi_{s,\lambda}^{(n)} \\ &= -\frac{1}{4} TV \int \Delta_\lambda \Pi_\lambda \end{aligned} \quad (5.11)$$

nur die explizite λ -Abhängigkeit der n Vertizes von $\Pi_{s,\lambda}^{(n)}$ berücksichtigt werden, was in der ersten Zeile von (5.11) durch den Pfeil angedeutet wurde. Der Vergleich von (5.11) mit (5.6) zeigt, daß Ω_λ und Y_λ als Funktionen von λ derselben (definierenden) Differentialgleichung genügen. Kann man jetzt noch zeigen, daß Ω_λ und Y_λ für einen bestimmten Wert von λ übereinstimmen, so ist damit durch den Satz über die Eindeutigkeit der Lösung von Differentialgleichungen (unter weiteren, hier als gegeben angenommenen Voraussetzungen) die Äquivalenz dieser Größen für beliebige λ gezeigt.

Dieser letzte Ableitungsschritt ist aber einfach, da Y_λ für $\lambda = 0$ analytisch ausgewertet werden kann. Es ist

$$\begin{aligned} Y_{\lambda=0} &= \frac{1}{2} TV \int \ln[-\Delta_0^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} T \sum_{p_0} \ln[m^2 + p^2 - p_0^2] \quad \text{mit } p_0 = i 2n\pi T. \end{aligned}$$

Dieses Summenintegral wird im Anhang C.1 berechnet und ergibt bis auf eine additive infinite Konstante, die in diesem Zusammenhang keine Rolle spielt,

$$Y_{\lambda=0} = VT \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln [1 - e^{-\omega_p/T}], \quad (5.12)$$

wobei $\omega_p = (m^2 + p^2)^{1/2}$ abgekürzt wurde. Dies ist aber gerade der Ausdruck für das thermodynamische Potential eines freien Bose-Gases einschließlich des divergenten Vakuumanteils. Damit ist die Äquivalenz der Größen Y_λ und Ω_λ bewiesen. Insbesondere stimmt daher die Größe $Y_{\lambda=1}$ mit dem thermodynamischen Potential Ω überein, welches somit in der Luttinger-Ward-Formulierung

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} TV \int \{ \ln[-\Delta^{-1}] + \Delta \Pi \} + \Omega', \\ \Omega' &= -\sum_n \frac{1}{4n} TV \int \Delta \Pi_s^{(n)}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

lautet. Aus der Beweisführung wird ebenfalls klar, daß die in (5.13) vorgenommene Entwicklung des thermodynamischen Potentials Ω' in Skelett-Diagramme eindeutig ist. Im folgenden soll (5.13) als Ausgangspunkt für eine systematisch approximierete Berechnung des thermodynamischen Potentials verwendet werden.

5.2 Zur Thermodynamik der φ^4 -Theorie

In diesem Abschnitt wird die Thermodynamik der skalaren φ^4 -Theorie betrachtet. Zunächst soll jedoch der Zusammenhang der Luttinger-Ward-Formulierung mit der naiven Störungsentwicklung noch einmal aus einer anderen Sicht deutlich gemacht werden. Dabei sollen insbesondere die kombinatorischen Symmetriefaktoren jedes Diagramms, auf deren Bedeutung bereits bei der Ableitung im vorangegangenen Abschnitt eingegangen wurde, explizit aufgeführt werden.

Naive Störungstheorie und Luttinger-Ward-Formulierung

Die Entwicklung des thermodynamischen Potentials (5.1) formuliert als Erwartungswert des wechselwirkungsfreien Ensembles lautet

$$\frac{\Omega - \Omega_0}{V} = -3 \text{ (two circles)} - 36 \text{ (four circles)} - 288 \text{ (three circles with one on top)} - 864 \text{ (four circles)} + \dots - 12 \text{ (circle with horizontal line)} + \dots \quad (5.14)$$

Unter den in der ersten Zeile dargestellten Topologien findet man die sogenannten Ringdiagramme (der erste, zweite und vierte Graph), auf die später noch einmal zurückgekommen wird. In der zweiten Zeile folgen außer dem gezeigten Basketball-Diagramm kompliziertere Topologien, die auch als Diagramme mit entsprechender Vertexkorrektur angesehen werden können. Da die Linien in (5.14) freie Propagatoren darstellen, spricht man hier auch von der naiven Störungsreihe für Ω .

Um Ω in der Luttinger-Ward-Formulierung zu erhalten, geht man zweckmäßigerweise von dem folgenden Ausdruck für die exakte Selbstenergie aus,

$$\Pi = 12 \text{ (circle with loop)} + 96 \text{ (circle with horizontal line)} + \dots \quad (5.15)$$

Hier repräsentiert die Doppellinie den exakten Propagator und da dieser nach der Dyson-Gleichung wiederum die Selbstenergie enthält, ist (5.15) eine implizite Gleichung für Π . Entsprechend der Relation (5.13) lassen sich die Beiträge zu dem Funktional Ω'/V graphisch durch

$$\frac{\Omega'}{V} = -3 \text{ (two circles)} - 12 \text{ (circle with horizontal line)} + \dots \quad (5.16)$$

darstellen. Um den Vergleich mit der naiven Entwicklung (5.14) vorzunehmen, muß in (5.15) und (5.16) der exakte durch den freien Propagator ausgedrückt werden,

$$\Delta = \text{---} = \text{---} + 12 \frac{\text{circle}}{\text{---}} + 12^2 \frac{\text{two circles}}{\text{---}} + 12 \frac{\text{circle with loop}}{\text{---}} + \dots + 96 \text{ (circle with horizontal line)} + \dots$$

Somit erhält man für Ω'

$$\frac{\Omega'}{V} = -3 \left[\text{two circles} + 2 \frac{\text{circle with loop}}{\text{---}} + 2 \frac{\text{circle with loop}}{\text{---}} + 12 \frac{\text{circle with loop}}{\text{---}} + 2 \frac{\text{circle with loop}}{\text{---}} + \dots \right] - 12 \text{ (circle with horizontal line)} + \dots \quad (5.17)$$

Ganz ähnlich kann der zweite Anteil im Luttinger-Ward-Ausdruck für Ω formal entwickelt werden,

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{V} &= \frac{1}{2} T \int \{ \ln[-\Delta^{-1}] + \Delta\Pi \} + \frac{\Omega'}{V} \\ &= \frac{1}{2} T \int \{ \ln[-\Delta_0^{-1}] + \ln[1 - \Delta_0\Pi] + \Delta\Pi \} + \frac{\Omega'}{V} \\ &= \frac{1}{2} T \int \ln[-\Delta_0^{-1}] + \frac{1}{2} T \int \sum_{n=2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) (\Delta_0\Pi)^n + \frac{\Omega'}{V}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Da der erste Summand in der letzten Zeile gerade Ω_0/V ist, entspricht dies diagrammatisch

$$\begin{aligned} \frac{\Omega - \Omega_0}{V} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\overset{12}{\circ} \text{---} \overset{12}{\circ} + \overset{12}{\circ} \text{---} \overset{12^2}{\circ} + \dots \right) + \frac{2}{3} \overset{12}{\circ} \text{---} \overset{12}{\circ} + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{\Omega'}{V} \\ &= -3 \text{---} + \left(\frac{11}{22} \cdot 12^2 - 3 \cdot 2 \cdot 12 \right) \text{---} \\ &\quad + \left(\frac{12}{23} \cdot 12^3 - 3 \cdot 2 \cdot 12^2 \right) \text{---} \\ &\quad + \left(\frac{11}{22} \cdot 12 \cdot 12^2 - 3 \cdot 12^2 - 3 \cdot 2 \cdot 12^2 \right) \text{---} + \dots \\ &\quad - 12 \text{---} + \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

Der Vergleich dieser Entwicklung mit der naiven Störungsreihe (5.14) zeigt die Äquivalenz beider Zugänge für die führenden Terme der naiven Schleifenentwicklung.

Dazu muß noch eine wichtige Bemerkung gemacht werden. Wie man leicht sehen kann, sind in der naiven Störungsentwicklung der masselosen Theorie die Ringdiagramme höherer als zweiter Ordnung IR-divergent. Die inneren Schleifen besitzen nämlich für statisch, d. h., mit $p_0 = 0$ umlaufende Teilchen die Struktur $T \int dp^3 1/p^4$. Es ist aber bekannt (siehe z. B. [Kap89]), daß die Aufsummation dieser für sich divergenten Beiträge ein endliches Ergebnis liefert. Obwohl die einzelnen Diagramme proportional zu $(g^2)^n$ mit natürlichen Zahlen $n \geq 2$ sind, ist ihre Summe von der Ordnung $(g^2)^{3/2}$. Dieses endliche, in der Kopplungskonstante nicht-analytische Resultat folgt in dem Luttinger-Ward-Zugang ganz natürlich aus der Tatsache, daß die Teilchen im thermischen Medium eine dynamisch generierte Masse m besitzen. Diese Masse ist durch die Selbstenergie bei verschwindendem Impuls gegeben und lautet in erster Näherung (vergleiche (2.38) bzw. (5.22) und (5.24))

$$m_{10} = \frac{gT}{\sqrt{4!}}. \quad (5.20)$$

Bei den Schleifen-Integrationen über Ausdrücke, die den vollen Propagator enthalten, regularisiert m dann als Abschneideparameter die IR-Divergenzen der Ringdiagramme. Auch in diesem formalen Sinne stellt der Luttinger-Ward-Ausdruck für das thermodynamische Potential eine geeignetere Formulierung dar als die naive Störungsreihe. In (5.13) werden nämlich durch die Verwendung des exakten Propagators die im Medium modifizierten Teilcheneigenschaften direkt berücksichtigt, während die durch freie Propagatoren beschriebene Reihe erst teilweise umgeordnet werden muß, um auch formal vernünftige Ergebnisse zu erzielen.

Thermodynamik in der Tadpole-Approximation

Es folgt nun die Beschreibung der Thermodynamik eines entsprechend der φ^4 -Theorie wechselwirkenden Modellsystems in der Formulierung (5.13) nach Luttinger und Ward. Der Einfachheit halber werden die Teilchen wieder als masselos angenommen. Die Relation (5.13) liefert durch Festlegen des Funktionals Ω' konsistente Approximationen des thermodynamischen Potentials [Bay62] und damit aller thermodynamischen Eigenschaften. Hier wird als Näherung für Ω' von dem Ausdruck

$$\Omega'^{(1)} = -\frac{1}{4}TV \not\int \Delta \Pi_s^{(1)} = -3 \text{ } \bigcirc \bigcirc \quad (5.21)$$

ausgegangen; das ist der führende Term der allgemeinen Entwicklung (5.13). Entsprechend der Gleichung (5.9) erhält man daraus die Selbstenergie in der sogenannten Tadpole-Approximation,

$$\Pi_s^{(1)} = 12 \left(-\frac{g^2}{4!} \right) T \not\int \Delta = 12 \text{ } \bigcirc \quad (5.22)$$

In dieser Näherung ist die Selbstenergie impulsunabhängig, da die Wechselwirkung des propagierenden Teilchens mit dem Medium an einem Raumzeit-Punkt erfolgt. Diese Tatsache vereinfacht die Auswertung erheblich. Da sich $\Pi_s^{(1)}$ zudem als positiv und reell herausstellt (siehe unten), unterscheidet sich in dieser Näherung der volle von dem freien Propagator nur durch eine Modifikation des Masseterms.

Die im folgenden auftretenden Summen und Integrale über die Schleifen-Impulse erweisen sich als UV-divergent. Zur Regularisierung werden die Ausdrücke in $d = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen im $\overline{\text{MS}}$ -Schema berechnet, d. h., es gilt [ZK95]

$$T \not\int = \left(\frac{e^\gamma \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon T \sum_{p_0} \int \frac{d^{3-2\epsilon} p}{(2\pi)^{3-2\epsilon}}, \quad (5.23)$$

wobei $\bar{\mu}$ die Renormierungsskala von der Dimension einer Masse und $\gamma = 0.577\dots$ die Eulerische Konstante ist. Wie im Anhang C.1 gezeigt ist, gilt

$$\begin{aligned} I(m^2) &= T \not\int \Delta_{m^2} \\ &= \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}^2}{T^2} - \ln \frac{m^2}{T^2} + 1 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\sqrt{m^2 + p^2}} \frac{1}{\exp\{\sqrt{m^2 + p^2}/T\} - 1} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Hier bezeichnet m^2 den Masseterm im Propagator $\Delta_{m^2}(P) = [P^2 - m^2]^{-1}$. Der erste Term in (5.24) ist der die Divergenz enthaltende Vakuum-Anteil der Matsubara-Summe, während der zweite Term explizit temperaturabhängig ist. Weil im vorliegenden Fall $\Pi_s^{(1)}(P) = \text{const.}$ gilt, kann die Selbstenergie mit dem Masseterm identifiziert werden und die Gleichung (5.22) kann mit Hilfe von (5.24) ausgewertet werden.

An dieser Stelle muß eine wichtige Bemerkung gemacht werden. Da der volle Propagator auf der rechten Seite von (5.22) die Selbstenergie enthält und die Gleichung selbstkonsistent zu lösen ist, wird der divergente Anteil $\sim \epsilon^{-1} \Pi/(4\pi)^2$ selbst temperaturabhängig und kann daher nicht durch Vakuum-Counterterme kompensiert werden. In [KPP97] wurde in einem

anderen Zugang zu einer umgeordneten thermodynamischen Störungstheorie, auf dessen Zusammenhang zur Luttinger-Ward-Formulierung noch eingegangen wird, sinngemäß folgende Annahme gemacht:

Observable Größen sind endlich und nicht von dem Regularisierungsschema abhängig. Daher werden die thermisch divergenten Beiträge in einer bestimmten Approximation durch in der gegebenen Näherung nicht berücksichtigte Terme höherer Ordnung kompensiert. Dies gilt entsprechend auch für die von der Renormierungsskala abhängigen Terme.

Geht man davon aus, daß perturbative Entwicklungen prinzipiell möglich sind, scheint diese Annahme physikalisch durchaus gerechtfertigt. Allerdings existiert dafür bislang kein allgemeiner Beweis. Es ist aber einfach, die gemachte Annahme anhand bestimmter Ordnungen zu prüfen. Betrachtet man z. B. die Divergenzen der Ordnung $\epsilon^{-1}g^4T^2$, so trägt dazu außer dem Tadpole-Diagramm noch der sogenannte *rising-sun*-Graph bei; außerdem muß noch die Vertexkorrektur in der Tadpole-Topologie berücksichtigt werden. Summiert man die relevanten Beiträge der einzelnen Diagramme (siehe z. B. [Par92]),

$$\begin{aligned}
 12 \quad \text{[Tadpole]} & : 12 \left(-\frac{g^2}{4!} \right) \frac{m^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, & 12 \left(-\frac{g^2}{4!} \right) \frac{m^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{\bar{\mu}^2}{T^2}, \\
 96 \quad \text{[Rising-Sun]} & : 96 \left(-\frac{g^2}{4!} \right)^2 \frac{T^2}{(4\pi)^2} \frac{-1}{4\epsilon}, & \frac{g^4}{(4\pi)^2} \frac{T^2}{12} \ln \frac{\bar{\mu}^2}{T^2}, \\
 12 \quad \text{[Vertex]} & : 12 \frac{3g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{2\epsilon} \left(-\frac{g^2}{4!} \right) \left(-\frac{T^2}{12} \right), & -\frac{g^4}{(4\pi)^2} \frac{T^2}{16} \ln \frac{\bar{\mu}^2}{T^2}, \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

so ist leicht zu sehen, daß sich in der betrachteten Ordnung die divergenten Anteile wegheben, da der relevante Masseterm im ersten Term entsprechend (5.20) in erster Näherung $m_{l_0}^2 = g^2T^2/4!$ ist. Hervorgehoben werden muß in diesem Zusammenhang zum einen die nicht-triviale Tatsache, daß die thermische Divergenz des *rising-sun*-Diagramms in der betrachteten Ordnung tatsächlich impulsunabhängig ist. Andererseits besitzen die beiden letzten Diagramme neben temperaturunabhängigen auch noch thermische Divergenzen von den höheren Ordnungen $\mathcal{O}(\epsilon^{-l}g^6T^2)$, $l \geq 1$, die ihrerseits entsprechend der gemachten Annahme erst durch Diagramme höherer Ordnung kompensiert werden. In (5.25) sind ebenfalls die relevanten skalenabhängigen Terme aufgeführt. Auch diese heben sich in der betrachteten Ordnung $\mathcal{O}(g^4T^2)$ auf, was die gemachte Annahme eines von der Renormierungsskala unabhängigen Pols des Propagators belegt.

Unter der gemachten Annahme lautet die selbstkonsistent zu lösende Gleichung für die Selbstenergie $\Pi_s^{(1)}$, die im folgenden stets als m^2 bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}
 m^2 = \frac{g^2}{2} \left[\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\sqrt{m^2+p^2}} \frac{1}{\exp\{\sqrt{m^2+p^2}/T\} - 1} \right. \\
 \left. + \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left(\ln \frac{m^2}{T^2} - 1 \right) \right]. \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser zuweilen auch als Gap-Gleichung bezeichneten Relation ist in der Abbildung 5.1 als Funktion der Kopplungsstärke gezeigt. Dargestellt ist dort ebenfalls das

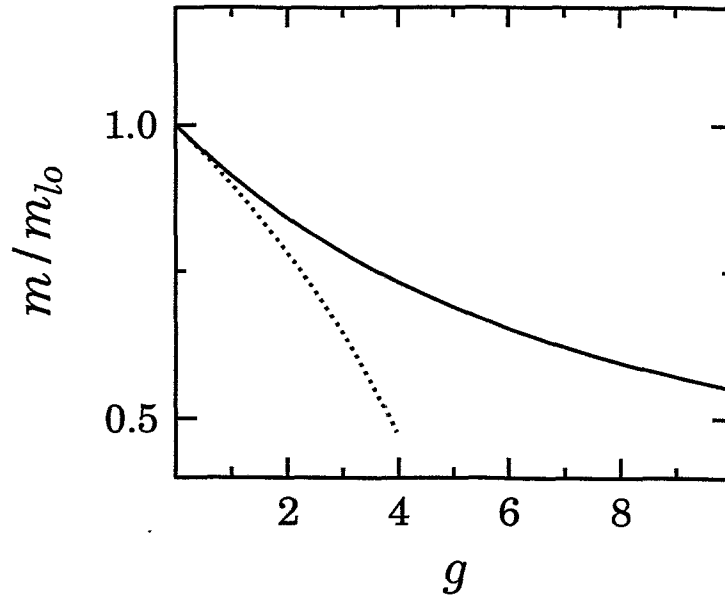


Abbildung 5.1: Die selbstkonsistente thermische Masse (volle Linie) in Einheiten von m_{l_0} in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke. Das perturbative Resultat in nächstführender Ordnung m_{nl_0} ist gepunktet dargestellt.

Resultat in der nächstführenden Ordnung

$$m_{nl_0}^2 = m_{l_0}^2 \left(1 - \frac{3}{\pi} \frac{g}{\sqrt{4!}} \right), \quad (5.27)$$

welches aus der Entwicklung von (5.24) folgt. Die selbstkonsistent bestimmte Masse ist kleiner als das Resultat m_{l_0} (5.20) in führender Ordnung in g . Die Näherung (5.27) stellt dagegen eine Abschätzung von m nach unten dar und beschreibt für kleine Kopplungsstärken $g \lesssim 1$ den exakten Verlauf recht gut. Für größere Werte von g ist m_{nl_0} aber eine offensichtlich ungeeignete Approximation, da m_{nl_0} sogar komplexe Werte annehmen kann.

Mit der so bestimmten Selbstenergie bzw. der thermischen Masse m folgt das thermodynamische Potential nach Luttinger und Ward in der Tadpole-Approximation aus (5.13) und (5.21) zu

$$\frac{\Omega^{(1)}}{V} = \frac{1}{2} T \int \mathcal{F} \left\{ \ln[-\Delta^{-1}] + \frac{1}{2} m^2 \Delta \right\}. \quad (5.28)$$

In dieser Darstellung setzt sich Ω aus einem Anteil, der dem Potential eines Gases nicht-wechselwirkender Teilchen entspricht, und einem Korrekturterm zusammen. Die gemachte Näherung erlaubt daher eine einfache Quasiteilchen-Interpretation: Der Effekt der Wechselwirkung im System läßt sich durch freie Teilchen mit modifizierten Eigenschaften beschreiben. Im vorliegenden Falle erhalten die ursprünglich masselosen Teilchen eine thermische Masse, die durch die Gap-Gleichung bestimmt wird. Der Korrekturterm beschreibt in diesem Sinne eine Modifikation des Grundzustandes des Systems. Diese Interpretation ist

auch durch die Tatsache gerechtfertigt, daß die durch die Gap-Gleichung (5.26) bestimmte Selbstenergie keine Imaginärteile besitzt, so daß die Quasiteilchen tatsächlich eine unendlich lange Lebensdauer besitzen. Es ist klar, daß in der in dem konsistenten Schema (5.13) folgenden Ordnung eine solch zwanglose Interpretation nicht ohne weiteres möglich ist. Der für die Selbstenergie in der folgenden Ordnung relevante *rising-sun*-Graph besitzt nämlich sowohl eine nicht-triviale Impulsabhängigkeit als auch, damit zusammenhängend, einen nicht-verschwindenden Imaginärteil. Die Teilchen besitzen somit im Medium eine spektrale Breite und lassen sich daher nicht allein durch einen Masseparameter beschreiben. Es gibt aber Hinweise darauf, daß auch in der nächst-führenden Ordnung einer selbstkonsistenten Approximation eine Quasiteilchen-Beschreibung der Thermodynamik gerechtfertigt ist. Es zeigt sich nämlich, daß auch unter Einbeziehung des *rising-sun*-Diagramms die Teilchen selbst bei Kopplungsstärken von $g \gtrsim 1$ eine recht kleine spektrale Breite, d. h., eine lange Lebensdauer besitzen [WH96], insbesondere bei den thermisch relevanten Impulsen $p \sim T$. Dazu muß bemerkt werden, daß die Betrachtungen in [WH96] in dem hier interessierenden Sinne nicht vollständig selbstkonsistent sind. Die Selbstenergie wurde nämlich dort in den umlaufenden Propagatoren nur in der Tadpole-Näherung berücksichtigt; Rechnungen mit einem resummierten *rising-sun*-Anteil der Selbstenergie im Propagator wurden bisher noch nicht durchgeführt. Es kann aber davon ausgegangen werden, daß ein selbstkonsistent bestimmter Propagator das Ergebnis einer kleinen Spektralbreite zumindest nicht qualitativ verändert.

Der Beitrag des massiven Quasiteilchen-Gases zu $\Omega^{(1)}$ kann entsprechend Anhang C.1 einfach aus der in (5.24) definierten Funktion $I(m^2)$ erhalten werden, da $\partial_{m^2} \ln[-\Delta_{m^2}^{-1}] = -\Delta_{m^2}$ gilt,

$$\begin{aligned} J(m^2) &= T \int \ln[-\Delta_{m^2}^{-1}] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}^2}{T^2} - \ln \frac{m^2}{T^2} + \frac{3}{2} \right] \\ &\quad + \frac{T}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 - \exp \left\{ -\sqrt{m^2 + p^2}/T \right\} \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Durch den Vergleich von (5.24) und (5.29) ist leicht zu sehen, daß sich in dem Ausdruck (5.28) für $\Omega^{(1)}$, der nunmehr für $\epsilon \rightarrow 0$ als

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^{(1)}}{V} &= \frac{1}{2} J(m^2) + \frac{1}{4} m^2 I(m^2) \\ &= \frac{T}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 - \exp \left\{ -\sqrt{m^2 + p^2}/T \right\} \right) \\ &\quad - \frac{m^2}{8\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{\sqrt{m^2 + p^2}} \frac{1}{\exp\{\sqrt{m^2 + p^2}/T\} - 1} - \frac{m^4}{128\pi^2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

geschrieben werden kann, die divergenten Anteile kompensieren. In diesem Sinne ist $\Omega^{(1)}$ eine konsistente Approximation des thermodynamischen Potentials, da im Gegensatz zur Gap-Gleichung (5.26) formal keine weiteren Beiträge nötig sind, um Divergenzen zu beseitigen bzw. da diese nicht (nach der gemachten Annahme) durch Wegstreichen der entsprechenden Terme 'reguliert' werden müssen, wie es in dem Zugang [KPP97] nötig ist. Außerdem erweist sich $\Omega^{(1)}$ als unabhängig von der Renormierungsskala. Diese Tatsache mußte erwartet werden, da in der gegebenen Approximation auch die Kopplungskonstante $\bar{\mu}$ -unabhängig ist, und nur so eine skaleninvariante Näherung für das thermodynamische Potential folgt.

Das Ergebnis für den Druck $p = -\Omega/V$ in dem beschriebenen Zugang ist in der Abbildung 5.2 als Funktion der Kopplungsstärke dargestellt. Zum Vergleich gezeigt sind auch

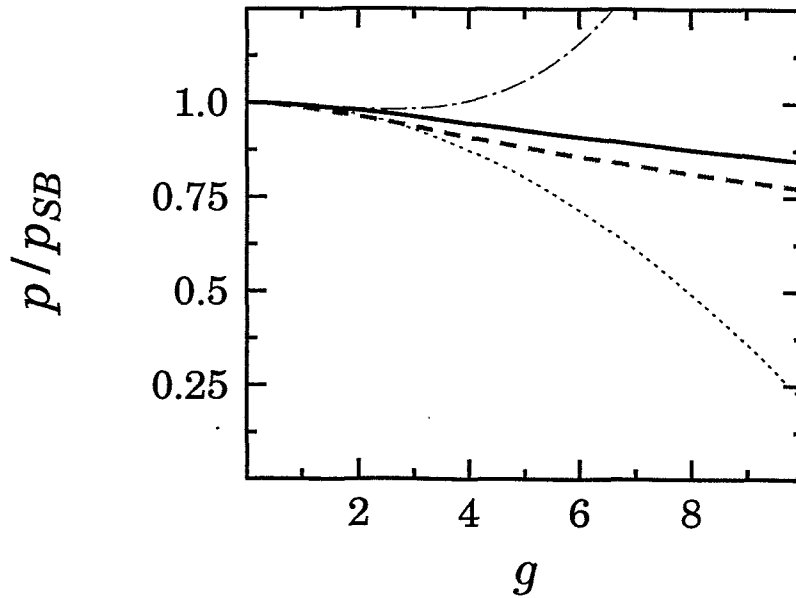


Abbildung 5.2: Der Druck in Einheiten des Stefan-Boltzmann-Drucks p_{SB} in der Tadpole-Approximation (5.30) (durchgezogene Linie) als Funktion der Kopplungsstärke. Die gestrichelte Linie zeigt dabei den regularisierten Anteil des idealen massiven Gases ohne den Korrekturterm. Gepunktet bzw. strich-punktiert dargestellt sind die perturbativen Resultate in führender bzw. nächst-führender Ordnung.

die perturbativen Resultate für p in führender und nächst-führender Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ bzw. $\mathcal{O}(g^3)$ in der Kopplungskonstante [Kap89], die ebenfalls $\bar{\mu}$ -unabhängig sind,

$$p = p_{SB} \left[1 - \frac{15}{8\pi^2} \left(\frac{g^2}{4!} \right) + \frac{15}{2\pi^3} \left(\frac{g^2}{4!} \right)^{3/2} + \dots \right] \quad \text{mit } p_{SB} = \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (5.31)$$

Wie bereits diskutiert wurde, folgt dieses Ergebnis aus der Entwicklung der Gleichung (5.28) nach Potenzen von g bzw. aus der naiven Störungsreihe nach einer partiellen Summation der Ringdiagramme. Qualitativ findet man hier ein ähnliches Bild wie bei den Betrachtungen der perturbativen Entwicklungen des 0-dimensionalen Funktionalintegrals $Z(g)$ im Abschnitt 4.1: Die naive Störungsreihe zeigt bei größeren Kopplungsstärken ein mit der Ordnung zunehmendes fluktuierendes Verhalten, während man für das exakte Resultat einen glatten Verlauf ähnlich wie für $Z(g)$ im Abschnitt 4.1 erwartet². Außerdem zeigen sowohl die Betrachtungen zu $Z(g)$ als auch des thermodynamischen Potentials der QCD, daß bei mittleren Kopplungsstärken, bei denen Approximationen durch Störungsentwicklungen bereits unbrauchbar sind, die exakten Resultate noch immer recht dicht am freien Limes liegen.

²Das gilt sinngemäß auch für das Verhalten der Selbstenergie; vergleiche dazu Abbildung 5.1

Die Luttinger-Ward-Approximation (5.28) besitzt, wie in der Abbildung 5.2 gezeigt, beide Merkmale und kann daher als eine vernünftige Approximation betrachtet werden.

Vergleich mit der Debye-abgeschirmten Störungstheorie

Das gefundene Resultat ist vergleichbar mit dem Ergebnis der bereits im Zusammenhang mit den thermischen Divergenzen zitierten Arbeit [KPP97]. Dort wird ein Zugang gewählt, der durch die bekannte Tatsache motiviert ist, daß sich Ergebnisse numerischer Simulationen thermodynamischer Systeme oft recht gut durch ein Gas massiver Quasiteilchen beschreiben lassen³. Das thermodynamische Potential der wieder als intrinsisch masselos angenommenen Teilchen wird dort nicht durch eine endliche Schleifen-Entwicklung in freie Propagatoren approximiert; vielmehr erfolgt die Entwicklung um den Limes eines freien massiven Gases. Formal wird dies durch eine Umordnung der Lagrange-Dichte erreicht,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{g^2}{4!}\varphi^4 = \frac{1}{2}\left((\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right) - \frac{g^2}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \quad (5.32)$$

Nicht gezeigt sind hier die nötigen Vakuum-Counterterme. Die in [KPP97] betrachtete Verallgemeinerung auf den Fall der skalaren $O(N)$ -symmetrischen Theorie ist in dem hier interessierenden Zusammenhang ohne wesentliche Bedeutung. Durch die Addition und die Subtraktion des Masseterms $\frac{1}{2}m^2\varphi^2$ in (5.32) ergibt sich zum einen ein freier Propagator Δ_{m^2} , der die Ausbreitung eines massiven Teilchens beschreibt. Andererseits enthält der umgeordnete Lagrangian einen zusätzlichen 'Wechselwirkungsterm', der in der perturbativen Entwicklung durch den 2-Vertex

$$\text{---}\times\text{---} : \quad m^2$$

berücksichtigt werden muß. In der Zweischleifen-Näherung der umgeordneten Störungstheorie, die der oben betrachteten Tadpole-Approximation entspricht, erhält man Ω als

$$\begin{aligned} \Omega_m^{2\text{-loop}} &= \frac{1}{2} \bigcirc - 3 \bigcirc\bigcirc + \frac{1}{2} \bigcirc\times \\ &= \frac{1}{2} J(m^2) - 3 \left(-\frac{g^2}{4!}\right) I^2(m^2) + \frac{1}{2} m^2 I(m^2), \end{aligned} \quad (5.33)$$

wobei die Linien hier freie massive Propagatoren darstellen⁴. In diesem Ausdruck muß (im Gegensatz zu der Luttinger-Ward-Approximation (5.28)) von der angenommenen Vorschrift zur 'Regularisierung' der thermischen Divergenzen Gebrauch gemacht werden, da z. B. der zweite Summand einen ϵ^{-2} -Term enthält, der in dieser Näherung nicht kompensiert wird. Die Kompensation der divergenten Anteile der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{-1}g^4T^4)$ erfolgt erst bei Berücksichtigung der 3-Schleifen-Diagramme

$$\bigcirc\bigcirc, \times\bigcirc, \bigcirc\bigcirc\times, \bigcirc\bigcirc\bigcirc, \bigcirc\bigcirc\bigcirc, \quad (5.34)$$

so daß unter diesem formalen Aspekt der Luttinger-Ward-Zugang in sich konsistenter erscheint.

³Eine eingehende Betrachtung dieses Sachverhalts erfolgt im dritten Teil der vorliegenden Arbeit.

⁴Die hier verwendete Funktion I unterscheidet sich von der in [KPP97] verwendeten Definition im Vorzeichen.

Weiterhin ist die Festlegung des Masseparameters m in der ungeordneten Störungstheorie an sich beliebig. Während der Luttinger-Ward-Zugang zwangsläufig auf die Gap-Gleichung führt, ist in der ungeordneten Störungstheorie dieselbe Wahl des Masseparameters nur physikalisch-intuitiv begründet und geht als externe Information ein [KPP97]. Nur unter dieser zusätzlichen Annahme kann dann auch tatsächlich von der *Debye*-abgeschirmten Störungstheorie gesprochen werden. Auch das formale, im Anschluß an die Gleichung (5.25) aufgeführte Argument, daß der Masseparameter durch die Gap-Gleichung bestimmt werden muß, damit sich dort die thermisch divergenten Terme aufheben, kann für die Schleifen-Entwicklung (5.33) und (5.34) nicht angeführt werden, da sich hier die Divergenzen für beliebige Werte von m kompensieren. Die Wahl des Masseparameters ist daher mit einer gewissen Willkür behaftet, und die freie Variation dieser Parameters überführt die Debye-abgeschirmte Störungsreihe stetig in das naive perturbative Resultat.

Selbst bei der Wahl des gleichen Propagators unterscheiden sich die beiden Zugänge. Da nämlich in endlichen Entwicklungen der abgeschirmten Störungstheorie nicht alle Beiträge des zusätzlichen 'Wechselwirkungsanteils' berücksichtigt werden, wird die vorgenommene Resummation des Masseterms nicht exakt kompensiert. Die sich ergebenden Unterschiede sind von einer höheren Ordnung in der Kopplungsstärke und daher erst bei größeren Werten von g relevant. Wie in dem Vergleich der Resultate der beiden Zugänge in der Abbildung 5.3 deutlich wird, stimmen die im jeweiligen Sinne führenden Approximationen für $g \lesssim 5$ praktisch überein.

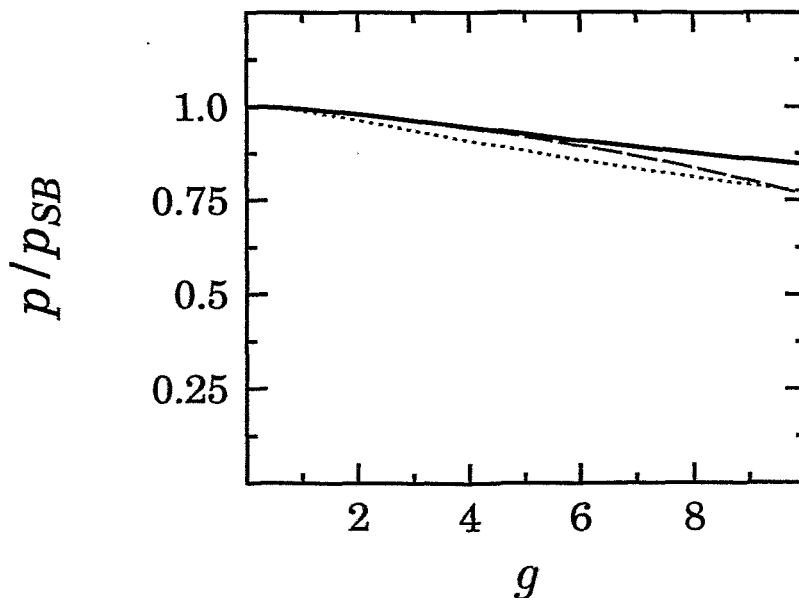


Abbildung 5.3: Der Vergleich der Approximationen für den skalierten Druck im Luttinger-Ward-Formalismus (durchgezogene Linie) und in der abgeschirmten Störungstheorie (gestrichelte Linie). Die gepunktete Kurve zeigt den Anteil des idealen massiven Gases, der in beiden Näherungen übereinstimmt.

Ausblick auf die Thermodynamik der QCD

Es wäre wünschenswert, den in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Formalismus zur konsistenten Beschreibung der Thermodynamik von heißen, stark wechselwirkenden Systemen anzuwenden. Solche Systeme sind bei Temperaturen, die nicht extrem über der Temperatur des Confinement-Phasenübergangs liegen, durch eine starke Kopplung zwischen den dann als elementare Teilchen vorliegenden Konstituenten des Plasmas, den Quarks und Gluonen, gekennzeichnet. Entsprechend den Überlegungen im Kapitel 4 scheint daher gerade eine Approximation durch ausschließlich den führenden Beitrag des Luttinger-Ward-Funktional (5.13) als durchaus gerechtfertigt. Doch bereits in dieser ersten Näherung ergeben sich im Vergleich zu der φ^4 -Theorie einige Komplikationen technischer Natur.

Zum einen besitzt die Selbstenergie bereits in der Einschleifen-Approximation eine nicht-triviale Impulsabhängigkeit, wie im Teil I der vorliegenden Arbeit ausgeführt wurde. Auch die damit im Zusammenhang stehenden Imaginärteile erschweren die selbstkonsistente Bestimmung der Selbstenergie. Weiterhin existieren in der thermischen QCD unterschiedlichen Masseskalen. Die sogenannte elektrische Masse der Gluonen ist definiert als Grenzwert der longitudinalen Selbstenergie $\Pi_l(\omega = 0, p = 0) \sim \mathcal{O}(g^2 T^2)$, während die magnetische Masse mit der Transversalkomponente des Polarisationsensors zusammenhängt (siehe Kapitel 3). Im Gegensatz zur elektrischen Masse verschwindet die magnetische Masse in der naiven Einschleifen-Näherung und wird allgemein als von der Ordnung $\mathcal{O}(g^2 T)$ angenommen. Da aber wahrscheinlich selbst in der führenden Ordnung einer konsistenten Approximation beide Masseskalen relevant sind⁵, ergibt sich hieraus eine weitere technische Komplikation. Nach den vielversprechenden Ergebnissen zur Thermodynamik der φ^4 -Modelltheorie müssen daher Betrachtungen zur QCD im Luttinger-Ward-Formalismus zukünftigen Überlegungen vorbehalten bleiben.

Anhand der im folgenden vorgestellten Resultate zum Quark-Gluon-Plasma zeichnet es sich jedoch ab, daß solche Betrachtungen unbedingt angestellt werden sollten. Im dritten und letzten Teil dieser Arbeit wird nämlich die Thermodynamik der Hochtemperatur-QCD erfolgreich durch ein Quasiteilchen-Modell beschrieben, welches zwar eher phänomenologisch motiviert ist, aber dennoch starke Parallelen zum Luttinger-Ward-Formalismus besitzt.

⁵Beide Massen scheinen bei der Kompensation der thermischen Divergenzen eine wichtige Rolle zu spielen.

Teil III

Zur Thermodynamik des Quark-Gluon-Plasmas

6 Ein effektives Quasiteilchen-Modell für das heiße QCD-Plasma

Im Teil II der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, wie prinzipiell in konsistenter Weise Approximationen für das thermodynamische Potential eines heißen wechselwirkenden Quantensystems anzugeben sind. Wie dort ebenfalls diskutiert wurde, sind im Regime starker Kopplung naiv perturbative Resultate hoher Ordnung in der Kopplungskonstante weniger zur Beschreibung des Systems geeignet als konsistente Näherungen niedriger Ordnung. Wie aber aus den das Kapitel 5 beschließenden Worten klar wird, ist die konsistente thermodynamische Beschreibung des Quark-Gluon-Plasmas selbst in führender Ordnung vom technischen Aspekt her recht kompliziert. Im folgenden wird daher eine einfachere, effektive Beschreibung des heißen Quark-Gluon-Plasmas gewählt. Diese beruht auf der sich bereits als nützlich erwiesenen Quasiteilchen-Vorstellung und orientiert sich an der Luttinger-Ward-Formulierung des thermodynamischen Potentials. Wie bereits in den vorangegangenen Kapiteln sollen auch hier die wesentlichen Gedanken zunächst exemplarisch anhand der φ^4 -Theorie erläutert werden.

6.1 Effektive Thermodynamik der φ^4 -Theorie

In den Kapiteln 2.2 und 5.2 wurde gezeigt, daß durch die bei großen Kopplungsstärken relevanten Wechselwirkungsprozesse mit Tadpole-Struktur (vergleiche Abbildung 2.1) die ursprünglich masselosen Bosonen eine dynamisch generierte, thermische Masse erhalten. Formal kann dies durch die bereits in Gleichung (5.32) angeführte Umorganisation der Lagrange-Dichte deutlich gemacht werden,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{g^2}{4!}\varphi^4 = \tilde{\mathcal{L}}_0 + \tilde{\mathcal{L}}_I, \\ \tilde{\mathcal{L}}_0 &= \frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2], \quad \tilde{\mathcal{L}}_I = \frac{g^2}{4!}\varphi^4 + m^2\varphi^2,\end{aligned}$$

die auch als Ausgangspunkt für die abgeschirmte Störungstheorie dient. Wird dabei als Masseterm gerade die Einschleifen-Selbstenergie gewählt, also

$$m^2 = \Pi_{(1)}, \tag{6.1}$$

so beschreibt der Wechselwirkungsanteil $\tilde{\mathcal{L}}_I$ der umgeordneten Theorie Effekte der Ordnung $\mathcal{O}(g^4)$ in der Kopplungsstärke. Nach der Diskussion im Kapitel 4 ist es daher bei großen Kopplungsstärken gerechtfertigt, den Anteil $\tilde{\mathcal{L}}_0$ als eine Approximation für die Lagrange-Dichte \mathcal{L} anzunehmen. Dieser Anteil entspricht der Beschreibung eines idealen Bose-Gases, d. h., eines Systems wechselwirkungsfreier Teilchen mit der Dispersionsrelation

$$\omega(k, T) = \sqrt{k^2 + m(T)^2}. \tag{6.2}$$

Die Dispersionsrelation dieser streng¹ als Quasiteilchen interpretierbaren Zustände mit der thermischen Masse $m(T)$ ist implizit temperaturabhängig. Der zugehörige Hamilton-Operator ergibt sich als [GY95]

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \sum_k \mathcal{H}_{\text{eff}} = \sum_k n_k \omega(k, T) + E_0(m(T)) \\ &= H_{\text{id}} + E_0(m(T)). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Der Anteil H_{id} dieses effektiven Hamilton-Operators entspricht gerade dem renormierten Hamilton-Operator eines idealen Gases. Im Gegensatz zu dem bekannten Fall des idealen massiven Gases kann hier die divergente Grundzustandsenergie jedoch nicht vollständig renormiert werden; es verbleibt der endliche, temperaturabhängige Term $E_0(m(T))$. Dieser erweist sich auch als formal notwendig, um die thermodynamische Konsistenz der effektiven Beschreibung zu sichern. In dieser Approximation ergibt sich nämlich im thermodynamischen Limes der Druck als

$$\begin{aligned} p_{\text{eff}}(T) &= V^{-1} T \ln \{ \text{Tr} [\exp\{-H_{\text{eff}}/T\}] \} \\ &= V^{-1} T \ln \{ \text{Tr} [\exp\{-H_{\text{id}}/T\}] \exp\{-E_0/T\} \} \\ &= V^{-1} T [\ln \text{Tr} [\exp\{-H_{\text{id}}/T\}] - E_0/T]. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist der Ausdruck für den Druck des idealen Gases, der sowohl von der Temperatur als auch von m abhängt. Wird nun für die auf das Volumen bezogene Grundzustandsenergie noch die Bezeichnung

$$B(m(T)) := \frac{E_0(m(T))}{V} \quad (6.4)$$

eingeführt, so erhält man für den Druck

$$p_{\text{eff}}(T) = p_{\text{id}}(T, m(T)) - B(m(T)). \quad (6.5)$$

Ähnlich wie für den Druck ergeben sich auch für die Energiedichte zwei Terme,

$$\begin{aligned} e_{\text{eff}}(T) &= \frac{1}{V} \frac{\text{Tr} [H_{\text{eff}} \exp\{-H_{\text{eff}}/T\}]}{\text{Tr} [\exp\{-H_{\text{eff}}/T\}]} \\ &= \frac{1}{V} \frac{\text{Tr} [(H_{\text{id}} + E_0) \exp\{-H_{\text{id}}/T\} \exp\{-E_0/T\}]}{\text{Tr} [\exp\{-H_{\text{id}}/T\} \exp\{-E_0/T\}]} \\ &= \frac{1}{V} \left[\frac{\text{Tr} [H_{\text{id}} \exp\{-H_{\text{id}}/T\}]}{\text{Tr} [\exp\{-H_{\text{id}}/T\}]} + E_0 \right]. \end{aligned}$$

Der erste Term ist die Energiedichte e_{id} des idealen Gases, und mit (6.4) erhält man

$$e_{\text{eff}}(T) = e_{\text{id}}(T, m(T)) + B(m(T)). \quad (6.6)$$

Zwischen dem Druck, der Energiedichte und der Entropiedichte s besteht die nach Gibbs benannte Relation

$$e + p = Ts. \quad (6.7)$$

¹In dieser Näherung besitzt die Dispersionsrelation keine Imaginärteile, die Quasiteilchen-Zustände besitzen daher nicht nur, wie gefordert, eine lange Lebensdauer, sondern zerfallen überhaupt nicht.

Nach den Gleichungen (6.5) und (6.6) wird die effektive Entropiedichte daher gerade durch den Ausdruck für das ideale Gas bestimmt,

$$s_{\text{eff}}(T) = s_{\text{id}}(T, m(T)). \quad (6.8)$$

Dies ist verständlich, da die Entropie als kombinatorische Größe nicht von der Grundzustandsenergie E_0 bzw. $B(m(T))$ abhängen kann. Andererseits ist die Entropiedichte aber als Temperaturableitung des Druckes bestimmt,

$$s = \frac{\partial p}{\partial T}. \quad (6.9)$$

Die Ausdrücke (6.7) und (6.9) für s_{eff} stimmen genau dann überein, wenn zwischen der thermischen Masse und der Funktion $B(m(T))$ der Zusammenhang

$$\frac{dB}{dT} = \frac{\partial p_{\text{id}}}{\partial m} \frac{dm}{dT} \quad (6.10)$$

besteht. In der Form

$$\frac{\delta p_{\text{eff}}}{\delta m(T)} = 0 \quad (6.11)$$

geschrieben, entspricht diese Bedingung thermodynamischer Selbstkonsistenz der allgemeinen Stationaritätseigenschaft (5.8) des thermodynamischen Potentials. Die Gleichungen (6.5) und (6.10) legen somit ein selbstkonsistentes, effektives thermodynamisches Modell fest. Ausgangspunkt dafür ist allein die Möglichkeit der approximativen Beschreibung des Systems durch Quasiteilchen mit einer effektiven, thermischen Masse ohne eine spektrale Breite.

Der Vollständigkeit wegen werden nun noch die Ausdrücke für die thermodynamischen Größen des idealen massiven Gases sowie für die Funktion B angegeben. Der Druck p_{id} läßt sich in der Form

$$p_{\text{id}}(T, m) = \frac{T}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 - \exp\{-\omega/T\} \right) \quad (6.12)$$

schreiben, wobei wieder $\omega = (p^2 + m^2)^{1/2}$ ist. Die Funktion B ist daher nach Gleichung (6.10) durch die Integraldarstellung

$$B(m(T)) = B_0 - \int_{T_0}^T dT \frac{dm(T)}{dT} m(T) \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{\omega \exp\{\omega/T\} - 1} \quad (6.13)$$

gegeben. Im Spezialfall einer konstanten effektiven Masse gilt insbesondere $B = \text{const.}$, und der effektive Druck und die Energiedichte unterscheiden sich von den Ausdrücken für das ideale Gas nur durch die Konstante $-B_0$ bzw. $+B_0$. Angewandt auf heiße stark wechselwirkende Systeme führte diese vereinfachte Annahme konstanter Quasiteilchenmassen in der Vergangenheit auf die sogenannten Bag-Zustandsgleichungen für das QGP. Diese beruht auf der Vorstellung, daß Quarks in Hadronen bis zum Confinement-Phasenübergang durch den nichtperturbativen Vakuumdruck, dessen Wert durch die Bag-Konstante gegeben ist, gebunden sind²; siehe z. B. [Pes95b]. Daher wird im folgenden die Funktion B in Anlehnung an die Bag-Konstante zuweilen auch als Bag-Funktion bezeichnet.

²Diese Vorstellung stellte sich jedoch als zu simplistisch für die adäquate Beschreibung der Thermodynamik des QGP heraus.

Die Entropie- und die Energiedichte des idealen Gases erhält man aus (6.12) durch Ableiten nach T bzw. durch die Gibbs-Relation,

$$\begin{aligned} s_{\text{id}}(T, m) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \left(\frac{1}{3} \frac{p^2}{\omega} + \omega \right) \frac{1}{\exp\{\omega/T\} - 1}, \\ e_{\text{id}}(T, m) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \omega \frac{1}{\exp\{\omega/T\} - 1}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die thermische Masse m der Quasiteilchen skaliert mit der Kopplungsstärke. Wie leicht festzustellen ist, geht für kleine Werte von g die effektive Beschreibung in die übliche Störungstheorie über. Die dazu nötigen Entwicklungen der Ausdrücke (6.12) und (6.14) nach dem kleinen Parameter $m/T \sim g$ sind beispielsweise in [Pes95b] zu finden und lauten unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\mathcal{O}(m^4/T^4)$ bzw. $\mathcal{O}(\ln(m/T) m^4/T^4)$ sowie höherer Ordnungen

$$\begin{aligned} p_{\text{id}}(T, m) &= p_{\text{SB}} \left[1 - \frac{15}{4\pi^2} \frac{m^2}{T^2} + \frac{15}{2\pi^3} \frac{m^3}{T^3} + \dots \right], \\ s_{\text{id}}(T, m) &= \frac{4}{T} p_{\text{SB}} \left[1 - \frac{15}{8\pi^2} \frac{m^2}{T^2} + \frac{15}{8\pi^3} \frac{m^3}{T^3} + \dots \right], \\ e_{\text{id}}(T, m) &= 3 p_{\text{SB}} \left[1 - \frac{5}{4\pi^2} \frac{m^2}{T^2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Hierbei bezeichnet p_{SB} den Stefan-Boltzmann-Druck des freien masselosen Bose-Gases. Für ein System mit d thermischen Freiheitsgraden gilt als Verallgemeinerung von (5.31) (im vorliegenden Fall ist $d = 1$)

$$p_{\text{SB}} = d \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (6.16)$$

Im perturbativen Grenzfall wird das Skalenverhalten der Kopplungsstärke durch das Resultat führender Ordnung der Renormierungsgruppentheorie bestimmt. Die funktionale Abhängigkeit der Kopplung von der Temperatur ist daher durch die Beziehung

$$g^2(T) \sim \frac{1}{\ln T}$$

gegeben [Kap89]. Demnach ist die thermische Masse $m(T) \sim gT$ von der Gestalt

$$m(T) \sim \frac{T}{\ln^{1/2} T}.$$

Für effektive Massen dieser Struktur läßt sich, wie im Anhang D.1 ausgeführt ist, für die Integraldarstellung (6.13) der Bag-Funktion die Entwicklung

$$B(T) = -p_{\text{SB}} \left[\frac{15}{8\pi^2} \frac{m^2}{T^2} - \frac{45}{8\pi^3} \frac{m^3}{T^3} + \dots \right] \quad (6.17)$$

angeben. Im asymptotischen Limes ergibt der Beitrag der Bag-Funktion eine positive Korrektur zu dem idealen Gas-Anteil des Druckes; dies ist in Analogie zu den Ergebnissen der Tadpole-Approximation im Luttinger-Ward-Zugang (siehe Gleichung (5.30) bzw. Abbildung 5.2). Mit den angeführten Entwicklungen (6.15) folgen unter Verwendung der thermischen

Masse (5.27) in der nächst-führenden Ordnung die perturbativen Resultate für die thermodynamischen Größen. So lautet z. B. die Entwicklung des Drucks in dem Quasiteilchen-Modell

$$p_{\text{eff}} = p_{\text{SB}} \left[1 - \frac{15}{8\pi^2} \frac{g^2}{4!} + \frac{15}{2\pi^3} \left(\frac{g^2}{4!} \right)^{3/2} + \dots \right]. \quad (6.18)$$

Die Dichten für effektive Entropie und Energie sind durch die entsprechenden Stefan-Boltzmann-Werte multipliziert mit dem Ausdruck in der eckigen Klammer in der Gleichung (6.18) gegeben, da die Temperaturableitung von g nur Terme höherer Ordnung liefert. Diese Ausdrücke stimmen in der betrachteten Ordnung $\mathcal{O}(g^3)$ mit den auf übliche Weise perturbativ abgeleiteten Resultaten überein (siehe Gleichung (5.31)). Erwartungsgemäß unterscheiden sich die beiden Zugänge jedoch ab der Ordnung $\mathcal{O}(g^4)$. In dem im folgenden interessierenden Bereich großer Kopplungsstärken weist die naive perturbative Entwicklung kein konvergentes, sondern vielmehr ein oszillierendes Verhalten auf [ZK95]. Dies ist in Analogie zu den Eigenschaften der Reihen-Entwicklung des in Kapitel 4.1 betrachteten Integrals $Z(g)$. Die hier angegebene effektive Quasiteilchen-Approximation ähnelt dagegen der effektiven Näherung $Z_{\text{eff}}(g)$ im Abschnitt 4.2, welche das Integral $Z(g)$ bis zu großen Werten von g recht gut approximiert. Wie auch die Funktion $Z_{\text{eff}}(g)$ extrapoliert auch der Druck p_{eff} *glatt* vom perturbativen Limes zu großen Kopplungsstärken und kann auch nach der Diskussion im Kapitel 4.1 als vernünftige Approximation angesehen werden.

An dieser Stelle kann noch auf einen weiteren Zusammenhang zu der effektiven Näherung für $Z(g)$ hingewiesen werden. Dort wurde nämlich festgestellt (siehe Gleichung (4.22)), daß als effektiver Masseterm gerade die Hälfte der Selbstenergie gewählt werden muß, damit $Z(g)$ und $Z_{\text{eff}}(g)$ für kleine Werte von g übereinstimmen. Würde in dem Quasiteilchen-Modell die Bag-Funktion vernachlässigt, so müßte auch hier die halbe Selbstenergie als Masseterm verwendet werden, damit die Entwicklung (6.15) des idealen Gas-Druckes mit dem perturbativen Druck, der durch (6.18) gegeben ist, wenigstens in führender Ordnung übereinstimmt. Dies wäre jedoch eine *ad hoc* Annahme und würde außerdem die thermodynamische Konsistenz verletzen, die hier als zusätzliche Bedingung eingeht.

6.2 Das SU(3)-Gluon-Plasma nahe des Deconfinement-Phasenübergangs

Seit jüngster Zeit existieren verlässliche numerische Gitterrechnungen zu thermodynamischen Größen von heißen stark wechselwirkenden Plasmen, insbesondere zu reinen Eichbosonen-Systemen [Boy96] (ohne Fermionen). Auch mit analytischen Methoden wurden unlängst beachtliche Fortschritte erzielt, so daß heute mit der perturbativen Ordnung $\mathcal{O}(g^5)$ das thermodynamische Potential von heißen nicht-Abelschen Plasmen bis zu der störungstheoretischen Grenze bekannt ist, die im Abschnitt 4.3 diskutiert wurde. Diese analytischen Resultate lassen sich jedoch nicht unmittelbar mit den numerischen Ergebnissen in Einklang bringen. Wie im Abschnitt 4.3 dargelegt wurde, besteht neben formalen Schwierigkeiten wie dem Konvergenzverhalten und der (Rest-) Abhängigkeit von der Renormierungsskala auch die Tatsache, daß sich die Gitterdaten nicht durch die Störungsreihe reproduzieren lassen. Dies ist nach den allgemeinen Überlegungen im Kapitel 4 über das Verhalten von Störungsreihen hoher Ordnung bei hohen Kopplungsstärken auch von vornherein zu erwarten.

Als alternativer Zugang zu einem qualitativen und quantitativen Verständnis der Gitterdaten wird daher hier das im vorangegangenen Abschnitt betrachtete Quasiteilchen-Modell untersucht, das in vereinfachten Formen z. B. bereits in [BLM90] und [GY95] zur Interpretation älterer Gitterdaten verwendet wurde. Dieses Quasiteilchen-Modell wird in diesem Abschnitt zunächst auf das heiße SU(3)-Plasma (ohne Fermionen) angewandt. Nachdem die Modellparameter durch Anpassen an die thermodynamischen Daten festgelegt sind, wird durch eine zusätzliche Überlegung das Abschirmverhalten der Wechselwirkung in dem Plasma abgeschätzt.

Es existiert in der Literatur eine Reihe weiterer Ansätze zur Interpretation von thermodynamischen Gitterdaten. An dieser Stelle soll auf die Arbeit [Ris92] verwiesen werden sowie auf [LH97] mit einer ausführlichen Zitatsammlung. Während in [Ris92] ein *cutoff*-Modell mit perturbativen Korrekturen Anwendung findet, folgt [LH97] im wesentlichen dem hier vorgestellten Modell und kommt zu ähnlichen Resultaten wie in den [Käm97a] vorgestellten.

Thermodynamik

In dem betrachteten Modell wird das wechselwirkendes System näherungsweise durch ein System freier Quasiteilchen mit einer effektiven Masse beschrieben. Während sich diese Masse in der skalaren Theorie in der im Abschnitt 6.1 gewählten Approximation unmittelbar aus der Selbstenergie in der Einschleifen-Näherung ergibt, bedarf der Begriff der Quasiteilchenmasse für ein QCD-Plasma einer etwas eingehenderen Diskussion. Entsprechend der Intention, das QCD-Plasma nahe des Deconfinement-Phasenübergangs, also bei großen Kopplungsstärken zu beschreiben, werden im folgenden stets die perturbativen Resultate in führender Ordnung zur Approximation herangezogen (siehe Teil II dieser Arbeit). Ausgegangen wird hier zunächst von der Gluon-Selbstenergie in der HTL-Näherung, wobei nach der Diskussion im Kapitel 3 klar ist, daß die abgeleiteten Resultate nicht nur für kleine, sondern für beliebige Impulse bzw. bei größeren Kopplungsstärken in der Einschleifen-Näherung gültig sein werden.

Die Energie der longitudinalen und transversalen Gluon-Anregungen mit verschwindendem Impuls sind aus Symmetriegründen gleich. In führender Ordnung ist sie durch die in (3.22) eingeführte thermische Gluonmasse gegeben,

$$m_g^2 = \frac{N_c}{9} g^2 T^2 .$$

Für endliche Impulse unterscheiden sich die beiden Anregungsmoden jedoch qualitativ. Die longitudinale Anregung ist für Impulse $p \gtrsim gT$ exponentiell stark gedämpft, so daß sie praktisch nicht propagiert [KK80]. Im Gegensatz dazu ist die Dämpfung der transversalen Moden von höherer Ordnung in der Kopplungsstärke g [KK80]. Außerdem läßt sich für harte Impulse die Dispersionsrelation der transversalen Anregungen durch die einfache Relation

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \tilde{m}_g^2 + k^2, \\ \tilde{m}_g^2 &:= \frac{3}{2} m_g^2 = \frac{N_c}{6} g^2 T^2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

approximieren. Dies folgt aus der Tatsache, daß sowohl in der HTL- als auch in der Einschleifen-Näherung die transversale Selbstenergie für fast lichtartige Impulse durch

$$\Pi_T(p_0, p) \xrightarrow{p_0 \sim p} \tilde{m}_g^2$$

gegeben ist (vergleiche (2.41)). Da somit für große Impulse der Pol des transversalen Propagators durch die Beziehung (6.19) festgelegt wird, wird \tilde{m}_g auch asymptotische Gluonmasse genannt. 6.19 Aus der Abbildung 6.1 wird deutlich, daß diese asymptotische Approximation

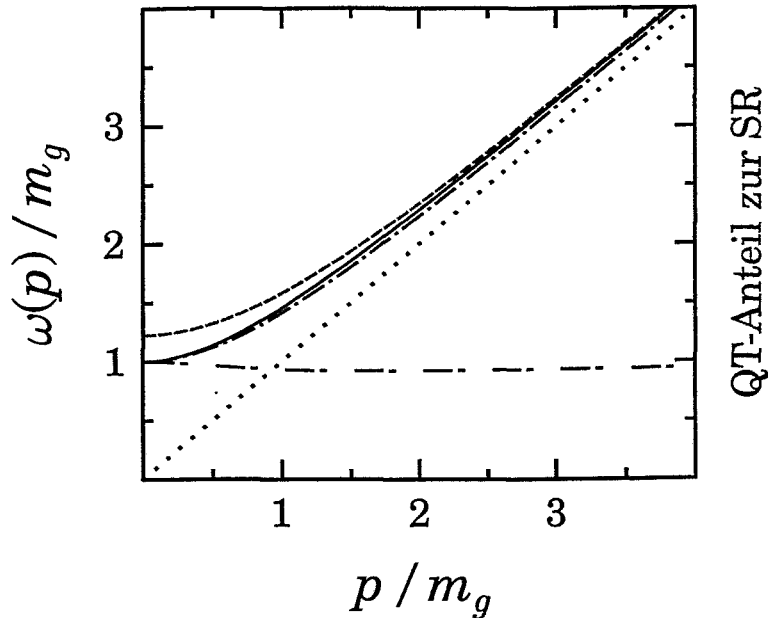


Abbildung 6.1: Die HTL-Dispersionsrelation der transversalen Gluon-Anregung (volle Line) und deren asymptotische Approximation (gestrichelt). Zum Vergleich ist strich-punktiert die durch die thermische Gluonmasse festgelegte Massenschale dargestellt. Diese beschreibt die HTL-Dispersion zwar gut für kleine Impulse, besitzt aber für die relevanten Impulse $p \sim T$ aufgrund des Unterschiedes zwischen der thermischen und der asymptotischen Gluonmasse eine systematische Abweichung. Schließlich zeigt die lang strich-punktierte Linie den Quasiteilchen-Anteil der transversalen Anregung an der Summenregel (eine Ordinaten-Einheit auf der rechten Ordinate entspricht 100%).

bereits für $p \gtrsim gT$ recht gut ist. Ebenfalls gezeigt ist dort, daß der Quasiteilchen-Beitrag der transversalen Moden die Summenregel des Gluon-Propagators nahezu sättigt.

Die thermodynamischen Eigenschaften des Plasmas werden aufgrund des thermischen Phasenraumes $d^3p n_B(p)$ hauptsächlich durch die Zustände mit harten Impulsen $p \sim T$ bestimmt. Der Beitrag der Zustände mit Impulsen $p \lesssim m_g \sim gT$ ist dagegen von einer höheren Ordnung in der Kopplung g . So ist beispielsweise der Beitrag dieses Phasenraumgebietes zur idealen Energiedichte

$$e'_{\text{id}} \sim \int_{p < gT} d^3p \omega n_B(p) \sim \int_0^{gT} dp p^2 \omega \frac{T}{\omega} \sim T^4 \mathcal{O}(g^3),$$

während die vollständige Energiedichte durch

$$e_{\text{id}} \sim T^4 [1 - \mathcal{O}(g^2)]$$

gegeben ist (vergleiche (6.15)). Damit kann die in einfacher Form approximierete Dispersionsrelation (6.19) bis auf einen hier unwichtigen Fehler höherer Ordnung auch für Impulse $p \lesssim gT$ zu Berechnung thermodynamischer Größen angewendet werden.

Somit ergibt sich mit der bereits ausführlich diskutierten Motivation, bei großen Kopplungsstärken nur die perturbativen Korrekturen niedrigster Ordnung in konsistenter Weise zu berücksichtigen, das folgende Quasiteilchen-Bild des heißen Gluon-Plasmas:

Es existieren im Plasma zwei transversale massive bosonische Quasiteilchen-Anregungen mit der Dispersionsrelation (6.19), die für den gesamten Phasenraum angewendet werden kann. Die Dämpfung dieser propagierenden Quasiteilchen sowie die Existenz langwelliger longitudinaler Moden können in der angestrebten Approximation vernachlässigt werden.

Da in diesem Sinne \tilde{m}_g in (6.19) als Quasigluonmasse angesehen werden kann, kann die effektive Beschreibung (6.5) und (6.10) der Thermodynamik der skalaren Theorie unmittelbar auf das Gluon-Plasma verallgemeinert werden. Mit $\omega_g = (\tilde{m}_g^2 + p^2)^{1/2}$ und d_g als Zahl der thermischen Gluon-Freiheitsgrade erhält man für den Druck des Gluon-Plasmas

$$\begin{aligned} p_g(T) &= d_g \frac{T}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 - \exp\{-\omega_g/T\} \right) - B(T), \\ B(T) &= B_0 - \int_{T_0}^T dT \frac{d\tilde{m}_g(T)}{dT} \tilde{m}_g(T) \frac{d_g}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{\omega_g} \frac{1}{\exp\{\omega_g/T\} - 1}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Die aus (6.7) und (6.9) folgende Energie- bzw. Entropiedichte besitzen wieder die Gestalt (6.6) bzw. (6.8).

Es verbleibt die Angabe der Temperaturabhängigkeit der Kopplungsstärke in der Quasigluonmasse in (6.19). Im folgenden wird von dem durch die Renormierungsgruppentheorie in niedrigster Ordnung motivierten Ansatz

$$G^2(T) = \frac{48\pi^2}{11N_c \ln \left(\frac{T + T_s}{T_c/\lambda} \right)^2} \xrightarrow{T \gg T_s} g^2(T) \quad (6.21)$$

ausgegangen [Pes94]. Der Parameter T_s stellt hierbei eine phänomenologische Regularisierung der Kopplungsstärke nahe der kritischen Temperatur dar, und die Renormierungsskala wurde als T_c/λ geschrieben. Für große Temperaturen $T \gg T_s$ geht $G(T)$ in die gebräuchliche Form $g(T)$ der Temperaturabhängigkeit der Kopplung über [Kap89].

Im asymptotischen Grenzfall stimmt das effektive Quasiteilchen-Modell mit der üblichen perturbativen Reihe für das thermodynamische Potential des Gluon-Plasmas in der führenden Ordnung in g überein. Dies läßt sich leicht für die Eichgruppen $SU(N_c)$ mit beliebigen N_c mit Hilfe der Beziehungen (6.15) und (6.17) zeigen.

Im nichtperturbativen Regime nahe des Phasenübergangs wurden systematische Simulationen des $SU(3)$ -Gluon-Plasmas auf Gittern der Größen $16^3 \times 4$ bis $32^3 \times 8$ durchgeführt [Boy96]. In dem Temperaturbereich der thermodynamischen Gitterrechnungen erlaubt das effektive Modell eine nahezu perfekte Beschreibung der vorhandenen Daten. Die Interpolation zwischen diesem Regime starker Kopplung zu dem asymptotischen Grenzfall ist dabei wieder glatt. Bei dem in der Abbildung 6.2 gezeigten Fit der Daten [Boy96] wurde neben

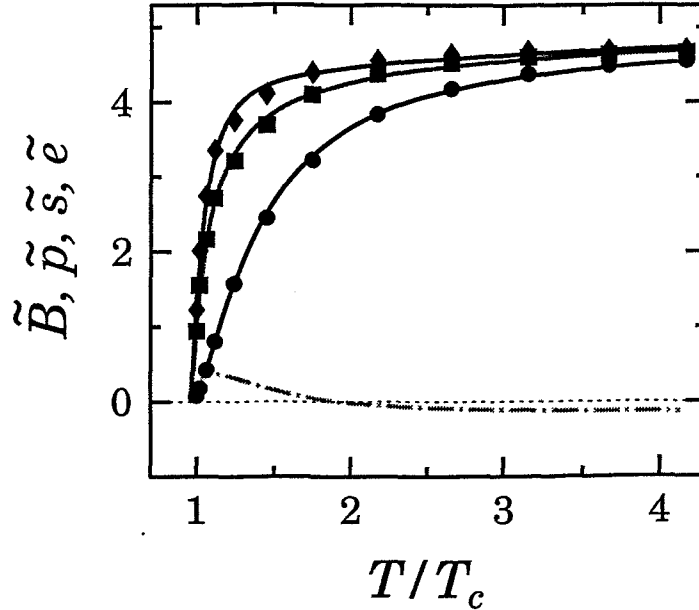


Abbildung 6.2: Der Vergleich der Kontinuum-extrapolierten Gitter- $SU(3)$ -Daten [Boy96] mit dem Quasiteilchen-Modell (Linien). Dargestellt sind die Daten für den skalierten Druck $\tilde{p} = p/T^4$ (Kreise), die skalierte Entropiedichte $\tilde{s} = s/T^3$ (Quadrate) und die Energiedichte $\tilde{e} = e/T^4$ (Rauten). Die gestrichelte Linie zeigt den Verlauf der skalierten Bag-Funktion $B(T)/T^4$, die für Druck und Energiedichte die Abweichungen von den Größen für das ideale massive Gas angibt.

den Parametern λ und T_s/T_c in der Kopplungsstärke (6.21) auch die Zahl d_g der thermodynamischen Freiheitsgrade der Quasigluonen angepaßt. Dies liefert das Ergebnis

$$\lambda = 4.17, \quad T_s/T_c = -0.71, \quad d_g = 17.2. \quad (6.22)$$

Damit liegt die Zahl der gluonischen Freiheitsgrade nahe des erwarteten Werts von $d_g = 2(N_c^2 - 1) = 16$, wobei die geringfügigen Abweichungen zum einen durch die schwer vorzunehmende absolute Skalierung der Gitterdaten oder in dem effektiven Modell durch Beiträge höherer Ordnung³, wie z. B. auch die der longitudinalen Gluonen, begründet sein könnten. Auch der gefittete Wert für den Parameter λ ist vernünftig. Im asymptotischen Limes ist nämlich die Abhängigkeit der Kopplung vom Impuls Q durch die Beziehung

$$g^2(Q^2) = \frac{48\pi^2}{11N_c \ln\left(\frac{Q}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)^2}$$

³Tatsächlich liefert die Verwendung des Zweischleifen-Resultats für die Kopplungsstärke einen optimalen Fit mit $d_g = 16.6$.

gegeben [IZ80], wobei der Wert der Skala Λ_{QCD} (abhängig vom verwendeten Renormierungsschema) etwa 200 MeV beträgt. In dem heißen Plasma ist der mittlere quadratische Impuls aber von der Größe

$$\langle Q^2 \rangle(T) \approx (3.2T)^2,$$

so daß man durch den Vergleich mit (6.21) bei großen Temperaturen die Beziehung

$$\lambda \sim 3.2 \frac{T_c}{\Lambda_{\text{QCD}}} \quad (6.23)$$

erhält. Die Übergangstemperatur für den gluonischen Deconfinement-Phasenübergang läßt sich durch Betrachtungen zur *string tension* in den Gitterrechnungen mit $T_c \sim 260$ MeV angeben [Boy96]. Damit folgt aus der Abschätzung (6.23) gerade der in (6.22) angegebene Wert für λ . Obgleich diese genaue Übereinstimmung sicher zufällig ist, zeigt sie dennoch die Konsistenz der Betrachtungen. In ähnlicher Weise kann der Parameter T_s/T_c abgeschätzt werden, da dieser in enger Beziehung zu der latenten Wärme des Phasenübergangs steht, deren absoluter Wert ebenfalls aus den Gitterrechnungen bestimmt werden kann.

Da die Bag-Funktion durch die Integraldarstellung (6.13) gegeben ist, muß der Wert der Integrationskonstante B_0 noch festgelegt werden. B_0 wurde hier nicht als zusätzlicher Fitparameter angenommen, sondern durch das Anpassen des effektiven Modells an die Gitterdaten bei der Übergangstemperatur zu

$$B_0 = B(T_c) = 0.16 T_c^4 \quad (6.24)$$

bestimmt. Auch dieser Wert kann aufgrund des erwähnten Zusammenhangs zum Bag-Modell als sinnvoll angesehen werden, da für die Bag-Konstante ein Wert der Größenordnung von $(200 \text{ MeV})^4$ angegeben wird. Im Gegensatz zu der zu einfachen Parametrisierung der Thermodynamik von QCD-Plasmen durch das Bag-Modell wechselt die Funktion $B(T)$ in dem hier betrachteten Zugang jedoch das Vorzeichen bei $T \sim 2T_c$, was aufgrund der asymptotischen Form (6.17) für $B(T)$ auch zu erwarten ist.

Aus den bereits betrachteten thermodynamischen Eigenschaften lassen sich weitere interessante Größen ableiten. Eine dieser Größen ist das sogenannte Wechselwirkungsmaß $(e - 3p)/T^4$, welches für ein freies System identisch verschwindet. In dem einfachen Bag-Modell mit der Zustandsgleichung $p = p_{\text{id}} - B$, $e = e_{\text{id}} + B$ wird klar, daß das Wechselwirkungsmaß hauptsächlich nichtperturbative Effekte beschreibt, die hier durch die Bag-Konstante parametrisiert werden. Dies gilt ähnlich auch für realistischere Plasma-Modelle. Das Wechselwirkungsmaß ist bei numerischen Rechnungen auf dem Gitter von besonderer Bedeutung, da es weniger als andere Größen sensitiv auf *finite-size* Effekte ist. Wie in der Abbildung 6.3 dargestellt ist, stimmen insbesondere oberhalb des ausgeprägten Maximums des Wechselwirkungsmaßes bei $1.2T_c$ die auf verschiedenen Gittern berechneten Daten sowohl untereinander als auch mit dem Ergebnis des Quasiteilchen-Modells gut überein.

Eine Größe, die für die Beantwortung experimenteller Fragestellungen große Relevanz besitzt, ist die Schallgeschwindigkeit c_s im Plasma. Diese wird aus der Zustandsgleichung durch die Relation

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial e} \quad (6.25)$$

bestimmt und ist in der Abbildung 6.4 dargestellt. Es ist klar, daß c_s nahe des Phasenüber-

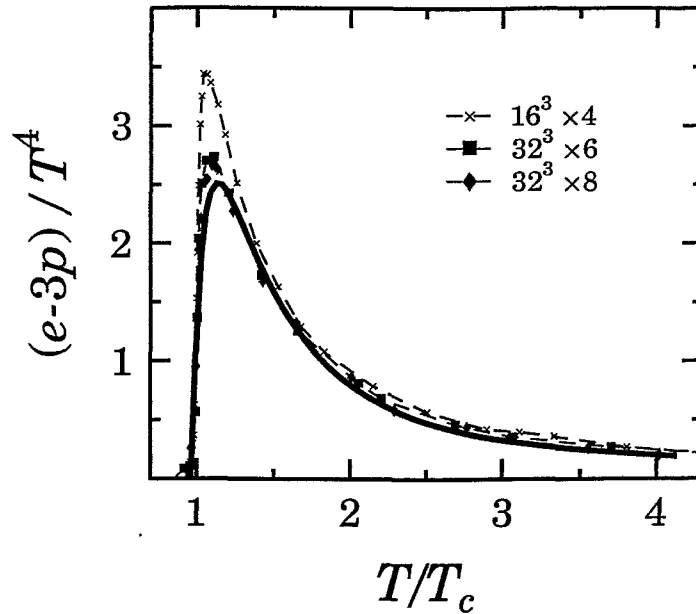


Abbildung 6.3: Das Wechselwirkungsmaß $(e - 3p)/T^4$ als Funktion der Temperatur entsprechend der Gitterrechnungen [Boy96] für verschiedene Gittergrößen und das Ergebnis des Quasiteilchen-Modells (volle Linie).

gangs klein wird, da dort die Wechselwirkung zwischen den Teilchen stark abgeschirmt wird. Die Schallgeschwindigkeit erreicht aber schon bei Temperaturen $T \sim 2T_c$ etwa 95% der asymptotischen Schallgeschwindigkeit von $c/3$.

Als eine letzte Größe wird in der Abbildung 6.5 das Verhältnis $3p/e$ als Funktion der Energiedichte betrachtet. Dieses Verhältnis geht für große Werte von e gegen Eins. Für $T \rightarrow T_c$ nimmt es ab, erreicht bei T_c den sogenannten weichsten Punkt der Zustandsgleichung (*softest point*), um unterhalb der Phasenübergangstemperatur wieder anzusteigen. Die dabei freigesetzte latente Wärme bestimmt dort das hydrodynamische Verhalten des Plasmas.

Die Diskussion der angeführten thermodynamischen Größen zeigt⁴, daß das vorgestellte Quasiteilchen-Modell nicht nur eine einfache physikalische Interpretation der numerischen Gitterdaten erlaubt. Vielmehr stellt es eine recht einfache Möglichkeit der Parametrisierung der Zustandsgleichung des Gluon-Plasmas für weiterführende Untersuchungen, wie z. B. hydrodynamische Evolutionsmodelle, dar. Des weiteren erlaubt das Modell nach einer einfach vorzunehmenden Verallgemeinerung eine Abschätzung der Zustandsgleichung des realen QGP, welche derzeit durch Gitterrechnungen aus technischen Gründen noch nicht unmittelbar bestimmbar ist. Dies bildet den Gegenstand des Abschnittes 6.4. Zuvor soll aber noch die sogenannte Debye-Masse der Gluonen betrachtet werden, eine Größe, die in dem Quasiteilchen-Modell ebenfalls einfach zu berechnen ist, die aber mit den bisher betrachteten thermodynamischen Eigenschaften des Plasmas nicht in einem unmittelbaren Zusammenhang steht.

⁴Obleich der Fit des Druckes als thermodynamisches Potential recht gut ist, ist dies für differentielle Größen wie das Wechselwirkungsmaß oder die Schallgeschwindigkeit nicht von vornherein gegeben.

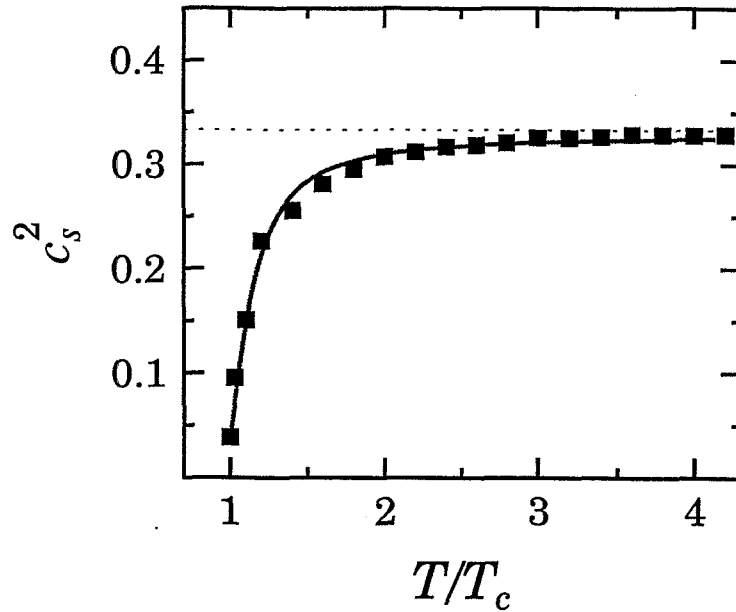


Abbildung 6.4: Die Vorhersagen aus den Gitterdaten [Boy96] (Symbole) und des Quasiteilchen-Modells (volle Linie) für die Schallgeschwindigkeit als Funktion der Temperatur. Asymptotisch gilt $c_s^2 \rightarrow 1/3$.

Debye-Masse

Die Debye-Masse ist eine statische Größe, die das langreichweitige Abschirmverhalten der Wechselwirkung in einem Plasma beschreibt. Um den Begriff der Debye-Masse an einem einfachen Beispiel zu illustrieren, wird zunächst ein klassisch beschreibbares, elektromagnetisch wechselwirkendes Plasma wie z. B. ein Ionen-Plasma betrachtet. Viele Eigenschaften dieses Systems können mit der Methode von Debye und Hückel qualitativ verstanden und berechnet werden. Nach deren Vorstellungen und wie in der Abbildung 6.6 schematisch dargestellt, betrachtet man die Dichte n_a der Teilchensorte a mit der elektrischen Ladung $e_a = z_a e$ im Feld ϕ_b eines Teilchens mit der Ladung $e_b = z_b e$. Diese Dichteverteilung ist in Analogie zu der bekannten barometrischen Höhenformel durch die Relation

$$n_a(\mathbf{r}) = n_a^{(0)} \exp\{-z_a e \phi_b(\mathbf{r})/T\}$$

gegeben, wobei $n_a^{(0)}$ die Teilchendichte im feldfreien Raum ist. Für fast-ideale Plasmen (auf diese Voraussetzung wird gleich noch einmal eingegangen) wird n_a näherungsweise durch die Approximation

$$n_a \approx n_a^{(0)} [1 - z_a e \phi_b/T] \quad (6.26)$$

bestimmt. Somit ergibt sich die Gesamtladungsdichte um die Ladung e_b als

$$\rho_b = e \sum_a z_a n_a \approx - \sum_a n_a^{(0)} z_a^2 \frac{e^2}{T} \phi_b, \quad (6.27)$$

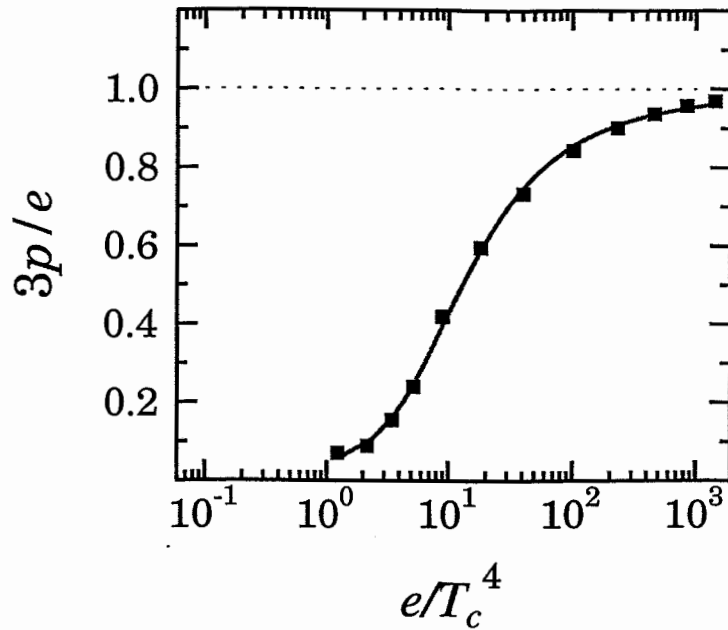


Abbildung 6.5: Die Zustandsgleichung des $SU(3)$ -Gluon-Plasmas in der Form p/e als Funktion der Energiedichte e .

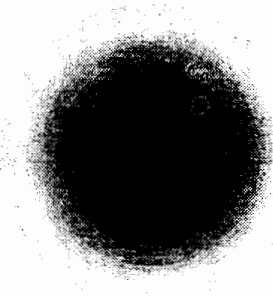


Abbildung 6.6: Die Verteilung der Ladungen $e_a = z_a e$ im Feld der Ladung $e_b = z_b e$.

da für ein neutrales Plasma $\sum_a n_a^{(0)} e_a = 0$ gilt. Die Poisson-Gleichung $\Delta\phi_b = -4\pi\rho_b$, die das elektrische Feld um die Ladung e_b bestimmt, nimmt somit die Gestalt

$$\Delta\phi_b - \lambda^{-2}\phi_b = 0 \quad (6.28)$$

an, wobei der Parameter λ durch die Relation

$$\lambda^{-2} = 4\pi \frac{e^2}{T} \sum_a n_a^{(0)} z_a^2 \quad (6.29)$$

gegeben ist.

Während die bisherigen Überlegungen recht allgemeiner Natur waren, werden im folgenden Plasmen bei hohen Temperaturen untersucht. Zunächst wird die gemachte Annahme eines fast-idealen Plasmas genauer formuliert. Die Größenordnung der Teilchendichten lassen sich bei hohen Temperaturen durch den Ausdruck für das masselose Stefan-Boltzmann-Gas abschätzen,

$$n^{(0)} = \frac{N}{V} = d \frac{\xi(3)}{\pi^2} T^3 \approx 0.12 d T^3, \quad (6.30)$$

wobei d die Entartung der jeweiligen Teilchenspezies angibt. Der mittlere Teilchenabstand r_0 ist daher von der Größenordnung

$$r_0 \sim n_0^{-1/3} \sim T^{-1}.$$

Dem entsprechend beträgt die Coulomb-Energie ε_C eines Teilchens im Plasma typischerweise

$$\varepsilon_C \sim \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{r_0} \sim e^2 T. \quad (6.31)$$

Unter der Annahme einer schwachen elektromagnetischen Kopplung, d. h., $e^2 \ll 1$, ist die gemachte Voraussetzung über das fast-ideale Plasma tatsächlich erfüllt, da die kinetische Energie der Teilchen von der Größenordnung

$$\varepsilon_k \sim T \quad (6.32)$$

ist.

Das elektrische Feld um die Ladung e_b wird als Lösung von (6.28) durch eine Yukawa-Funktion bestimmt,

$$\phi_b(r) = \frac{e_b}{r} \exp\{-r/\lambda\}, \quad (6.33)$$

wobei der in der Gleichung (6.29) eingeführte Parameter λ die Abschirmlänge des Feldes im Plasma bestimmt. Unter der Annahme der thermischen Teilchendichte (6.30) ist λ von der Größenordnung

$$\lambda \sim (eT)^{-1}. \quad (6.34)$$

Dieser typischen Länge läßt sich eine Größe von der Dimension einer Masse zuordnen, nämlich

$$m \sim \lambda^{-1} \sim eT. \quad (6.35)$$

In diesem Sinne kann die Wechselwirkung in dem betrachteten Plasma durch den Austausch massiver Teilchen verstanden werden. Deren Masse ist proportional zu der Kopplung e und (aus Dimensionsgründen) zu der Temperatur. Wie bereits diskutiert wurde, ist die durch diese Masse beschriebene Abschirmung ein kollektiver Effekt der Wechselwirkung im Plasma; die Photonen als eigentliche Vermittler der Wechselwirkung bleiben natürlich masselos. Es zeigt sich allerdings auch unter dem hier betrachteten Gesichtspunkt, daß die Vorstellung massiver Quasiteilchen als Konstituenten des Plasmas durchaus hilfreich ist.

In einer mehr formalen Art und Weise kann für Plasmen mit Abelscher Wechselwirkung die Debye-Masse definiert werden als

$$\tilde{m}_D^2 := \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \Pi_{00}(\omega, k). \quad (6.36)$$

Der doppelte Grenzübergang für die longitudinale Komponente des Polarisationsensors entspricht der eingangs gemachten Bemerkung, daß die Debye-Masse ein Maß für die langreichweitige Abschirmung der statischen elektrischen Wechselwirkung darstellt. In Analogie zu (6.36) wird die Abschirmung der magnetischen Wechselwirkung im Plasma durch die transversalen Komponenten des Polarisationsensors bestimmt.

Für QCD-Plasmen erweist sich die obige Definition der Debye-Masse jedoch nicht als sinnvoll. Während nämlich der elektromagnetische Polarisationsensor und damit auch die durch (6.36) definierte Größe explizit eichunabhängig sind, ist dies für nicht-Abelsche Eichtheorien nicht der Fall: eine entsprechend (6.36) definierte Größe erweist sich hier als sowohl eich- als auch renormierungskalenabhängig. Gleichwohl sollten physikalische (d. h., meßbare) Größen, die sich aus dem Polarisationsensor ergeben, wie z. B. die Dispersionsrelation bzw. die Abschirmlänge, wohldefiniert sein. Rebhan konnte zeigen [Reb93], daß für nicht-Abelsche Plasmen die modifizierte Definition

$$m_D^2 := \lim_{k \rightarrow im_D} \lim_{\omega \rightarrow 0} \Pi_{00}(\omega, k). \quad (6.37)$$

die geforderten Eigenschaften (in der nächst-führenden Ordnung der Störungstheorie) besitzt. Die durch (6.37) definierte Debye-Masse beschreibt als Pol des vollen Propagators somit tatsächlich selbstkonsistent die statische Abschirmung der farb-elektrischen Kraft über lange Distanzen im Plasma.

Der für das weitere benötigte Zusammenhang der longitudinalen Polarisation mit der phänomenologisch eingeführten Dielektrizitätsfunktion $\epsilon(\omega, k)$ ist durch die Beziehung

$$\Pi_{00}(\omega, k) = k^2(-1 + \epsilon(\omega, k)) \quad (6.38)$$

gegeben [AGD75]. Im Rahmen der kinetischen Theorie läßt sich für die farb-dielektrische Funktion der Ausdruck

$$-1 + \epsilon(\omega, k) = N_c \frac{\gamma g^2}{\omega k^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k} \mathbf{p}}{\omega E(\mathbf{p}) - \mathbf{k} \mathbf{p} + i0^+} \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) f(\mathbf{p}) \quad (6.39)$$

angeben [EH89], wobei $f(\mathbf{p})$ die thermische Verteilungsfunktion, $E(\mathbf{p})$ die Energie und γ die Entartung der Teilchenanregungen bezeichnen. Diese Relation entspricht dem bekannten Lindhard-Ausdruck für die dielektrische Funktion eines entarteten Elektronengases (siehe z. B. [Zim92]). Im vorliegenden Fall ist $f(\mathbf{p})$ durch die Bose-Verteilungsfunktion n_B der Quasiteilchen gegeben und hängt nur von $p = |\mathbf{p}|$ ab, so daß gilt

$$\left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) f(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{k} \mathbf{p}}{p} \frac{\partial}{\partial p} n_B(p).$$

Den zwei propagierenden Freiheitsgraden entsprechend ist $\gamma = 2$. Somit ergibt sich nach (6.37) und (6.38) nach Ausführen der Winkelintegration in (6.39) für die Debye-Masse der Ausdruck

$$m_D^2 = N_c g^2 \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \exp\{p^2 + \tilde{m}_g^2\} n_B(p). \quad (6.40)$$

Für verschwindende Quasigluonmasse $\tilde{m}_g \rightarrow 0$, d. h., im asymptotischen Grenzfall, geht dieser Ausdruck in das bekannte Resultat in der führenden Störungsordnung über [Kap89],

$$m_D^2 \xrightarrow{g \rightarrow 0} \frac{N_c}{3} g^2 T^2. \quad (6.41)$$

Dieses Ergebnis ist wohl zu unterscheiden von der thermischen Gluonmasse m_g bzw. der Quasigluonmasse \tilde{m}_g , welche durch nicht-statische Grenzwerte der Gluon-Polarisation gegeben sind. Im asymptotischen Limes verhalten sich die Quadrate der Debye-Masse und der Quasigluonmasse (6.19) wie 1:2. Dieses asymptotische Verhältnis unterscheidet sich beträchtlich von dem bei Temperaturen um die kritische Temperatur T_c , d. h., bei größeren Kopplungsstärken. Die numerische Auswertung von (6.40) mit der durch die Parameter (6.22) bestimmten effektiven Gluonmasse ist in der Abbildung 6.7 im Temperatur-Intervall $[T_c, 4T_c]$ dargestellt. Während die Quasigluonmasse für $T \rightarrow T_c$ stark ansteigt, fällt die

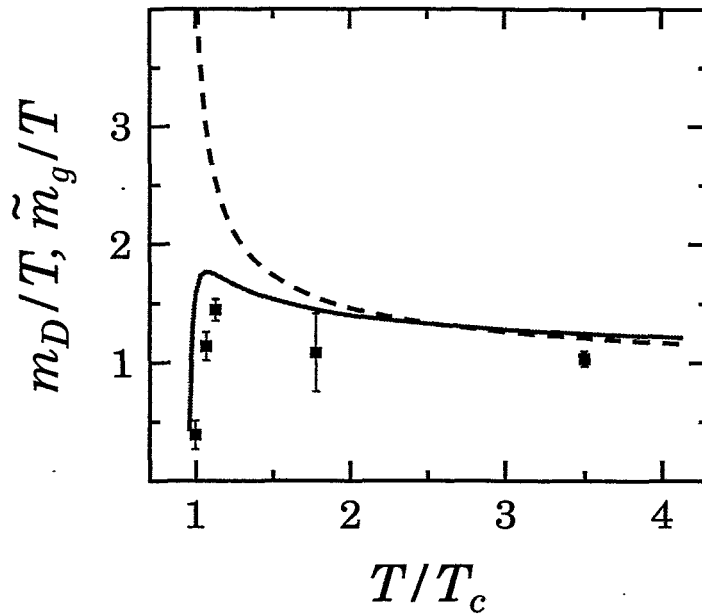


Abbildung 6.7: Die Quasigluonmasse \tilde{m}_g (gestrichelte Linie) und die Debye-Masse m_D (volle Linie) im kinetischen Zugang. Die Symbole sind die Ergebnisse der numerischen Gitterrechnung [Gao90] der Debye-Masse.

Debye-Masse nach einem leichten Anstieg dort steil ab. Das Massenverhältnis stellt somit ein Maß für nichtperturbative Effekte im Plasma dar. Wie in [Pes96] angeführt, kann ein solch ausgeprägt nichtperturbatives Verhalten interessante Konsequenzen für Signale des Deconfinement-Phasenübergangs in Schwerionenstößen liefern. Derartige Signale sind z. B. die J/Ψ -Unterdrückung, elektromagnetische Proben und die Strangeness-Verstärkung über den Zerfall $g^* \rightarrow s\bar{s}$ massiver Gluonmoden. Für Temperaturen $2T_c \lesssim T \lesssim 4T_c$ sind beide Massen etwa gleich groß. Das Verhältnis beider Massen nähert sich für $T \rightarrow \infty$ aufgrund der logarithmischen Temperaturabhängigkeit der Kopplungskonstante (6.21) nur sehr langsam dem asymptotischen Limes.

Damit gibt der kinetische Zugang mit der durch die thermodynamischen Daten parametrisierten Quasigluonmasse den Verlauf der vorhandenen Gitterrechnungen [Gao90] zur SU(3)-Debye-Masse qualitativ recht gut wider. Außerdem stellt sie auch eine akzeptable quantitative Abschätzung der Gitterdaten dar, obgleich die systematische Abschätzung der

finite size Effekte und insbesondere die Skalierung dieser auf einem $(24^3 \times 6)$ -Gitter berechneten Daten derzeit noch aussteht.

6.3 Das QCD-Plasma mit vier leichten Quark-Flavors

Im vorangegangenen Abschnitt wurde das reine Gluon-Plasma betrachtet. Ein real existierendes stark wechselwirkendes Plasma enthält jedoch einen gewissen Fermionen-Anteil. Daher ist die theoretische Untersuchung solcher Systeme von einer besonderen Relevanz, während die Betrachtung des reinen Gluon-Plasmas (was der Annahme unendlich schwerer Quarks entspricht) eher dem allgemeinen Verständnis nicht-Abelscher Eichtheorien bei endlichen Temperaturen sowie der Entwicklung numerischer Methoden dient.

Die algorithmische Implementierung von Fermionen auf einem diskreten Raumzeit-Gitter ist wesentlich schwieriger als jene zur Beschreibung rein gluonischer Systeme [Cre83], so daß zu diesen Systemen erst seit kurzem verlässliche thermodynamische Daten verfügbar sind. Eine technische Schwierigkeit liegt beispielsweise in der Simulation sehr leichter bzw. masseloser Quarks; die für endliche Quarkmassen berechneten Daten müssen zu dem zur Beschreibung der u- und d-Flavors geeigneten chiralen Limes extrapoliert werden.

Die für das folgende zugrunde liegenden Daten [Eng97] wurden auf einem $16^3 \times 4$ -Gitter mit *staggered* Quarks in 4 Flavors berechnet. Aus den ursprünglichen Daten mit den Quarkmassen $m_q = 0.4 T$ bzw. $m_q = 0.2 T$ (jeweils für jede Flavor-Art) wurde zu dem interessierenden chiralen Limes extrapoliert. Die *finite-size* Effekte wurden dabei noch nicht (wie manchmal üblich) durch ein Skalieren entsprechend der wechselwirkungsfreien Theorie auf dem endlichen Gitter vorgenommen. Daher wird bei dem Anpassen des Quasiteilchen-Modells die Zahl der thermodynamischen Freiheitsgrade der Gluonen d_g und jener der Quarks d_f wieder als Parameter zugelassen, um die *finite-size* Effekte zu parametrisieren.

Zur Beschreibung des Quark-Gluon-Plasmas kann das im vorangegangenen Abschnitt auf das heiße Gluon-System angewandte Quasiteilchen-Modell leicht verallgemeinert werden. Da sich das thermodynamische Potential des Systems aus dem Quasiteilchen-Anteil und dem Wechselwirkungsterm, der die Selbstkonsistenz gewährleistet, entsprechend Gleichung (6.5) zusammensetzt, muß hier noch die effektive Masse der Quarks bestimmt werden. Dies erfolgt in Analogie zu dem rein gluonischen Fall. Obwohl auch die Dispersionsrelation der Quarks im heißen Medium bereits in der Einschleifen- oder der HTL-Näherung recht kompliziert ist, nimmt sie, wie in (3.45) gezeigt, für die relevanten thermischen Impulse die einfache Gestalt

$$\omega^2 = \tilde{m}_q^2 + k^2 \quad (6.42)$$

an. Die Dämpfung dieser wie freie Teilchen der Masse \tilde{m}_q propagierenden Moden kann dabei in der hier betrachteten Näherung vernachlässigt werden⁵. Ähnlich wie die longitudinalen Gluon-Moden (Plasmonen) sind auch die Antiquark-Loch-Anregungen (Plasminos) bei thermischen Impulsen überdämpft. Dies ist von vornherein klar, denn die Existenz dieser Anregungen ist an das ausgezeichnete Bezugssystem des Mediums gebunden, dessen Einfluß auf sehr energiereiche Teilchen aber gering ist. Der Beitrag dieser weiteren Quark-Anregungsmoden zu thermodynamischen Größen kann daher in der angestrebten Näherung

⁵Das ist aufgrund des analytischen Zusammenhangs von Real- und Imaginärteilen der Selbstenergie über Dispersionsrelationen klar.

vernachlässigt werden, so daß die Quarks im Plasma allein durch ideale Quasiteilchen mit der Masse

$$\tilde{m}_q^2 = 2 m_q^2 = 2 \frac{C_R}{8} g^2 T^2 = \frac{N_c^2 - 1}{8 N_c} g^2 T^2 \quad (6.43)$$

approximativ beschrieben werden können (vergleiche dazu (3.45)). Die Massen m_q und \tilde{m}_q , die die Ruheenergie bzw. die asymptotische Dispersionsrelation der Quark-Anregungen bestimmen, unterscheiden sich ähnlich wie im Falle der gluonischen Anregungen nur um einen Faktor.

Das gesamte thermodynamische Potential bzw. der Druck des Systems kann als Summe des Quasigluon- und des Quasiquark-Anteils summiert über alle Flavor-Arten sowie des Wechselwirkungsbeitrages aufgeschrieben werden,

$$p^{gg}(T) = p_{\text{id}}^g(T, \tilde{m}_g) + \sum_{\text{flavors}} p_{\text{id}}^q(T, \tilde{m}_q) - B(T). \quad (6.44)$$

Die Wechselwirkung zwischen den bosonischen und den fermionischen Quasiteilchen äußert sich in diesem Zugang in der Bag-Funktion $B(T)$, die infolge der Stationarität des thermodynamischen Potentials (6.11) durch die zu (6.10) analoge Beziehung

$$\frac{dB}{dT} = \frac{\partial p_{\text{id}}^g(T, \tilde{m}_g)}{\partial \tilde{m}_g} \frac{d\tilde{m}_g}{dT} + \sum_{\text{flavors}} \frac{\partial p_{\text{id}}^q(T, \tilde{m}_q)}{\partial \tilde{m}_q} \frac{d\tilde{m}_q}{dT} \quad (6.45)$$

gegeben ist. Schließlich muß der Beitrag der vorhandenen Quark-Flavors auch noch in der laufenden Kopplungsstärke berücksichtigt werden, die in Verallgemeinerung von (6.21) in der Gestalt

$$G^2(T) = \frac{48\pi^2}{(11N_c - 2n_f) \ln \left(\frac{T + T_s}{T_c/\lambda} \right)} \quad (6.46)$$

wieder durch die Größen T_s und λ parametrisiert wird. Für große Temperaturen, im asymptotischen Limes, geht $G(T)$ in das bekannte perturbative Resultat [Kap89] über.

Wie eingangs diskutiert, werden bei dem Vergleich des Modells mit den Gitterdaten [Eng97] nicht nur die Parameter T_s und λ in der Kopplung (6.46) angepaßt, sondern auch die Zahl der thermodynamischen Freiheitsgrade. Da im vorliegenden Fall die Quarks Spin-, Teilchen/Antiteilchen-, Farb- und Flavor-entartet sind, wird in (6.44) die Summe über die Quark-Flavors durch Multiplikation mit der Zahl d_f der Quark-Freiheitsgrade berücksichtigt. Um den Parameterraum nicht unnötig zu vergrößern, wird das Verhältnis der Zahl der gluonischen zu jener der fermionischen Freiheitsgrade entsprechend des perturbativen Resultats festgelegt, d.h., für $N_c = 3$ und $n_f = 4$ durch

$$\frac{d_f}{d_g} = \frac{2 \cdot 2 \cdot N_c n_f}{2(N_c^2 - 1)} = 3.$$

Wie in der Abbildung 6.8 dargestellt ist, ermöglicht das Quasiteilchen-Modell bereits unter dieser Einschränkung der möglichen Parameter einen nahezu optimalen Fit der Gitterdaten. Die Parameter wurden hierbei als

$$\lambda = 6.67, \quad T_s/T_c = -0.81, \quad d_g = 20.6, \quad d_f = 3 d_g \text{ (fixiert)} \quad (6.47)$$

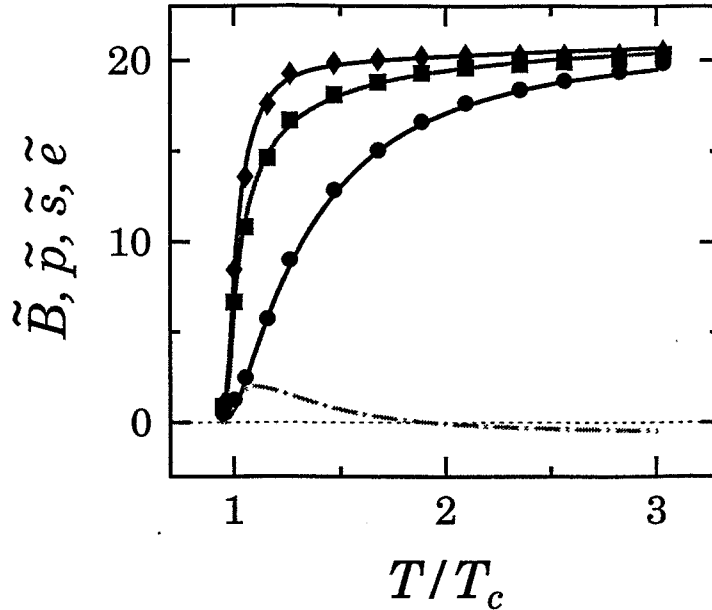


Abbildung 6.8: Die zum chiralen Limes extrapolierten thermodynamischen Gitter-Daten [Eng97] mit $n_f = 4$ Quark-Flavors und die Resultate des Quasiteilchen-Modells (Linien). Die Kreise markieren die Daten für den Druck, die Quadrate die Entropiedichte und Rauten die Energiedichte. Gestrichelt dargestellt ist die Bag-Funktion $B(T)$. Die Resultate wurden wie in der Abbildung 6.2 auf dimensionslose Einheiten skaliert. Die Länge der Ordinaten-Achse entspricht dem freien Limes.

gewählt. Aufgrund der im Abschnitt 6.2 angegebenen Diskussion der Bedeutung der Größen λ und T_s/T_c ist zu erwarten, daß sich diese Werte nicht wesentlich von denen für das reine Gluon-Plasma unterscheiden. Diese Annahme wird durch den Vergleich von (6.47) mit (6.22) bestätigt. Auch die Zahl der effektiven thermodynamischen Freiheitsgrade d_g bzw. d_f ist vernünftig. Bei relativ kleinen Gittergrößen wie im vorliegenden Fall spielen *finite-size* Effekte eine in Betracht zu ziehende Rolle. Eine erste Abschätzung dieser Effekte kann durch die Untersuchung eines entsprechenden Systems ohne Wechselwirkung auf dem endlichen Gitter gegeben werden, die weitgehend analytisch möglich ist. Die Berechnung von thermodynamischen Größen wie Druck und Energiedichte im freien Limes liefert auf dem hier vorliegenden $16^3 \times 4$ -Gitter gerade das 1.2fache der entsprechenden Stefan-Boltzmann-Werte. Die entsprechende Zahl der effektiven gluonischen Freiheitsgrade von $1.2 \cdot 2(N_c^2 - 1) \sim 19.2$ im wechselwirkungsfreien Fall ist eine erste grobe Näherung für den in (6.47) bestimmten Wert von $d_g = 20.6$.

Eine letzte Bemerkung betrifft die in [Eng97] vorgenommene Extrapolation der mit endlichen Quarkmassen vorgenommenen Gitterrechnungen zum masselosen chiralen Limes. Als typisches und auch durch weitere Simulationen [Ber97] bestätigtes Merkmal der Gitterrechnungen wird ein Überschießen der Energiedichte knapp oberhalb der Phasenübergangstemperatur festgestellt. Dieses in Abhängigkeit von der Gittergröße mehr oder weniger ausge-

prägte Verhalten stellt sich jedoch als ein Artefakt der auf dem Gitter (notwendigerweise) anzunehmenden Strom-Quarkmassen $m_q \sim T$ heraus. Umgekehrt wird dieses Verhalten der Energiedichte aber auch durch das effektive Quasiteilchen-Modell reproduziert, wenn dabei die Ruhemasse der Quarks (neben dem durch die Wechselwirkung generierten thermischen Anteil) als proportional zur Temperatur angenommen wird.

6.4 Das Quark-Gluon-Plasma mit seltsamen Quarks

Die beiden vorangegangenen Abschnitte haben gezeigt, daß das vorgestellte Quasiteilchen-Modell die thermodynamischen Gitter-Daten für verschiedene QCD-Systeme in der Deconfinement-Phase beschreiben kann. Hier soll nun mit Hilfe dieses Modells eine Abschätzung der Zustandsgleichung des realen QGP gegeben werden, die über bisherige einfache Prognosen wie durch das Bag-Modell oder naiv-perturbative Resultate, die im offensichtlichen Widerspruch zu den Gitterdaten sind, hinausgehen. Dabei soll insbesondere der Einfluß der seltsamen Quarks untersucht werden. Dies ist interessant, weil in vielen analytischen Ansätzen die u- und d-Quarks berechtigterweise als masselos approximiert werden, die s-Quarks aber aufgrund ihrer Masse von $m_s \sim 150 \text{ MeV}$ häufig als thermisch unterdrückt angenommen und vernachlässigt werden. Bei numerischen Simulationen zur Thermodynamik stark wechselwirkender Systeme hingegen liegt derzeit das Interesse auf der Extrapolation der Resultate zum masselosen Limes; Berechnungen mit realistischen Quarkmassen konnten bislang noch nicht durchgeführt werden. Andererseits hat jedoch gerade der seltsame Quark-Anteil des QGP interessante Konsequenzen [Sto97]. Da in Atomkernen im Grundzustand seltsame Quarks nur im See-Anteil existieren und erst in Kern-Kern-Stößen explizit angeregt werden, bieten sich zum experimentellen QGP-Nachweis gerade seltsame Signaturen an.

Zu einer Abschätzung der Zustandsgleichung des QGP mit massiven s-Quarks können die Parameter des Quasiteilchen-Modells durch sinnvolle Annahmen eingeschränkt werden. Zunächst wird hier angenommen, daß der Deconfinement-Phasenübergang bei einer Temperatur von

$$T_c = 170 \text{ MeV} \quad (6.48)$$

stattfindet. Dies ist eine in der Literatur oft angegebene Temperatur; die im folgenden vorgenommene Abschätzung hängt allerdings nur wenig sensitiv von dem genauen Wert von T_c ab.

Die Zustandsgleichung der hadronischen Materie unterhalb von T_c wird durch das Resonanzgas-Modell [CKS97] mit den 100 leichtesten Hadronen-Zuständen approximiert. Die Gibbs-Bedingung für den Phasenübergang,

$$\begin{aligned} p^{\text{hadron}}(T_c) &= p^{qg}(T_c) \\ \text{mit } p^{qg}(T) &= p_{\text{id}}^q(T, \tilde{m}_g) + \sum_{\text{flavors}} p_{\text{id}}^q(T, \tilde{m}_q) - B(T), \end{aligned} \quad (6.49)$$

liefert einen Zusammenhang zwischen den Größen λ und T_s/T_c , welche die Kopplungsstärke (6.46) bzw. die effektiven Quasiteilchenmassen \tilde{m}_g und \tilde{m}_q parametrisieren, und dem Wert der Bag-Funktion $B(T)$ bei T_c . Wie im Abschnitt 6.1 diskutiert wurde, ist es naheliegend, $B(T_c)$ mit der üblicherweise angegebenen Bag-Konstante B zu identifizieren. Im folgenden wird von dem oft verwendeten Wert

$$B \equiv B(T_c) = (180 \text{ MeV})^4 \quad (6.50)$$

ausgegangen⁶.

Die effektive Masse m_g der Gluonen ist durch (6.19) gegeben. Unter der Voraussetzung, daß die Masse m_0 der Strom-Quarks in der Größenordnung des thermisch generierten Anteils $\sim gT$ der Ruheenergie liegt oder kleiner ist, kann die einfache Quasiteilchen-Dispersionsrelation (6.42, 6.43) auch zur approximativen Beschreibung massiver Quarks verwendet werden, wenn m_q dort durch

$$m_q = \frac{1}{2} \left(m_0 + \sqrt{m_0^2 + \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} g^2 T^2} \right) \quad (6.51)$$

ersetzt wird [Pi89b]. Aus dieser Beziehung ist ersichtlich, daß in dem betrachteten Temperaturbereich auch die s-Quarks eine wesentliche Rolle für die Thermodynamik spielen, da der thermische Anteil der effektiven Quarkmasse von einigen 100 MeV größer als die Strommasse m_0 der seltsamen Quarks ist. Die leichten u- und d-Quarks können dagegen sinnvollerweise als (Strom-) masselos angenommen werden. Andererseits ist klar, daß die Beiträge der schwereren Flavours mit $m_q \geq m_c \sim 1.4 \text{ GeV}$ so klein ist, daß sie im Rahmen der angestrebten Genauigkeit vernachlässigt werden können; außerdem ist dann die Beziehung (6.51) nicht gültig.

Damit verbleibt nur ein freier Parameter in dem Quasiteilchen-Modell, da der Zusammenhang zwischen λ und T_s/T_c durch die Gibbs-Bedingung (6.49) bestimmt ist. Für die folgenden Abschätzungen wird der Parameter λ über den weiten Bereich von

$$3.6 \leq \lambda \leq 10.7 \quad \text{entsprechend} \quad 0.4 \leq T_s/T_c \leq 0.8 \quad (6.52)$$

variiert. In der Abbildung 6.9 sind die auf diese Weise erhaltenen effektiven Massen der Quasigluonen und der verschiedenen Quasiquarks sowie die Abhängigkeit der effektiven Kopplungsstärke von der Temperatur dargestellt. Die Masse der Quasigluonen ist aufgrund ihrer stärkeren Wechselwirkung mit dem Medium größer als die der Quasiquarks. Unterschiede zwischen den leichten Flavours und den s-Quarks werden nur nahe T_c deutlich. Bereits bei Temperaturen von $4T_c \sim 700 \text{ MeV}$, die möglicherweise in Schwerionen-Kollisionen am LHC erreicht werden, differieren die thermischen Quarkmassen nur noch um 10%. Man kann deshalb erwarten, daß sich bei sehr hochenergetischen Schwerionenstößen die seltsamen Quarks ähnlich verhalten wie die leichten u- und d-Quarks. In der Tat hat man schon bei SPS-Energien eine im Vergleich zu pp-Stößen erhöhte Produktionsrate von seltsamen Hadronen gefunden.

Diese Tatsache kommt auch in den Quasiteilchen-Dichten der Gluonen und der verschiedenen Quark-Flavours zum Ausdruck, die durch

$$n_i(T) = d_i \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{\exp\{\omega_i/T\} \pm 1} \quad (6.53)$$

gegeben und in der Abbildung 6.10 dargestellt sind. Der Faktor d_i gibt dabei die Entartung der jeweiligen Teilchenspezies an, für Gluonen gilt $d_g = 2(N_c^2 - 1)$, und $d_q^{s,\text{col}} = 2N_c$ berücksichtigt die Spin- und Farb-Entartung der jeweiligen Quark-Flavours. Es wird betont, daß die Teilchendichte der Quasiquarks bereits bei Temperaturen knapp oberhalb von T_c

⁶Eine obere Schranke für $B(T_c)$ ergibt sich aus den Tatsachen, daß $p_{id}^{q,g} \leq p_{SB}^{q,g}$ gilt und der Druck $p^{q,g}(T)$ positiv definit ist: $B \leq \pi^2/90 (d_g + \frac{7}{8} d_q) T_c^4$. Mit $d_g = 16$, $d_q = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n_f = 36$ und $T_c = 170 \text{ MeV}$ folgt $B \leq (260 \text{ MeV})^4$

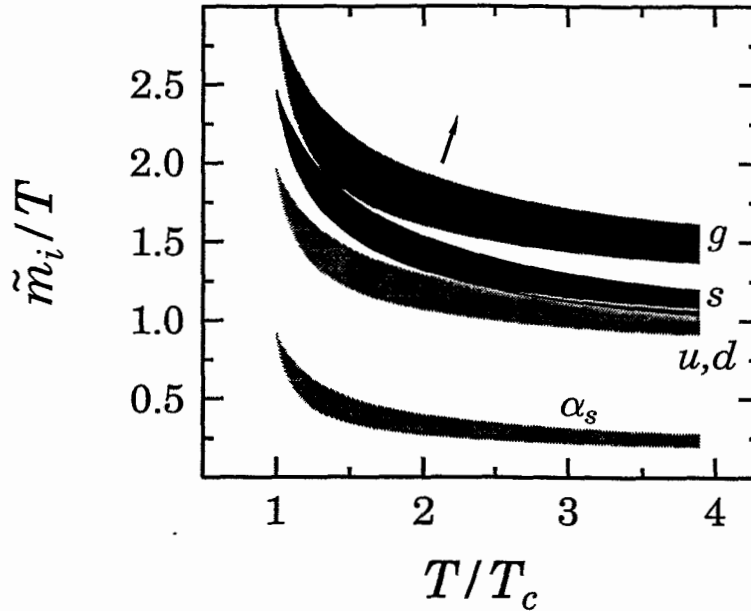


Abbildung 6.9: Das Verhalten der effektiven Quasiteilchenmassen in Abhängigkeit von der Temperatur bei der Variation (6.52) des freien Parameters λ . In dieser und in den folgenden Abbildungen gibt die Pfeilrichtung die Funktionen mit kleineren Werten von λ an. Dargestellt ist ebenfalls die Variation der effektiven Kopplungsstärke $\alpha_s = G^2/(4\pi)$.

ein Sättigungsverhalten zeigt und bei $T \gtrsim 2T_c$ etwa 90% des freien Limes erreicht. Die Quasigluonen besitzen dagegen selbst bei Temperaturen von $T \approx 4T_c$ nur etwa die halbe Stefan-Boltzmann-Dichte. Dieser qualitative Unterschied liegt in dem Verhalten der fermionischen bzw. bosonischen Verteilungsfunktionen bei kleinen Anregungsenergien ω begründet,

$$n_F(\omega) = \frac{1}{\exp\{\omega/T\} + 1} = \frac{1}{2} + \dots,$$

$$n_B(\omega) = \frac{1}{\exp\{\omega/T\} - 1} = \frac{\omega}{T} + \dots$$

Während für das wechselwirkungsfreie System mit $\omega(p) = p$ ein beträchtlicher Beitrag zu thermodynamischen Größen von den Zuständen mit kleinem Impuls stammt (Bose-Verstärkung), wird für das wechselwirkende System die Bose-Verstärkung aufgrund der endlichen Quasiteilchenmasse reduziert.

Damit läßt die Abbildung 6.10 eine interessante Interpretation zu. Nach dem Quasiteilchen-Modell kann man in der Nähe von T_c ein QGP mit wenigen, aber massiven Gluonenzuständen erwarten. Diese Vorstellung ist in Übereinstimmung mit anderen Modellen [ZBL97], in denen das QGP knapp oberhalb von T_c sogar als Plasma massiver Quarks ohne Gluonen beschrieben wird. Das Quasiteilchen-Modell liefert damit den Hinweis, nach experimentellen Signalen des QGP zu suchen, die sensitiv die Besetzung gerade der Gluonenzustände testen. Eine Möglichkeit dazu bietet sich beispielsweise durch die Untersuchung

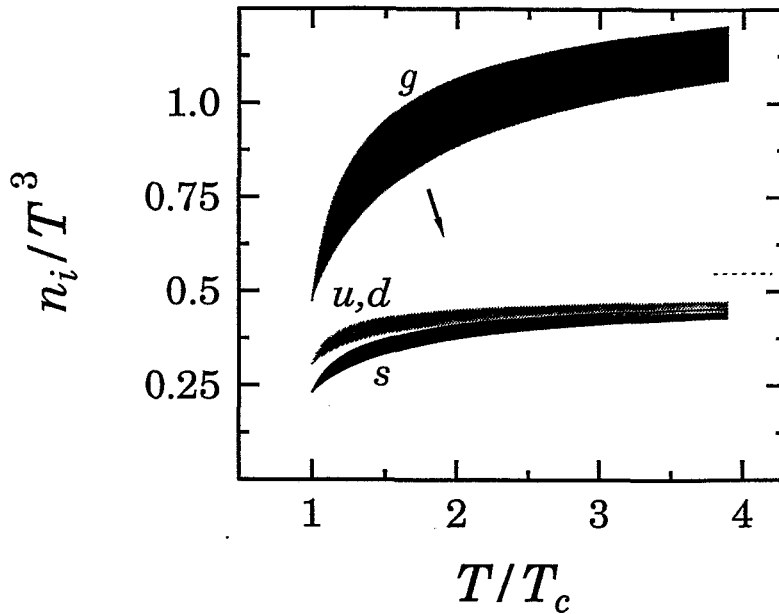


Abbildung 6.10: Die Dichte der verschiedenen Quasiteilchen in Abhängigkeit von der Temperatur. Der freie Modell-Parameter λ wurde dabei wie in der Abbildung 6.9 variiert; der Pfeil markiert wieder kleinere Werte von λ . Die gepunktete Linie gibt den Stefan-Boltzmann-Limes der Quasiquark-Dichte an. Der freie Limes der Quasigluonen-Dichte liegt bei $n_g/T^3 \approx 2$. Da das QGP hier bei verschwindendem chemischen Potential betrachtet wird, sind die Teilchendichten von Quarks und Antiquarks gleich, so daß die Netto-Quark-Dichte verschwindet.

der thermischen Charm-Erzeugung [Käm97a].

Die Abbildung 6.11 zeigt schließlich die Zustandsgleichung des QGP im Quasiteilchen-Modell. Die globalen thermodynamischen Größen Druck und Energiedichte werden in einem starken Maße durch die Quarks bestimmt; im Vergleich zu der Zahl der Freiheitsgrade der Gluonen von $d_g = 16$ beträgt die der Quarks unter Berücksichtigung der Teilchen/Antiteilchen- sowie der näherungsweise Flavor-Entartung $2 \cdot 2 \cdot N_c \cdot n_f = 36$. Entsprechend der Diskussion zu den Quasiteilchen-Dichten gehen daher die Funktionen $p(T)/T^4$ bzw. $e(T)/T^4$ ähnlich wie die Quark-Dichten bereits bei $T \gtrsim 2T_c$ in eine Sättigung über, wobei etwa 80%-90% der jeweiligen Stefan-Boltzmann-Werte erreicht werden. Es wird festgestellt, daß in dem betrachteten Temperaturbereich die Quasiteilchen-Beschreibung des QGP einen nichtperturbativen Charakter trägt. Während die angegebenen Integraldarstellungen der thermodynamischen Funktionen nahe T_c ein den Gitterrechnungen entsprechendes, glattes Verhalten zeigen, liefern die Entwicklungen (6.15) nach den Größen $\tilde{m}_i/T \sim g$ Reihen mit stark fluktuierenden Termen.

An dieser Stelle kann hervorgehoben werden, daß die Vorhersage des Quasiteilchen-Modells für die Zustandsgleichung des QGP bei einer freien Variation des Parameters λ über einen weiten Bereich recht stabil ist. Der formale Grund dafür ist die Annahme der Existenz

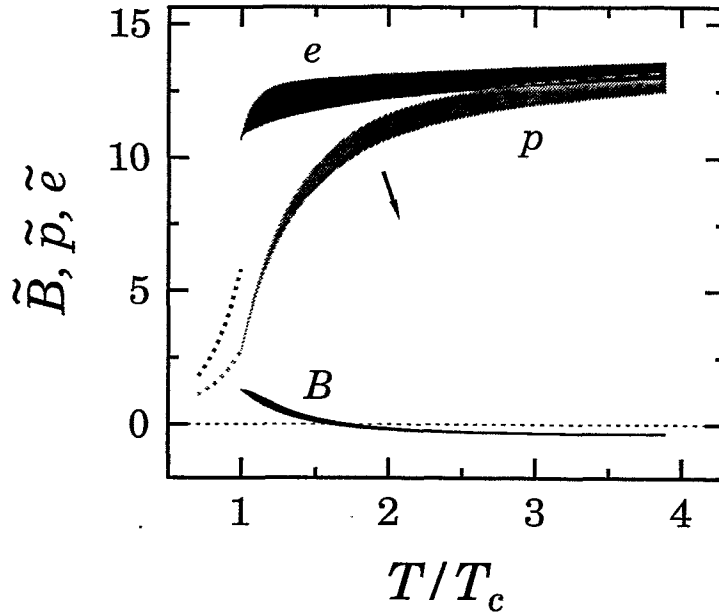


Abbildung 6.11: Druck und Energiedichte des QGP unter Berücksichtigung der seltsamen Quark-Flavors bei Variation des Parameters λ entsprechend Gleichung (6.52) sowie die Wechselwirkungsfunktion $B(T)$ der Quasiteilchen. Gepunktet dargestellt ist die Abschätzung der hadronischen Zustandsgleichung durch das Resonanzgas-Modell [CKS97]. Die Größen wurden wie in der Abbildung 6.2 mit T^4 skaliert.

eines Phasenüberganges überhaupt; die Gibbs-Bedingung (6.49) schränkt die möglichen Variation der Zustandsgleichung bereits sehr stark ein.

Eine zweite Bemerkung betrifft den Vergleich der Zustandsgleichung des hier betrachteten 3-Flavor-QGP mit der des reinen SU(3)-Gluonen-Plasmas im Abschnitt 6.2. Die qualitative Ähnlichkeit der Thermodynamik beider Systeme wird besonders in der Darstellung 6.12 deutlich, wo die Zustandsgleichungen auf die entsprechenden Stefan-Boltzmann-Werte skaliert wurden. Insbesondere deutet die endliche latente Wärme in der Quasiteilchen-Beschreibung beider Systeme darauf hin, daß der Deconfinement-Phasenübergang in beiden Fällen von erster Ordnung ist. Für das SU(3)-Plasma ist dies aufgrund der Isomorphie dieses Systems zu dem Dreizustands-Potts-Modell, welches in der Statistischen Physik intensiv untersucht wird, tatsächlich zu erwarten [Zin94]. Die Verhältnisse bei einer endlichen Zahl von Quark-Flavors sind komplizierter und strengere Aussagen über die Ordnung des Phasenübergangs sind bislang nur für den chiralen Limes möglich. Aus Universalitätsargumenten erwartet man für $n_f \geq 3$ masselose Quark-Flavors ebenfalls einen Phasenübergang erster Ordnung [lBe96], so daß die hier für das QGP mit drei massiven Quark-Flavors gefundene große latente Wärme physikalisch plausibel erscheint.

Aufgrund der Ähnlichkeit der Zustandsgleichungen können die im Abschnitt 6.2 aufgeführten Betrachtungen zum Abschirmverhalten des Gluon-Plasmas, der Schallgeschwindigkeit c_s , sowie zu der hydrodynamisch wichtigen Abhängigkeit $p(e)/e$ mit dem *softest point*

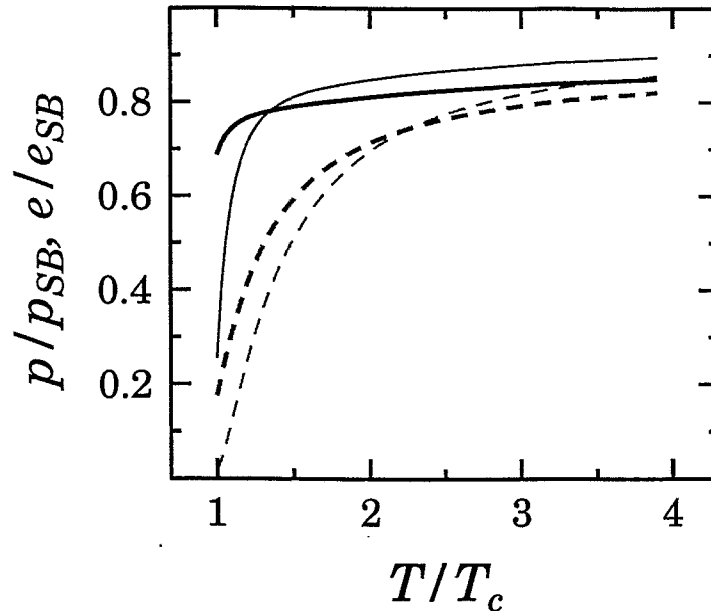


Abbildung 6.12: Vergleich der skalierten Zustandsgleichung $p(T)$ (gestrichelte Linien) und $e(T)$ (durchgezogene Linien) für das reine SU(3)-Gluon-Plasma (dünn) und das QGP mit drei Quark-Flavors (dicke Linien).

sinngemäß auf das QGP übertragen werden. Einige der sich daraus möglicherweise ergebenden experimentellen Signaturen des QGP in Schwerionenstößen wurden bereits hier bzw. in [Pes96, Käm97a] diskutiert.

Die angegebene Zustandsgleichung des QGP kann in hydrodynamischen Modellen [SG86] zur Beschreibung von Schwerionenstößen Verwendung finden. Die sich in einem kleinen Temperaturbereich stark ändernde Zahl der thermodynamischen Freiheitsgrade kann, wie in der Einleitung erwähnt, experimentelle Konsequenzen haben (kinetische QGP-Signaturen). Die relativ großen effektiven Quarkmassen können weitere beobachtbare Effekte haben; wie in [Pes94] diskutiert, kann in Schwerionenstößen z. B. eine Schwelle in der Dileptonenemission auftreten. Wenn Quark-Anregungen in der Reaktion $q\bar{q} \rightarrow \gamma^* \rightarrow e\bar{e}$ annihilieren, kann die Dileptonenmasse nicht kleiner als $2m_q$ sein. Um allerdings zu quantitativen Aussagen zu der Dileptonen-Emissivität zu gelangen, sollte das Quasiteilchen-Modell noch ausgebaut werden, um die endlichen spektralen Breiten der Quasiteilchen konsistent zu beschreiben.

7 Resumé und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden neben exemplarischen Modellbetrachtungen Plasmen stark wechselwirkender Teilchen im thermodynamischen Gleichgewicht in der Deconfinementphase untersucht. Kennzeichnend für diese Systeme ist die starke Kopplung zwischen den Plasma-Konstituenten. Dieser Umstand erfordert eine sorgfältige Interpretation von analytischen Voraussagen, die durch die Störungstheorie erhalten werden können. Die Arbeit beschäftigt sich daher auch mit der Frage, inwiefern perturbative Resultate eine Extrapolation zu dem häufig interessierenden Fall großer Kopplungsstärken erlauben.

Im ersten Teil wurden dazu die in-Medium Eigenschaften von Photonen und Gluonen sowie Elektronen und Quarks untersucht. Diese Betrachtungen geben Aufschluß über die Gültigkeit der Näherung von Selbstenergien durch die wesentlichen *hard thermal loop* Anteile der hier berechneten vollständigen Einschleifen-Approximation. Die HTL-Näherung erlaubt eine konsistente Berechnung von einer Reihe experimentell sehr bedeutsamer Größen, ist aber zunächst nur im Limes kleiner Kopplung gerechtfertigt. Wie hier gezeigt werden konnte, stimmen beide Approximationen auch außerhalb des eigentlichen Gültigkeitsbereiches der HTL-Annahme überein, insbesondere nahe der physikalisch wichtigen Pole der Propagatoren. Dies rechtfertigt die bisher in der Literatur oft vorgenommene Extrapolation der HTL-Vorhersagen zu Kopplungsstärken, die für Schwerionen-Experimente relevant sind.

Im Teil II wurden perturbative Näherungen von thermodynamischen Größen im Regime starker Kopplung betrachtet. Es zeigt sich, daß Störungsreihen trotz ihres divergenten Verhaltens brauchbare Informationen enthalten. Durch eine geeignete Umorganisation der Störungstheorie, die aus Gründen der Selbstkonsistenz notwendig ist und die von einer Ensemble-Mittelung über das wechselwirkende System, d. h., von vollen Greenschen Funktionen ausgeht, können Aussagen zur Thermodynamik stark gekoppelte Systeme gemacht werden. Dies wurde hier für die heiße skalare ϕ^4 -Theorie in der Tadpole-Approximation exemplarisch gezeigt, wobei der in der Festkörper-Theorie eingeführte Luttinger-Ward-Formalismus Anwendung fand.

Anliegen des Teils III ist die konsistente thermodynamische Beschreibung des QGP nahe der Phasengrenze zur Hadron-Materie. Die bereits in der führenden Ordnung recht komplizierte Beschreibung der QCD-Thermodynamik kann durch die Einschränkung auf relevante Beiträge vereinfacht werden. Das resultierende effektive Quasiteilchen-Modell wird durch bisher untersuchte thermodynamische Monte-Carlo-Simulationen von stark wechselwirkenden Modellsystemen gestützt. Es erlaubt eine Voraussage der Zustandsgleichung des QGP mit Strangeness-Anteil, dessen Berücksichtigung sich als wesentlich herausstellt. Die Zustandsgleichung stellt sich dabei als recht unabhängig von den konkreten Modellannahmen heraus. Einige experimentelle Konsequenzen dieser Zustandsgleichung und des Quasiteilchen-Modells werden dargelegt.

Die weitere Fortführung der Untersuchungen der in dieser Arbeit betrachteten Themen ist wünschenswert. Dabei ist zum einen die genauere Beschreibung der thermodynamischen

Eigenschaften des QGP im Luttinger-Ward-Formalismus interessant, die in einem engen Zusammenhang zu weiteren offenen Fragestellungen wie z. B. der nach der magnetischen Gluonmasse steht. Andererseits gewinnt die Frage nach der Zustandsgleichung des QGP bei endlichen hadro-chemischen Potentialen zunehmend an Wichtigkeit.

Beide Aspekte betreffen den bedeutsamen Schnittpunkt zwischen Theorie und Experiment. Obgleich einige Betrachtungen durchaus auch ihren formalen Reiz besitzen, resultieren sie in experimentell überprüfbareren Voraussagen und ermöglichen nicht zuletzt eine Vorstellung über das faszinierende, aber der unmittelbaren Anschauung nicht zugängliche System *Quark-Gluon-Plasma*.

Teil IV
Anhang

A Konventionen und Bezeichnungen

Der in der Hochenergie-Physik üblichen Konvention folgend, werden in dieser Arbeit Geschwindigkeiten in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit $c = 2.99\,792\,458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ angegeben. Formal wird also

$$c = 1 \tag{A.1}$$

gesetzt. Demnach sind Länge und Zeit von der gleichen physikalischen Dimension. Die in der Hochenergie-Physik relevante Längenskala $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ entspricht dabei der typischen Zeitskala

$$1 \text{ fm} \triangleq \frac{1}{c} 10^{-15} \text{ m} \approx 3.335 \cdot 10^{-24} \text{ s}.$$

Die angepaßte Energie-Einheit ist durch die Elementarladung $e \approx 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ bestimmt,

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = e \cdot 10^6 \text{ V} \approx 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ Nm}.$$

In dieser Einheit und nach der Konvention (A.1) ist das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar \approx 197.3 \text{ MeV fm}$. Es ist jedoch zweckmäßig, Wirkungen in elementaren Einheiten anzugeben, d. h., formal auch

$$\hbar = 1 \tag{A.2}$$

zu setzen. Somit erhalten Energie und inverse Länge die gleiche physikalische Dimension. Der typischen Längenskala 1 fm entspricht dann die Energie

$$\hbar \frac{1}{1 \text{ fm}} \approx 197.3 \text{ MeV}.$$

Des weiteren ist es gebräuchlich, Temperaturen in Einheiten der Energie anzugeben, d. h., die Boltzmann-Konstante

$$k_B = 1 \tag{A.3}$$

zu setzen. Die übliche Kelvin-Temperaturskala wird durch den Proportionalitätsfaktor $k_B^{(K)} \approx 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ Nm K}^{-1}$ gegeben. Die Temperatur in der MeV-Skala entspricht daher in Kelvin

$$1 \text{ MeV} \triangleq \frac{1}{k_B^{(K)}} 1 \text{ MeV} \approx 1.160 \cdot 10^{10} \text{ K}.$$

Nachfolgend werden die verwendeten Bezeichnungen eingeführt. Vektoren werden in Boldface gesetzt und ihre Komponenten bezüglich einer Basis mit lateinischen Buchstaben indiziert. So hat beispielsweise der Ortsvektor die Darstellung

$$\mathbf{x} : \quad x_i \equiv x^i \equiv (x_1, x_2, x_3).$$

Die kontravariante Darstellung von 4-Vektoren ist durch griechische, obere Indizes gekennzeichnet:

$$x : x^\mu \equiv (x_0, \boldsymbol{x}).$$

In Anlehnung an den 4-Ortsvektor, dessen Komponente x_0 die Zeit t ist, wird gelegentlich auch die 0-Komponente eines beliebigen 4-Vektors als dessen Zeitkomponente und die verbleibenden Komponenten als dessen Raumanteil bezeichnet.

Für die Bezeichnung von 4-Impulsen finden große Buchstaben Verwendung,

$$K^\mu \equiv (k_0, \boldsymbol{k}).$$

Es ist weiterhin zweckmäßig, für den Betrag und die Richtung des räumlichen Anteils \boldsymbol{k} die Schreibweisen

$$k := |\boldsymbol{k}|,$$

$$\hat{\boldsymbol{k}} := \frac{\boldsymbol{k}}{k}$$

zu vereinbaren.

Der Übergang von der kontravarianten Darstellung $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$ eines 4-Vektors zu dessen kovarianter Form A_μ erfolgt durch den metrischen Tensor g . Dessen kovariante Darstellung ist

$$g_{\mu\nu} \equiv \text{Diag}(1, -1).$$

Die kovarianten Komponenten des Vektors A ergeben sich dann als

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (A^0, -\boldsymbol{A}).$$

Hierbei wurde von der auch im weiteren verwendeten Einsteinschen Konvention, über doppelt auftretende Indizes zu summieren, Gebrauch gemacht. Schließlich ergibt die Schreibweise

$$AB := A_\mu B^\mu$$

eine noch kompaktere Notation und bringt außerdem besser zum Ausdruck, daß Vektoren nicht an eine Darstellung bezüglich einer Basis gebunden sind.

Werden die Diracschen γ -Matrizen formal als $\gamma^\mu = (\gamma^0, \dots, \gamma^3)$ geschrieben, kann die eingeführte Schreibweise auch für Ausdrücke wie $\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu P_\mu$ Verwendung finden. Noch kompakter ist die Feynman-Konvention

$$\not{P} := \gamma P.$$

B Ergänzungen zum Teil I

B.1 Die Frequenzsummen $T \sum_{k_0} k_0^m q_0^n \Delta_{s_1}(K) \Delta_{s_2}(Q)$

Hier werden die im Kapitel 3 zur Bestimmung der Selbstenergien benötigten Matsubara-Summen über Produkte von zwei skalaren Propagatoren angegeben. In einer einheitlichen Notation lauten diese Funktionen

$$F_{s_1 s_2}^{(m, n)} = T \sum_{k_0} k_0^m q_0^n \Delta_{s_1}(K) \Delta_{s_2}(Q) \quad \text{mit } Q = P - K, \quad m, n \in \mathcal{N}, \quad (\text{B.1})$$

wobei im Fall $n = 0$ kurz $F_{s_1 s_2}^{(m)}$ geschrieben wird. Die Indizes s_i stehen hier für den statistischen Charakter der Propagatoren. Dabei bezeichnet $s = +1$ die bosonische und entsprechend $s = -1$ die fermionische Statistik.

Die Frequenzsummen können elegant unter Berücksichtigung von Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation ausgewertet werden, ähnlich wie im Abschnitt 2.2 der Ausdruck $T \sum_{k_0} \Delta_B(K)$. Dieses Verfahren wird oft als Saclay-Methode bezeichnet. Bevor die Frequenzsummen abgeleitet werden, erfolgt eine Zusammenstellung von Eigenschaften der freien skalaren Imaginärzeit-Propagatoren. Diese Übersicht erlaubt dann eine recht kompakte Auswertung der Frequenzsummen.

Die Fourier-Darstellungen des bosonischen und des fermionischen Propagators lassen sich in der einheitlichen Form

$$\Delta_s(\tau, k) = \frac{-1}{2E_k} \sum_{v=\pm 1} f_s^v(E_k) e^{-vE_k \tau} \quad (\text{B.2})$$

schreiben, wobei $E_k = \sqrt{m^2 + k^2}$ und m die Masse des Teilchens ist. Die Koeffizienten f_s^\pm wurden für den bosonischen Fall bereits im Abschnitt 2.2 abgeleitet. Für beide Statistiken lassen sie sich einheitlich als

$$f_s^-(E_k) = s n_s(E_k), \quad f_s^+(E_k) = 1 + s n_s(E_k) \quad (\text{B.3})$$

angeben. Dabei sind die Verteilungsfunktionen n_s durch

$$n_s(E_k) = \frac{1}{e^{E_k/T} + s} \quad (\text{B.4})$$

gegeben. Diese Darstellung der Propagatoren besitzt eine einfache physikalische Interpretation. Emission und Absorption von Teilchen können im allgemeinen als ein Prozeß aufgefaßt werden, der in unterschiedlichen Zeitrichtungen abläuft. In dem auf dem eingeschränkten Zeitintervall $[0, T^{-1}]$ definierten Propagator (B.2) ist jedoch die Zeitrichtung festgelegt. Der volle, auch für negative Zeiten definierte Propagator folgt erst nach dessen Fortsetzung mit

entsprechenden Periodizitätseigenschaften; siehe dazu Abschnitt 2.1. Dementsprechend lassen sich die beiden Summanden in (B.2) interpretieren. Der Term mit $v = -1$ beschreibt die Emission eines Teilchens bei der Temperatur T mit der Wahrscheinlichkeit n_s . Die Wahrscheinlichkeit $1 \pm n_{B,F}$ der Absorption ist dagegen entweder Bose-verstärkt oder Pauli-unterdrückt.

Bei den folgenden Umformungen werden zwei Relationen genutzt, die zwischen den Koeffizienten (B.3) bestehen und einfach bewiesen werden können, nämlich

$$\begin{aligned} f_s^{-v}(E) &= s e^{-vE/T} f_s^v(E), \\ f_{s_1}^{v_1}(E_1) f_{s_2}^{v_2}(E_2) - f_{s_1}^{-v_1}(E_1) f_{s_2}^{-v_2}(E_2) \\ &= \frac{1}{2} (v_1 + v_2) + v_2 s_1 n_{s_1}(E_1) + v_1 s_2 n_{s_2}(E_2). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Die gesuchten Frequenzsummen lassen sich nun leicht berechnen. Begonnen wird mit

$$\begin{aligned} F_{s_1 s_2}^{(0)} &= T \sum_{k_0} \Delta_{s_1}(K) \Delta_{s_2}(Q) \\ &= \int_0^{T^{-1}} d\tau e^{p_0 \tau} \Delta_{s_1}(\tau, k) \Delta_{s_2}(\tau, q). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Hier wurde die bekannte Eigenschaft der Fourier-Transformation ausgenutzt, um die Konvolution in ein Produkt im adjungierten Raum umzuschreiben. Die Berechnung der Rücktransformation ist elementar und führt mit der expliziten Darstellung (B.2) der Propagatoren auf

$$F_{s_1 s_2}^{(0)} = \frac{1}{2E_k} \frac{1}{2E_q} \sum_{v_1, v_2} \frac{1}{p_0 - v_1 E_k - v_2 E_q} f_{s_1}^{v_1}(E_k) f_{s_2}^{v_2}(E_q) \left(e^{p_0/T} e^{-v_1 E_k/T - v_2 E_q/T} - 1 \right).$$

Unter Berücksichtigung der leicht zu verifizierenden Relation $e^{p_0/T} = s_1 s_2$ zwischen den Statistiken des propagierenden Teilchens und der intermediären Zwischenzustände sowie der beiden Eigenschaften (B.5) ergibt sich schließlich

$$F_{s_1 s_2}^{(0)} = -\frac{1}{2E_k} \frac{1}{2E_q} \sum_{v_1, v_2} \frac{\frac{1}{2} (v_1 + v_2) + v_2 s_1 n_{s_1}(E_k) + v_1 s_2 n_{s_2}(E_q)}{p_0 - v_1 E_k - v_2 E_q}. \quad (\text{B.7})$$

Aus dieser allgemeinen Darstellung folgen alle im Kapitel 3 verwendeten Frequenzsummen über das Produkt von zwei skalaren Propagatoren.

In ähnlicher Weise läßt sich

$$F_{s_1 s_2}^{(1)} = T \sum_{k_0} k_0 \Delta_{s_1}(K) \Delta_{s_2}(Q) \quad (\text{B.8})$$

berechnen. Da eine Differentiation unter der Fourier-Transformation in eine Multiplikation mit der konjugierten Variablen übergeht, erhält man

$$\begin{aligned} F_{s_1 s_2}^{(1)} &= -\int_0^{T^{-1}} d\tau e^{p_0 \tau} (\partial_\tau \Delta_{s_1}(\tau, k)) \Delta_{s_2}(\tau, q) \\ &= \sum_{v_1, v_2} \frac{1}{2E_k} \frac{1}{2E_q} (-v_1 E_k) f_{s_1}^{v_1}(E_k) f_{s_2}^{v_2}(E_q) \int_0^{T^{-1}} d\tau e^{(p_0 - v_1 E_k - v_2 E_q) \tau}. \end{aligned}$$

Nach der elementaren τ -Integration und der Anwendung der Relationen (B.5) erhält man

$$F_{s_1 s_2}^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{2E_q} \sum_{v_1, v_2} v_1 \frac{\frac{1}{2}(v_1 + v_2) + v_2 s_1 n_{s_1}(E_k) + v_1 s_2 n_{s_2}(E_q)}{p_0 - v_1 E_k - v_2 E_q}. \quad (\text{B.9})$$

Die zur Bestimmung der eichabhängigen Anteile der Fermion-Selbstenergie benötigten Funktionen $F_{s_1 s_2}^{(n)}$ mit $n = 2, 3$ lassen sich nun einfach durch $F_{s_1 s_2}^{(0)}$ und $F_{s_1 s_2}^{(1)}$ ausdrücken. Mit der Relation

$$k_0^2 \Delta_s(K) = (k_0^2 - k^2 - m^2 + (k^2 + m^2)) \frac{1}{k_0^2 - k^2 - m^2} = 1 + E_k^2 \Delta_s(K)$$

folgt

$$\begin{aligned} F_{s_1 s_2}^{(2)} &= T \sum_{k_0} k_0^2 \Delta_{s_1}(K) \Delta_{s_2}(Q) \\ &= T \sum_{k_0} \Delta_{s_2}(Q) + E_k^2 T \sum_{k_0} \Delta_B(K) \Delta_F(Q) \\ &= F_{s_2}^{(0)} + E_k^2 F_{s_1 s_2}^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Wie bereits im Abschnitt 2.2 diskutiert wurde, kann die Größe $F_s^{(0)}$ als Propagator in der Fourier-Darstellung für $\tau = 0$ angesehen werden. Somit ist

$$F_s^{(0)} = T \sum_{k_0} \Delta_s(K) = \frac{-1}{2E} (1 + 2s n_s(E)). \quad (\text{B.11})$$

Ganz analog folgt

$$F_{s_1 s_2}^{(3)} = p_0 F_{s_2}^{(0)} + E_k^2 F_{s_1 s_2}^{(1)}. \quad (\text{B.12})$$

Hier wurde noch berücksichtigt, daß die Summe $F_s^{(1)} = T \sum_{k_0} k_0 \Delta_s(K)$ verschwindet, weil der Summand als Produkt einer in der Summationsvariablen geraden mit einer ungeraden Funktion wieder ungerade ist.

Was jetzt noch verbleibt, ist, die Frequenzsummen $F_{s_1 s_2}^{(1,1)}$ anzugeben. Auch diese lassen sich einfach durch die bereits bekannten Funktionen ausdrücken,

$$\begin{aligned} F_{s_1 s_2}^{(1,1)} &= T \sum_{k_0} k_0 q_0 \Delta_{s_1}(K) \Delta_{s_2}(Q) \\ &= p_0 T \sum_{k_0} k_0 \Delta_{s_1}(K) \Delta_{s_2}(Q) - T \sum_{k_0} k_0^2 \Delta_{s_1}(K) \Delta_{s_2}(Q) \\ &= p_0 F_{s_1 s_2}^{(1)} - F_{s_1 s_2}^{(2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

B.2 $\Pi_L^\gamma(p_0, p)$ für $p_0 \sim p$

Hier wird die Einschleifen-Selbstenergie Π_L^γ longitudinaler Photonen in der Nähe des Lichtkegels entwickelt. Die Integraldarstellung von Π_L^γ lautet in expliziter Form

$$\begin{aligned} \Pi_L^\gamma(p_0, p) &= -\frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk k n_F(k) B(k, p_0, p), \\ B(k, p_0, p) &= \left\{ \left[1 + \frac{k^2 + kp_0 + \frac{1}{4}(p_0^2 - p^2)}{kp} \ln \frac{(k+p_0)^2 - (k+p)^2}{(k+p_0)^2 - (k-p)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[p_0 \rightarrow -p_0 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Die Entwicklung der Funktion $B(k, p_0, p)$ um $p_0 = p$ ergibt

$$B(k, p_0, p) = 4 + 2 \ln \frac{p_0 - p}{p_0 + p} + r\left(\frac{p}{k}\right) + \mathcal{O}(p_0 - p). \quad (\text{B.15})$$

Die beiden ersten Terme sind unabhängig von k und liefern als Vorfaktor des Integrals $\int_0^\infty dk k n_F(k) = \frac{1}{12} \pi^2 T^2$ gerade den Ausdruck der HTL-Selbstenergie im Limes $p_0 \rightarrow p$.

Die reguläre Funktion $r(x) := -2 + \ln[1 - x^2] + x^{-1} \ln[(1+x)/(1-x)]$ geht für große Werte von x in die Funktion $-2 + 2 \ln(x)$ über und ist in der Abbildung B.1 dargestellt. Aufgrund des thermischen Phasenraum-Maßes $kn_F(k)$ tragen bei der Integration (B.14)

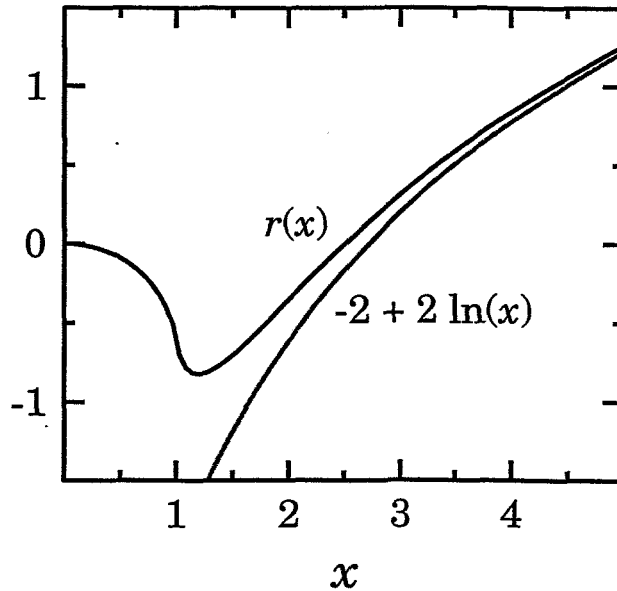


Abbildung B.1: Der Realteil der Funktion $r(x) := -2 + \ln[1 - x^2] + x^{-1} \ln[(1+x)/(1-x)]$ und $-2 + 2 \ln(x)$. Die Hauptbeiträge von $r(x)$ zu Π_L^γ kommen aus der Region $x \sim p/T$.

hauptsächlich harte Impulse $k \sim T$ zu $\Pi_L^\gamma(p_0, p)$ bei. Der Verlauf der Funktion $r(x)$ ist daher besonders in der Region $x \sim x^* = p/T$ wichtig. Für weiche äußere Impulse $p \ll T$ (entsprechend ist $x^* \ll 1$) verschwinden die Beiträge von $r(x)$, und man erhält den HTL-Limes. Für harte äußere Impulse $p \gtrsim T$ kommen die Hauptbeiträge von $x \sim x^* \gtrsim 1$, wo $r(x)$ durch $2 \ln(x)$ abgeschätzt werden kann. Daher ergibt die reguläre Funktion $r(x)$ in diesem Falle einen Beitrag $\sim 2 \ln(p/T)$. Dieser ist aber im Vergleich zu dem singulären Anteil $\sim \ln[(p_0 - p)/(2p)]$ vernachlässigbar für Impulse

$$\frac{|p_0 - p|}{T} \ll 1. \quad (\text{B.16})$$

Damit ist die Darstellung (3.16) der longitudinalen Einschleifen-Selbstenergie bewiesen.

Die Dispersionsrelation ist für harte Impulse von der Gestalt $\omega = \sqrt{p^2 + \tilde{m}^2}$, wobei \tilde{m} von der Größenordnung eT ist. Für Impulse $p \gtrsim eT$ folgt aus (B.16) dann die Bedingung

$$e^2 \ll \frac{p}{T} \quad (\text{B.17})$$

dafür, daß die Dispersionsrelation in einer Umgebung des Lichtkegels liegt, in der die Einschleifen-Selbstenergie durch die HTL-Approximation beschrieben werden kann. Bei einem gegebenen Wert von e ist diese Bedingung für wachsende Impulse zunehmend besser erfüllt. Aus der Betrachtung der führenden Terme der Entwicklung der Selbstenergie nahe des Lichtkegels sollte man daher erwarten, daß die HTL-Dispersionsrelation auch für harte Impulse eine gute Approximation darstellt.

B.3 Π_T^g in der HTL-Approximation

Hier wird als ein Beispiel für die im Kapitel 2 ansonsten nur zitierten Selbstenergien in der HTL-Approximation die transversale Projektion des Gluon-Polarisationstensors berechnet. Die anderen Selbstenergien können in ähnlicher Weise abgeleitet werden.

Da an dieser Stelle nicht die Eichinvarianz des HTL-Resultats verifiziert werden soll, wird von der Einschleifen-Selbstenergie in der Feynman-Eichung ausgegangen. Die HTL-Anteile der Selbstenergie können aus der angegebenen Integraldarstellung (3.23) erhalten werden. Einfacher ist es allerdings, einige der nach der Hochtemperatur-Voraussetzung $P \ll T$ möglichen Vereinfachungen schon vor der Matsubara-Summation und den Winkelintegrationen vorzunehmen. Aus der Darstellung

$$\Pi_T^{g,F} = N_c g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} \left[P^2 + 2(k_0 q_0 - (\hat{p}\mathbf{k})(\hat{p}\mathbf{q})) \right] \Delta_B(K) \Delta_B(Q)$$

folgt unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in p_0 oder p die Näherung

$$\Pi_T \approx N_c g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} T \sum_{k_0} 2 \left[-k_0^2 + (\hat{p}\mathbf{k})^2 \right] \Delta_B(K) \Delta_B(Q).$$

Das ist bis auf den Vorfaktor und den statistischen Charakter der skalaren Propagatoren auch die Näherung, welche man für die transversale Photon-Selbstenergie erhält. Die Matsubara-Summation führt auf die im Abschnitt B.1 berechneten Funktionen $F_{BB}^{(0)}$ und $F_{BB}^{(2)}$. Da $F_{BB}^{(2)} = F_B^{(0)} + k^2 F_{BB}^{(0)}$ gilt, kann mit $\hat{p}\mathbf{k} = \cos \theta k = xk$ für Π_T geschrieben werden

$$\Pi_T \approx N_c g^2 \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 dx 2 \left[-F_B^{(0)} - k^2(1-x^2)F_{BB}^{(0)} \right].$$

Es gilt $F_B^{(0)} = -(1 + 2n_B(k))/(2k)$. Unter der HTL-Annahme ergibt sich auch für die Funktion $F_{BB}^{(0)}$ ein einfacher Ausdruck. Da die Hauptbeiträge des Integrals von den harten Impulsen $k \sim T$ stammen, kann man $q = (k^2 - 2kpx + p^2)^{\frac{1}{2}} \approx k - px$ für $p \ll k$ approximieren. Dann folgt

$$\begin{aligned} k + q &\approx 2k, & n_B(k) + n_B(q) &\approx 2n_B(k), \\ k - q &\approx px, & n_B(k) - n_B(q) &\approx \frac{\partial n_B(k)}{\partial k} px. \end{aligned}$$

Somit kann man für $F_{BB}^{(0)}$ näherungsweise

$$F_{BB}^{(0)} \approx \frac{1}{4k^2} \left\{ (1 + 2n_B(k)) \frac{1}{k} - \frac{\partial n_B(k)}{\partial k} px \left(\frac{1}{p_0 + px} - \frac{1}{p_0 - px} \right) \right\}$$

schreiben. Da in der betrachteten Näherung der zu renormierende Vakuum-Anteil keinen Beitrag liefert, erhält man für Π_T

$$\Pi_T \approx N_c g^2 \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_{-1}^1 dx \left[n_B(k)(1+x^2) + \frac{k}{2} \frac{\partial n_B(k)}{\partial k} x(1-x^2) \left(\frac{1}{p_0/p+x} - \frac{1}{p_0/p-x} \right) \right].$$

Die die Bose-Verteilungsfunktion enthaltenden Integrale

$$- \int_0^\infty dk \frac{k^2}{2} \frac{\partial n_B(k)}{\partial k} = \int_0^\infty dk k n_B(k) = \frac{\pi^2}{6} T^2$$

unterscheiden sich von dem fermionischen Fall nur durch einen Faktor 2, da $\int_0^\infty dk k n_F(k) = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6} T^2$ gilt. Daher besitzen die HTL-Selbstenergien für Gluonen und Photonen bis auf einen Vorfaktor die gleiche Gestalt.

Die verbleibende Integration

$$\Pi_T \approx N_c g^2 \frac{1}{24} \int_{-1}^1 dx \left[1 + x^2 - x(1-x^2) \left(\frac{1}{p_0/p+x} - \frac{1}{p_0/p-x} \right) \right]$$

ist ebenfalls elementar und ergibt das im Kapitel 2 angegebene Resultat für die transversale Gluon-Selbstenergie.

B.4 Die Integraldarstellungen von $T_{1,2}^\xi$

Die Integranden der Integraldarstellungen (3.39) der Funktionen $T_{1,2}^\xi$ besitzen die Gestalt

$$\partial_{m^2} \sum_{n=0}^3 a_{1,2}^{(n)} F_{BF}^{(n)} \Big|_{m=0}.$$

Die Koeffizienten $a_{1,2}^{(n)}$ sind explizit in der folgenden Tabelle angegeben.

n	$a_1^{(n)}$	$a_2^{(n)}$
0	$p_0 k^2$	$(p_0^2 - p^2 - \mathbf{pk}) k^2 + 2(\mathbf{pk})^2$
1	$k^2 - 2\mathbf{pk}$	$p_0(k^2 - 4\mathbf{pk})$
2	p_0	$p_0^2 + p^2 + \mathbf{pk}$
3	-1	$-p_0$

Die Funktionen $F_{BF}^{(n)}$ folgen aus den allgemeinen, im Abschnitt B.1 angegebenen Frequenz-Summationsformeln. Wie bereits im Anschluß an die Gleichung (3.39) bemerkt wurde, muß in diesen die in dem skalaren bosonischen Propagator formal eingeführte Masse m berücksichtigt werden, welche die Schreibweise (3.32) des Gluon-Propagators ermöglicht. Drückt

man nun noch wie in B.1 die Funktionen $F_{BF}^{(n)}$ mit $n = 2, 3$ durch $F_{BF}^{(0)}$ und $F_{BF}^{(1)}$ aus, erhält man als Integranden der Integraldarstellung von T_1^ξ nach kurzer Umformung den Ausdruck

$$\sum_{n=0}^3 a_1^{(n)} F_{BF}^{(n)} = m^2 \left(p_0 F_{BF}^{(0)} - F_{BF}^{(1)} \right) + 2 \left(p_0 k^2 F_{BF}^{(0)} - \mathbf{p} \mathbf{k} F_{BF}^{(1)} \right). \quad (\text{B.18})$$

Nach analoger Rechnung ergibt sich für den Integranden von T_2^ξ

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 a_2^{(n)} F_{BF}^{(n)} &= m^2 \left((p_0^2 + p^2 + \mathbf{p} \mathbf{k}) F_{BF}^{(0)} - p_0 F_{BF}^{(1)} \right) \\ &\quad + 2 \left((p_0^2 k^2 + (\mathbf{p} \mathbf{k})^2) F_{BF}^{(0)} - p_0 \mathbf{p} \mathbf{k} F_{BF}^{(1)} \right) - (p^2 + \mathbf{p} \mathbf{k}) F_F^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Beachtet man schließlich noch, daß nach der Operation $\partial_{m^2}|_{m=0}$ einige Terme der Ausdrücke (B.18) und (B.19) keinen Beitrag liefern, ergeben sich unmittelbar die in (3.40) angegebenen Integraldarstellungen für $T_{1,2}^\xi$.

B.5 Zur Fermion-Dispersionsrelation im chiralen Limes

Hier wird gezeigt, daß im Falle chiraler Symmetrie die Fermion-Dispersionsrelation in einem isotropen thermischen Medium zwei Zweige besitzt, die für kleine Impulse den gleichen Grenzwert haben. Dieser Beweis kann unter plausiblen Annahmen nichtperturbativ geführt werden [Wel96].

Dazu ist es zweckmäßig, von der Notation des Abschnittes 3.3 zu der Darstellung

$$S^{-1}(P) = \gamma_0 A(P) - \vec{\gamma} \hat{\mathbf{p}} \tilde{B}(P)$$

des inversen exakten Fermion-Propagators überzugehen. In der Form

$$S(P) = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0 - \vec{\gamma} \hat{\mathbf{p}}}{A(P) - \tilde{B}(P)} + \frac{1}{2} \frac{\gamma_0 + \vec{\gamma} \hat{\mathbf{p}}}{A(P) + \tilde{B}(P)} \quad (\text{B.20})$$

geschrieben, entspricht der volle Propagator der Helizitäts-Darstellung (3.42). Für verschwindenden 3-Impuls kann S bzw. S^{-1} nicht von $\hat{\mathbf{p}}$ abhängen. Daher besitzt die Funktion $\tilde{B}(P)$ die Eigenschaft

$$\tilde{B}(p_0, \mathbf{p} = 0) = 0, \quad (\text{B.21})$$

und es gilt

$$S(p_0, 0) = \frac{\gamma_0}{A(p_0, 0)}.$$

Der Propagator $S(p_0, 0)$ besitzt als Funktion von p_0 einen Pol, der die thermische (möglicherweise komplexe) Ruheenergie m^* der Quarks im Medium angibt. Somit gilt $A(p_0, 0) = (p_0 - m^*) a^{\text{reg}}(p_0)$, wobei a^{reg} eine bei m^* reguläre Funktion ist. Für endliche Impulse ist die Funktion $A(P)$ demnach durch

$$A(p_0, \mathbf{p}) = (p_0 - m^*) a^{\text{reg}}(p_0) + \tilde{A}(p_0, \mathbf{p}) \quad (\text{B.22})$$

gegeben, wobei der Anteil $\tilde{A}(P)$ die Eigenschaft

$$\tilde{A}(p_0, \mathbf{p} = 0) = 0 \quad (\text{B.23})$$

besitzt.

Für endliche, aber kleine Impulse p sind die durch die Nullstellen in p_0 von $A(P) \mp \tilde{B}(P)$ gegebenen Pole des Propagators (B.20) aufgrund der Relationen (B.21) und (B.23) sowie (B.22) durch die Beziehung

$$\omega_{\pm}(p) = m^* + \frac{-\tilde{A}(m^*, p) \pm \tilde{B}(m^*, p)}{a^{\text{reg}}(m^*)} + \dots \quad (\text{B.24})$$

bestimmt, wobei Terme höherer Ordnung in p vernachlässigt wurden. Das obere Vorzeichen ist die Dispersionsrelation der Teilchen-Anregungen, das untere entsprechend die der Loch-Anregungen.

Mit (B.24) ist gezeigt, daß beide Anregungsmoden die gleiche Ruheenergie besitzen¹. Aus der PCT-Invarianz folgt weiterhin, daß der exakte Propagator auch für $p_0 = -\omega_{\pm}(p)$ singularär ist, was den Antiteilchen-Moden entspricht.

Die im Abschnitt 3.3 in der Einschleifen-Näherung festgestellte Tatsache, daß die Dispersionsrelationen der beiden Moden für verschwindenden Impuls entgegengesetzt gleiche Anstiege besitzen (entsprechend $\tilde{B}(m^*, p) \sim p$, $\tilde{A}(m^*, p) \rightarrow 0$ für $p \rightarrow 0$), steht in einem engen Zusammenhang zu den analytischen Eigenschaften der Selbstenergie. Inwiefern sich solche und weitere allgemeine Aussagen über die fermionischen Anregungsmoden aus nicht-perturbativen Überlegungen wie den oben angeführten ergeben, muß aber weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

¹Es ist unmittelbar einsichtig, daß die geführte Argumentation und damit dieses Ergebnis wesentlich auf der Annahme masseloser Quarks beruhen.

C Ergänzungen zum Teil II

C.1 Die Funktion $T \not\int \Delta_{m^2}$

Hier wird die im Kapitel 5 benötigte Summenintegration

$$I(m^2) = T \not\int \Delta_{m^2} \quad (\text{C.1})$$

über den Propagator $\Delta_{m^2}(P) = (P^2 - m^2)^{-1}$ in dimensionaler Regularisierung berechnet. Im $\overline{\text{MS}}$ -Schema in $4 - 2\epsilon$ Dimensionen ist das Maß der Integration über P durch

$$T \not\int = T \sum_{p_0} \left(\frac{e^{\gamma} \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon \int \frac{dp^{3-2\epsilon}}{(2\pi)^{3-2\epsilon}}$$

gegeben, wobei $\bar{\mu}$ die Renormierungsskala ist. Die Auswertung der Summe über die Matsubara-Frequenzen p_0 in (C.1) ergibt entsprechend (B.11)

$$T \sum_{p_0} \Delta_{m^2} = -\frac{1}{2\omega_p} (1 + 2n_B(\omega_p))$$

mit der Bose-Verteilungsfunktion $n_B(\omega_p)$ und $\omega_p = (m^2 + p^2)^{1/2}$. Dementsprechend setzt sich $I(m^2)$ aus einem temperaturunabhängigen und einem T -abhängigen Anteil zusammen,

$$\begin{aligned} I(m^2) &= - \left(\frac{e^{\gamma} \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon \int \frac{dp^{3-2\epsilon}}{(2\pi)^{3-2\epsilon}} \frac{1}{\omega_p} \left(\frac{1}{2} + n_B(\omega_p) \right) \\ &= I^0(m^2) + I^T(m^2). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Der Term $I^0(m^2)$ enthält in 4 Dimensionen die UV-Divergenz, was sich in der Regularisierung als Pol in ϵ äußert,

$$\begin{aligned} I^0(m^2) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{\gamma} \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon \int \frac{dp^{3-2\epsilon}}{(2\pi)^{3-2\epsilon}} (m^2 + p^2)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{\gamma} \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(-1 + \epsilon)}{(4\pi)^{3/2-\epsilon} \Gamma(\frac{1}{2})} (m^2)^{1-\epsilon} \\ &= \frac{m^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\bar{\mu}^2} + 1 \right] + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Der temperaturabhängige Anteil $I^T(m^2)$ ist dagegen regulär, da die Verteilungsfunktion $n_B(\omega_p)$ den Phasenraum einschränkt. Es gilt

$$I^T(m^2) = - \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} n_B(\omega_p) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{C.4})$$

Insgesamt erhält man aus den Gleichungen (C.2)-(C.4)

$$I(m^2) = \frac{m^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\bar{\mu}^2} + 1 \right] - \frac{1}{2\pi^2} \int dp p^2 \frac{1}{\omega_p} n_B(\omega_p) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{C.5})$$

Im engen Zusammenhang mit der Funktion $I(m^2)$ steht das Summenintegral

$$J(m^2) = T \sum_f \ln \left[-\Delta_{m^2}^{-1} \right],$$

welches im Kapitel 5 mehrfach benötigt wird. Aufgrund der Beziehung $\partial_{m^2} \ln[-\Delta_{m^2}^{-1}] = -\Delta_{m^2}$ erhält man

$$\begin{aligned} J(m^2) &= - \int dm^2 I(m^2) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m^4}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m^2}{\bar{\mu}^2} + \frac{3}{2} \right] \\ &\quad + \frac{T}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 - \exp \left\{ -\sqrt{m^2 + p^2/T} \right\} \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

D Ergänzungen zum Teil III

D.1 Die Entwicklung der Bag-Funktion $B(m(T))$

Hier wird die im Abschnitt 6.1 angegebene Approximation der Bag-Funktion $B(T)$ im Grenzfall schwacher Kopplung g bzw. kleiner thermischer Masse $m \sim gT$ der Quasiteilchen abgeleitet. Die näherungsweise Auswertung des inneren Integrals in der Bestimmungsgleichung (6.13) für $B(T)$ liefert (vergleiche z. B. [Pes95b])

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{\omega} \frac{1}{\exp\{\omega/T\} - 1} = \frac{T^2}{12} \left[1 - \frac{3}{\pi} \frac{m}{T} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{T^2}\right) \right],$$

wobei $\omega = \sqrt{p^2 + m^2}$ definiert war. Die Bestimmungsgleichung (6.13) der Bag-Funktion nimmt für die im Kapitel 6 betrachteten thermischen Massen der Struktur

$$m^2(T) = A^2 \frac{T^2}{\ln T}$$

nach der Substitution $x = \ln T$ die Gestalt

$$B(T) = B_0 - \frac{A^2 T^4}{12} \int dx \exp\{4x\} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{2x}\right) \left[1 - \frac{3}{\pi} A x^{-1/2} + \dots\right]$$

an. Der zu A^2 proportionale Term führt auf eine Exponentialintegral-Funktion [RG57]

$$\int dx \exp\{4x\} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{2x}\right) = \frac{\exp\{4x\}}{2x} - \text{Ei}(4x).$$

Der zu A^3 proportionale Anteil kann durch die Fehler-Funktion dargestellt werden,

$$\int dx \exp\{4x\} \frac{1}{x^{3/2}} \left(1 - \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{3\sqrt{x}} \left(2 + \frac{1}{x}\right) \exp\{4x\} + i \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \text{erf}(2i\sqrt{x}).$$

Die Entwicklung dieser Integrale für große Werte von x , was kleinen Kopplungsstärken entspricht, führt auf die angegebene Approximation (6.17).

Literaturverzeichnis

- [AGD75] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Dover Publications, New York (1975)
- [Bar78] W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, T. Muta, Phys. Rev. D18 (1978) 3998
- [Bas98] S. A. Bass et al., nucl-th9803035
- [Bay62] G. Baym, Phys. Rev. 127 (1962) 1391
- [Ber74] C. Bernard, Phys. Rev. D9 (1974) 3312
- [Ber97] C. Bernard et al. (MILC Collaboration), Phys. Rev. D55 (1997) 6861
- [BKS92] R. Baier, G. Kunstatter, D. Schiff, Phys. Rev. D45 (1992) 4381
- [BLM90] T. S. Biro, P. Levai, B. Müller, Phys. Rev. D42 (1990) 3078
- [BM60] G. Baym, N. D. Mermin, J. Math. Phys. 2 (1960) 232
- [Boy96] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lütgemeier, B. Petersson, Nucl. Phys. B469 (1996) 419
- [BP90a] E. Braaten, R. D. Pisarski, Nucl. Phys. B337 (1990) 569
- [BP90b] E. Braaten, R. D. Pisarski, Phys. Rev. D42 (1990) 2156
- [BP92] E. Braaten, R. D. Pisarski, Phys. Rev. D45 (1992) 1827
- [CH93] R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Springer, Berlin (1993)
- [CKS97] J. Cleymans, K. Redlich, D. K. Srivastava, GSI-Preprint-97-13, nucl-th/9702004
- [Cre83] M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press, Cambridge (1983)
- [EH89] H. Th. Elze, U. Heinz, Phys. Rep. 183 (1989) 81
- [Elm97] P. Elmfors, Nucl. Phys. B487 (1997) 207
- [Eng97] J. Engels, R. Joswig, F. Karsch, E. Laermann, M. Lütgemeier, B. Petersson, Phys. Lett. B396 (1997) 210
- [Fra65] E. S. Fradkin, Tr. Fiz. Inst. Akad. Nauk SSSR 29 (1965) 7

- [FT92] J. Frenkel, J. C. Taylor, Nucl. Phys. B374 (1992) 156
- [FW71] P. Fulde, H. Wagner, Phys. Rev. Lett. 27 (1971) 1280
- [Gao90] M. Gao, Phys. Rev. D41 (1990) 626
- [Gei95] K. Geiger, Phys. Rep. 258 (1995) 237
- [GY95] M. I. Gorenstein, S. Yang, Phys. Rev. D52 (1995) 5206
- [Hag73] R. Hagedorn, *Cargese Lectures in Physics*, vol. 6, ed. E. Schatzmann, Gordon and Breach (1973)
- [Hat97] T. Hatsuda, hep-ph/9708257
- [Hen96] P. A. Henning, E. Poliatchenko, T. Schilling, J. Bros, Phys. Rev. D54 (1996) 5239
- [HM96] J. W. Harris, B. Müller, Annual Review of nuclear and particle science 46 (1996) 71
- [IZ80] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1980)
- [Käm95a] B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, A. Peshier, G. Soff, Phys. Rev. C52 (1995) 2704
- [Käm95b] B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, M. I. Gorenstein, A. Peshier, G. Soff, Z. Phys. A 353 (1995) 71
- [Käm95c] B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, A. Peshier, G. Soff, Proc. 'Strangeness'95', (Eds.) G. Oldenycz, J. Rafelski, American Institute of Physics (1995), p. 355
- [Käm96] B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, A. Peshier, M. Hentschel, G. Soff, in 'Advances in Nuclear Dynamics', Plenum Press New York 1996, (Eds.) W. Bauer, G. Westfall, p. 285
- [Käm97a] B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, A. Peshier, M. Hentschel, G. Soff, J. Phys. G23 (1997) 2001
- [Käm97b] B. Kämpfer, A. Peshier, M. Hentschel, G. Soff, O. P. Pavlenko, in 'Structure of Vacuum and Elementary Matter', (Eds.) H. Stöcker, A. Gallmann, J. H. Hamilton, World Scientific, Singapore 1997, p. 483
- [Käm97c] B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, A. Peshier, M. Hentschel, G. Soff, Proc. Int. Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, Hirschegg XXV (1997), (Eds.) H. Feldmeier et al., p. 320
- [Kap89] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1989)
- [Kas97] B. Kastening, hep-ph/9708219
- [KK80] O. K. Kalashnikov, V. V. Klimov, Sov. J. Nucl. Phys. 31 (1980) 699
- [KKR90] R. Kobes, G. Kunstatter, A. Rebhan, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 2992

-
- [KKR91] R. Kobes, G. Kunstatter, A. Rebhan, Nucl. Phys. B355 (1991) 1
- [KPP97] F. Karsch, A. Patkós, P. Petreczky, Phys. Lett. B401 (1997) 69
- [lBe96] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1996)
- [Leu91] H. Leutwyler, Proceedings of The Dobogokoe Workshop on Effective Field Theories (1991) 193
- [LH97] P. Levai, U. Heinz, hep-ph/9710463
- [Lin80] A. D. Linde, Phys. Lett. B96 (1980) 289
- [LL89] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Lehrbuch der theoretischen Physik (Band IX) *Statistische Physik, Teil 2*, Akademie-Verlag, Berlin (1989)
- [Lue97] M. Lütgemeier, F. Karsch, A. Patkos, J. Rank, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 53 (1997) 417
- [LW60] J. M. Luttinger, J. C. Ward, Phys. Rev. 118 (1960) 1417
- [LW87] N. P. Landsman, Ch. G. van Weert, Phys. Rep. 145 (1987) 141
- [LY60] T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. 117 (1960) 22
- [MS86] T. Matsui, H. Satz, Phys. Lett. B178 (1986) 416
- [NC75] R. E. Norton, J. M. Cornwall, Ann. Phys. 91 (1975) 106
- [Par92] R. R. Parwani, Phys. Rev. D45 (1992) 4695, Phys. Rev. D48 (1993) 5965
- [Pes94] A. Peshier, B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, G. Soff, Phys. Lett. B337 (1994) 235
- [Pes95a] A. Peshier, B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, G. Soff, in 'Hot Hadronic Matter: Theory and experiment', (Eds.) J. Letessier, H. H. Gutbrod, J. Rafelski, Plenum Press, New York and London, NATO ASI series 346 B (1995) p. 139
- [Pes95b] A. Peshier, Diplomarbeit TU-Dresden, *Das Quark-Gluon-Plasma mit thermischen Partonenmassen und Konsequenzen des Modells für die thermische Di-leptonenproduktion*, Preprint FZR-75 (1995)
- [Pes96] A. Peshier, B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, G. Soff, Phys. Rev. D54 (1996) 2399
- [Pes98] A. Peshier, B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, G. Soff, hep-ph/9801344
- [Pi88] R. D. Pisarski, Nucl. Phys. B309 (1988) 476
- [Pi89a] R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A498 (1989) 423c
- [Pi89b] R. D. Pisarski, Physica A158 (1989) 146
- [Pol79] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B82 (1979) 247

- [Pra86] S. Pratt, Phys. Rev. D33 (1986) 1314
- [Pre92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes - The art of scientific computing*, Cambridge University Press, Cambridge (1992)
- [PST97] A. Peshier, K. Schertler, M.H. Thoma, Ann. Phys. (1998), in Druck
- [PW84] R. D. Pisarski, F. Wilczek, Phys. Rev. D29 (1984) 338
- [Reb93] A. K. Rebhan, Phys. Rev. D48 (1993) 3967
- [RG57] I. M. Ryshik, I. S. Gradstein, *Tables of series, products and integrals*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1957)
- [Ris92] D.H. Rischke, M.I. Gorenstein, A. Schäfer, H. Stöcker, W. Greiner, Phys. Lett. B278 (1992) 19
- [Sch94] H. Schulz, Nucl. Phys. B413 (1994) 353
- [SG86] H. Stöcker, W. Greiner, Phys. Rep. 137 (1986) 277
- [Sto97] H. Stöcker, J. Phys. G23 (1997) 2175
- [Wel82a] H. A. Weldon, Phys. Rev. D26 (1982) 1394
- [Wel82b] H. A. Weldon, Phys. Rev. D26 (1982) 2789
- [Wel96] H. A. Weldon, in 'RHIC Summer Study 96', (Eds.) D. E. Kahana, Y. Pang, (1996) 279
- [Wel97] H. A. Weldon, hep-ph/9701279
- [WH96] E. Wang, U. Heinz, Phys. Rev. D53 (1996) 899
- [Zim92] J. M. Ziman, *Prinzipien der Festkörpertheorie*, Deutsch-Verlag, Frankfurt (1992)
- [ZBL97] J. Zimanyi, T. S. Biro, P. Levai, J. Phys. G23 (1997) 1941
- [Zin94] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford (1994)
- [ZK95] C. Zhai, B. Kastening, Phys. Rev. D52 (1995) 7232

Danksagung

Zunächst gilt mein Dank dem früher amtierenden Institutsdirektor, Dr. Harald Prade, für die Aufnahme in das Institut für Kern- und Hadronenphysik des Forschungszentrums Rosendorf, ebenso wie dem jetzigen Direktor, Prof. Dr. Eckart Grosse, für die Unterstützung dieser Arbeit. Im gleichen Sinne bin ich Prof. Dr. Gerhard Soff für die Aufnahme in das Institut für Theoretische Physik der TU Dresden und für den bereitgestellten Arbeitsplatz mit der angenehmen Arbeitsatmosphäre zu Dank verpflichtet.

Prof. Dr. Gerhard Soff, Dr. Burkhard Kämpfer und Dr. Oleg Pavlenko danke ich für die intensive Betreuung dieser Arbeit, die sie durch reges Interesse, viele Anregungen und Diskussionen förderten. Besonders Dr. Kämpfer hat durch seine drängenden Fragestellungen zum Fortgang und der Gestaltung der Arbeit beigetragen.

Dr. Markus Thoma und Klaus Schertler danke ich für die Zusammenarbeit zum Thema der Einschleifen-Selbstenergien im Medium. Prof. Dr. Art Weldon bin ich für Kommentare und Diskussionen zur Fermionen-Dispersionsrelation im Medium dankbar.

Dr. Christian Hofmann, Dr. Günter Plunien und Jörg Urban danke ich für zahlreiche Diskussionen und Gespräche ebenso wie Frank Krauss für die sorgfältige Durchsicht dieser Arbeit. Jörg Binder unterstützte mich nicht nur bei \TeX nischen Problemen - vielen Dank.

Bei Annegret und ganz besonders bei Frédéric bedanke ich mich für die Geduld, die sie zuweilen aufbringen mußten. Ganz herzlich möchte ich mich bei meinen Eltern für ihre Unterstützung bedanken.

Billy und 'Käfer Karl' danke ich für ihre Interpretationen des 8-fachen Weges.

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.