

WISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE BERICHTE

FZR-263

Juni 1999

ISSN 1437-322X

Archiv-Ex.:

Hoppe, Dietrich

**Die Verknüpfung von Teilmodellen auf der
Grundlage der Dimensionsanalyse**

Herausgeber:
FORSCHUNGSZENTRUM ROSSENDORF
Postfach 51 01 19
D-01314 Dresden
Telefon (03 51) 26 00
Telefax (03 51) 2 69 04 61

Als Manuskript gedruckt
Alle Rechte beim Herausgeber

Hoppe, Dietrich

Die Verknüpfung von Teilmodellen auf der Grundlage der Dimensionsanalyse

Projektbericht

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wird mit Mitteln der DFG unter dem Förderkennzeichen WE 2249/1-1 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt der Arbeit liegt allein beim Autor.

Kurzfassung

Für den Zweck der Modellbildung wird es im Beitrag als einfacher angesehen, erst Teilmodelle des zu beschreibenden Objektes zu erzeugen und diese nachher zu einer gesamtheitlichen Struktur miteinander zu verknüpfen, als das Objekt unmittelbar in seiner Gesamtheit zu modellieren. Aus dieser Sicht wird untersucht, wie die Verknüpfung von vorgegebenen Teilmodellen auf systematische Weise mit Hilfe der sogenannten Dimensionsanalyse durchgeführt werden kann. Das Strukturierungsproblem wird dabei auf das Lösen eines linearen algebraischen Gleichungssystems zurückgeführt. Strukturelle Restriktionen werden entweder durch eine geeignete Problemformulierung oder dadurch berücksichtigt, daß der formal gefundene Lösungsraum nachträglich eingeschränkt wird. Anwendungsmöglichkeiten dieses Konzeptes werden an verschiedenartigen Beispielen gezeigt.

Danksagung

Ich danke Herrn Professor F.-P. Weiß für seine wohlwollende Unterstützung meiner Arbeiten und seine Ratschläge für die Gestaltung des vorliegenden Berichtes.

Inhalt

1. Einleitung	1
2. Methodische Grundlagen	2
2.1 Darstellung des Strukturierungsproblems	2
2.1.1 Teilmodelle als Merkmalsmengen	2
2.1.2 Einbeziehung der Dimensionsanalyse	4
2.1.3 Ein Beispiel zur herkömmlichen Anwendung der Dimensionsanalyse	6
2.2 Algebraische Behandlung des Strukturierungsproblems	8
2.3 Verknüpfung von Teilmodellen	10
2.4 Strukturelle Restriktionen und Bewertung von Strukturen	12
2.5 Ein elementarer Sonderfall	15
3. Anwendungsbeispiele	17
3.1 Überkreuzung von Worten	17
3.1.1 Problembeschreibung ohne Beachtung von Restriktionen	17
3.1.2 Eine restriktionsgemäße Problembeschreibung	20
3.1.3 Schrittweise Strukturbildung	23
3.2 Ein thermodynamisches System	29
3.2.1 Modellierung durch ein elektrisches Netzwerk	30
3.2.2 Lösungsraum mit verminderter Ausdehnung	34
3.2.3 Lösungsraum ohne Ausdehnung: Die triviale Lösung	36
3.3 Ein System Stab-Wagen	38
4. Zusammenfassung und Ausblick	43
Literatur	44

1. Einleitung

Die Vorgehensweise, welche für die Bildung des Modells eines originalen Objektes in Betracht kommt, hängt entscheidend von den konkreten Gegebenheiten und Erfordernissen ab und läßt sich daher nur so weit verallgemeinern, wie auf einschränkende Voraussetzungen weitestgehend verzichtet wird. In diesem Beitrag wird lediglich vorausgesetzt, daß sich Teile des zu beschreibenden Objektes unabhängig voneinander modellieren lassen. Grund für diese Voraussetzung ist die Annahme, daß es einfacher ist, erst Teilmodelle zu erzeugen und diese nachher miteinander zu verknüpfen, als das Objekt unmittelbar in seiner Gesamtheit zu modellieren.

Davon ausgehend wird untersucht, wie vorgegebene Teilmodelle systematisch zu einer gesamtheitlichen Struktur verbunden werden können. Die Herkunft der Teilmodelle ist hierfür ohne Belang. Verwiesen sei diesbezüglich nur auf die Möglichkeit, Teilmodelle regelungstechnischer Prozesse dadurch zu gewinnen, daß lokale Minima der Komplexität (im besonderen die Minima der fraktalen Liniendimension) eines geeignet formulierten Fehlermodells ausgewertet werden [H98-2].

Die Verknüpfung von bereits vorgegebenen Teilmodellen ist zwar an sich nur ein verhältnismäßig kleiner Schritt bei der Modellbildung, doch können viele solche Schritte aneinandergesetzt und z.B. hierarchisch gestaffelt werden. Dann sind dem Umfang und dem Vernetzungsgrad des zu bildenden Modells sowie der erfaßbaren Abstraktionsspanne keine prinzipiellen Grenzen gesetzt und die Gewinnung der Teilmodelle verliert relativ an Gewicht.

Um für die Verbindung der Teilmodelle eine allgemeingültige Methodik entwickeln zu können, wird für die Teilmodelle eine stark verallgemeinernde Darstellungsform gewählt: Die Teilmodelle werden mit Hilfe von binären Merkmalen als Merkmalsmengen bzw. Binärvektoren definiert. Eine Verknüpfung von Teilmodellen äußert sich dann in Überschneidungen ihrer Merkmalsmengen. Die an einer Verknüpfung beteiligten Mengen haben dann gemeinsame (Koppel-)Merkmale.

Im einfachsten (trivialen) Fall überschneiden sich die Teilmodelle in allen ihren gemeinsamen Merkmalen. Die entsprechende Struktur wird fortan Trivialstruktur genannt. Da sie strukturelle Restriktionen nicht berücksichtigt, ist die Trivialstruktur die umfangreichste aller möglichen Strukturen, die aus den gegebenen Teilmodellen konstruierbar sind.

Sobald strukturelle Restriktionen bestehen, ist nur noch ein Teil der Trivialstruktur zulässig. Worin dieser Teil besteht, ist das eigentliche Problem bei der Verknüpfung der Teilmodelle, denn die Restriktionen erlauben keine direkten Rückschlüsse auf zulässige Strukturvarianten. Zwar kann die Trivialstruktur zufällig reduziert werden, doch ist die Wahlfreiheit dafür zumeist unübersehbar groß. Statt dessen wird vorgesehen, zunächst determiniert Substrukturen zu bilden, die voneinander unabhängig sind. Die Unabhängigkeit soll dabei sicherstellen, daß die Substrukturen einzeln den Restriktionen unterzogen und ggf. eliminiert werden können, ohne daß andere Substrukturen davon mit betroffen sind. Die verbleibenden Substrukturen werden schließlich miteinander verbunden. Daß die entstehende Gesamtstruktur ebenso wie ihre beteiligten Substrukturen den Restriktionen genügt, ist durch die Unabhängigkeit der Substrukturen gewährleistet.

Zur formalen Bestimmung der benötigten Substrukturen wird die aus der Strömungslehre her bekannte Dimensionsanalyse [S92] herangezogen. Die Struktursuche wird damit auf die Lösung eines (i. allg. unterbestimmten) linearen algebra-

ischen Gleichungssystem zurückgeführt; die Dimension des Lösungsraumes bestimmt die Anzahl der unabhängigen Substrukturen. Restriktionen werden nicht bei der Rechnung berücksichtigt, sondern entweder (vorzugsweise) schon bei der Definition der Merkmale oder (alternativ oder ergänzend) erst nach erfolgter Rechnung durch die Einschränkung des Lösungsraumes.

Nach grundlegenden Betrachtungen, welche den herkömmlichen Umgang mit der Dimensionsanalyse skizzieren, die mathematische Formulierung und die Lösung des Strukturierungsproblems beschreiben, den Umgang mit Restriktionen sowie Regeln für die Interpretation der Rechenergebnisse umfassen, werden anhand von Beispielen einige Anwendungsmöglichkeiten der entwickelten Methodik und dabei verschiedene praktische Besonderheiten gezeigt.

2. Methodische Grundlagen

2.1 Darstellung des Strukturierungsproblems

2.1.1 Teilmodelle als Merkmalsmengen

Das Strukturierungsproblem wird so dargestellt, daß zu seiner Lösung das Prinzip der Dimensionsanalyse benutzt werden kann.

Die Dimensionsanalyse dient herkömmlich dazu, die Gewinnung noch unbekannter funktionaler Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen dadurch zu vereinfachen, daß die in den vorkommenden physikalischen Einheiten enthaltene Information zugänglich gemacht wird. Zwar reicht solche Information i. allg. nicht aus, um vollständige Formeln (Modelle) zu gewinnen, doch werden die Freiheiten, nach denen die betrachteten Größen miteinander verknüpft werden können, z.T. erheblich reduziert. Insofern ist die Dimensionsanalyse zumindest ein Hilfsmittel zur Vereinfachung der Modellbildung.

Die physikalischen Einheiten sind aus sog. Basiseinheiten aufgebaut. Die Basiseinheiten wiederum gehören zu Basisgrößen. Z.B. ist die Einheit der Größe Beschleunigung a aus den Einheiten der Basisgrößen Länge L und Zeit T aufgebaut: $[a]=[LT^{-2}]$. Mit der Einführung der Bezeichnung Basisgrößen werden die ursprünglichen Größen, da sie sich mit Hilfe der Basisgrößen ausdrücken lassen, folgerichtig als abgeleitete Größen bezeichnet. Für das zu untersuchende Strukturierungsproblem sind diese Begriffe jedoch irreführend; hier gibt es

- Eigenschaften (Merkmale) von Objekten anstelle von abgeleiteten Größen und
- miteinander zu verbindende Teilmodelle anstelle von Basisgrößen.

Die vorgegebenen Teilmodelle X_1, X_2, \dots, X_m sind definiert durch die Merkmale $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$. Da eine Eigenschaft qualitativ ist, sie also nur entweder vorhanden oder nicht vorhanden sein kann, sind die Merkmale binärwertig: Der Merkmalswert $\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ bedeutet, daß die betreffende Eigenschaft $\begin{Bmatrix} \text{vorhanden} \\ \text{nicht vorhanden} \end{Bmatrix}$ ist. Die mit eins bewerteten Merkmale jedes Teilmodells werden als Merkmalsmenge zusammengefaßt. Die Merkmale eines Teilmodells müssen untereinander disjunkt

sein ¹; dies ist bei der Definition der Merkmale zu beachten.

Die Teilmodelle sollen die Merkmale miteinander zu einer Struktur verbinden. Infolge der Mengendarstellung der Teilmodelle kann sich eine Struktur nur in Mengenüberschneidungen äußern. Die Merkmale solcher Schnittmengen werden, da sie Kopplungen der Teilmodelle realisieren, Koppelmerkmale genannt.

In einer Struktur aus Teilmodellen gibt es zwei einander ergänzende Formen der Verknüpfung von Koppelmerkmalen:

- Innerhalb eines einzigen Teilmodells X_i sind verschiedene Koppelmerkmale x_j miteinander verbunden (teilmodellinterne Verknüpfung), Bild 2.1-1a.
- Verschiedene Teilmodelle X_i überschneiden sich in einem einzigen Koppelmerkmal x_j (teilmodellübergreifende Verknüpfung), Bild 2.1-1b.

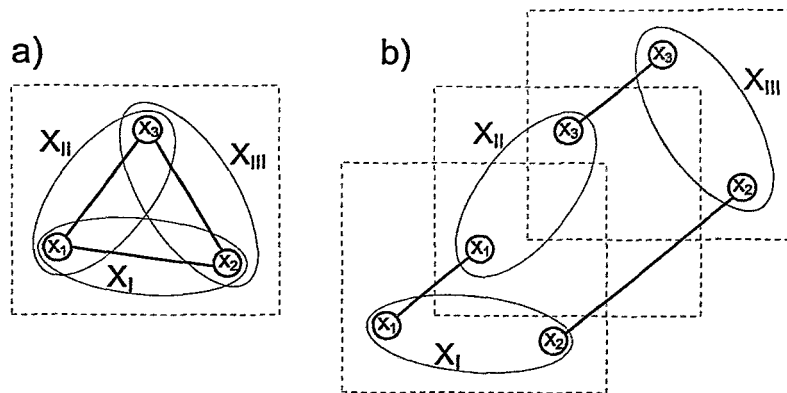


Bild 2.1-1 Strukturbestimmende Verknüpfungen von Koppelmerkmalen, a) je zwei Koppelmerkmale pro Teilmodell, b) je zwei Teilmodelle pro Koppelmerkmal

In einer Struktur wechseln die beiden Verknüpfungsarten einander alternierend ab. Dies wird im weiteren für die Erkennung von Strukturen ausgenutzt:

Eine Struktur ist daran erkennbar, daß sie Ketten aus abwechselnd teilmodellintern und -übergreifend verbundenen Koppelmerkmalen aufweist.

Gibt es keine strukturellen Restriktionen, so können die Merkmalsmengen uneingeschränkt so weit überschritten werden, daß die Vereinigungsmenge jedes Merkmal höchstens noch ein einziges Mal enthält. Als Ergebnis entsteht die sowohl umfangreichste als auch am einfachsten zu bildende unter allen möglichen Strukturen, die aus den gegebenen Teilmodellen gebildet werden können; für sie wurde oben der Name Trivialstruktur eingeführt. Bei vorhandenen Restriktionen sind nicht mehr alle möglichen Mengenüberschneidungen zulässig. Die daraufhin entstehende Struktur ist nur noch ein Teil der Trivialstruktur. In der Bestimmung dieses Teils liegt, wie

¹ Die Disjunktheit soll hierbei besagen, daß ein Teilmodell eine bestimmte Eigenschaft nicht zwei- oder mehrfach, sondern höchstens einmal aufweisen kann; entweder es hat die Eigenschaft oder es hat sie nicht. Z.B. hat ein gewöhnlicher elektrischer Stromkreis die Eigenschaft "Widerstand". Ein supraleitender Kreis hat diese Eigenschaft nicht. Enthält ein gewöhnlicher Stromkreis mehrere ohmsche Widerstände als Bauteile, so hat er deswegen nicht mehrmals die Eigenschaft "Widerstand". Um das Vorhandensein von mehreren gleichartigen Bauteilen auszudrücken, müßten für diese unterschiedliche Merkmale definiert werden.

bereits angedeutet, das eigentliche Problem bei der hier untersuchten Modellstrukturierung.

2.1.2 Einbeziehung der Dimensionsanalyse

Für eine Modellbildung besteht eine allgemeine Voraussetzung darin, daß es zwischen einem originalen Objekt und einem anderen Objekt, das als Modell des originalen Objektes gelten soll, Gemeinsamkeiten gibt. Die Zuordnung, welches Objekt das Original und welches Objekt das Modell sein soll, ist dabei willkürlich. Grundsätzlich kann jedes der beiden Objekte als Modell des jeweils anderen Objektes gelten. In diesem Sinne werden nachfolgend zwei Modelle miteinander verglichen.

Formaler Ausdruck von Gemeinsamkeiten zwischen den Merkmalen x_j des einen Modells und den entsprechenden Merkmalen x'_j des anderen Modells sind Abbildungen

$$x'_j = k_j x_j, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (2.1-1)$$

wobei die Koppelparameter gemäß $k_j = k_j(X_1, X_2, \dots, X_n) = \text{konst.}$ durch die Teilmodelle bestimmt sind. Die Zugehörigkeit der Merkmale zu einem bestimmten Modell wird ausgedrückt als allgemeine Parameterfunktion

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{konst.}, \quad f'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \text{konst.}, \quad (2.1-2)$$

wobei die rechte Seite jeweils eine dimensionslose Konstante (Zahlenwert) ist. Gefordert wird

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)} = \text{konst.} \quad (2.1-3)$$

unabhängig davon, wie sich ein Merkmal x_j vom entsprechenden Merkmal x'_j absolut unterscheidet¹. Der Quotient in (2.1-3) unterstreicht die "absolute Bedeutung des Relativen" im Sinne des Bridgman-Postulats (vgl. [S92] S. 12); es besagt sinngemäß: Unabhängig davon, wie sich die Merkmale x_j und x'_j absolut voneinander unterscheiden, hat ihre Relation stets denselben Wert.

(2.1-3) wird erfüllt, indem die beiden Parameterfunktionen als Potenzprodukte

$$f = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}, \quad f' = x'_1{}^{q_1} x'_2{}^{q_2} \dots x'_n{}^{q_n} \quad (2.1-4)$$

dargestellt werden, wobei die Exponenten q_1, q_2, \dots, q_n , die auch Dimensionen² ge-

¹ Z.B. kann x_j zu einem wärmetechnischen und x'_j zu einem elektrotechnischen Objekt gehören. Die beiden Merkmale können dann dennoch dieselbe Eigenschaft ausdrücken, z.B. die Eigenschaft "Kapazität". Insofern sind die beiden Merkmale dieselben. Ihr absoluter Unterschied betrifft die physikalischen Dimensionen, denn zum einen handelt es sich um Wärmekapazität und zum anderen um elektrische Kapazität. Für diesen Fall lassen sich Formen des Quotienten (2.1-3) finden, in dem sich alle beteiligten physikalischen Dimensionen gegenseitig aufheben, s. Beispiel im Abschnitt 2.1.3.

² Diesmal hat dieser Begriff die Bedeutung einer räumlichen Dimension.

annt werden, unbekannt sind. Wird (2.1-4) mit (2.1-1) in (2.1-3) eingesetzt, so bestätigt sich

$$\frac{f}{f'} = \frac{x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}}{(k_1 x_1)^{q_1} (k_2 x_2)^{q_2} \dots (k_n x_n)^{q_n}} = \frac{1}{k_1^{q_1} k_2^{q_2} \dots k_n^{q_n}} = \text{konst.} \quad (2.1-5)$$

Die Zugehörigkeit der verschiedenen Teilmodelle zu jedem einzelnen Merkmal wird ausgedrückt durch das Potenzprodukt

$$x_i = X_1(x_i)^{d_{1i}} X_2(x_i)^{d_{2i}} \dots X_m(x_i)^{d_{mi}} \quad , i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1-6)$$

$$= X_1^{d_{1i}} X_2^{d_{2i}} \dots X_m^{d_{mi}}$$

wobei die Exponenten bzw. Dimensionen $d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{mi}$ bekannt sind; sie tragen die zur Kopplung der Merkmale benötigte Information. Nach (2.1-4) mit (2.1-6) ist

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} =$$

$$= [X_1^{d_{11}} X_2^{d_{21}} \dots X_m^{d_{m1}}]^{q_1} [X_1^{d_{12}} X_2^{d_{22}} \dots X_m^{d_{m2}}]^{q_2} \dots [X_1^{d_{1n}} X_2^{d_{2n}} \dots X_m^{d_{mn}}]^{q_n} \quad (2.1-7)$$

$$= X_1^{d_{11}q_1 + d_{12}q_2 + \dots + d_{1n}q_n} X_2^{d_{21}q_1 + d_{22}q_2 + \dots + d_{2n}q_n} \dots X_m^{d_{m1}q_1 + d_{m2}q_2 + \dots + d_{mn}q_n}$$

$$= \text{konst.} = X_1^0 X_2^0 \dots X_m^0$$

Durch Exponentenvergleich folgt daraus das Gleichungssystem

$$Dq = \underline{0} \quad (2.1-8)$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} : (m,n)\text{-Dimensionsmatrix,} \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} : \text{Dimensionsvektor}$$

$d_{ij} \in \{0, 1\}$ (beim Strukturierungsproblem)

Die Bestimmung des Dimensionsvektors q wird im Abschnitt 2.2 behandelt. Zunächst zeigt ein Beispiel, wie die Dimensionsanalyse auf herkömmliche Weise zur Modellbildung eingesetzt wird.

¹ Die Argumente (x_i) werden künftig weggelassen.

2.1.3 Ein Beispiel zur herkömmlichen Anwendung der Dimensionsanalyse

Betrachtet werden ein wärmetechnisches und ein elektrotechnisches dynamisches System. Sie können entweder (1) sich zueinander wie Original und Modell verhalten oder (2) unterschiedliche Modelle eines dritten, z.B. fluiddynamischen Objektes sein. Auf der Grundlage bestehender Gemeinsamkeiten werden mit Hilfe der Dimensionsanalyse modellhafte, für beide Systeme gleichermaßen geltende Gesetzmäßigkeiten gesucht. Die beiden Systemen gemeinsamen Größen ($\hat{=}$ Merkmale) sind

R: Widerstand, I: Strom, T: Zeit,
C: Kapazität, U: Potentialunterschied,

wobei der wärme- und elektrotechnische Bezug im weiteren mit w und e indiziert wird. Die Verbindungen zwischen den Größen werden mit Hilfe von Maßeinheiten ($\hat{=}$ Teilmodelle) hergestellt. Dabei gibt es zwischen den zwei physikalischen Darstellungssystemen folgende Entsprechungen:¹

K (Kelvin) - V (Volt)
W (Watt) - A (Ampere)
h (Stunde) - s (Sekunde)

Aus den bekannten Beziehungen zwischen den physikalischen Größen und ihren Maßeinheiten

$$R_w \left[\frac{K}{W} \right], R_e \left[\frac{V}{A} \right], \quad I_w [W], I_e [A], \quad T_w [h], T_e [s] \quad (2.1-9)$$

$$C_w \left[\frac{Ws}{K} \right], C_e \left[\frac{As}{V} \right], \quad U_w [K], U_e [V]$$

folgen gemäß (2.1-1) die Koppelparameter

$$\frac{R_w}{R_e} = \frac{KA}{WV}, \quad \frac{I_w}{I_e} = \frac{W}{A}, \quad \frac{T_w}{T_e} = \frac{h}{s} = 3600 \quad (2.1-10)$$

$$\frac{C_w}{C_e} = \frac{WV}{KA}, \quad \frac{U_w}{U_e} = \frac{K}{V}$$

Nach (2.1-5) mit (2.1-10) folgt

¹ Mit den üblichen Begriffen der Dimensionsanalyse wären K, J, h, V, A, s als Basisgrößen und R, C, I, U, T als abgeleitete Größen zu bezeichnen.

$$\frac{f_w}{f_e} = \left(\frac{KA}{WV} \right)^{q_1} \left(\frac{WV}{KA} \right)^{q_2} \left(\frac{W}{A} \right)^{q_3} \left(\frac{K}{V} \right)^{q_4} \left(\frac{h}{s} \right)^{q_5} \quad (2.1-11)$$

Nach (2.1-7) gilt stellvertretend für das elektrotechnische System

$$\begin{aligned} R_e^{q_1} C_e^{q_2} I_e^{q_3} E_e^{q_4} T_e^{q_5} &= \\ &= [V^1 A^{-1} s^0]^{q_1} [V^{-1} A^1 s^1]^{q_2} [V^0 A^1 s^0]^{q_3} [V^1 A^0 s^0]^{q_4} [V^0 A^0 s^1]^{q_5} \\ &= V^{q_1 - q_2 + q_4} A^{-q_1 + q_2 + q_3} s^{q_2 + q_5} \\ &= \text{konst.} = V^0 A^0 s^0. \end{aligned} \quad (2.1-12)$$

Daraus folgt die (auch für das wärmetechnische System gültige) Dimensionsmatrix (in Tabellenform)

D:		R	C	I	U	T
	oder					
V	K	1	-1	0	1	0
A	W	-1	1	1	0	0
s	h	0	1	0	0	1

Unter Vorwegnahme des Lösungsverfahrens (Abschnitt 2.2) entstehen die beiden linear unabhängigen Dimensionsvektoren

$$q_1 = (q_1, q_2, \dots, q_5)^T = (-1, 0, -1, 1, 0)^T$$

$$q_2 = (-1, -1, 0, 0, 1)^T.$$

Jede dieser beiden Lösungen führt erwartungsgemäß zu dimensionslosen Konstanten auf der rechten Seite von (2.1-11); mit z.B. q_1 in (2.1-11) ist

$$\left(\frac{KA}{WV} \right)^{-1} \left(\frac{WV}{KA} \right)^0 \left(\frac{W}{A} \right)^{-1} \left(\frac{K}{V} \right)^1 \left(\frac{h}{s} \right)^0 = \frac{WVAK}{KAWV} = 1.$$

Abschließend werden die gefundenen Dimensionen in (2.1-4) eingesetzt und ergeben folgende funktionale Beziehungen:

$$R^{q_1} C^{q_2} I^{q_3} U^{q_4} T^{q_5} = R^{-1} C^0 I^{-1} U^1 T^0 = \frac{U}{RI} = \text{konst.}$$

(für ...=1 folgt das Ohmsche Gesetz: $U=RI$)

$$R^{q_1} C^{q_2} I^{q_3} U^{q_4} T^{q_5} = R^{-1} C^{-1} I^0 U^0 T^1 = \frac{T}{RC} = \text{konst.}$$

(für ...=1 folgt die Definitionsgleichung einer Zeitkonstanten: $T=RC$)

Weil die entstandenen physikalischen Formeln für beide betrachtete Systeme gelten, beschreiben sie Gemeinsamkeiten, die zwischen den beiden Systemen bestehen. Statt physikalischer Formeln werden für das Strukturierungsproblem Verkettungen von Merkmalen erwartet.

2.2. Algebraische Behandlung des Strukturierungsproblems

Für die Lösung des linearen algebraischen Gleichungssystems

$$D\mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (2.2-1)$$

mit $D=(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n)$: (m,n) -Matrix
 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

werden die beiden Fälle des verträglichen Systems, nämlich das eindeutig lösbare und das unterbestimmte System sowie der Fall des überbestimmten Systems betrachtet, [B75]. Für (2.1-8) wird zwar nur der homogene Fall $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ von (2.2-1) benötigt, doch ist es mit dem allgemeineren inhomogenen Fall einfacher, Zusammenhänge zu verdeutlichen.

Das System (2.2-1) ist nach \mathbf{q} auflösbar, wenn \mathbf{b} in dem von den Spaltenvektoren $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$ aufgespannten Teilraum des \mathbb{R}^m liegt. Dafür notwendig und hinreichend ist $\text{Rang}(D\mathbf{b})=\text{Rang}(D)$. Dagegen hat (2.2-1) keine Lösung bzw. ist widersprüchlich, wenn \mathbf{b} außerhalb des besagten Teilraumes liegt. Dann ist $\text{Rang}(D\mathbf{b})>\text{Rang}(D)$.

Nachfolgend wird unterschieden, ob (2.2-1) a) eindeutig lösbar, b) nicht eindeutig lösbar oder c) nicht lösbar ist:

a) Eindeutige Lösbarkeit

Es gibt genau einen Lösungsvektor \mathbf{q} von (2.2-1) dann und nur dann, wenn $\text{Rang}(D)=\text{Rang}(D\mathbf{b})=n$ ist. Dieser Fall besteht entweder wenn $m=n$ ist oder wenn es bei $m>n$ genau $m-n$ Gleichungen gibt, die von den übrigen n Gleichungen linear abhängig sind und daher weggelassen werden können. Die Lösung ist ein Punkt bzw. Element (Teilraum der Dimension null) im \mathbb{R}^m . Im homogenen Fall $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ ist dieser Punkt der Koordinatenursprung $\mathbf{q}=\mathbf{0}$; dies ist die triviale Lösung.

Die triviale Lösung hat, wie noch gezeigt wird, für das Strukturierungsproblem nur eine geringe Bedeutung, denn sie ist keine sinnvolle Lösung mehr, sobald es strukturelle Restriktionen gibt.

b) Nicht eindeutige Lösbarkeit

Das Gleichungssystem (2.2-1) ist für $\text{Rang}(D)=m<n$ unterbestimmt; eventuelle linear abhängige Gleichungen seien bereits weggelassen. Das System (2.2-1) wird so geordnet, ggf. durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten, daß es wie folgt zerlegbar ist:

$$(D_1 \ D_2) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (2.2-2)$$

mit D_1 : (m,m) -Teilmatrix, $\text{Rang}(D_1)=m$
 D_2 : $(m,n-m)$ -Teilmatrix
 $\mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^m$
 $\mathbf{q}_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \underline{q}_1 &= D_1^{-1}(\underline{b} - D_2 \underline{c}) \\ \underline{q}_2 &= \underline{c} \end{aligned}$$

bzw.

$$\underline{q} = \underline{q}_0 + \begin{pmatrix} -D_1^{-1}D_2 \\ I_{n-m} \end{pmatrix} \underline{c} \quad (2.2-3)$$

mit $\underline{c} \in \mathbb{R}^{n-m}$, beliebig

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} D_1^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2-4)$$

Der zweite Summand in (2.2-3) bezeichnet ein Element in einem $(n-m)$ -dimensionalen Teilraum (Lösungsraum) des \mathbb{R}^n . Der Lösungsraum ist am Element \underline{q}_0 angeheftet. Im homogenen Fall $\underline{b}=\underline{0}$ ist $\underline{q}_0=\underline{0}$, so daß der Koordinatenursprung stets ein Element des Lösungsraumes ist.

Für den Lösungsraum sind die Spalten von

$$\begin{pmatrix} -D_1^{-1}D_2 \\ I_{n-m} \end{pmatrix} : \quad (n, n-m)\text{-Matrix} \quad (2.2-5)$$

eine linear unabhängige Basis bzw. ein Fundamentalsystem. Folglich läßt sich mit regulärem

$$C = (\underline{c}_1 \ \underline{c}_2 \ \dots \ \underline{c}_{n-m}): \quad (n-m, n-m)\text{-Matrix} \quad (2.2-6)$$

bzw. durch Linearkombination der Spalten von (2.2-5) jedes Element des Lösungsraumes darstellen. Im einfachsten Fall ist $C=I_{n-m}$ (Einheitsmatrix). Für den homogenen Fall folgt aus (2.2-3) mit (2.2-6)

$$Q^T = \begin{pmatrix} -D_1^{-1}D_2 \\ I_{n-m} \end{pmatrix} C \quad \text{für } m < n \quad (2.2-7)$$

$$Q = \underline{q}_0 = \underline{0} \quad \text{für } m=n \quad (\text{eindeutige Lösung, s. a}) \quad (2.2-7a)$$

$$\text{mit } Q = (\underline{q}_1 \ \underline{q}_2 \ \dots \ \underline{q}_{n-m})^T: \quad \begin{array}{l} (n-m, n)\text{-Lösungsmatrix}^1 \\ \underline{q}_1 \ \underline{q}_2 \ \dots \ \underline{q}_{n-m}: \quad \text{Lösungsvektoren} \end{array}$$

wobei $\text{Rang}(Q)=n-m$ ist. Mit regulärem C sind auch die Zeilen von Q linear unabhängig, so daß durch Linearkombination der Q -Zeilen jedes Element des Lösungsraumes

¹ Q wird der besseren Darstellung halber transponiert definiert. Die Lösungsvektoren erscheinen dadurch als Zeilen von Q .

mes darstellbar ist.

Aus $\text{Rang}(Q)=n-m$ folgt, daß bis zu $n-m$ Spalten von Q null (Nullvektoren) sein können. Wie noch gezeigt wird (Abschnitt 3.2.2), haben solche Spalten für die Strukturierung von Teilmodellen besondere Bedeutung.

Ggf. setzt die Bildung einer regulären (m,m) -Matrix D_1 einen Spaltentausch in der Matrix D voraus. Für diesen Zweck wird eine Vertauschungsmatrix T eingeführt [J53]. T entsteht, indem in der I_n -Einheitsmatrix die entsprechenden Zeilen (oder Spalten) miteinander vertauscht werden. Der Spaltentausch in D erfolgt dann mit der Operation $D \cdot T$. In der Matrix Q wird dann der umgekehrte Spaltentausch mit $Q \cdot T^T$ vorgenommen.

c) Keine Lösbarkeit

Gilt für das System (2.2-1) $\text{Rang}(D) \leq n < m$ und $\text{Rang}(D_b) = \text{Rang}(D) + 1$, so ist das System überbestimmt und dies bedeutet, daß es Widersprüche zwischen seinen Gleichungen gibt. Diese Widersprüchlichkeit kann von Fehlern in den Gleichungen herrühren. Beim inhomogenen System ist die Widersprüchlichkeit durch Rangbetrachtung nachweisbar.

Beim Strukturierungsproblem können fehlerhafte Teilmodelle vorkommen. Dann sind auch in den zugehörigen Gleichungen Fehler enthalten. Allerdings liegt beim Strukturierungsproblem das homogene System vor. Im homogenen Fall gilt wegen $\text{Rang}(D) = \rho \leq n$, daß $m - \rho$ Gleichungen von den übrigen ρ Gleichungen linear abhängig sind und daher weggelassen werden können; der Fall c) ist deshalb auf die Fälle a) oder b) reduzierbar. Das bedeutet, daß es trotz fehlerhafter Teilmodelle keine Widersprüche in (2.1-8) gibt. Fehler in Teilmodellen müssen deshalb auf andere Weise gefunden werden. Dieses - praktisch sehr bedeutsame - Problem wird im Abschnitt 2.4 noch einmal berührt, ist aber sonst nicht mehr Gegenstand dieses Beitrages.

2.3. Verknüpfung von Teilmodellen

Nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes (Fall b) kommt für eine Teilmodell-Verknüpfung, bei der auch Restriktionen erlaubt sind, nur der unterbestimmte Fall des Gleichungssystems (2.1-8) in Betracht. Die $n-m$ Lösungen des unterbestimmten Systems sind voneinander unabhängig. Infolge ihrer Unabhängigkeit repräsentieren diese Lösungen entsprechend unabhängige Substrukturen der Trivialstruktur. Die Gewinnung dieser Substrukturen ist der Gegenstand dieses Abschnittes.

Ein einzelner Lösungsvektor g gibt alle Merkmale seiner zugehörigen Substruktur an. Er sagt aber nichts darüber aus, vermittels welcher Teilmodelle jedes dieser Merkmale an der Substruktur beteiligt ist. Dafür muß die Dimensionsmatrix D hinzugezogen werden. Um die Elemente von g und D unmittelbar miteinander in Verbindung zu bringen, wird (2.1-8) umgeformt in

$$Dq = H\underline{1} = \underline{0} \quad (2.3-1)$$

mit $\underline{1} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$: $(n,1)$ -Einsvektor

$$H = \begin{pmatrix} d_{11}q_1 & d_{12}q_2 & \dots & d_{1n}q_n \\ d_{21}q_1 & d_{22}q_2 & \dots & d_{2n}q_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1}q_1 & d_{m2}q_2 & \dots & d_{mn}q_n \end{pmatrix} : (m,n)\text{-Strukturmatrix} \quad (2.3-2)$$

$H(i,j) = d_{ij}q(j)$: Elemente von H

Zu jedem der n - m Lösungsvektor q gehört eine eigene Strukturmatrix H nach (2.3-2). Um von den H -Matrizen auf die zugehörigen Substrukturen schließen zu können, eignen sich folgende Strukturregeln:

- Gibt es für $i=1, 2, \dots, m$ und $j=\text{konst.}$ (in der j -ten Spalte) mehrere Elemente mit $H(i,j) \neq 0$ (besetzte Elemente), so haben die zugehörigen Teilmodelle X_i das Merkmal x_j gemeinsam; sie überschneiden sich in diesem Merkmal, d.h. x_j ist ihr teilmodellübergreifendes Koppelmerkmal.
- Gibt es für $j=1, 2, \dots, m$ und $i=\text{konst.}$ (in der i -ten Zeile) Elemente $H(i,j) \neq 0$, deren Werte sich in Paare $\{-a, +a\}$ mit $a=\pm 1, \pm 2, \dots$ aufteilen lassen, so sind die zugehörigen Merkmale x_j teilmodellinterne Koppelmerkmale des Teilmodells X_i . Die Reihenfolge der Vorzeichen in einer H -Zeile ist dafür bedeutungslos.
- Die nach a) teilmodellübergreifend und nach b) teilmodellintern bestehenden Merkmalskopplungen bilden wie erwartet (Abschnitt 2.1.1) Ketten von Merkmalen. In einer solchen Kette besteht die prinzipielle Werteabfolge $\dots -a, \{-a, +a\}, \{+a, -a\}, \{-a, +a\}, \{+a, \dots\}; \{\}$: teilmodellinterne Paare. Die Werte von Elementen einer Strukturmatrix H lassen sich ggf. auf verschiedene Merkmalsketten aufteilen.
- Wenn im gesamten Lösungsraum das Element $q(j)$ des Lösungsvektors null ist und somit die j -te Spalte der Lösungsmatrix Q ein Nullvektor ist, dann werden für das Merkmal x_j zwei virtuelle Untermerkmale eingeführt, die entsprechend der Zerlegung $0 = -1 + 1$ betragsgleiche Werte entgegengesetzten Vorzeichens erhalten. Der Regel a) folgend, überschneiden sich daraufhin im Merkmal x_j alle die Teilmodelle, deren Merkmalsmengen das Merkmal x_j enthalten (bzw. bei denen die Dimensionsmatrix D in der j -ten Spalte besetzte Elemente enthält).

Für $m=n$, also wenn das Gleichungssystem (2.1-8) nur die triviale Lösung $q=\underline{0}$ hat und somit alle Q -Elemente null sind, überschneiden sich nach der Regel d) die Teilmodelle in sämtlichen gemeinsamen Merkmalen, woraufhin die Trivialstruktur entsteht. Für $m < n$ gibt es zwar $n-m$ Lösungs(-Basis-)vektoren, die alle nicht null sind, doch darf ihre Länge verändert werden, um bestimmte Elemente des Lösungsraumes zu erreichen. Um den Koordinatenursprung $q=\underline{0}$, der nach Abschnitt 2.2 stets

ein Element des Lösungsraumes ist, mit Hilfe dieser Basis zu erreichen, müssen alle Basisvektoren zu null verkürzt werden. Zu diesen Nullvektoren gehört - wieder der Regel d) folgend - die Trivialstruktur. Zur trivialen Lösung von (2.1-8) gehört also grundsätzlich die Trivialstruktur.

2.4 Strukturelle Restriktionen und Bewertung von Strukturen

Solange die strukturelle Verknüpfung der Teilmodelle keinen Restriktionen unterliegt, ist die triviale Lösung $q=0$ und folglich die Trivialstruktur stets eine zulässige Lösung. Weil diese Lösung durch vollständige Merkmalsüberschneidung unmittelbar gefunden wird, braucht sie nicht aus Substrukturen zusammengesetzt zu werden.

Unterliegt die Verknüpfung der Teilmodelle jedoch Restriktionen, so sollten diese möglichst schon bei der Merkmalsdefinition berücksichtigt werden¹. Nur dann können Merkmale und Restriktionen bestmöglich aneinander angepaßt werden; die Nichtanpassung unterscheidet zwei Fälle:

- (1) Bei zu allgemein definierten Merkmalen ist der formal (per Dimensionsanalyse) gefundene Lösungsraum zu klein, um alle strukturellen Besonderheiten, welche durch die Restriktionen bestimmt sind, zu erfassen. Zwar ist darüber hinaus grundsätzlich damit zu rechnen, daß der formale Lösungsraum den Bereich der zulässigen (den Restriktionen genügenden) Lösungen² nur teilweise oder gar nicht schneidet, doch ist diese Gefahr bei einem zu kleinen formalen Lösungsraum besonders groß, s. Bild 2.4-1 (1).
- (2) Bei zu speziell definierten Merkmalen entsteht ein unnötig großer formaler Lösungsraum, s. Bild 2.4-1 (2). Da ein solcher Lösungsraum stets auch unzulässige Elemente enthält, muß er anhand der Restriktionen nachträglich eingeschränkt werden. Die Suche nach zulässigen Lösungen ist dann um so aufwendiger, je größer der Lösungsraum ist.

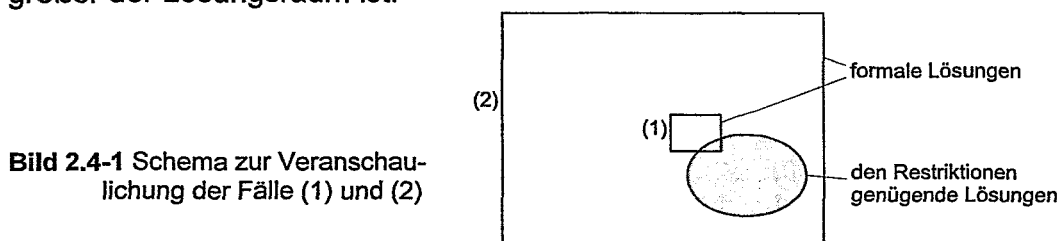


Bild 2.4-1 Schema zur Veranschaulichung der Fälle (1) und (2)

Im allgemeinen gibt es im formalen Lösungsraum Elemente, die nicht zulässig sind. Garantiert außerhalb des zulässigen Lösungsraumes befindet sich dann das Element $q=0$ des formalen Lösungsraumes. Die Trivialstruktur ist deshalb keine zulässige

¹ Die Restriktionen selbst sind problemspezifisch und können daher nicht allgemein formuliert werden.

² Im weiteren wird zwischen formalem und zulässigem Lösungsraum unterschieden. Der formale Lösungsraum ist das Ergebnis der formalen Rechnung ohne Berücksichtigung von Restriktionen. Der zulässige Lösungsraum schließt denjenigen Teil des formalen Lösungsraumes ein, der den Restriktionen genügt.

ge Struktur¹. Weil Restriktionen bewirken, daß formal gefundene Substrukturen ausgeschlossen werden und daher ihre Mengen nicht an Mengenüberschneidungen beteiligt sein können, kann zu einem zulässigen Element des formalen Lösungsraumes nur eine Struktur gehören, die ein Bestandteil bzw. Fragment der Trivialstruktur ist. Solche Strukturfragmente zu finden ist dadurch erschwert, daß die Restriktionen nicht direkt auf die zulässigen Lösungen schließen lassen. Als eine Möglichkeit für die Suche nach zulässigen Lösungen wird im weiteren der formale Lösungsraum elementweise auf die Erfüllung der Restriktionen hin geprüft und für diesen Zweck eine Vorgehensweise gewählt, nach der

- a) eine Basis von Lösungsvektoren (mit C in (2.2-7) als Einheitsmatrix) bestimmt wird, daraus
- b) durch Linearkombination der Basisvektoren neue Lösungsvektoren erzeugt werden und
- c) jeder Lösungsvektor einzeln nach den Restriktionen geprüft wird.

Die Linearkombination

$$\sum_{i=1}^z a_i q_i, \quad a_i = \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{Wichtungsfaktor} \quad (2.4-1)$$

$z = 2, 3, \dots, n-m$: Anzahl der Lösungsvektoren, welche an der Linearkombination beteiligt sind

wird zuerst über $k=2$ und dann - so weit wie nötig oder so weit wie durchführbar - über eine zunehmende Anzahl von Lösungsvektoren erstreckt. Die Anzahl der nach (2.4-1) entstehenden (abzüglich der nur vorzeichenverkehrten) Lösungsvektoren ist

$$k^{z-1} \binom{n-m}{z}, \quad k: \text{Anzahl der berücksichtigten Wichtungsfaktoren.} \quad (2.4-2)$$

Gibt es im formalen Lösungsraum zu wenige oder keine zulässigen Lösungen oder werden vorhandene zulässige Lösungen im übermäßig großen formalen Lösungsraum praktisch nicht gefunden, so können

- (vorzugsweise) geeignetere Merkmale definiert werden oder
- gefundene Substrukturen, die unzulässigen Lösungen angehören, so modifiziert werden, daß daraus zulässige Strukturfragmente entstehen.

Die Modifikation von Substrukturen kann zufällig (nicht zielgerichtet) durchgeführt werden und ist deswegen bedeutend praktikabler als die Definition neuer Merkmale. Beim Gebrauch von Modifikationen ist jedoch folgendes zu beachten:

Solange Restriktionen dadurch berücksichtigt werden, daß formal gefundene Substrukturen lediglich weggelassen werden, sind die verbleibenden Substrukturen garantiert zu einer Gesamtstruktur vereinbar. Werden aber Substrukturen in sich

¹ Wäre die Trivialstruktur bei Restriktionen dennoch zulässig, könnte sie bei Existenz des $(n-m)$ -dimensionalen Lösungsraumes in jeden beliebigen Satz aus $n-m$ unabhängigen Substrukturen zerlegt werden. Folglich wäre der gesamte formale Lösungsraum zulässig. Gerade dies wird aber durch Restriktionen ausgeschlossen. Also kann die Trivialstruktur nicht zulässig sein.

verändert, nehmen sie ggf. Eigenschaften an, welche den vorgegebenen Teilmodellen nicht entsprechen. Dies kann zur Folge haben, daß die entstehenden Strukturfragmente nicht miteinander vereinbar sind, selbst wenn sie den Restriktionen genügen.

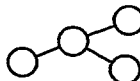
Liegen unvereinbare Strukturalternativen vor, so muß unter ihnen eine Auswahl getroffen werden. Zur Bewertung soll die Glaubwürdigkeit einer Struktur dienen. Mit der Einführung des Begriffes der Glaubwürdigkeit wird unterstellt, daß Strukturen auch fehlerhaft sein können. Zwar ist die Fehlerhaftigkeit einer Struktur i. allg. nicht explizit nachweisbar (s. Abschnitt 2.2, Fall c), doch läßt sich zumindest indirekt auf das Vorhandensein von Fehlern schließen. Werden nämlich fehlerhafte Teilmodelle so modifiziert, daß die Fehler verschwinden, so lassen sich die nunmehr fehlerfreien Teilmodelle vermutlich (nicht mit Sicherheit) zu einer umfassenderen Struktur verknüpfen, als dies mit den fehlerbehafteten Teilmodellen möglich ist. Eine Grundlage des Fehlernachweises ist somit der Vergleich alternativer Strukturen.

Als Maß für die Glaubwürdigkeit einer Struktur wird der Grad der strukturinternen Bindungen herangezogen. Zu diesem Zweck werden - ohne in das Problem der Modellfehler hier tiefer einzudringen - die folgenden Bewertungskriterien eingeführt:

S1 Vernetzungsgrad: Eine Struktur ist um so glaubwürdiger, je kleiner der Quotient

$$\frac{a_K}{a_V} = \frac{\text{Anzahl der Koppelmerkmale}}{\text{Anzahl der Verbindungen zwischen den Koppelmerkmalen}}$$

ist, wobei die teilmodellinternen und -übergreifenden Verbindungen, die es in der Strukturmatrix H gibt, gemeinsam zählen.

Beispiel: Bei der Struktur  ist $a_K=4$, $a_V=3$.

S2 Kettenlänge: Für eine Kette von Koppelmerkmalen gilt $a_V=a_K-1$ und folglich

$$\frac{a_K}{a_V} = \frac{a_K}{a_K-1} > \frac{a_K+z}{a_V+z-1}, \quad z=1,2,3,\dots, \quad a_K > 1.$$

Weil die rechte Seite dieser Ungleichung kleiner als die linke ist, ist nach S1 eine Kette um so glaubwürdiger, je mehr Koppelmerkmale sie umfaßt, z.B.:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \\ | \\ \circ \end{array} & \frac{a_K}{a_V} = \frac{3}{2}, & \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \\ | \\ \circ \end{array} & \frac{a_K}{a_V} = \frac{4}{3} \\ & \frac{3}{2} > \frac{4}{3} & & \end{array}$$

S3 Schleifen vor Ketten: Während bei einer offenen Kette $a_V=a_K-1$ ist, gilt für eine Schleife (in sich geschlossene Kette) $a_V=a_K$. Folglich besteht zwischen beiden die

$$\text{Beziehung } \left. \frac{a_K}{a_V} \right|_{\text{Kette}} = \frac{a_K}{a_K-1} > \left. \frac{a_K}{a_V} \right|_{\text{Schleife}} = \frac{a_K}{a_K} = 1.$$

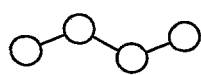
Weil die rechte Seite dieser Ungleichung kleiner als die linke ist, ist nach S1 die Schleife glaubwürdiger als die Kette, z.B.:

$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \quad \frac{a_K}{a_V} = \frac{3}{2},$$

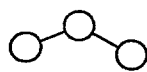
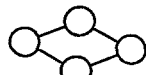
$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \quad \frac{a_K}{a_V} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{3}{2} > 1$$

S4 Schleifenlänge: Das Ungleichgewicht in S3 wächst mit abnehmendem a_K . Demzufolge ist eine kurze Schleife gemessen an einer jeweils gleichlangen offenen Kette glaubwürdiger als eine lange Schleife, z.B.:



$$\frac{4}{3} > 1$$



$$\frac{3}{2} > 1$$

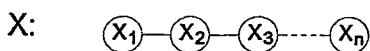


$$\frac{3}{2} > \frac{4}{3} > 1$$

Eine Schlußfolgerung daraus ist, daß engmaschig vernetzte Strukturen glaubwürdiger sind als solche, in denen nur langkettige Verbindungen zwischen den Netzknoten vorkommen.

2.5 Ein elementarer Sonderfall

Zur Abrundung der methodischen Grundlagen und zur Darstellung einiger allgemeiner Gesichtspunkte wird der Fall betrachtet, daß es nur ein ($m=1$) vorgegebenes, nicht weiter spezifiziertes (Teil-)Modell X gibt:



Nach (2.1-7) ist dann

$$\begin{aligned} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} &= X^{d_{11}q_1} X^{d_{12}q_2} X^{d_{1n}q_n} \\ &= X^{d_{11}q_1 + d_{12}q_2 + \dots + d_{1n}q_n} \\ &= X^{q_1 + q_2 + \dots + q_n} \\ &= c = X^0. \end{aligned} \tag{2.5-1}$$

Daraus folgt nach (2.1-8) die (m,n)=(1,n)-Dimensionsmatrix als Einsvektor

$$D = (1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1). \tag{2.5-2}$$

Nach (2.2-7) ergibt sich die ($n-m,n$)=(n-1,n)-Lösungsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5-3)$$

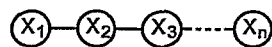
Für jede Zeile von Q bzw. für jeden Lösungsvektor q_i , $i=1, 2, \dots, n-1$ entsteht nach (2.3-2) eine Strukturmatrix H_i , hier als Vektor. Darin kann es, weil nur ein einziges Teilmodell vorliegt, nur teilmodellinterne Merkmalskopplungen geben (vgl. Strukturregel b) im Abschnitt 2.3); in den zugehörigen Substrukturen (rechts) sind die Koppelmerkmale und ihre Verbindungen dick hervorgehoben:

$$\begin{aligned} H_1 &= (\textcircled{-1} \textcircled{1} \ 0 \ \dots \ 0) && \textcircled{x_1} \textcircled{x_2} \textcircled{x_3} \textcircled{\dots} \textcircled{x_n} \\ H_2 &= (\textcircled{-1} \textcircled{0} \textcircled{1} \ \dots \ 0) && \textcircled{x_1} \textcircled{x_2} \textcircled{x_3} \textcircled{\dots} \textcircled{x_n} \\ &\dots && \dots \\ H_{n-1} &= (\textcircled{-1} \textcircled{0} \textcircled{0} \ \dots \ \textcircled{1}) && \textcircled{x_1} \textcircled{x_2} \textcircled{x_3} \textcircled{\dots} \textcircled{x_n} \end{aligned} \quad (2.5-4)$$

Die Verknüpfung der Substrukturen wird anhand der Koppelmerkmale hergestellt. Als Verbindung (Durchschnitt) der Koppelmerkmals-Mengen entsteht

$$\{x_1, x_2\} \cap \{x_1, x_3\} \cap \dots \cap \{x_1, x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (2.5-5)$$

Demnach lassen sich alle $n-1$ Substrukturen miteinander verbinden:



Diese Gesamtstruktur unterscheidet sich nicht vom vorgegebenen Teilmodell X; da nur ein einziges Teilmodell vorgegeben war und keine zusätzliche Information eingebracht wurde, kann gegenüber X strukturell auch nichts hinzugewonnen werden.

Dasselbe Ergebnis läßt sich durch Linearkombination der Basisvektoren (Q-Zeilen) in (2.5-2) gewinnen. Durch die Addition aller Q-Zeilen entsteht der Lösungsvektor

$$q_{1+2+\dots+n-1} = q_1 + q_2 + \dots + q_n = (-(n-1) \ 1 \ 1 \ \dots \ 1)^T \quad (2.5-6)$$

und mit diesem ergibt sich

$$H_{1+2+\dots+n-1} = (\textcircled{-(n-1)} \textcircled{1} \textcircled{1} \ \dots \ \textcircled{1}). \quad (2.5-7)$$

Die Werte der H-Elemente in (2.5-7) lassen sich entsprechend der Strukturregel c) im Abschnitt 2.3 auf verschiedene Merkmalsketten (hier Merkmalspaare) aufteilen. Diese Ketten bestehen jeweils zwischen den Werten -1 und 1, wobei der Wert $-(n-1)$ entsprechend aufgeteilt ist. Wie der Vergleich mit (2.5-3) deutlich macht, würde diese Aufteilung im vorliegenden Fall bedeuten, die Linearkombination der Basisvektoren wieder rückgängig zu machen.

3. Anwendungsbeispiele

Die nachfolgenden Beispiele sind so ausgewählt, daß sie sowohl die Vielfalt an Anwendungsmöglichkeiten der entwickelten Methodik andeuten als auch verschiedene praktische Besonderheiten aufzeigen. Weil die Beispiele sehr unterschiedliche Inhalte aufweisen, können sie aus Platzgründen nur vergleichsweise einfache Problemstellungen betrachten.

3.1 Überkreuzung von Worten

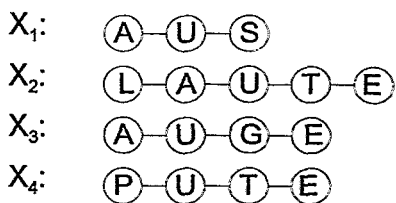
Als Merkmale werden Buchstaben verwendet. Die Teilmodelle sind Worte. Für die Verbindung der Worte gelten in Anlehnung an die Wortstruktur in Kreuzworträtseln folgende Restriktionen:

- R1-1 Kreuzungsbedingung: Zwei Worte dürfen nicht mehr als einen Buchstaben gemeinsam haben bzw. sich nicht mehr als einmal kreuzen, d.h. ein einzelner Buchstabe darf die Kreuzung höchstens zweier Worte sein.
- R1-2 Richtungsbedingung: Die Worte dürfen nur waagrecht von links nach rechts und senkrecht von oben nach unten angeordnet sein.

In einem ersten Fall werden die Restriktionen erst dann berücksichtigt, wenn die formale Lösung bereits bestimmt ist. Im nächsten Fall wird die Kreuzungsbedingung R1-1 schon bei der Merkmalsdefinition berücksichtigt. Zuletzt wird gezeigt, wie nach der im Abschnitt 2.4 beschriebenen Vorgehensweise eine etwas komplizierte Wortstruktur schrittweise entwickelt werden kann.

3.1.1 Problembeschreibung ohne Beachtung von Restriktionen

Anhand der $n=8$ Buchstaben $x_1, x_2, \dots, x_8 = A, E, G, L, P, S, T, U$ werden $m=4$ Worte vorgegeben:



Mit diesen Buchstaben und Worten ist nach (2.1-6) z.B.

$$x_7 = T = X_1^{d_{17}} X_2^{d_{27}} X_3^{d_{37}} X_4^{d_{47}} = X_1^0 X_2^1 X_3^0 X_4^1 \quad (3.1-1)$$

und das bedeutet, daß der Buchstabe T in den Worten LAUTE und PUTE enthalten ist. Die Positionen der Buchstaben innerhalb der Worte werden nicht berücksichtigt.

Nach (2.1-7) ist

$$\begin{aligned}
A^{q_1} E^{q_2} \dots U^{q_8} &= \\
&= [X_1^{d_{11}} X_2^{d_{21}} \dots X_4^{d_{41}}]^{q_1} [X_1^{d_{12}} X_2^{d_{22}} \dots X_4^{d_{42}}]^{q_2} \dots [X_1^{d_{18}} X_2^{d_{28}} \dots X_4^{d_{48}}]^{q_8} \\
&= X_1^{d_{11}q_1 + d_{12}q_2 + \dots + d_{18}q_8} X_2^{d_{21}q_1 + d_{22}q_2 + \dots + d_{28}q_8} \dots X_4^{d_{41}q_1 + d_{42}q_2 + \dots + d_{48}q_8} \\
&= c = X_1^0 X_2^0 X_3^0 X_4^0.
\end{aligned}
\tag{3.1-2}$$

Daraus folgt nach (2.1-8) die (m,n)=(4,8)-Dimensionsmatrix (in Tabellenform)

$$\begin{array}{l}
D: \\
\begin{array}{cccccccc}
& A & E & G & L & P & S & T & U \\
X_1: & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
X_2: & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
X_3: & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
X_4: & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
\end{array}
\tag{3.1-3}$$

Nach (2.2-7) ergibt sich die (n-m,n)=(4,8)-Lösungsmatrix

$$\begin{array}{l}
Q: \\
\begin{array}{cccccccc}
& A & E & G & L & P & S & T & U \\
1. & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2. & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3. & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
4. & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\end{array}
\tag{3.1-4}$$

Zu jeder Zeile von Q (jedem Lösungs-Basisvektor q_i , $i=1, 2, \dots, 4$) entsteht nach (2.3-2) eine Strukturmatrix H_i . Für $i=1$ ist (mit markierten Merkmalskopplungen)

$$\begin{array}{l}
H_1: \\
\begin{array}{cccccccc}
& A & E & G & L & P & S & T & U \\
X_1: & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_2: & 0 & (-1) & 0 & (1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_3: & 0 & (-1) & (1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X_4: & 0 & (-1) & 0 & 0 & (1) & 0 & 0 & 0
\end{array}
\end{array}
\tag{3.1-5}$$

A U S
(L) A U T (E)
A U (G) (E)
(P) U T (E)

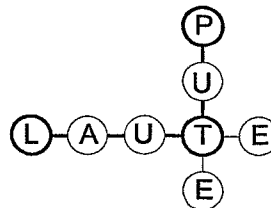
Nach den Markierungen in H_1 sind die Koppelpunkte teilmodellintern über die Buchstabenpaare E-L, E-G, E-P und teilmodellübergreifend allein über E verknüpft. Die aus (3.1-5) ablesbare Wortstruktur zeigt Bild 3.1-1.

H₁₋₃:

(3.1-10)

	A	E	G	L	P	S	T	U	
X ₁ :	0	0	0	0	0	0	0	0	A U S
X ₂ :	0	0	0	①	0	0	①	0	① L A U ① T E
X ₃ :	0	0	0	0	0	0	0	0	A U G E
X ₄ :	0	0	0	0	①	0	①	0	① P U ① T E

Bild 3.1-2 Wortstruktur zu (3.1-10)



Diese formale Lösung wird den Restriktionen R1-1 und R1-2 gerecht und ist deshalb eine zulässige Lösung.

Eine andere Möglichkeit, um zulässigen Strukturen zu gewinnen, ist die Modifikation unzulässiger Lösungen (s. Abschnitt 2.4). Wird z.B. in H₃ die dritte Zeile vernachlässigt, so entsteht - wenngleich mit zwei anderen Koppelmerkmalen - dieselbe Struktur wie im Bild 3.1-2.

Weitere zulässige Lösungen gibt es im vorliegenden Fall (mit den verwendeten Merkmalen) nicht, denn zusätzliche Wortverbindungen wären nur über die Buchstaben A, E und U herstellbar, wobei aber im Widerspruch zu R1-1 stets mehr als zwei Worte miteinander verbunden werden müßten (bei A und E je drei Worte und bei U vier Worte, vgl. Spalten in (3.1-3)). Dies weist darauf hin, daß die verwendeten Merkmale gemessen an den Restriktionen zu allgemein definiert sind. Deshalb wird als (bevorzugte) Möglichkeit für die Gewinnung zulässiger Strukturen im folgenden eine Spezialisierung der Merkmale vorgenommen.

3.1.2 Eine restriktionsgemäße Problembeschreibung

Für die Worte aus dem Abschnittes 3.1.1 wird die Restriktion R1-1, derzufolge sich zwei Worte nicht mehr als einmal kreuzen dürfen, bereits bei der Merkmalsdefinition berücksichtigt. Außerdem werden die Buchstaben G, L, P, S, weil sie jeweils nur in einem einzigen Wort vorkommen und deshalb an Wortverknüpfungen nicht beteiligt sein können, nicht mehr berücksichtigt.

Tritt ein Buchstabe in $w > 2$ Worten auf, so wird für diesen Buchstaben entsprechend R1-1 eine solche Buchstaben-Unterteilung vorgenommen, so daß zu allen Wortpaarungen, die für den jeweils betrachteten Buchstaben in der w -elementigen Wortmenge vorkommen, ein Unter-Buchstabe als neues Merkmal entsteht. Pro Buchstabe entstehen so

$$\binom{w}{2} = \frac{w(w-1)}{2} \quad (3.1-11)$$

neue Merkmale. Nach (3.1-11) werden für die in $w=3$ Worten enthaltenen Buch-

staben A und E je $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ Merkmale und für das in $w=4$ Worten enthaltene U $\frac{4(4-1)}{2} = 6$ Merkmale gebildet. Daraufhin entsteht statt der ursprünglichen Dimensionsmatrix (3.1-3) die neue $(m,n)=(4,13)$ -Dimensionsmatrix

$$D: \begin{array}{cccccccccccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & E_1 & E_2 & E_3 & T & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \\ X_1: & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ X_2: & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ X_3: & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ X_4: & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (3.1-12)$$

Unter den Merkmalen, die zu einem (ursprünglichen) Buchstaben gehören, sollte es höchstens ein einziges teilmodellübergreifendes Koppelmerkmal geben, denn sonst ist nicht auszuschließen, daß R1-1 verletzt wird. Entsprechend dieser neuen Forderung unterliegen die formalen Lösungen der folgenden zusätzlichen Restriktion:

R1-3 In einem Lösungsvektor q darf pro (ursprünglichem) Buchstaben nicht mehr als ein Vektorelement besetzt sein.

Nach (2.2-7) entsteht die $(n-m,n)=(9,13)$ -Lösungsmatrix

$$Q: \begin{array}{cccccccccccccc} & A_1 & A_2 & A_3 & E_1 & E_2 & E_3 & T & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \\ 1. & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2. & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3. & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4. & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5. & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6. & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7. & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8. & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9. & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (3.1-13)$$

Der Restriktion R1-3 genügen die Zeilen 1, 5, 6, 7. Jedoch führt keine Zeile von Q auf eine formale Lösung, die allen drei Restriktionen gerecht wird. Deshalb werden nach (2.4-1), (2.4-2) Linearkombinationen der Q-Zeilen vorgenommen. Mit $z=2$ (paarweise Kombinationen) und mit der $k=2$ -elementigen Menge von Wichtungsfaktoren $a_i \in \{-1, 1\}$ werden zunächst alle möglichen Paarungen von Basisvektoren gebildet. Aus den entstehenden insgesamt $k^{z-1} \binom{n-m}{z} = 2^1 \binom{9}{2} = 2 \cdot 36 = 72$ neuen Lösungsvektoren resultiert nur eine einzige formale Lösung, die auch zulässig ist:

$$q_3 + q_5 = (-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad (3.1-14)$$

Daraus entsteht

H_{3+5} :

(3.1-15)

	A_1	A_2	A_3	E_1	E_2	E_3	T	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
X_1 :	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
X_2 :	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
X_3 :	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
X_4 :	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0

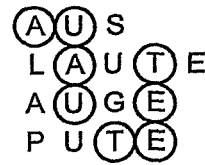
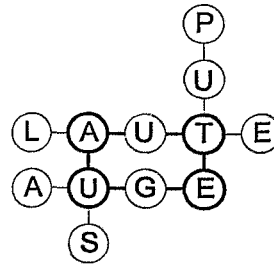


Bild 3.1-3 Wortstruktur zu (3.1-15)



Die Koppelmerkmale sind hierbei zu einer Schleife verbunden. Dies ist glaubwürdiger (s. Abschnitt 2.4), als befänden sich die vier Worte nur in offener Kette.

Unter den $k=3$ -fachen Linearkombinationen gibt es die weitere zulässige Lösung

$$q_3 - q_6 - q_7 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0)^T \quad (3.1-16)$$

und somit

H_{3-6-7} :

(3.1-17)

	A_1	A_2	A_3	E_1	E_2	E_3	T	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
X_1 :	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
X_2 :	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0
X_3 :	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
X_4 :	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0

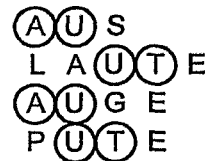
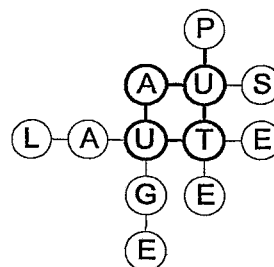


Bild 3.1-4 Wortstruktur zu (3.1-17)

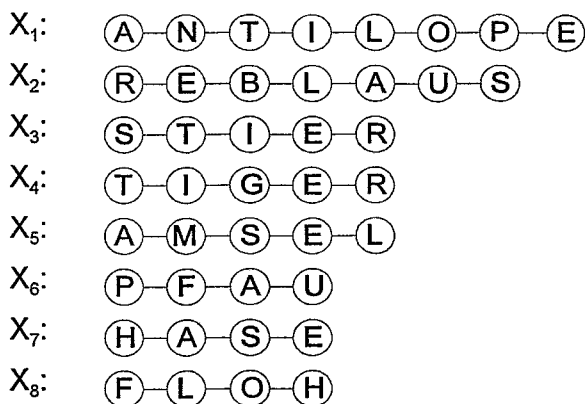


In der Einleitung wurde die Möglichkeit erwähnt, daß eine Modellbildung in hierarchisch gestaffelten Schritten vorgenommen werden kann. Das bedeutet, daß eine in einem derartigen Schritt gefundene Struktur im nachfolgenden Schritt als neues Teilmodell deklariert und als solches in eine weiterführende Verknüpfung einbezogen werden muß. Dabei ist zu beachten, daß das neue Teilmodell wieder die Voraussetzung der Merkmalsdisjunktheit (s. Abschnitt 2.1) erfüllt. Ggf. müssen dafür andere Merkmale definiert werden. Während jedes der vier verwendeten Worte in

sich buchstabendisjunkt ist, enthält die gefundene Wortstruktur im Bild 3.1-4 die Buchstaben A, E und U mehrfach. Vor einer Fortsetzung der Strukturierung müsste deshalb für diese Buchstaben eine Unterteilung vorgenommen werden, z.B. unter Beachtung der Buchstabenpositionen.

3.1.3 Schrittweise Strukturbildung

Um Besonderheiten zu zeigen, die i. allg. erst bei vergleichsweise umfangreichen Strukturierungsproblemen auftreten, wird ein etwas komplizierteres Beispiel betrachtet. Als Teilmodelle werden $m=8$ Worte vorgegeben:



Zunächst wird mit der oben verwendeten Art der Buchstabencodierung (ein Buchstabe = ein Merkmal) eine (8,16)-Dimensionsmatrix gebildet:

D:	A	B	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	R	S	T	U	
X_1 :	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	ANTILOPE
X_2 :	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	REBLAUS
X_3 :	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	STIER
X_4 :	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	TIGER
X_5 :	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	AMSEL
X_6 :	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	PFAU
X_7 :	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	HASE
X_8 :	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	FLOH

Die Buchstaben B, G, M, N werden, da sie nur je einem Wort angehören und deshalb keine Wortverbindung herstellen können, nicht weiter berücksichtigt. Im Einklang mit der Restriktion R1-1 verbinden die Buchstaben F, H, O, P, U nur je zwei Worte miteinander. Zu mehr als zwei Worten gehören A, E, I, L, R, S, T. Für letztere werden deshalb zu allen vorkommenden Wortpaarungen eigenständige Merkmale

eingeführt. Nach (3.1-11) entstehen für A $\frac{5(5-1)}{2} = 10$, für I, R, T $\frac{3(3-1)}{2} = 3$, für E

$\frac{6(6-1)}{2} = 15$ und für L, S $\frac{4(4-1)}{2} = 6$ neue Merkmale. Damit ergibt sich als neue

denn die teilmodellübergreifende Merkmalskopplung aus der dritten Spalte in (3.1-20) könnte nur im Widerspruch zu R1-2 realisiert werden, Bild 3.1-5. Also bezeichnet (3.1-19) ein nicht zulässiges Element des formalen Lösungsraumes.

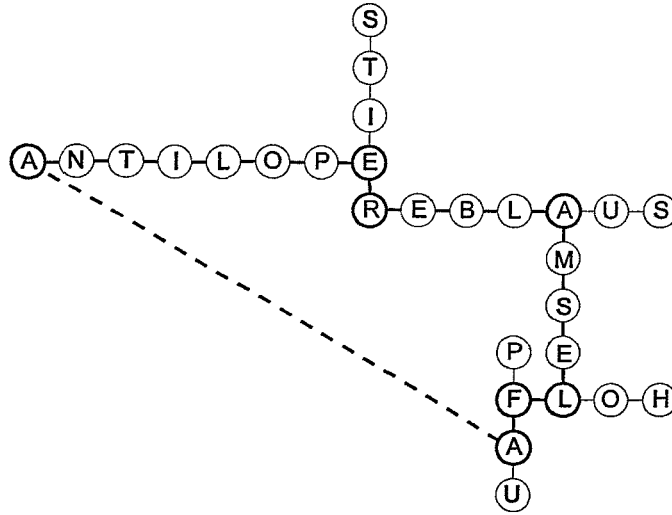


Bild 3.1-5 Wortstruktur zu (3.1-20) im Widerspruch zur Restriktion R1-2. Gestrichelt dargestellt ist die nicht realisierbare Buchstabenüberschneidung

b) z=3

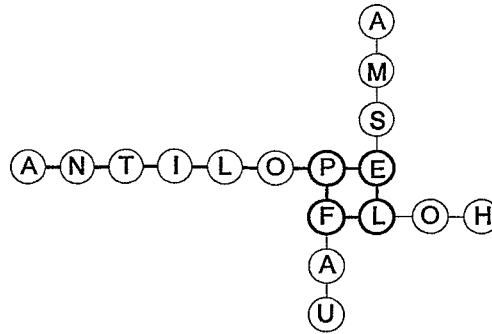
Für Kombinationen von drei Lösungsvektoren aus Q existieren nach (2.4-2) insgesamt $k^{z-1} \binom{n-m}{z} = 2^2 \binom{43}{3} = 4 \cdot 12341 = 49364$ neue Lösungsvektoren. Darunter befinden sich nur zwei formale Lösungen, die allen Restriktionen gerecht werden:

(1)

$$q_6 - q_{28} - q_{30} = (0000000000 \ 0001000000000000 \ 1 \ 0 \ 000 \ 00000-1 \ 0 \ -1 \ 000 \ 000000 \ 000 \ 0)^T \quad (3.1-21)$$

$$H_{6-28-30} = \begin{matrix} & A & & E & & F & H & I & & L & & O & P & & R & & S & & T & & U \\ 0000000000 & 000 & 1 & 0000000000 & 000 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 0 & -1 & 000 & 000000 & 000 & 0 & 0 & 0 & 000000 & 000 & 0 \\ 0000000000 & 000 & 0 & 0000000000 & 000 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 000 & 0 & 0 & 0 & 000000 & 000 & 0 \\ 0000000000 & 000 & 0 & 0000000000 & 000 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 000 & 0 & 0 & 0 & 000000 & 000 & 0 \\ 0000000000 & 000 & 1 & 0000000000 & 000 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 0 & -1 & 000 & 000000 & 000 & 0 & 0 & 0 & 000000 & 000 & 0 \\ 0000000000 & 000 & 0 & 0000000000 & 000 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 000 & 0 & 0 & 0 & 000000 & 000 & 0 \\ 0000000000 & 000 & 0 & 0000000000 & 000 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 000 & 0 & 0 & 0 & 000000 & 000 & 0 \\ 0000000000 & 000 & 0 & 0000000000 & 000 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 000 & 0 & 0 & 0 & 000000 & 000 & 0 \\ 0000000000 & 000 & 0 & 0000000000 & 000 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 0 & 0 & 000 & 000000 & 000 & 0 & 0 & 0 & 000000 & 000 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} A N T I L O P E \\ R E B L A U S \\ M \\ S \\ P E \\ F L O H \\ A \\ U \end{matrix} \quad (3.1-22)$$

Bild 3.1-6 Wortstruktur zu (3.1-22)



(2)

$$-q_{22} + q_{38} + q_{41} = (000-1000000\ 0000000000000000\ 0\ 0\ 00-1\ 000000\ 0\ 0\ 000\ 000010\ 010\ 0)^T \quad (3.1-23)$$

$$H_{-22+38+41} \begin{matrix} A & & E & & F & H & I & & L & & O & P & R & & S & & T & U \end{matrix} \quad (3.1-24)$$

000	(-1)	000000	0000000000000000	00	000	0000000	00	000	0000000	00	000	0000000	00	000	0000000	(1)	0	A	N	T	I	L	O	P	E
0000	0000000	0000000000000000	00	000	0000000	00	000	0000000	00	000	0000000	0000	0000	0000	0000	0000	0	R	E	B	L	A	U	S	
0000	0000000	0000000000000000	00	00	(-1)	0000000	00	000	0000000	00	000	0000000	(1)	000	000	000	0	S	T	I	E	R			
0000	0000000	0000000000000000	00	00	(-1)	0000000	00	000	0000000	00	000	0000000	(1)	000	000	000	0	T	I	G	E	R			
0000	0000000	0000000000000000	00	000	0000000	00	000	0000000	00	000	0000000	0000	0000	0000	0000	0000	0	A	M	S	E	L			
0000	0000000	0000000000000000	00	000	0000000	00	000	0000000	00	000	0000000	0000	0000	0000	0000	0000	0	P	F	A	U				
000	(-1)	000000	0000000000000000	00	000	0000000	00	000	0000000	00	000	0000000	(1)	000	000	000	0	H	A	S	E				
0000	0000000	0000000000000000	00	000	0000000	00	000	0000000	00	000	0000000	0000	0000	0000	0000	0000	0	F	L	O	H				

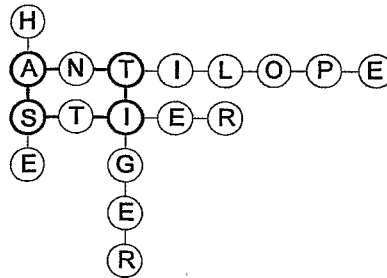


Bild 3.1-7 Wortstruktur zu (3.1-24)

Auch die Überlagerung der beiden Lösungsvektoren (3.1-21) und (3.1-23) ergibt eine zulässige Lösung, Bild 3.1-8.

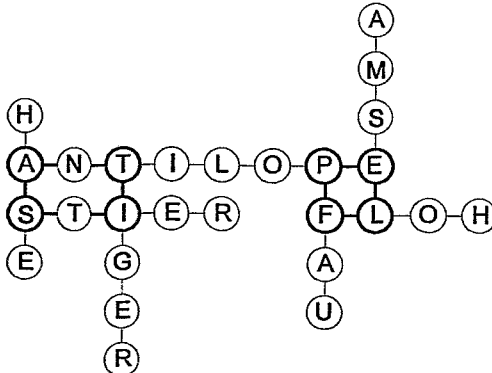


Bild 3.1-8 Überlagerung der Strukturen aus den Bildern 3.1-6 und 3.1-7

Struktur ist mit $\frac{a_K}{a_V} = \frac{20}{24} = 0,833 < 1$ besser als bei den vorhergehenden Strukturen; Grund ist der Zusammenhang zwischen den drei beteiligten Schleifen. Die Existenz noch komplexerer Strukturen ist zwar theoretisch nicht ausgeschlossen, aber der Anschauung nach recht unwahrscheinlich. Die Suche wird deshalb nicht fortgesetzt.

3.2 Ein thermodynamisches System

In einer chemischen Versuchsanlage, die aus einem Rührkesselreaktor und einem dazugehörigen Kühlsystem besteht (Bild 3.2-1), werden in unterschiedlichen Experimenten verschiedene Kausalketten für den Wärmetransport bzw. -übergang nachgewiesen.

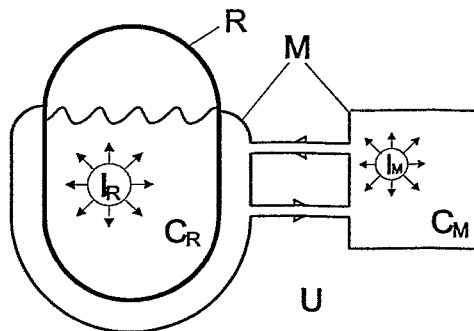


Bild 3.2-1 Schematische Darstellung der Bestandteile des thermodynamischen Systems mit

- R: Reaktorgefäß
- M: Mantel (Kühlmantel des Reaktors + externes Kühlsystem mit Umwälzpumpe)
- I: lokale Wärmequellen,
 - I_R : z.B. durch exotherme chemische Reaktion im Reaktorgefäß
 - I_M : Wärmefreisetzung durch die Kühlmittel-Umwälzpumpe im Mantel
- C: Wärmekapazitäten,
 - C_R : des Mediums im Reaktor (z.B. chemische Reaktionspartner und -produkte)
 - C_M : des Kühlmediums in Mantel
- U: Umgebung

Im ersten Experiment wirkt eine lokal begrenzte chemische Reaktion als Wärmequelle I_R . Die Wärme wird im Reaktorgefäß R erst mit einer gewissen Verzögerung nachgewiesen; der Temperaturfühler befindet sich nicht am Ort der Wärmequelle. Dann gelangt die Wärme in den Kühlmantel M und von dort in die Umgebung U.

Im nächsten Experiment ist das System zunächst außer Betrieb und im thermodynamischen Gleichgewicht. Mit der Inbetriebnahme beginnt die Kühlmittel-Umwälzpumpe, Reibungswärme freizusetzen; sie erscheint als Wärmequelle I_M . Diese Wärme wird erst im Mantel M, dann im Reaktor R und schließlich in der Umgebung U nachgewiesen.

Ein drittes Experiment betrachtet den erstgenannten Fall genauer: Die Wärme aus I_R wird zuerst prompt (z.B. per Wärmestrahlung) in R nachgewiesen. Wegen der endlichen Wärmeleitfähigkeit und der Wärmekapazität C_R des Mediums, das im Reaktor enthalten ist, verteilt sich die Wärme in diesem Medium verzögert. Die Wär-

me wird deshalb mit Totzeit ein zweites Mal nachgewiesen (ausgedrückt durch C_R).
Usw.

Die einzelnen Kausalketten werden als Teilmodelle X_1, X_2, \dots aufgefaßt. Sie sollen zu einer Modellstruktur der Wärmeübergänge verbunden werden¹. Restriktionen gibt es dafür nicht.

Als Merkmale x_1, x_2, \dots werden die Wärmeübergänge im System definiert. Z.B. bezeichnet x_1 den Wärmeübergang von I_R nach R oder x_2 denjenigen von R nach M. Der Merkmalswert drückt dabei aus, ob ein Wärmeübergang nachgewiesen ist ($x=1$) oder nicht ($x=0$). Der Richtungssinn der Wärmeübergänge wird bei der Merkmalsdefinition nicht berücksichtigt. Untersucht werden drei Fälle mit unterschiedlichen Anzahlen von Teilmodellen.

3.2.1 Modellierung durch ein elektrisches Netzwerk

Wie im Abschnitt 2.1 an einem Beispiel gezeigt wurde, kann ein wärmetechnisches durch ein elektrotechnisches dynamisches System beschrieben werden. Dies wird nun in struktureller Hinsicht konkretisiert. Gegeben sind die im Bild 3.2-2 dargestellten Wärmeübergangs-Teilmodelle. Durch sie soll eine Struktur der Wärmeübergänge gefunden werden. Für den Vergleich steht ein Modell in Form eines elektrischen Netzwerkes zur Verfügung.

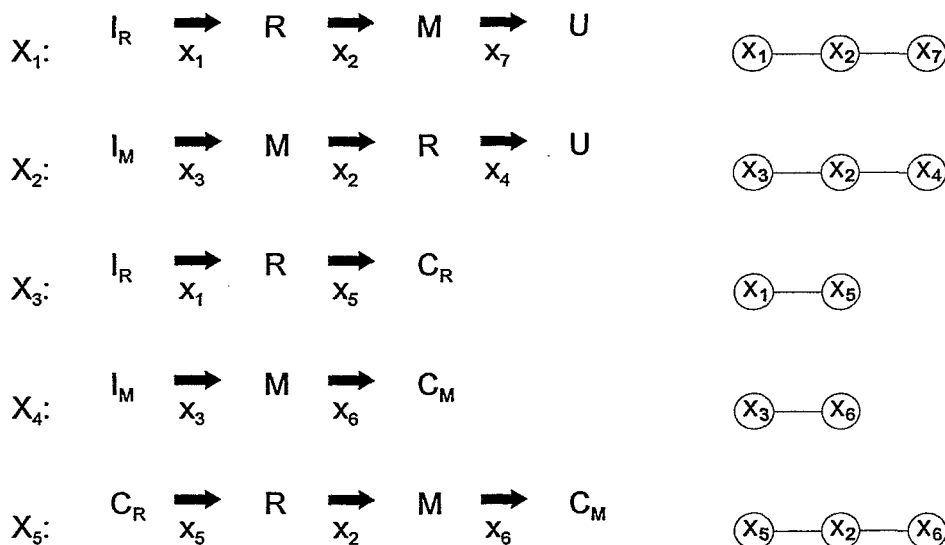


Bild 3.2-2 Wärmeübergänge zwischen den Bestandteilen des thermodynamischen Systems, die Teilmodelle und deren Merkmale

¹ Diese Art der Modellbildung ist im vorliegenden Fall zweifellos nicht notwendig, denn dieses einfache System kann schon mit elementarem physikalischen Verständnis analytisch modelliert werden. Bei komplizierteren Prozessen kann eine Kausalstruktur aber durchaus eine zweckmäßige Vorstufe auf dem Weg zu einem analytischen Modell sein.

Nach (2.1-8) ist die $(m,n)=(5,7)$ -Dimensionsmatrix

D:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
X_1 :	1	1	0	0	0	0	1	(3.2-1)
X_2 :	0	1	1	1	0	0	0	
X_3 :	1	0	0	0	1	0	0	
X_4 :	0	0	1	0	0	1	0	
X_5 :	0	1	0	0	1	1	0	

Nach (2.2-7) mit $C=2 \cdot I_7$ entsteht die $(n-m,n)=(2,7)$ Lösungsmatrix

Q:	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	1	-1	-2	3	-1	2	0	(3.2-2)
	-1	-1	0	1	1	0	2	

Aus der ersten Zeile von Q folgt nach (2.3-2) als erste Strukturmatrix

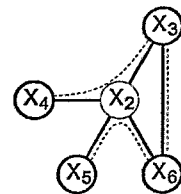
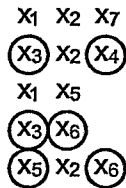
H_1 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
X_1 :	1	-1	0	0	0	0	0
X_2 :	0	-1	-2	3	0	0	0
X_3 :	1	0	0	0	-1	0	0
X_4 :	0	0	-2	0	0	2	0
X_5 :	0	-1	0	0	-1	2	0

Darin sind drei Merkmalsketten enthalten. Für sie folgt im einzelnen:

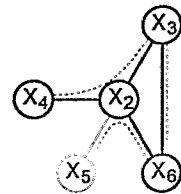
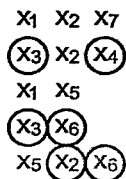
(1)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
X_1 :	0	0	0	0	0	0	0
X_2 :	0	0	-1	1	0	0	0
X_3 :	0	0	0	0	0	0	0
X_4 :	0	0	-1	0	0	1	0
X_5 :	0	0	0	0	-1	1	0



(2)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
X_1 :	0	0	0	0	0	0	0
X_2 :	0	0	-1	1	0	0	0
X_3 :	0	0	0	0	0	0	0
X_4 :	0	0	-1	0	0	1	0
X_5 :	0	-1	0	0	0	1	0



(3)

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
X ₁ :	1	-1	0	0	0	0	0
X ₂ :	0	-1	0	1	0	0	0
X ₃ :	1	0	0	0	1	0	0
X ₄ :	0	0	0	0	0	0	0
X ₅ :	0	0	0	0	0	0	0

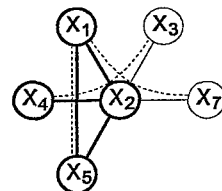
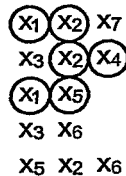


Bild 3.2-3 Substrukturen zu (1), (2), (3)

Die Koppelmerkmale und ihre Verbindungen sind dick hervorgehoben. Die gepunkteten Linien deuten die Lage der beteiligten Teilmodelle an.

Weil die drei Strukturen im Bild 3.2-3 Bestandteile einer einzigen Gesamtlösung sind, können sie miteinander vereinigt werden:

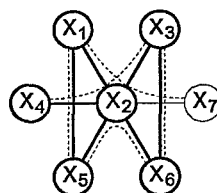


Bild 3.2-4 Die zur Strukturmatrix H₁ nach (3.2-3) gehörende Struktur

Die gezeigte Möglichkeit der Kettenbildung ist nicht die einzige; wegen des Fehlens von Restriktionen kommt es nicht auf bestimmte Verknüpfungen an. Eine andere, stets bestehende Verknüpfungsmöglichkeit besteht darin, die Ketten lediglich innerhalb der Spalten der Strukturmatrix zu bilden. Statt (3.2-3) ist dann

H₁: (3.2-3a)

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
X ₁ :	1	-1	0	0	0	0	0
X ₂ :	0	-1	-2	3	0	0	0
X ₃ :	1	0	0	0	-1	0	0
X ₄ :	0	0	-2	0	0	2	0
X ₅ :	0	-1	0	0	-1	2	0

Aus (3.2-3a) geht hervor, daß alle Teilmodelle, die in der gleichen H-Spalte ein besetztes Matrixelement aufweisen, sich im betreffenden Merkmal überschneiden; in der Struktur kommt jedes Merkmal nur ein einziges Mal vor. Die Struktur im Bild 3.2-4, die auch für die Verknüpfungsvariante (3.2-3a) gilt, bestätigt dies.

Aus der zweiten Zeile von (3.2-2) folgt nach (2.3-2) als zweite Strukturmatrix

H₂:

(3.2-4)

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇
X ₁ :	-1	-1	0	0	0	0	2
X ₂ :	0	-1	0	1	0	0	0
X ₃ :	-1	0	0	0	1	0	0
X ₄ :	0	0	0	0	0	0	0
X ₅ :	0	-1	0	0	1	0	0

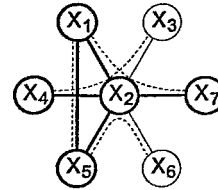


Bild 3.2-5 Struktur zu (3.2-4)

Die zu H₁ und H₂ gehörenden Strukturen (Bilder 3.2-4 und 3.2-5) werden vereinigt zu der Gesamtstruktur im Bild 3.2-6.

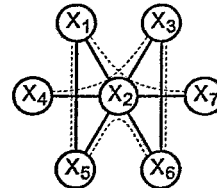


Bild 3.2-6 Gesamtstruktur

Die gefundene Gesamtstruktur (Bild 3.2-6) wird nun unter Beachtung der im Bild 3.2-2 gezeigten Wärmeübergangs-Richtungen dargestellt, Bild 3.2-7.

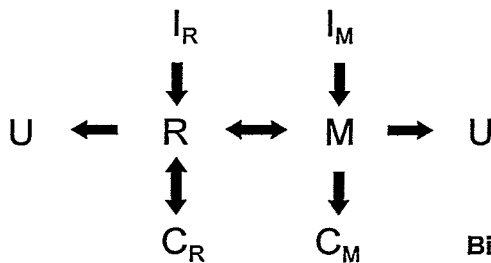
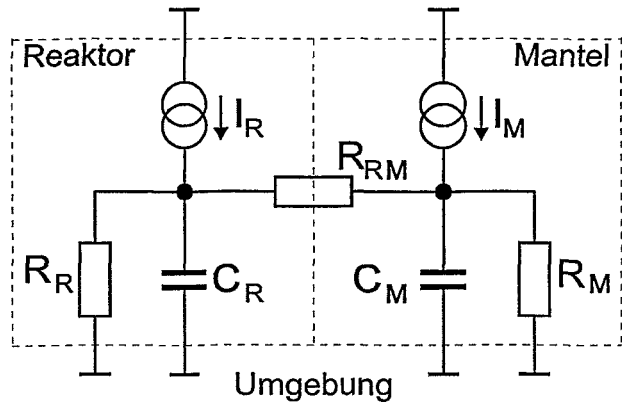


Bild 3.2-7 Die gesuchte Struktur der Wärmeübergänge

Aus Symmetriegründen wäre auch die Richtung von C_M nach M plausibel. Ein solcher Wärmeübergang ist aber in den Teilmodellen nicht enthalten und kann deshalb auch durch die Anwendung der Dimensionsanalyse nicht hinzugewonnen werden.

Da sich Wärmeeflüsse wie elektrische Ströme verhalten, werden Wärme-Stromquellen, Wärme-Kapazitäten und Wärme-Widerstände wie die entsprechenden elektrischen Elemente ersetzt und nach der gefundenen Struktur miteinander verbunden. Die Umgebung U erscheint elektrisch als Masse. Somit entsteht nach dem Schema im Bild 3.2-7 das Netzwerk im Bild 3.2-8. Genau dieses Netzwerk war bereits durch theoretische Prozeßanalyse bekannt.

Bild 3.2-8 Aus den nachgewiesenen und per Dimensionsanalyse miteinander verbundenen Wärmeflüssen abgeleitetes elektrisches Netzwerk



3.2.2 Lösungsraum mit verminderter Ausdehnung

Wegen $\text{Rang}(Q)=n-m$ sind die $n-m$ Lösungsvektoren linear unabhängig (s. Abschnitt 2.2). Weil diese Rangbedingung mit nur $n-m$ der insgesamt n Spalten der Lösungsmatrix Q erfüllt zu sein braucht, können die anderen m Spalten von Q beliebig sein. Also ist es auch möglich, daß bis zu m Spalten der Lösungsmatrix Q null sind; in den betreffenden Koordinaten hat der Lösungsraum keine Ausdehnung. Die Bedeutung solcher Spalten bzw. Koordinaten wird nun untersucht.

Wenn eine Q -Spalte durchgehend mit Nullen besetzt ist, dann folgt für die betreffende Spalte der Strukturmatrix H , daß diejenigen ihrer Elemente, deren zugehörige (gleichindizierte) Elemente der Dimensionsmatrix D besetzt sind, zeilenübergreifend gekoppelt werden können, s. Strukturregel d) im Abschnitt 2.3. Wenn also für ein Merkmal x_j die j -te Spalte von Q gleich null ist, dann überschneiden sich in diesem Merkmal alle diejenigen Teilmodelle, die dieses Merkmal aufweisen.

Gegenüber dem Beispiel im Abschnitt 3.2.1 werden weniger und z.T. andere Teilmodelle verwendet, die Merkmalsbezeichnungen aber übernommen, Bild 3.2-9.

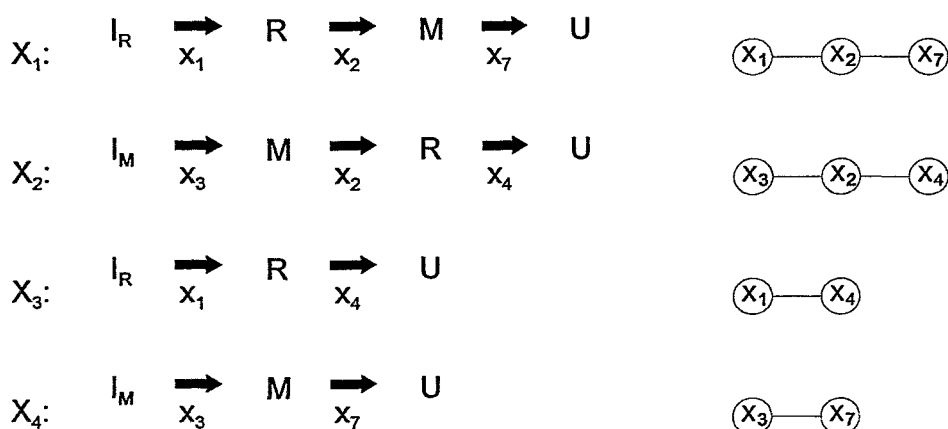


Bild 3.2-9 Die gegebenen Teilmodelle, wobei gegenüber Bild 3.2-2 x_3 und x_4 verändert sind sowie x_5 weggelassen ist.

Nach (2.1-8) ist die $(m,n)=(4,5)$ -Dimensionsmatrix

D:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_7	
X_1 :	1	1	0	0	1	(3.2-5)
X_2 :	0	1	1	1	0	
X_3 :	1	0	0	1	0	
X_4 :	0	0	1	0	1	

Nach (2.2-7) entsteht die Lösungsmatrix als $(n-m,n)=(1,5)$ -Lösungsvektor

Q:	x_1	x_2	x_3	x_4	x_7	(3.2-6)
	-1	0	-1	1	1	

und damit nach (2.3-2) die Strukturmatrix

H: (3.2-7)

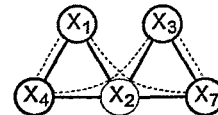
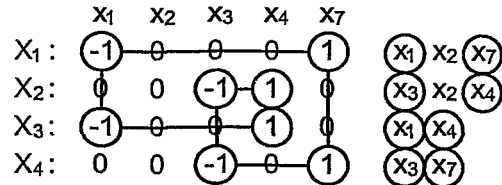


Bild 3.2-10 Struktur zu (3.2-7)

Weil dem Merkmal x_2 in Q durchgehend der Wert null zugeordnet ist, werden - der Strukturregel d) im Abschnitt 2.3 folgend mit der Wertzerlegung $0=-1+1$ (kurz ± 1) - die besetzten Elemente der x_2 -Spalte der Dimensionsmatrix (3.2-5) miteinander verknüpft. Damit entsteht eine zusätzliche Merkmalskette nebst zugehöriger Struktur:

H: (3.2-8)

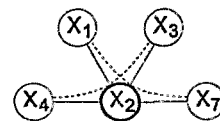
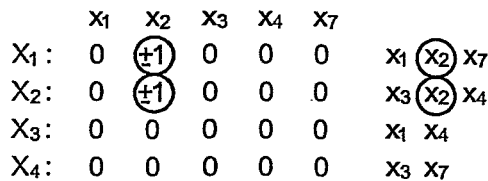
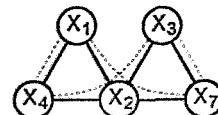


Bild 3.2-11 Struktur zu (3.2-8)

Die Strukturen aus den Bildern 3.2-10 und 3.2-11 werden zu der im Bild 3.2-12 dargestellten Gesamtstruktur vereint:

Bild 3.2-12 Gesamtstruktur



Wie sich zeigen lässt, entspricht der Gesamtstruktur im Bild 3.2-12 ein elektrisches Netzwerk, dem gegenüber Bild 3.2-8 die Kapazitäten C_R und C_M fehlen; die geringe-

re Information aus den Teilmodellen führt zu einer entsprechend kleineren Struktur.

3.2.3 Lösungsraum ohne Ausdehnung: Die triviale Lösung

Nach der Darstellung im Abschnitt 2.2 ist das Gleichungssystem (2.2-2) für $D_2=0$ und $m=n$ eindeutig lösbar. Im homogenen Fall $\underline{b}=\underline{0}$ gibt es dann nach (2.2-4) und (2.2-3) nur die triviale Lösung $\underline{q}=\underline{0}$, d.h. der Lösungsraum besteht nur aus dem Koordinatenursprung. Dann kann, wie sich aus der Strukturregel d) im Abschnitt 2.3 folgern lässt, die Dimensionsmatrix D direkt zur Strukturbestimmung herangezogen werden.

Aus den Beispielen der Abschnitte 3.2.1 und 3.2.2 werden insgesamt 6 Teilmodelle übernommen und ein Teilmodell wird neu eingeführt, Bild 3.2-13.

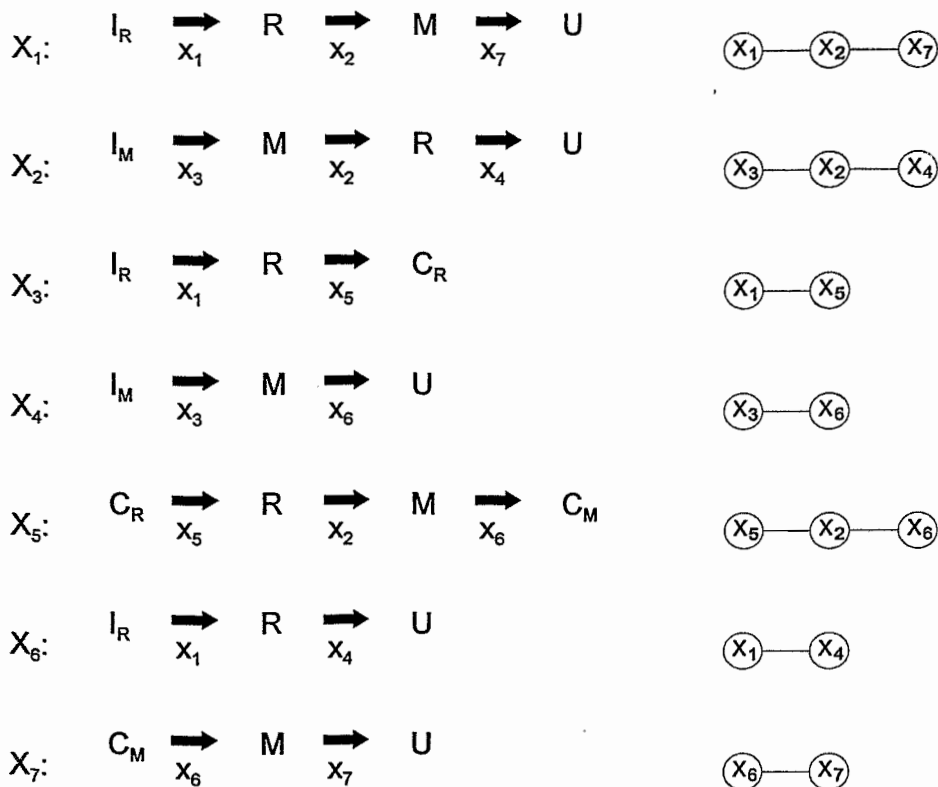


Bild 3.2-13 Die Wärmeübergangs-Teilmodelle zum vorliegenden Beispiel

Nach (2.1-8) ist die zugehörige $(m,n)=(7,7)$ -Dimensionsmatrix

D:

(3.2-9)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
X_1	1	1	0	0	0	0	1
X_2	0	1	1	1	0	0	0
X_3	1	0	0	0	1	0	0
X_4	0	0	1	0	0	1	0
X_5	0	1	0	0	1	1	0
X_6	1	0	0	1	0	0	0
X_7	0	0	0	0	0	1	1

Nach (2.2-7a) entsteht der Lösungsvektor

$$q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad (3.2-10)$$

Im Unterschied zu (3.2-6) sind in (3.2-10) alle Elemente null. Deswegen werden nach der Strukturregel d) die Strukturmatrix H und mit ihr die gesuchte Struktur unmittelbar aus der Dimensionsmatrix D abgeleitet:

H:

(3.2-11)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
X_1 :	± 1	± 1	0	0	0	0	± 1
X_2 :	± 1	± 1	± 1	± 1	0	0	
X_3 :	± 1		± 1		± 1	0	
X_4 :	± 1		± 1		± 1	± 1	
X_5 :		± 1	0		± 1	± 1	
X_6 :	± 1	0	0	± 1	0		
X_7 :	0	0	0	0	0	± 1	± 1

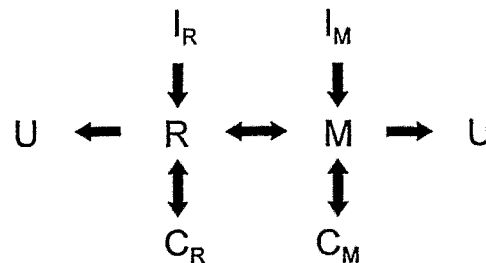
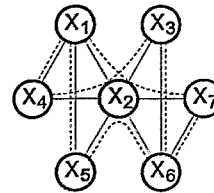


Bild 3.2-14 Struktur zu (3.2-11) und zugehörige Wärmeübergänge

Die im Bild 3.2-7 noch fehlende Übertragungsrichtung von C_M nach M ist im Bild 3.2-14 vorhanden.

3.3 Ein System Stab-Wagen

In [B98] ist das im Bild 3.3-1 skizzierte mechanische System eines auf einem Wagen balancierenden Stabes regelungstechnisch untersucht und dafür eine Struktur aus zwei Teilmodellen angegeben worden. Nur von den beiden Teilmodellen (Bild 3.3-2) ausgehend wird nachfolgend versucht, dieselbe Struktur zu bilden.

Bild 3.3-1

Mechanisches System Stab-Wagen:
Spurgeführter Wagen, der horizontal so bewegt werden kann, daß der auf ihm drehbar angebrachte Stab balanciert wird. Dabei bedeuten:

- $F(t)$: Kraft (Antrieb des Wagens)
- $s(t)$: Weg des Wagens
- $v(t) = \dot{s}(t)$: Geschwindigkeit
- $\phi(t)$: Drehwinkel des Stabes
- $\omega(t) = \dot{\phi}(t)$: Winkelgeschwindigkeit

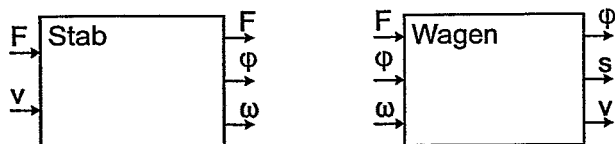
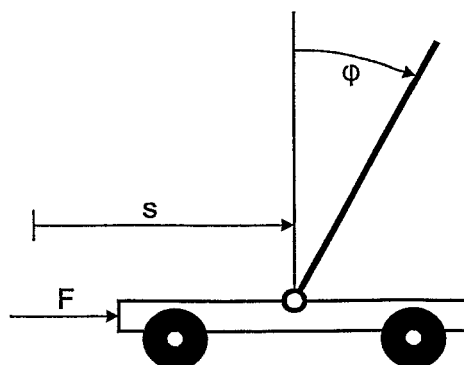


Bild 3.3-2 Teilmodelle des Stab-Wagen-Systems

Aus Plausibilitätsgründen gelten folgende Restriktionen:

- R3-1: An einem Teilmodell darf es keine direkten Rückkopplungen (vom Ausgang zum Eingang desselben Teilmodells) geben.
- R3-2: Zwei oder mehr Signalwege dürfen nicht unmittelbar zu einem einzigen Signalweg vereinigt werden.

Intern bestehen an die Teilmodelle keine Bedingungen, weswegen unterstellt wird, daß jeder Eingang auf jeden Ausgang wirken kann.

Eine Struktur, welche die Teilmodelle miteinander verbindet, kann einzig über deren Ein- und Ausgangsgrößen realisiert werden. Diese Größen werden deshalb als Merkmale definiert, allerdings nur qualitativ, so daß der Merkmalswert 1/0 nicht den Wert einer Größe, sondern das Vorhandensein/Nichtvorhandensein einer Größe am jeweiligen Teilmodell ausdrückt. Entsprechend ihrer Stellung am Teilmodell werden die Merkmale mit "e" für Eingang und "a" für Ausgang indiziert.

Die Teilmodelle enthalten innere (vom Eingang zum Ausgang gerichtete) Übertragungswege. Im Umkehrschluß werden die zur Verknüpfung der Teilmodelle notwendigen äußeren Übertragungswege als zusätzliche Verbindungs-Teilmodelle definiert ¹. Damit gibt es insgesamt folgende Teilmodelle:

¹ Weil sie Außen- statt Innenverbindungen realisieren, gilt für die Verbindungs-Teilmodelle die entgegengesetzte Übertragungsrichtung, d.h. vom Ausgang zum Eingang.

Teilmodell Stab:	$X_1: F_e, F_a, v_e, \omega_a, \phi_a$
Teilmodell Wagen:	$X_2: F_e, v_a, \omega_e, \phi_e, \phi_a, s_a$
Verbindungs-Teilmodelle:	$X_3: F_e, F_a$
	$X_4: \phi_e, \phi_a$
	$X_5: \omega_e, \omega_a$
	$X_6: v_e, v_a$

Der Ausgang s_a wird nicht weiter berücksichtigt, weil er nur an einem Teilmodell vorkommt und deshalb an keiner teilmodellübergreifenden Verknüpfung beteiligt sein kann. Nach (2.1-8) ist die $(m,n)=(6,8)$ -Dimensionsmatrix

D: (3.3-1)

	F_e	F_a	v_e	v_a	ω_e	ω_a	ϕ_e	ϕ_a
$X_1:$	1	1	1	0	0	1	0	1
$X_2:$	1	0	0	1	1	0	1	1
$X_3:$	1	1	0	0	0	0	0	0
$X_4:$	0	0	0	0	0	0	1	1
$X_5:$	0	0	0	0	1	1	0	0
$X_6:$	0	0	1	1	0	0	0	0

Eine reguläre $(6,6)$ -Matrix D_1 gemäß (2.2-2) entsteht durch Vertauschung der Spalten 5 und 6 bzw. von ω_e und ω_a . Nach (2.2-7) entsteht die folgende $(n-m,n)=(2,8)$ -Lösungsmatrix, wobei der Spaltentausch bereits wieder rückgängig gemacht ist (s. im Abschnitt 2.2):

Q:	F_e	F_a	v_e	v_a	ω_e	ω_a	ϕ_e	ϕ_a
	0	0	-1	1	-1	1	0	0
	-1	1	-1	1	0	0	-1	1

(3.3-2)

Aus der ersten Zeile von Q folgt nach (2.3-2) als erste Strukturmatrix

$H_1:$ (3.3-3)

	F_e	F_a	v_e	v_a	ω_e	ω_a	ϕ_e	ϕ_a
$X_1:$	0	0	-1	0	0	1	0	0
$X_2:$	0	0	0	1	-1	0	0	0
$X_3:$	0	0	0	0	0	0	0	0
$X_4:$	0	0	0	0	0	0	0	0
$X_5:$	0	0	0	0	-1	1	0	0
$X_6:$	0	0	-1	1	0	0	0	0

F_e F_a v_e ω_a ϕ_a

F_e v_a ω_e ϕ_e ϕ_a

F_e F_a

ϕ_e ϕ_a

ω_e ω_a

v_e v_a

Diese Lösung ist mit allen Restriktionen im Einklang. Ihre zugehörige Substruktur ist im Bild 3.3-3 als Blockschaltbild dargestellt, der Übersichtlichkeit halber ohne die Verbindungs-Teilmodelle. Die internen Verbindungen der Teilmodelle (gestrichelt) sind für die Strukturierung bedeutungslos; relevant sind nur die Außenverbindungen.

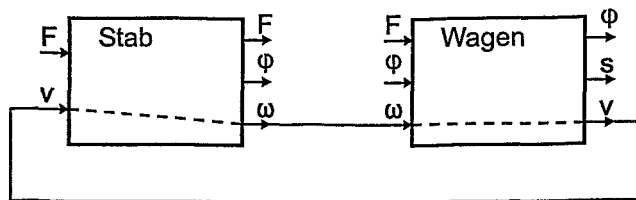


Bild 3.3-3 Blockschaltbild zu H_1

Die zur zweiten Strukturmatrix

H_2 : (3.3-4)

	F_e	F_a	v_e	v_a	ω_e	ω_a	ϕ_e	ϕ_a
X_1 :	-1	1	-1	0	0	0	0	1
X_2 :	-1	0	0	1	0	0	-1	1
X_3 :	-1	1	0	0	0	0	0	0
X_4 :	0	0	0	0	0	0	-1	1
X_5 :	0	0	0	0	0	0	0	0
X_6 :	0	0	-1	1	0	0	0	0

gehörende Struktur widerspricht den Restriktionen und soll deshalb durch Modifizierung (s. Abschnitt 2.4) auf ein zulässiges Strukturfragment reduziert werden. Die Reduzierung kann zielgerichtet erfolgen, da sich einzelne unzulässige Strukturbestandteile lokalisieren und entfernen lassen: zwei Schleifen in (3.3-5), die an X_1 und X_2 jeweils eine direkte Rückkopplung herstellen und daher R3-1 widersprechen sowie eine teilmodellübergreifende Merkmalskopplung, welche die ϕ_a -Ausgänge von X_1 und X_2 unmittelbar miteinander verbindet und daher R3-2 widerspricht.

	F_e	F_a	v_e	v_a	ω_e	ω_a	ϕ_e	ϕ_a
X_1 :	(-1)	(1)	-1	0	0	0	0	(1)
X_2 :	(-1)	(0)	0	1	0	0	(-1)	(1)
X_3 :	(-1)	(1)	0	0	0	0	(0)	(0)
X_4 :	0	0	0	0	0	0	(-1)	(1)
X_5 :	0	0	0	0	0	0	0	0
X_6 :	0	0	-1	1	0	0	0	0

(3.3-5)

Um in (3.3-5) die unzulässigen Verbindungen aufzutrennen, wird in diesen Verbindungen jeweils ein Koppellement ignoriert. Dazu wird das sowohl zur rechten Schleife als auch zur Merkmalskopplung gehörende Element ϕ_a in X_2 gewählt. Aus der linken Schleife wird F_e ignoriert, wobei zwei Alternativen unterschieden werden:

- (1) F_e in X_3 wird ignoriert. Dann kann eine einzelne durchgehende Kette gebildet werden. Die modifizierte Lösung aus (3.3-6) ist zulässig. Ihr zugehöriges Strukturfragment zeigt Bild 3.3-4 als Blockschaltbild.

	F_e	F_a	v_e	v_a	ω_e	ω_a	ϕ_e	ϕ_a		
X_1 :	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_e & F_a & v_e & \omega_e & \phi_a \\ F_a & v_a & \omega_e & \phi_e & \phi_a \end{pmatrix}$	
X_2 :	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_e & F_a \\ F_a & v_a \end{pmatrix}$	
X_3 :	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_e & F_a \\ \phi_e & \phi_a \end{pmatrix}$	
X_4 :	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \phi_e & \phi_a \\ \omega_e & \omega_a \end{pmatrix}$	
X_5 :	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega_e & \omega_a \\ v_e & v_a \end{pmatrix}$	
X_6 :	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} v_e & v_a \end{pmatrix}$	

(3.3-6)

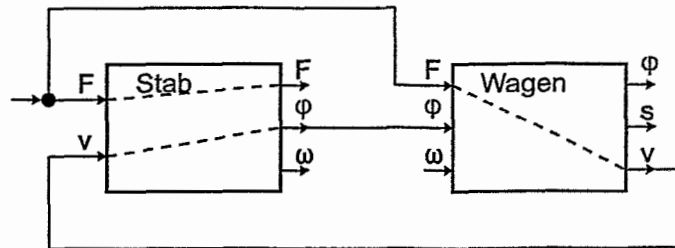


Bild 3.3-4 Blockschaltbild zu (3.3-6)

(2) F_e in X_1 wird ignoriert. Dann gibt es u.a. die folgende, aus einer Kette und einer Schleife bestehende Verbindungsvariante:

	F_e	F_a	v_e	v_a	ω_e	ω_a	ϕ_e	ϕ_a	
X_1 :	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_e & F_a & v_e & \omega_e & \phi_a \\ F_e & v_a & \omega_e & \phi_e & \phi_a \end{pmatrix}$
X_2 :	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_e & F_a \\ F_a & v_a \end{pmatrix}$
X_3 :	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_e & F_a \\ \phi_e & \phi_a \end{pmatrix}$
X_4 :	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \phi_e & \phi_a \\ \omega_e & \omega_a \end{pmatrix}$
X_5 :	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega_e & \omega_a \\ v_e & v_a \end{pmatrix}$
X_6 :	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} v_e & v_a \end{pmatrix}$

(3.3-7)

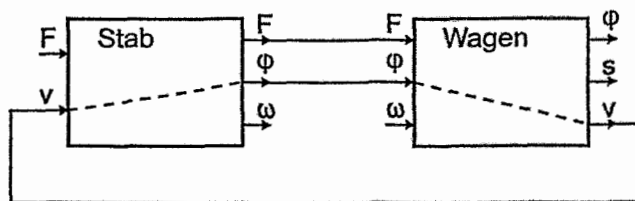


Bild 3.3-5 Blockschaltbild zu (3.3-7)

Die Strukturen aus den Alternativen (1) und (2) sind nicht miteinander vereinbar, denn gemäß R3-2 ist es nicht möglich, am F_e -Eingang von X_2 (Wagen) zwei Signalwege unmittelbar miteinander zu vereinigen. Zur Auswahl von einer der beiden Strukturen dient das Bewertungskriterium S1 (Abschnitt 2.4), wonach der Quotient a_v/a_ω minimal sein soll. Aus (3.3-6) und (3.3-7) ist für beide Strukturen $a_v/a_\omega = 12/11$ ablesbar. Demnach kann keine Auswahl getroffen werden; beide Strukturen sind gleichrangig. Offenbar kommt der Vorzug, den die Schleife in (3.3-7) gegenüber der Kette in (3.3-6) besitzt (s. Bewertungskriterium S3), deswegen nicht zum tragen, weil die Kette in (3.3-6) ihrerseits dadurch bevorteilt ist, daß sie länger als die Schleife ist

(s. Bewertungskriterium S2).

Jede der beiden Strukturen aus den Bildern 3.3-5 und 3.3-6 wird einzeln mit der Struktur aus Bild 3.3-3 vereint. Die beiden alternativen Ergebnisse, in denen nur die strukturelevanten (äußeren) Verbindungen dargestellt werden, gehen aus dem Bild 3.3-6 hervor.

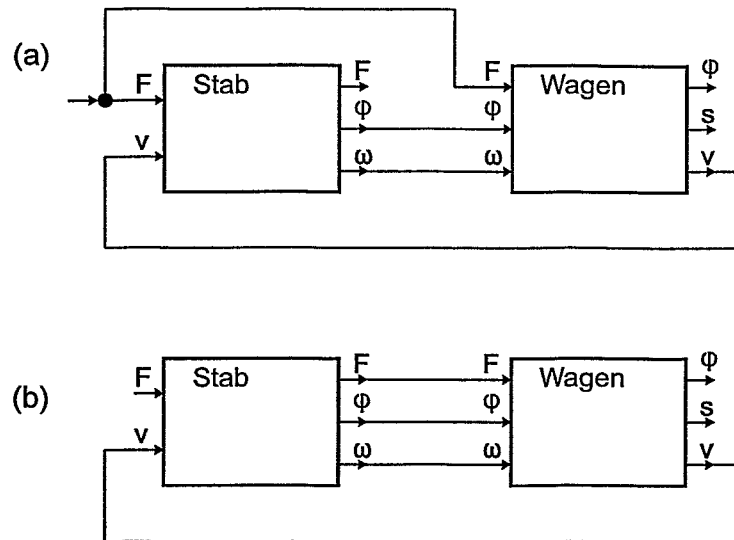


Bild 3.3-6 Gesamtblockschaltbilder als Vereinigung der Struktur aus dem Bild 3.3-3 mit den Strukturen aus den Bildern 3.3-5 (a) und 3.3-6 (b)

Das Ergebnis (a) ist, wie aus dem physikalischen Verständnis heraus (also erst mit Zusatzinformation) deutlich wird, nicht sinnvoll. Das Ergebnis (b) hingegen wird bestätigt durch die in [B98] S. 57 angegebene, physikalisch begründete Struktur.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Zur Lösung des Strukturierungsproblems werden die Merkmalsmengen der Teilmodelle so weit miteinander überschritten, wie es bestehende strukturelle Restriktionen zulassen. Eine zulässige Modellstruktur wird dabei so gewonnen, daß zunächst auf algebraischem Wege verschiedene unabhängige Substrukturen der zu erwartenden Gesamtstruktur gebildet werden. Die Substrukturen werden dann den Restriktionen unterzogen. Die danach noch verbliebenen (zulässigen) Strukturen werden schließlich miteinander verknüpft.

Praktisch kann es sinnvoll sein, nicht den gesamten formalen Lösungsraum nach zulässigen Lösungen abzusuchen, sondern gefundene unzulässige Lösungen so zu modifizieren, daß sie den Restriktionen genügen. Durch die Modifikation der algebraisch gefundenen Substrukturen kommt es allerdings vor, daß die entstehenden Strukturfragmente nicht miteinander vereinbar sind und deswegen alternative Lösungen hervorbringen. Muß unter alternativen Lösungen eine Auswahl getroffen werden, kann zur Bewertung der Vernetzungsgrad der Merkmale herangezogen werden. Besondere Bedeutung haben dabei die Merkmalsketten und -schleifen, die in den Strukturen enthalten sind.

Die angegebenen Beispiele zeigen eine gewisse Vielfalt an Anwendungsmöglichkeiten und methodischen Besonderheiten des entwickelten Konzeptes. Nach diesem Anliegen waren die Beispiele auch konzipiert worden. Allerdings bleiben die Beispiele deswegen vergleichsweise elementar. Vorgesehen ist deshalb die Untersuchung eines umfassenden realen Strukturierungsproblems, voraussichtlich für eine chemische Reaktion in einem Rührkesselreaktor.

Ein weiterer vorgesehener Untersuchungsgegenstand ist der Umgang mit fehlerbehafteten Teilmodellen. Ziel ist es dabei, die Fehler bereits vor der Verknüpfung der Teilmodelle aufzuspüren und zu eliminieren. Verständlicherweise kann nur von fehlerfreien Teilmodellen erwartet werden, daß sie sich auch zu einer umfassenden und eng vernetzten Struktur verknüpfen lassen. Zwar können auch fehlerhafte Teilmodelle Strukturen bilden, doch im allgemeinen - wie sich vermuten läßt - mit geringerem Vernetzungsgrad als fehlerfreie Teilmodelle. Diese Vermutung impliziert folgenden methodischen Ansatz für den indirekten Nachweis von Fehlern: Aus einer Struktur sind zwar ihre enthaltenen Fehler nicht direkt ablesbar, doch treten die Fehler indirekt dadurch in Erscheinung, daß sich nach einer Modifizierung der Teilmodelle eine umfassendere und somit glaubwürdigere Struktur bilden läßt. Einige Kriterien, nach denen sich die Glaubwürdigkeit einer Struktur bewerten läßt, sind im vorliegenden Bericht bereits angegeben.

Für die Modifizierung von Teilmodellen kommen u.a. evolutionäre Prinzipien (Genetische Algorithmen) in Betracht; die eingeführte Darstellung der Teilmodelle als Merkmalsmengen bzw. als Binärvektoren bietet dafür eine günstige Voraussetzung.

Unabhängig davon soll versucht werden, fehlerhafte Merkmale mit Hilfe informationstheoretischer Methoden und unter Verwendung von Prinzipien der Mustererkennung (vorzugsweise nach dem in [H98-1] beschriebenen Prinzip) auch direkt nachzuweisen.

Literatur

- [B98] Bode, H.: MATLAB in der Regelungstechnik. B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1998
- [B75] Burmeister, H.-I.: Matrizen. Lehrbrief, TU Dresden, 1975
- [H98-1] Hoppe, D.: Modellbildung durch Auswertung von Fehlerdimensionen. Projektbericht FZR-244, Forschungszentrum Rossendorf, 1998
- [H98-2] Hoppe, D.: Nutzung der statistischen Informationstheorie und eines tensororientierten Klassifizierungsverfahrens zur Signalerkennung an einem chemischen Prozeß. Projektbericht FZR-225, Forschungszentrum Rossendorf, 1998
- [J53] Jung, H.W.E.: Matrizen und Determinanten. Fachbuchverlag GmbH Leipzig, 1953
- [S92] Spurk, J.H.: Dimensionsanalyse in der Strömungslehre. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 1992