

# Polyedrisierung dreidimensionaler digitaler Objekte mit Mitteln der konvexen Hülle

Henrik Schulz

Dezember 2008

Wissenschaftlich-Technische Berichte  
**FZD-506**  
Dezember 2008

Henrik Schulz

**Polyedrisierung dreidimensionaler digitaler  
Objekte mit Mitteln der konvexen Hülle**

Bibliothek D 120



100166209



**Forschungszentrum  
Dresden** Rossendorf

# Polyedrisierung dreidimensionaler digitaler Objekte mit Mitteln der konvexen Hülle

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades Doktoringenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt an der

Technischen Universität Dresden

Fakultät Informatik

eingereicht von

Dipl.-Inf. Henrik Schulz

geboren am 13. März 1978 in Elsterwerda

Tag der Einreichung: 4. Dezember 2007

Tag der Verteidigung: 21. Juli 2008

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Wladimir A. Kovalevski (Betreuer),  
Technische Fachhochschule Wildau

Prof. Dr.-Ing. habil. Siegfried Fuchs,  
Technische Universität Dresden

Prof. Dr. rer. nat. habil. Reinhard Klette,  
The University of Auckland, New Zealand

Dresden im Oktober 2008



# Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Intelligente Systeme der Fakultät Informatik der Technischen Universität Dresden. Seit dem Beginn meiner Forschung zum Thema Polyedrisierung 3-dimensionaler digitaler Objekte im Juli 2003 haben mir viele Personen Unterstützung gegeben, wofür ich mich hiermit ganz herzlich bedanken möchte.

Mein größter Dank gilt Prof. Wladimir Kovalevski für seine Bereitschaft, das Finden und Spezifizieren der Aufgabenstellung für diese Dissertation zu unterstützen sowie die Arbeit über mehrere Jahre zu betreuen. Ohne seinen fachlichen Rat und seine Hilfe in theoretischen und auch praktischen Fragen der hier behandelten Aufgabe hätte die Arbeit nicht entstehen können. Es ist mir eine große Ehre, von einem herausragenden Wissenschaftler auf dem Gebiet der digitalen Topologie betreut und unterstützt worden zu sein. Mein weiterer Dank gilt Prof. Kovalevski sowie seiner Frau Dr. Bärbel Kovalevski dafür, jederzeit in ihrem Haus willkommen gewesen zu sein. Für die Begutachtung der Dissertation sei Prof. Kovalevski ganz besonderer Dank gewidmet.

Prof. Siegfried Fuchs möchte ich ebenfalls meinen tiefen Dank aussprechen. Durch ihn wurde ich auf das Gebiet der digitalen Topologie aufmerksam und von ihm lernte ich in vielen Vorlesungen die Grundlagen, mit denen die hier vorliegende Arbeit erst möglich wurde. Zahlreiche fachliche Gespräche verbunden mit hilfreichen Hinweisen und Anregungen während der gesamten Zeit sowie die Unterstützung in Angelegenheiten auch außerhalb der fachlichen Probleme halfen mir sehr, die Arbeit abzuschließen. Mein Dank gilt Prof. Fuchs ebenfalls für das Erstellen des Erstgutachtens zu dieser Dissertation.

Weiterhin danke ich allen Kollegen des Lehrstuhls Intelligente Systeme für ihre

Bereitschaft, meine Arbeit durch häufige Diskussionen mit inspirierenden Ideen und Hinweisen zu unterstützen. Vor allem danke ich Dr. Boris Flach für seine kritische Betrachtung meiner Arbeit und seine wissenschaftlichen Ratschläge. Für viele Anregungen und Gespräche danke ich ebenfalls Dr. Dmitrij Schlesinger, Dr. Helmut Schirmer, Holger Heidrich, Denis Kirmizigül, Alexander Morgenstern und André Steinborn, sowie meinen ehemaligen Kollegen Dr. Falk Uhlemann, Dr. Wor-ku Alemu und Yingtao Wang. Mein ganz besonderer Dank gilt Bettina Weser für ihre Hilfe in den verschiedensten Situationen.

Dem Forschungszentrum Dresden - Rossendorf gebührt mein Dank für die langjährige Unterstützung meiner Arbeit durch die Schaffung einer optimalen Arbeitssituation. Insbesondere danke ich Dr. Wolfgang Matz, Dr. Uwe Konrad, Dr. Manfred Kunicke, Dr. Wolf-Jochen Linnemann, Erhard Müller, Nils Schmeißer, Thomas Brenner und Tobias Müller, sowie allen Kollegen der Abteilung Informationstechnologie für viele anregende Diskussionen betreffend meiner Arbeit.

Prof. Reinhard Klette danke ich für die Begutachtung meiner Arbeit und für seine hilfreichen Hinweise, auch während einiger persönlicher Gespräche in Dresden und in Auckland. Meinem Hamburger Kollegen Dr. Peer Steldinger danke ich für einige hilfreiche Diskussionen bezüglich dieser Arbeit.

Darüber hinaus danke ich meiner Lebensgefährtin Christiane Weise für ihre Geduld und ihre Unterstützung bei allen auftretenden Problemen. Meinen Eltern Brigitte Schulz und Helmut Schulz danke ich für ihre Bereitschaft, mein Vorhaben der Promotion von Anfang an zu unterstützen und zu fördern. Meinem Bruder Hagen Schulz gilt ebenfalls mein besonderer Dank. Allen meinen Freunden danke ich für ihr Verständnis und vor allem danke ich Uwe Reinhardt für unzählige Gespräche und Ideen.

Abschließend danke ich der Fakultät Informatik der Technischen Universität Dresden, mein Promotionsverfahren durchzuführen.

# Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	ix
Definitionenverzeichnis	xi
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Problembeschreibung . . . . .	3
1.3 Ziel der Arbeit . . . . .	4
1.4 Struktur der Arbeit . . . . .	5
<b>2 Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Abstrakte Polyeder und Konvexität . . . . .	7
2.2 Konkavitäten und Grad der Nicht-Konvexität . . . . .	9
2.3 Relevante Zellen . . . . .	12
2.4 Rand und Begrenzung . . . . .	15
<b>3 Problembeschreibung</b>	<b>21</b>
3.1 Ausgangsdaten . . . . .	21
3.2 Trennung der Zellen . . . . .	23
3.3 Repräsentation der Elemente . . . . .	23
3.4 Eigenschaften der Zielstruktur . . . . .	25
3.5 Zusammenfassung . . . . .	27
<b>4 Polyedrisierung</b>	<b>31</b>
4.1 Die konvexe Hülle . . . . .	32

4.1.1	Grundlagen . . . . .	32
4.1.2	Lokale Ecken . . . . .	34
4.1.3	Konvexe Ecken . . . . .	35
4.1.4	Die initiale konvexe Hülle . . . . .	36
4.1.5	Erweiterung der initialen konvexen Hülle . . . . .	37
4.1.6	Komplanare Flächen . . . . .	39
4.1.7	Beispiele . . . . .	42
4.1.8	Optimierung des Algorithmus . . . . .	46
4.2	Nicht-konvexe Mengen von Voxeln . . . . .	49
4.2.1	Zusammenhangskomponenten . . . . .	50
4.2.2	Arten der Zusammenhangskomponenten . . . . .	51
4.2.3	Markierung sichtbarer Flächen . . . . .	53
4.3	Geschlecht der Oberfläche . . . . .	54
4.3.1	Berechnung von $g$ . . . . .	55
4.3.2	Geschlecht der Oberfläche und Tunnel . . . . .	57
4.4	Modifikation der konvexen Hülle . . . . .	59
4.4.1	Modifikation an Konkavitäten . . . . .	59
4.4.2	Modifikation bei Hohlräumen . . . . .	63
4.4.3	Zellen innerhalb nicht-konvexer Polyeder . . . . .	65
4.5	Behandlung von Objekten mit $g > 0$ . . . . .	69
4.5.1	Modifikation von einfachen Tunneln . . . . .	70
4.5.2	Nicht-einfache Tunnel . . . . .	72
4.5.3	Heuristisches Verfahren . . . . .	74
4.5.4	Zerlegung der mehrfach zusammenhängenden Komponenten . . . . .	78
4.5.5	Verzweigte Tunnel . . . . .	82
4.5.6	Erhaltung der Konvexität von Flächen . . . . .	84
4.6	Zusammenfassung . . . . .	86
4.6.1	Klassifikation der Objekte . . . . .	86
4.6.2	Grad der Nicht-Konvexität . . . . .	89
4.6.3	Endlichkeit des Algorithmus . . . . .	90
4.6.4	Zeitkomplexität des Algorithmus . . . . .	92



<b>5</b>	<b>Berechnung des Volumens der Polyeder</b>	<b>93</b>
5.1	Definition . . . . .	93
5.2	Berechnung . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Flächenanzahl der Polyeder</b>	<b>97</b>
6.1	Flächenanzahl der konvexen Hülle konvexer Objekte . . . . .	97
6.2	Polyeder mit konvexen Hohlräumen . . . . .	102
6.3	Polyeder mit konvexen Konkavitäten . . . . .	103
6.4	Polyeder mit nicht-konvexen ZKHs . . . . .	105
6.5	Zusammenfassung . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Oberflächeninhalt der Polyeder</b>	<b>107</b>
7.1	Oberflächeninhalt der konvexen Hülle konvexer Objekte . . . . .	107
7.2	Polyeder mit konvexen Hohlräumen . . . . .	108
7.3	Minimierung des Oberflächeninhaltes . . . . .	110
7.4	Polyeder mit Konkavitäten mit $g = 0$ . . . . .	112
7.5	Polyeder mit Konkavitäten mit $g > 0$ und Tunneln . . . . .	116
7.6	Polyeder mit nicht-konvexen Hohlräumen . . . . .	119
7.7	Zusammenfassung . . . . .	120
7.8	Vergleich der Minimalitätseigenschaften . . . . .	121
<b>8</b>	<b>Experimente und Beispiele</b>	<b>123</b>
8.1	Objekte mit Konkavitäten vom Geschlecht $g = 0$ . . . . .	123
8.1.1	Objekte mit $G_{nc}(P) = 1$ . . . . .	123
8.2	Objekte mit Tunneln . . . . .	130
8.2.1	Tunnel . . . . .	130
8.2.2	Konkavitäten vom Geschlecht $g > 0$ . . . . .	134
8.3	Schlussfolgerungen . . . . .	140
<b>9</b>	<b>Folgerungen für den 2-dimensionalen Fall</b>	<b>141</b>
9.1	Polygonisierung . . . . .	141
9.2	Minimalität der Kantenanzahl . . . . .	144

9.3	Minimalität des Umfanges . . . . .	145
<b>10</b>	<b>Abschließende Bemerkungen</b>	<b>149</b>
10.1	Zusammenfassung . . . . .	149
10.2	Offene Probleme . . . . .	152
<b>A</b>	<b>Definitionen und Theoreme</b>	<b>155</b>
A.1	Allgemeine Topologie . . . . .	155
A.2	Digitale Topologie . . . . .	157
A.2.1	Lokal endliche Räume . . . . .	157
A.2.2	Eigenschaften der lokal endlichen Räume . . . . .	161
A.2.3	Abstrakte Zellenkomplexe . . . . .	163
A.2.4	Mannigfaltigkeiten . . . . .	165
A.2.5	Kartesische Komplexe . . . . .	167
A.3	Lineare Algebra . . . . .	168
A.4	Digitale Geometrie . . . . .	168
A.5	Datenstrukturen . . . . .	170
A.5.1	Blockkomplexe . . . . .	170
A.5.2	Zellenlisten . . . . .	171
<b>B</b>	<b>Theorem zur konvexen Hülle</b>	<b>175</b>
<b>C</b>	<b>Zellenliste der initialen konvexen Hülle</b>	<b>179</b>

# Symbolverzeichnis

$A$	abstrakter Zellenkomplex (AC Komplex)
$B$	Berandungsrelation
$B(A)$	Blockkomplex eines AC Komplexes $A$
$BR$	Berandungsrelation in Blockkomplexen
$c$	Zelle eines AC Komplexes
$c^n$	$n$ -dimensionale Zelle eines AC Komplexes
$c_{\partial S}$	Randzelle
$c_r$	relevante Randzelle
$CH(S)$	konvexe Hülle einer Menge $S$ von Zellen eines AC Komplexes
$Cl(e, T)$	Abschluss eines Elementes $e$ in $T$
$d$	Dimension einer Zelle oder eines AC Komplexes
$dim$	Dimensionsfunktion
$Dim$	Dimensionsfunktion in Blockkomplexen
$\partial S$	Rand eines Teilkomplexes $S$ eines AC Komplexes
$e$	Element eines Raumes
$ext(S, A)$	Äußeres eines Teilkomplexes $S$ eines AC Komplexes $A$
$f(S)$	Homöomorphismus auf einem topologischen Raum $S$
$Fr(S, T)$	Begrenzung einer Teilmenge $S$ eines Raumes $T$
$g$	topologisches Geschlecht einer Oberfläche
$G_{nc}(P)$	Grad der Nichtkonvexität eines AG Polyeders $P$
$h$	Gitterkonstante
$int(S, A)$	Inneres eines Teilkomplexes $S$ eines AC Komplexes $A$

$M$	Menge von Flächen eines AG Polyeders
$M_n$	$n$ -dimensionale kombinatorische Mannigfaltigkeit
$\vec{n}$	Normale einer Fläche
$\hat{n}$	Punktnormale einer Zelle
$N(e)$	Nachbarschaft eines Elementes $e$
$O_S$	Oberflächeninhalt eines Objektes $S$
$P$	abstraktes geometrisches Polyeder
$\hat{P}$	trennendes AG Polyeder
$R$	Region
$S$	Teilkomplex eines AC Komplexes
$S'$	Zusammenhangskomponente von Hintergrundvoxeln innerhalb $CH(S)$
$SN(e)$	kleinste Nachbarschaft eines Elementes $e$
$SON(e, T)$	kleinste offene Umgebung eines Elementes $e$ in $T$
$T$	topologischer Raum
$U(S)$	kontinuierliches Urbild eines digitalen Objektes $S$
$\vec{v}$	Ortsvektor einer Zelle eines AC Komplexes
$V$	Volumen eines AG Polyeders

# Definitionenverzeichnis

ACC	abstrakter Zellenkomplex (AC Komplex)	Abschn. A.2.3	S.163
AGP	abstraktes geometrisches Polyeder	Abschn. 2.1	S.8
ALF	lokal endlicher Raum (ALF Raum)	Abschn. A.2.1	S.159
AP	abstraktes Polyeder	Abschn. 2.1	S.8
AU	Ausschneiden	Abschn. 4.5.1	S.70
BD	Rand	Abschn. A.2.3	S.164
BK	Blockkomplex	Abschn. A.5.1	S.170
BR	Berandungsrelation	Abschn. A.2.2	S.161
CA	ZKH-Hohlraum	Abschn. 4.2.2	S.51
CH	konvexe Hülle	Abschn. 2.1	S.9
CL	abgeschlossen	Abschn. A.2.2	S.161
CO	ZKH-Konkavität	Abschn. 4.2.2	S.51
CP	konvexes Polyeder	Abschn. 2.1	S.8
CS	Abschluss	Abschn. A.2.2	S.162
CU	topologische Kurve	Abschn. A.2.5	S.167
CV	Konkavität (Polyeder)	Abschn. 2.2	S.9
DCS	digitale konvexe Teilmenge	Abschn. A.4	S.169
DHS	digitaler Halbraum	Abschn. A.4	S.168
DK2	digitale Kreisscheibe	Abschn. A.4	S.169
DK3	digitale Kugel	Abschn. A.4	S.169
DPP	digitales Ebenenstück	Abschn. A.4	S.169
DSS	digitale Strecke	Abschn. A.4	S.169

EC	EULER Charakteristik	Abschn. 4.3	S.55
ES	elementare Unterteilung	Abschn. A.2.4	S.165
EXT	Äußeres	Abschn. A.2.3	S.164
FR	Begrenzung, topologischer Rand	Abschn. A.2.1	S.158
HN	homogen- $n$ -dimensional	Abschn. A.2.3	S.164
HOM	Homöomorphismus	Abschn. A.1	S.156
IN	Inzidenz	Abschn. A.2.1	S.158
INT	Inneres	Abschn. A.2.3	S.164
IP	Inzidenzpfad	Abschn. A.2.1	S.158
IS	Inzidenzstruktur	Abschn. A.5.1	S.171
KA	Kartesischer Komplex	Abschn. A.2.5	S.167
KH	kombinatorisch homöomorph	Abschn. A.2.4	S.166
KK	kombinatorische Koordinaten	Abschn. A.2.5	S.167
KV0	konkave 0-Zelle	Abschn. 2.3	S.14
KX0	konvexe 0-Zelle	Abschn. 2.3	S.13
KX1	konvexe bzw. konkave 1-Zelle	Abschn. 2.3	S.13
KX3	konvexe 3-Zelle	Abschn. 4.1.3	S.35
LFS	lokal endlicher Raum (LF Raum)	Abschn. A.2.1	S.157
LK	Linearkombination	Abschn. A.3	S.168
LKK	Konvexkombination	Abschn. A.3	S.168
MA	kombinatorische Mannigfaltigkeit	Abschn. A.2.4	S.166
MB	offene kombinatorische $m$ -Kugel	Abschn. A.2.4	S.165
MM	minimale, maximale Elemente	Abschn. A.2.2	S.161
MS	kombinatorische $(m - 1)$ -Sphäre	Abschn. A.2.4	S.165
NB	Nachbarschaft	Abschn. A.2.1	S.157
NK	Grad der Nicht-Konvexität	Abschn. 2.2	S.10
NP	$n$ -dimensionaler Weg	Abschn. A.2.3	S.164
NR	Nachbarschaftsrelation	Abschn. A.2.1	S.158
OP	offen	Abschn. A.2.2	S.161
OT	Opponenten	Abschn. A.2.1	S.158

PC	echte Zelle	Abschn. A.2.4	S.165
PN0	Punktnormale einer konvexen 0-Zelle	Abschn. 4.5.3	S.76
PN3	Punktnormale einer 3-Zelle	Abschn. 4.5.3	S.76
PR	Eindrücken	Abschn. 4.4.1	S.60
PR2	Eindrücken	Abschn. 4.5.3	S.76
RD	dichte Region	Abschn. A.2.3	S.164
RG	Region	Abschn. A.2.3	S.164
RZ0	relevante 0-Zelle	Abschn. 2.3	S.13
RZ1	relevante 1-Zelle	Abschn. 2.3	S.12
RZ2	relevante 2-Zelle	Abschn. 2.3	S.12
SC	Teilkomplex eines AC Komplexes	Abschn. A.2.3	S.163
SN	kleinste Nachbarschaft	Abschn. A.2.1	S.157
SON	kleinste offene Umgebung	Abschn. A.2.2	S.162
SP0	Sattelpunkt	Abschn. 2.3	S.14
SZ	stark zusammenhängend	Abschn. A.2.3	S.164
TA	Axiome der Punkttrennung	Abschn. A.1	S.156
TF	dicke, dünne Begrenzung	Abschn. A.2.1	S.159
TG	topologisches Geschlecht	Abschn. A.2.4	S.166
TI	topologische Invariante	Abschn. A.1	S.156
TR	topologischer Raum	Abschn. A.1	S.155
TU	ZKH-Tunnel	Abschn. 4.2.2	S.51
TUE	einfacher bzw. nicht-einfacher Tunnel	Abschn. 4.5	S.69
VI	sichtbar	Abschn. 4.1.5	S.37
ZKH	Zusammenhangskomponente von Hintergrundvoxeln innerhalb der konvexen Hülle	Abschn. 4.2.2	S.51
ZL	Zellenliste	Abschn. A.5.2	S.171
ZS	Zusammenhang	Abschn. A.2.1	S.158





# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Motivation

Es existieren heute mehrere verschiedene Aufnahmeverfahren, um Objekte der realen Welt in Form von 3-dimensionalen digitalen Daten abzubilden und zu speichern. Die verbreitetsten dieser Verfahren sind die Computertomographie (CT), die Magnetresonanztomographie (MRT) und die Positronen-Emissions-Tomographie (PET). Trotz der erheblichen Unterschiede in ihren Funktionsweisen haben all diese Verfahren als Gemeinsamkeit die Tatsache, dass sie echte 3-dimensionale Bilder als Ergebnis liefern, wobei CT-Daten Bilder in Form von Voxelmengen darstellen, MRT- und PET-Daten sind dagegen Mengen von Schnittbildern, die erst durch Registration in Voxeldaten überführt werden [45].

Letzter Ansatz, also die Verarbeitung einer Menge 2-dimensionaler Bilder zu einem 3-dimensionalen Bild kann jedoch auch von anderen Verfahren geleistet werden. Hier ist vorrangig das Gebiet der Stereoanalyse hervorzuheben. Zu diesem Gebiet gehören Verfahren, die verschiedene Bilder eines Objektes oder einer Szene nutzen, um daraus ein 3-dimensionales Modell der Szene zu berechnen.

Alle diese Verfahren haben ein gemeinsames Ziel: Da wir Menschen in einer 3-dimensionalen Welt leben und diese als solche auch 3-dimensional wahrnehmen, sind wir versucht, eine Repräsentation von Teilen der Welt in Form von Modellen zu realisieren, die die Dimensionalität der Welt erhalten. Dies gestaltet sich aus dem Grunde schwierig, da die meisten der heute verbreiteten Aufnahme- und An-

zeigeräte für Bilder, also Kameras und Bildschirme, lediglich zwei Dimensionen des Raumes verarbeiten können. Die Modelle, mit denen wir arbeiten und mit deren Hilfe wir Informationen über die Welt gewinnen wollen, sollen dieser Einschränkung jedoch nicht unterliegen. Sie sollen die reale Welt möglichst verständlich und vollständig repräsentieren.

Bei der Wahrnehmung 3-dimensionaler Objekte sind wir Menschen vorrangig auf das Sehen der Objekte angewiesen. Das menschliche Auge funktioniert dabei nach dem gleichen Prinzip wie eine Kamera: Lichtstrahlen, die von Objekten der Welt emittiert oder reflektiert werden, werden im Auge auf die Netzhaut projiziert und als 2-dimensionales Abbild weiterverarbeitet. Dies erfolgt unabhängig in beiden Augen, so dass das Abbild der Welt im linken Auge sich leicht vom entsprechenden Abbild im rechten Auge unterscheidet. Unter Nutzung beider Bilder gewinnt das menschliche visuelle System Informationen über die räumliche Struktur der Welt.

Die Wahrnehmung der Objekte der Welt erfolgt auf unterschiedlichen Ebenen, d.h. verschiedene Eigenschaften der Objekte können gesehen werden. Dabei handelt es sich um geometrische Eigenschaften (Form und Lage), topologische Eigenschaften (relative Lagebeziehungen), Beleuchtungseigenschaften (Farbe, Helligkeit, Texturen, Reflektanz, Transparenz) oder dynamische Eigenschaften (Bewegung, Änderung der Form). Alle diese Eigenschaften beziehen sich jedoch weniger auf die 3-dimensionalen Objekte an sich als vielmehr auf die Oberflächen der Objekte.

Die Repräsentation der digitalisierten Objekte im Computer kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen:

1. Es werden alle zur Verfügung stehenden Messwerte explizit gespeichert. Beispielsweise die Daten von CT-Aufnahmen liegen in dieser Form vor.
2. Die Speicherung erfolgt implizit, also durch eine Beschreibung der zu repräsentierenden Menge durch ein geeignetes Kodierungsverfahren.

Für die Visualisierung digitaler Objekte mit Hilfe des Computers ist im allgemeinen nur die Oberfläche der Objekte von Interesse. Dabei wird versucht, die Oberflächeneigenschaften der Objekte der realen Welt mittels ihrer digitalen Ab-

bilder zu approximieren. Das Ziel dabei ist es, Aussagen über die Eigenschaften der Oberfläche eines digitalen Objektes treffen zu können, die ebenfalls für die Eigenschaften in der realen Welt gültig sind bzw. mit bestimmter Genauigkeit zutreffen.

## 1.2 Problembeschreibung

Aufnahmeverfahren zur Erzeugung 3-dimensionaler Bilder, wie z.B. die Computertomographie, liefern im Allgemeinen eine sehr große Menge von Messwerten im 3-dimensionalen Raum. Für die Visualisierung einer solchen Datenmenge wird die Oberfläche jedes 3-dimensionalen digitalen Objektes benötigt. Da nicht die Oberfläche von den bildgebenden Verfahren digitalisiert wird, sondern das gesamte räumliche Objekt in Form einer Volumenstruktur, muss aus den Daten die Oberfläche berechnet werden.

Neben einer Visualisierung der Objekte ist auch eine topologische und geometrische Untersuchung an den digitalen Objekten von Interesse. Diese topologischen und geometrischen Eigenschaften der digitalen Objekte werden von den Aufnahmeverfahren natürlich nicht produziert. Es ist dabei auch nicht ohne umfangreichere Vorverarbeitungen der 3-dimensionalen Datenmenge möglich, Oberflächeneigenschaften sofort zu bestimmen. Zu solchen Eigenschaften zählen beispielsweise der Flächeninhalt der Oberfläche, Konvexitätseigenschaften einzelner Teile der Oberfläche, Winkel zwischen Teilflächen, uvm. Die Ermittlung solcher Eigenschaften aus den digitalen Daten soll dabei Aufschluss geben über die entsprechenden Eigenschaften des kontinuierlichen Urbildes des Objektes, welches durch die Digitalisierung entstanden ist. Dies ist eine zentrale Aufgabe der digitalen Geometrie und ein aktuelles Forschungsgebiet.

Die Größe der bei der Digitalisierung eines 3-dimensionalen Objektes entstehenden Datenmenge ist im Vergleich zum Informationsgehalt der Oberfläche des Objektes aufgrund der expliziten Speicherung aller Volumenelemente unnötig groß. Durch die Konstruktion einer Oberflächenstruktur, die eine Rekonstruktion der Voxel aus dieser Oberfläche erlaubt, ist eine erhebliche Reduktion des Datenauf-

kommens möglich.

### 1.3 Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Algorithmus zur Erzeugung einer Oberfläche aus einer gegebenen Menge von Voxeln. Die Oberfläche soll dabei ein Polyeder sein, welches aus einer Menge von Flächen, Kanten und Ecken besteht. Das Polyeder darf keine Selbstberührungen und Selbstüberschneidungen besitzen; es ist dabei aber nicht darauf beschränkt, topologisch einer Kugeloberfläche zu entsprechen. Durch die Wahl eines Polyeders als Oberfläche zur Beschreibung einer Menge von Voxeln ist sichergestellt, dass die Voxel von einer geschlossenen Struktur umhüllt und damit implizit repräsentiert werden.

Zwischen den beiden Strukturen, mit denen der Algorithmus arbeiten soll, also der Menge der Voxel als Ausgangsdaten sowie dem Polyeder als Ergebnisstruktur, soll eine reversible Transformation existieren, d.h. es soll möglich sein, sowohl das Polyeder aus der Menge der Voxel zu berechnen als auch die Rekonstruktion der Voxeldaten aus dem Polyeder durchzuführen. Dies erfordert eine topologische Korrektheit der Beschreibung der Strukturen. Darüberhinaus soll die Speicherung der Daten möglichst sparsam sein. Diese Forderungen erlauben es und lassen es als zweckmäßig erscheinen, die Theorie der abstrakten Zellenkomplexe [18] zur Lösung des Problems der Polyedrisierung von Voxelmengen anzuwenden.

Bestimmte Eigenschaften der zugrunde gelegten Aufnahmeverfahren für die Erzeugung der Ausgangsdatenmenge lassen weitere Annahmen zu, die unter Anwendung der abstrakten Zellenkomplexe den Lösungsweg vereinfachen. Hierzu zählt insbesondere die Tatsache, dass angenommen wird, dass die digitalen Objekte dicht sind im Sinne einer lückenlosen Füllung der 3-dimensionalen Gebiete, die den abgebildeten Objekten der realen Welt entsprechen. Nicht ohne Grund wird der Begriff „dicht“ auch innerhalb der Theorie der Zellenkomplexe verwendet, um auszudrücken, dass ein Objekt keine Löcher niedrigerer Dimension zwischen den Voxeln besitzt. Das gleiche soll für den Hintergrund gelten, also für den Bereich eines digitalen 3-dimensionalen Bildes, in dem sich das Objekt nicht befindet, wofür

der Begriff „homogen-3-dimensional“ verwendet wird.

Für die Beschreibung der Polyeder, die die Oberfläche eines digitalen Objektes darstellen, ist die Anwendung der abstrakten Zellenkomplexe ebenfalls sehr zweckmäßig. Die Mengen der Flächen, Kanten und Ecken der Polyeder lassen sich als Zellen der Dimensionen 2, 1 und 0 eines Zellenkomplexes auffassen. Für die Speicherung eines Polyeders in Form eines Zellenkomplexes steht mit den 3-dimensionalen geometrischen Zellenlisten [22] eine effiziente Datenstruktur zur Verfügung.

Der Algorithmus, der in dieser Arbeit vorgestellt werden soll, soll als Ergebnis ein Polyeder liefern, welches die Oberfläche der gegebenen Menge von Voxeln beschreibt. Dies soll unter Nutzung der abstrakten Zellenkomplexe und dem Verfahren zur Erzeugung der konvexen Hülle erreicht werden. Per Definition ist die konvexe Hülle die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene Menge enthält. Aus diesem Grund soll untersucht werden, für welche Klassen nicht-konvexer Objekte Polyeder erzeugt werden können, deren Oberflächeninhalt und Flächenanzahl unter den gegebenen Voraussetzungen minimal sind.

## 1.4 Struktur der Arbeit

Die hier vorliegende Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Im Anschluss an dieses Kapitel werden in einem Grundlagenkapitel Begriffe definiert, die im weiteren benötigt werden. Anschließend wird in Kapitel 3 die Aufgabenstellung dieser Arbeit formuliert. Dabei werden Begriffe verwendet, die zuvor im Kapitel 2 definiert wurden, weswegen die Beschreibung der Aufgabe nicht zu Beginn der Arbeit vollständig und tiefgründig erfolgte.

Kapitel 4 stellt den Kern dieser Arbeit dar, denn hier wird der Lösungsansatz zu der in Kapitel 3 formulierten Aufgabe beschrieben.

In Kapitel 5 soll kurz beschrieben werden, wie die Berechnung des Volumens der erzeugten Polyeder erfolgen kann, da sich diese nicht-triviale Aufgabe leicht in den Lösungsansatz des Polyedrisierungsproblems integrieren lässt.

Im anschließenden sechsten Kapitel wird eine der beiden wichtigsten Eigen-

schaften des Lösungsalgorithmus, nämlich die Minimalität der Flächenanzahl der erzeugten Polyeder untersucht und es wird gezeigt, für welche Klassen von Objekten diese Minimalität erzielt wird.

Das siebente Kapitel untersucht die zweite wichtige Eigenschaft der erzeugten Polyeder, nämlich die Minimalität des Oberflächeninhaltes. Auch hier wird für die verschiedenen Klassen von Objekten untersucht, ob diese Eigenschaft erreicht wird.

Kapitel 8 stellt die Ergebnisse bei der Anwendung des Algorithmus auf Beispielobjekte dar und vergleicht diese mit den Ergebnissen eines anderen Verfahrens zur Erzeugung einer polyedrischen Oberfläche.

Einige Folgerungen dieser Arbeit für den 2-dimensionalen Fall des Problems werden in Kapitel 9 beschrieben. Nach einer Zusammenfassung in Kapitel 10 folgen im Anhang A die wichtigsten Begriffsdefinitionen und Theoreme der Theorie der AC Komplexe in Form einer Übersicht. Anhang B enthält eine Kurzfassung des Theorems zur konvexen Hülle, welches in [24] publiziert wurde. In Anhang C wird ein Beispiel für den Aufbau der Zellenliste einer initialen konvexen Hülle beschrieben.

# Kapitel 2

## Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Begriffe und Eigenschaften beschrieben werden, die für die gegebenen Daten oder die zu erzeugende Datenstruktur wichtig sind. Weitere grundlegende Begriffe und Theoreme, die aus der Literatur bekannt sind, werden im Anhang A zusammengefasst.

Da zur Lösung des im vorigen Kapitel beschriebenen Problems der Ansatz gewählt wurde, die Theorie der abstrakten Zellenkomplexe anzuwenden, ist dieser Begriff zentral innerhalb dieser Arbeit. Den Begriff des Zellenkomplexes selbst erwähnte erstmals J.B.Listing im Jahre 1862 [28]. Später im Jahre 1908 wurde er in einer Arbeit von E. Steinitz axiomatisch definiert [39]. Im Jahre 1933 war es A.W.Tucker, der ihn topologisch untersuchte [43].

W.A.Kovalevski hat in seinen Publikationen [18]-[25] eine topologisch begründete Theorie der abstrakten Zellenkomplexe dargestellt und zahlreiche Anwendungen und Algorithmen entwickelt. Diese Theorie und die Algorithmen bilden die Grundlage der vorliegenden Dissertation.

### 2.1 Abstrakte Polyeder und Konvexität

Eine besondere Klasse von AC Komplexen wird benötigt, um diejenige Struktur zu beschreiben, die als Ergebnis des Algorithmus zur Lösung des Problems dieser Arbeit vorliegen soll. Dabei handelt es sich um die Klasse der abstrakten Polyeder, die erstmals von W.A.Kovalevski [24] definiert wurden:

**Definition AP:** Ein *abstraktes Polyeder* (engl. abstract polyhedron) ist ein 3-dimensionaler AC Komplex, der eine einzelne 3-dimensionale Zelle enthält, dessen Rand eine 2-dimensionale kombinatorische Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Die 2-dimensionalen Zellen des Polyeders sind seine *Flächen* (engl. faces), die 1-dimensionalen Zellen sind seine *Kanten* (engl. edges) und die 0-dimensionalen Zellen sind seine *Ecken* (engl. vertices).

Ein abstraktes Polyeder ist damit rein topologisch definiert und besitzt keine geometrischen Eigenschaften, wie z.B. planare Flächen oder einen Oberflächeninhalt. Dies ist erst möglich, sobald ein abstraktes Polyeder zu einem geometrischen wird gemäß folgender Definition nach W.A.Kovalevski [24]:

**Definition AGP:** Ein abstraktes Polyeder ist ein *abstraktes geometrisches Polyeder* (kurz: *AG Polyeder*), wenn seinen Ecken Koordinaten zugeordnet sind. Jede Fläche eines AG Polyeders ist planar.

Eine Fläche eines AG Polyeders  $P$  ist planar, wenn die Koordinaten aller 0-Zellen, die die Fläche beranden, eine lineare Gleichung  $H_i(x, y, z) = 0$  erfüllen.

Wenn die Koordinaten, die den Ecken des AG Polyeders  $P$  zugeordnet sind, gleichzeitig Koordinaten von Zellen eines Kartesischen AC Komplexes  $A$  sind, dann *enthält*  $A$  das Polyeder  $P$  bzw. das Polyeder  $P$  ist in  $A$  *eingebettet*.

Die Zuordnung der Koordinaten an die Ecken eines abstrakten Polyeders muss dabei mit den topologischen Eigenschaften des Polyeders konsistent sein. Das bedeutet, dass durch die Position der Ecken im Raum der Rand des Polyeders frei sein muss von Selbstüberschneidungen oder Selbstberührungen, welche der Forderung widersprechen würden, dass der Rand des Polyeders eine 2-dimensionale kombinatorische Mannigfaltigkeit ohne Rand ist.

**Definition CP:** Ein AG Polyeder  $P$  ist *konvex* (engl. convex), wenn die Koordinaten jeder Ecke von  $P$  alle linearen Ungleichungen  $H_i(x, y, z) \leq 0$  erfüllen, die zu



den Flächen  $F_i$  von  $P$  gehören. Die Koeffizienten von  $H_i(x, y, z)$  sind die Komponenten der äußeren Normalen von  $F_i$ .

Damit ist die Konvexität für AG Polyeder definiert. Die Konvexität einer Menge von Zellen eines AC Komplexes ist durch Definition DCS (S.169) festgelegt.

Eine Zelle  $c$  eines AC Komplexes  $A$ , in den das AG Polyeder  $P$  eingebettet ist, *liegt in*  $P$ , wenn die Koordinaten von  $c$  alle linearen Ungleichungen  $H_i(x, y, z) \leq 0$  aller Flächen  $F_i$  von  $P$  erfüllen.

**Definition CH:** Die *konvexe Hülle* (engl. convex hull)  $CH(S)$  einer endlichen Menge  $S$  von Zellen eines AC Komplexes  $A$  ist das kleinste konvexe AG Polyeder  $P$ , welches alle Zellen von  $S$  enthält. Das „kleinste“ bedeutet, dass kein von  $P$  verschiedenes konvexes AG Polyeder existiert, das alle Zellen aus  $S$  enthält und dessen Ecken alle innerhalb von  $P$  oder auf  $P$  liegen.

Weiterhin gilt, dass ein AG Polyeder  $P$ , welches konvex ist und die Menge  $S$  enthält, genau dann das „kleinste“ ist, wenn die Koordinaten aller Ecken von  $P$  mit den Koordinaten von Zellen aus  $S$  übereinstimmen.

## 2.2 Konkavitäten und Grad der Nicht-Konvexität

Im vorigen Abschnitt wurde bereits der Begriff des konvexen AG Polyeders beschrieben. Ziel der Arbeit ist es jedoch, nicht ausschließlich mit konvexen Polyedern zu arbeiten, sondern auch mit nicht-konvexen. Um solche Polyeder beschreiben und klassifizieren zu können, soll hier der Begriff des Grades der Nicht-Konvexität eingeführt werden.

Um diesen Begriff definieren zu können, sind weitere Begriffe notwendig.

**Definition CV:** Eine *Konkavität* (engl. concavity) eines nicht-konvexen AG Polyeders  $P$  ist ein AG Polyeder  $P'$  mit einem Rand, dessen Flächen vollständig zu zwei disjunkten zusammenhängenden Teilmengen gehören:

1. Eine zusammenhängende Teilmenge von Flächen, die identisch ist mit einer zusammenhängenden Menge von Flächen, die zu  $P$ , aber nicht zur konvexen Hülle  $CH(P)$  gehören
2. Eine zusammenhängende Teilmenge von Flächen, die identisch ist mit einer zusammenhängenden Menge von Flächen, die zur konvexen Hülle  $CH(P)$ , aber nicht zu  $P$  gehören

Eine Definition der Konkavität bezüglich einer Menge von Zellen innerhalb eines Polyeders folgt in Abschnitt 4.2.

**Definition NK:** Der *Grad der Nicht-Konvexität* (engl. degree of non-convexity)  $G_{nc}(P)$  eines AG Polyeders  $P$  sei durch folgende rekursive Definition bestimmt:

1. Für jedes konvexe AG Polyeder  $P$  gilt:

$$G_{nc}(P) = 0 \tag{2.1}$$

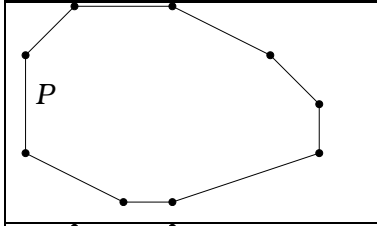
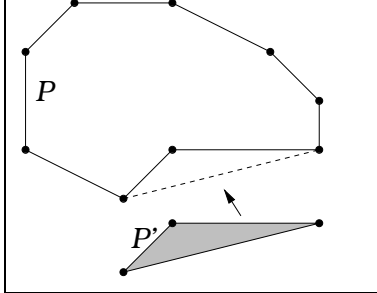
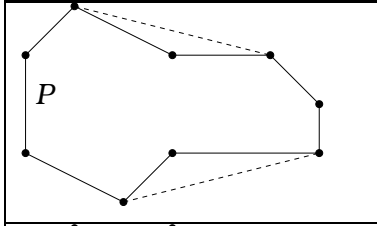
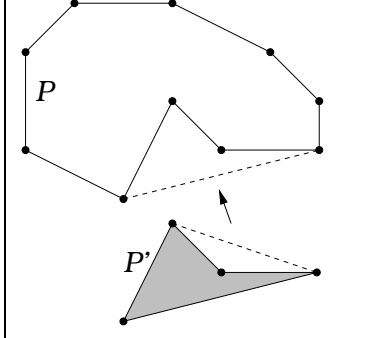
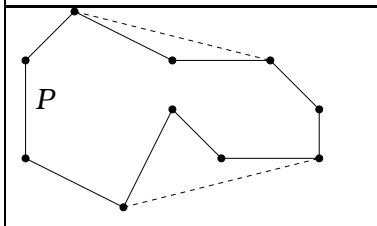
2. Der Grad der Nicht-Konvexität eines AG Polyeders  $P$ , welches nicht konvex ist und genau eine Konkavität  $P'$  besitzt, ist um 1 höher als der Grad der Nicht-Konvexität von  $P'$ . Für nicht-konvexe AG Polyeder  $P$  mit einer Konkavität  $P'$  gilt somit:

$$G_{nc}(P) = G_{nc}(P') + 1 \tag{2.2}$$

3. Der Grad der Nicht-Konvexität eines AG Polyeders  $P$ , welches nicht konvex ist und mehrere Konkavitäten besitzt, ist um 1 höher als der maximale Grad der Nicht-Konvexität der Konkavitäten:

$$G_{nc}(P) = \max_i \{G_{nc}(P'_i)\} + 1 \tag{2.3}$$

Dieser Begriff soll durch die folgenden Abbildungen verdeutlicht werden. Dabei wird zur Vereinfachung mit nur zwei Dimensionen gearbeitet.

	$G_{nc}(P) = 0$ , denn das Polygon $P$ ist konvex.
	$G_{nc}(P) = 1$ , denn das Polygon $P$ enthält eine Konkavität, deren Grad der Nicht-Konvexität $G_{nc}(P') = 0$ ist.
	$G_{nc}(P) = 1$ , denn das Polygon $P$ enthält 2 Konkavitäten, deren Grad der Nicht-Konvexität 0 ist.
	$G_{nc}(P) = 2$ , denn das Polygon $P$ enthält eine Konkavität, deren Grad der Nicht-Konvexität 1 ist, d.h. die selbst nicht konvex ist.
	$G_{nc}(P) = 2$ , denn der maximale Grad der Nicht-Konvexität der Konkavitäten ist 1.

**Abbildung 2.1:** Beispiele für Polygone mit verschiedenem Grad der Nicht-Konvexität.

Der Grad der Nicht-Konvexität eines Polyeders sowie die Anzahl seiner Konkavitäten können als Maße für die Komplexität eines Polyeders verwendet werden.

### 2.3 Relevante Zellen

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden zu einem gegebenen Teilkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$  häufig bestimmte Teilmengen von Zellen aus  $S$  betrachtet, die für die Erzeugung eines AG Polyeders  $P$  aus der Menge  $S$  benötigt werden. Hierbei handelt es sich um Zellen des Randes  $\partial S$ , die aufgrund topologischer Eigenschaften, wie z.B. der Inzidenz bestimmter Zellen, gleichzeitig geometrische Eigenschaften besitzen. Zellen dieser Art werden im Folgenden als *relevante* Zellen bezeichnet, denn sie tragen eine geometrische Relevanz in dem Sinne, dass sie die Form eines Objektes bestimmen, indem sie Unstetigkeitsstellen in der Oberfläche des Objektes sind.

Es sei angemerkt, dass in dieser Arbeit nur solche Teilkomplexe  $S \subset A$  betrachtet werden, die eine 3-Mannigfaltigkeit mit Rand (siehe Definition MA, S.166) bilden. Die folgenden Definitionen beziehen sich ausschließlich auf Teilkomplexe dieser Art.

Die Definition der relevanten Zellen erfolgt zunächst bei den Zellen der Dimension 2, darauf aufbauend werden dann die relevanten 1- und 0-Zellen definiert.

**Definition RZ2:** Eine 2-Zelle  $c^2$  eines 3-dimensionalen AC Komplexes  $A$  heißt *relevant* bzw. relevante 2-Zelle bezüglich eines Teilkomplexes  $S \subset A$ , wenn sie genau eine 3-Zelle aus  $S$  berandet.

Gemäß dieser Definition ist jede 2-Zelle des Randes  $\partial S$  eines Teilkomplexes  $S \subset A$  eine relevante 2-Zelle bezüglich  $S$ .

**Definition RZ1:** Eine 1-Zelle  $c^1$  eines 3-dimensionalen AC Komplexes  $A$  heißt *relevant* bzw. relevante 1-Zelle bezüglich eines Teilkomplexes  $S \subset A$ , wenn sie genau eine 3-Zelle aus  $S$  oder genau eine 3-Zelle aus  $A \setminus S$  berandet.

Nach dieser Definition gibt es im Rand  $\partial S$  eines Teilkomplexes  $S \subset A$  somit relevante und nicht-relevante 1-Zellen. Die nicht-relevanten 1-Zellen des Randes

$\partial S$  sind *flache* 1-Zellen im Sinne einer geometrischen Interpretation. Dies bedeutet gleichzeitig, dass die beiden 2-Zellen, die von einer flachen 1-Zelle berandet werden, die gleiche Orientierung besitzen.

Die relevanten 1-Zellen werden gemäß folgender Definition geometrisch unterschieden:

**Definition KX1:** Eine relevante 1-Zelle  $c^1$  bezüglich eines Teilkomplexes  $S$  eines 3-dimensionalen AC Komplexes  $A$  heißt *konvex* bezüglich  $S$ , wenn sie genau eine 3-Zelle aus  $S$  berandet. Eine relevante 1-Zelle  $c^1$  bezüglich eines Teilkomplexes  $S$  eines 3-dimensionalen AC Komplexes  $A$  heißt *konkav* bezüglich  $S$ , wenn sie genau eine 3-Zelle aus  $A \setminus S$  berandet.

Mithilfe obiger Definitionen können nun auch die relevanten 0-Zellen definiert und unterschieden werden.

**Definition RZ0:** Eine 0-Zelle  $c^0$  eines 3-dimensionalen AC Komplexes  $A$  heißt *relevant* bzw. relevante 0-Zelle bezüglich eines Teilkomplexes  $S \subset A$ , wenn sie mit mindestens drei 1-Zellen inzidiert, die bezüglich  $S$  relevant sind.

Nach einer geometrischen Interpretation sind die relevanten 0-Zellen somit die Ecken des Objektes  $S$ . Nicht-relevante 0-Zellen des Randes  $\partial S$ , also solche 0-Zellen, die keine Ecken des Objektes  $S$  sind, sind somit 0-Zellen, die ausschließlich nicht-relevante 1-Zellen und damit ausschließlich 2-Zellen gleicher Orientierung beranden oder es sind solche, die genau zwei relevante 1-Zellen beranden, die die gleiche Orientierung besitzen. Erstere sind *flache* 0-Zellen, letztere sind 0-Zellen, die auf einer Kante des Objektes liegen, aber die jedoch keine Ecke sind, also solche, die mit zwei Ecken des Objektes  $S$  kollinear sind.

Die Unterscheidung der relevanten 0-Zellen eines 3-dimensionalen AC Komplexes erfolgt durch Betrachtung der Arten der relevanten 1-Zellen, die mit einer relevanten 0-Zelle inzident sind.

**Definition KX0:** Eine relevante 0-Zelle  $c^0$  bezüglich eines Teilkomplexes  $S$  eines 3-dimensionalen AC Komplexes  $A$  heißt *konvex* bezüglich  $S$ , wenn sie genau drei bezüglich  $S$  konvexe 1-Zellen berandet.

**Definition KV0:** Eine relevante 0-Zelle  $c^0$  bezüglich eines Teilkomplexes  $S$  eines 3-dimensionalen AC Komplexes  $A$  heißt *konkav* bezüglich  $S$ , wenn sie genau drei bezüglich  $S$  konkave 1-Zellen berandet.

**Definition SP0:** Eine relevante 0-Zelle  $c^0$  bezüglich eines Teilkomplexes  $S$  eines 3-dimensionalen AC Komplexes  $A$  heißt *Sattelpunkt* bezüglich  $S$ , wenn sie bezüglich  $S$  konvexe und bezüglich  $S$  konkave 1-Zellen berandet.

Es ist wichtig, zu allen relevanten Zellen den Teilkomplex anzugeben, in welchem die Relevanz besteht. Man erkennt an der Dualität der Definition KX1, dass eine bezüglich  $S$  konvexe 1-Zelle gleichzeitig eine zu  $A \setminus S$  konkave 1-Zelle ist. Weiterhin ist eine bezüglich  $S$  konvexe 0-Zelle gleichzeitig eine zu  $A \setminus S$  konkave 0-Zelle, was durch die Dualität der Definitionen KX0 und KV0 festgelegt ist. Darüberhinaus ist ein Sattelpunkt bezüglich  $S$  auch immer ein Sattelpunkt bezüglich  $A \setminus S$ , jedoch kann diese 0-Zelle bezüglich eines von  $S$  verschiedenen Teilkomplexes  $S'$  auch eine konvexe oder eine konkave sein.

Durch die Definition der relevanten Zellen entsteht eine Zerlegung der Menge der Zellen des Randes  $\partial S$  eines Teilkomplexes  $S \subset A$  in Zellen, die ein Stetigkeitsattribut besitzen und solche, die eine Unstetigkeit innerhalb des Randes  $\partial S$  darstellen. Ähnlich zu dem Ansatz von Ihle [14] kann hiermit ein Teilkomplex  $S \subset A$  in stetige und unstetige Mengen von Zellen zerlegt werden. Auch hier wird beginnend bei der Dimension  $n$  der Teilkomplex  $S$  in seine Stetigkeitsmenge  $S \setminus \partial S$  und seine Unstetigkeitsmenge  $\partial S$  zerlegt. Dabei ist die Stetigkeitsmenge ein offener AC Komplex. Im Unterschied zu [14] ist die Unstetigkeitsmenge von  $S$  ein abgeschlossener AC Komplex. Die Unstetigkeitsmenge von  $S$ , also  $\partial S$ , wird nun mithilfe der Definition der relevanten 1-Zelle in offene Mengen von 2-Zellen zerlegt, die selbst Stetigkeitsmengen sind. Diese offenen Mengen bestehen aus relevanten 2-Zellen

und nicht-relevanten 1-Zellen, die zwei 2-Zellen gleicher Orientierung beranden sowie aus 0-Zellen, die ebenfalls nicht relevant sind. Die Unstetigkeitsmenge von  $\partial S$  ist die Menge der relevanten 1-Zellen und relevanten 0-Zellen, die ebenfalls in eine Stetigkeitsmenge (die offenen Mengen der 1-Zellen und der sie berandenden nicht-relevanten 0-Zellen) und eine Unstetigkeitsmenge (die relevanten 0-Zellen) zerfallen. Dabei sind die relevanten 0-Zellen jeweils auch offene Mengen.

Durch diese Zerlegung eines Teilkomplexes  $S \subset A$  in Stetigkeits- und Unstetigkeitsmengen entsteht auf  $S$  ein Blockkomplex  $B(S)$ . Die Blockzellen sind die offenen Mengen der Stetigkeitsmengen.

Durch Anwendung der Zerlegung der Zellen eines Teilkomplexes  $S \subset A$  unter Nutzung des Begriffes der Relevanz von Zellen werden geometrische Informationen aus topologischen Eigenschaften von Zellen aus  $S$  abgeleitet. Da für die Bestimmung der Relevanz einer Zelle lediglich die Anzahl bestimmter anderer inzidierender Zellen betrachtet wird, fließt hier keine geometrische Information in die Untersuchung ein. Das Ergebnis der Zerlegung ist jedoch mit geometrischen Eigenschaften behaftet, denn die entstehenden 2- und 1-Blockzellen sind jeweils immer flach, die 0-Blockzellen sind die Ecken des Objektes.

Die ausgeschlossenen Sonderfälle stellen bei der Zerlegung in Blockzellen auch kein schwieriges Problem dar, denn sie können ebenfalls als Zellen einer Unstetigkeitsmenge interpretiert werden.

Die so ermittelten geometrischen Informationen werden für die Erzeugung der konvexen Hülle in Abschnitt 4.1 benötigt.

## 2.4 Rand und Begrenzung in homogen-n-dimensionalen und dichten AC Komplexen

In dieser Arbeit ist eine besondere Klasse von 3-dimensionalen AC Komplexen von Interesse, nämlich Teilkomplexe  $S$  von AC Komplexen  $A$ , die 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand sind. Solche Teilkomplexe sind damit in jedem Fall homogen-3-dimensional und dicht, denn sonst gäbe es 0-Zellen  $c^0$  in  $S$ , deren kleinste offene Umgebung  $SON(c^0, S)$  keinen Rand besitzt, der einer  $(n - 1)$ -dimensionalen

Sphäre bzw.  $(n - 1)$ -dimensionalen Halb-Sphäre homöomorph ist (siehe Definition MA [21], S.166). Anders ausgedrückt bedeutet das, dass sowohl der Teilkomplex  $S \subset A$  eines AC Komplexes  $A$  als auch sein Komplement  $A \setminus S$  homogen-3-dimensional sind. In dieser Klasse von Zellenkomplexen gelten besondere Eigenschaften. Eine dieser Eigenschaften ist die Tatsache, dass in solchen Komplexen der Rand  $\partial S$  eines Subkomplexes  $S \subset A$  der Begrenzung  $Fr(S, A)$  dieses Subkomplexes identisch ist. Dies soll in diesem Abschnitt bewiesen werden, jedoch soll hierbei der Fall ausgeschlossen werden, dass  $S$  Zellen des Randes des Raumes  $A$  enthält, denn Untersuchungen hierzu sind ein aktuelles Forschungsgebiet.

Um diese Tatsache beweisen zu können, sind zunächst zwei Lemmata als Voraussetzung notwendig. Dabei soll nicht nur der 3-dimensionale Fall betrachtet werden, sondern der allgemeine Fall für die Dimension  $n$  mit  $n \geq 2$ .

**Lemma 1:** Gegeben sei ein Teilkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$ .  $S$  sei homogen- $n$ -dimensional und dicht. Die Menge der  $(n - 1)$ -dimensionalen Zellen des Randes  $\partial S$  und die Menge der  $(n - 1)$ -dimensionalen Zellen der Begrenzung  $Fr(S, A)$  sind identisch.

*Beweis:* Der Rand  $\partial S$  eines Subkomplexes  $S \subset A$  enthält Zellen der Dimensionen 0 bis  $n - 1$ . Jede  $(n - 1)$ -Zelle  $c_i^{n-1}$  des Randes  $\partial S$  berandet gemäß Definition BD genau eine  $n$ -Zelle des Subkomplexes  $S$ . Dies ist davon unabhängig, ob die Zelle  $c_i^{n-1}$  zu  $S$  oder zu  $A \setminus S$  gehört.

Die Begrenzung  $Fr(S, A)$  eines Subkomplexes  $S \subset A$  enthält Zellen der Dimensionen 0 bis  $n - 1$ . Für jede  $(n - 1)$ -Zelle  $c_i^{n-1}$  von  $Fr(S, A)$  muss genau einer der folgenden Fälle gelten:

- (a) Die Zelle  $c_i^{n-1}$  gehört zur Menge  $S$  und  $SON(c_i^{n-1}, A)$  enthält je eine Zelle  $c_S^n \in S$  und eine Zelle  $c_{A \setminus S}^n \in A \setminus S$ .
- (b) Die Zelle  $c_i^{n-1}$  gehört zur Menge  $A \setminus S$  und  $SON(c_i^{n-1}, A)$  enthält je eine Zelle  $c_S^n \in S$  und eine Zelle  $c_{A \setminus S}^n \in A \setminus S$ .
- (c) Die Zelle  $c_i^{n-1}$  gehört zur Menge  $S$  und  $SON(c_i^{n-1}, A)$  enthält zwei Zellen



$$c_1^n, c_2^n \in A \setminus S.$$

- (d) Die Zelle  $c_i^{n-1}$  gehört zur Menge  $A \setminus S$  und  $SON(c_i^{n-1}, A)$  enthält zwei Zellen  $c_1^n, c_2^n \in S$ .

Da  $SON(c_i^{n-1}, A)$  lediglich die Zelle  $c_i^{n-1}$  und zwei  $n$ -Zellen enthält, können keine weiteren Fälle auftreten, die mit Definition FR konsistent sind.

Da der Subkomplex  $S$  homogen- $n$ -dimensional ist, kann der Fall (c) gemäß Definition HN nicht auftreten. Da der Subkomplex  $S$  dicht ist, kann der Fall (d) gemäß Definition RD nicht auftreten.

Die Fälle (a) und (b) besagen, dass jede  $(n-1)$ -Zelle der Begrenzung  $Fr(S, A)$  genau eine  $n$ -Zelle von  $S$  in ihrer kleinsten offenen Umgebung besitzt. Dies bedeutet gemäß Definition BR, dass diese  $(n-1)$ -Zelle genau eine  $n$ -Zelle aus  $S$  berandet. Dies entspricht der Definition des Randes, woraus folgt, dass in homogen- $n$ -dimensionalen und dichten Teilkomplexen  $S$  jede  $(n-1)$ -Zelle der Begrenzung  $Fr(S, A)$  eine  $(n-1)$ -Zelle des Randes  $\partial S$  ist.

Es bleibt zu zeigen, dass jede  $(n-1)$ -Zelle des Randes  $\partial S$  eine  $(n-1)$ -Zelle der Begrenzung  $Fr(S, A)$  ist. Da jede  $(n-1)$ -Zelle  $c_i^{n-1} \in \partial S$  genau eine  $n$ -Zelle aus  $S$  und somit auch genau eine  $n$ -Zelle aus  $A \setminus S$  berandet, besitzt sie diese beiden Zellen in ihrer kleinsten offenen Umgebung. Demnach enthält  $SON(c_i^{n-1}, A)$  sowohl Zellen aus  $S$  als auch Zellen aus  $A \setminus S$ . Somit ist in homogen- $n$ -dimensionalen und dichten Teilkomplexen  $S$  jede  $(n-1)$ -Zelle des Randes  $\partial S$  gleichzeitig eine  $(n-1)$ -Zelle der Begrenzung  $Fr(S, A)$ .

□

**Lemma 2:** Gegeben sei ein Teilkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$ .  $S$  sei homogen- $n$ -dimensional und dicht. Die Menge der  $k$ -dimensionalen Zellen ( $0 \leq k < n-1$ ) des Randes  $\partial S$  und die Menge der  $k$ -dimensionalen Zellen der Begrenzung  $Fr(S, A)$  sind identisch.

*Beweis:* Der Abschluss jeder  $(n-1)$ -Zelle  $c_i^{n-1}$  des Randes  $\partial S$  enthält gemäß Definitionen BD und CS alle  $k$ -Zellen ( $0 \leq k < n-1$ ) aus  $S$ , die die  $(n-1)$ -Zelle

$c_i^{n-1}$  beranden. Aus der Transitivität der Berandungsrelation folgt, dass diese  $k$ -Zellen sowohl Zellen aus  $S$  als auch aus  $A \setminus S$  beranden. Demnach besitzt jede  $k$ -Zelle aus  $\partial S$  in ihrer kleinsten offenen Umgebung sowohl Zellen aus  $S$  als auch aus  $A \setminus S$  und ist gemäß Definition FR eine  $k$ -Zelle der Begrenzung  $Fr(S, A)$ .

Die Begrenzung  $Fr(S, A)$  enthält gemäß Definition FR alle  $k$ -Zellen ( $0 \leq k < n - 1$ ), die sowohl Zellen aus  $S$  als auch Zellen aus  $A \setminus S$  in ihrer kleinsten offenen Umgebung besitzen. Da der Subkomplex  $S$  homogen- $n$ -dimensional und dicht ist, sind in der kleinsten offenen Umgebung jeder  $k$ -Zelle sowohl  $n$ -Zellen aus  $S$  als auch aus  $A \setminus S$ . Aufgrund der Transitivität der Berandungsrelation werden von diesen  $k$ -Zellen auch die  $(n-1)$ -Zellen des Randes (der Begrenzung) von  $S$  berandet. Jede  $k$ -Zelle, die  $(n-1)$ -Zellen des Randes  $\partial S$  berandet, gehört gemäß Definitionen CL und CS zum Abschluss der  $(n-1)$ -Zelle des Randes und somit gemäß Definition BD zum Rand selbst.

Somit sind in homogen- $n$ -dimensionalen und dichten Teilkomplexen  $S \subset A$  die Menge der  $k$ -Zellen ( $0 \leq k < n - 1$ ) des Randes  $\partial S$  und der Begrenzung  $Fr(S, A)$  identisch.

□

**Theorem 1:** In einem homogen- $n$ -dimensionalen und dichten Subkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$  ist der Rand  $\partial S$  identisch der Begrenzung  $Fr(S, A)$ .

*Beweis:* Die Begrenzung  $Fr(S, A)$  eines Teilkomplexes  $S$  eines AC Komplexes  $A$  enthält gemäß Definition FR alle Zellen, die in Ihrer kleinsten offenen Umgebung sowohl Zellen aus  $S$  als auch Zellen aus  $A \setminus S$  enthalten. Dies können nur Zellen der Dimension  $< n$  sein, denn die kleinste offene Umgebung einer  $n$ -Zelle enthält nur die  $n$ -Zelle selbst, welche entweder zu  $S$  oder zu  $A \setminus S$  gehört.

Der Rand  $\partial S$  eines Teilkomplexes  $S$  eines AC Komplexes  $A$  enthält gemäß Definition BD die Abschlüsse der  $(n-1)$ -Zellen, die jeweils sowohl eine  $n$ -Zelle aus  $S$  als auch eine  $n$ -Zelle aus  $A \setminus S$  beranden. Dies sind ebenfalls Zellen der Dimension  $< n$ .

Mit Lemma 1 wurde gezeigt, dass die  $(n-1)$ -Zellen des Randes  $\partial S$  gleichzeitig

Zellen der Begrenzung  $Fr(S, A)$  sind und dass die  $(n - 1)$ -Zellen der Begrenzung  $Fr(S, A)$  gleichzeitig Zellen des Randes  $\partial S$  sind.

Mit Lemma 2 wurde gezeigt, dass alle  $k$ -dimensionalen Zellen ( $0 \leq k < n - 1$ ) des Randes  $\partial S$  gleichzeitig Zellen der Begrenzung  $Fr(S, A)$  sind und dass alle  $k$ -dimensionalen Zellen ( $0 \leq k < n - 1$ ) der Begrenzung  $Fr(S, A)$  gleichzeitig Zellen des Randes  $\partial S$  sind.

Da der Rand  $\partial S$  und die Begrenzung  $Fr(S, A)$  keine Zellen anderer Dimensionen enthalten, ist in einem homogen- $n$ -dimensionalen und dichten Teilkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$  der Rand  $\partial S$  identisch der Begrenzung  $Fr(S, A)$ .

□

Da in dieser Arbeit ausschließlich AC Komplexe betrachtet werden, die 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand sind, wird an entsprechender Stelle immer vom Rand  $\partial S$  die Rede sein und nicht von der Begrenzung  $Fr(S, A)$ , da beide Begriffe laut Theorem 1 in dieser speziellen Klasse von AC Komplexen äquivalent sind.



# Kapitel 3

## Problembeschreibung

In diesem Kapitel soll die in Abschnitt 1.2 bereits umrissene Beschreibung der Problemstellung genauer spezifiziert werden. Unter Nutzung der im vorigen Kapitel definierten Begriffe und der in Anhang A gesammelten Definitionen lässt sich die Aufgabe exakt formulieren. Dabei soll verdeutlicht werden, welche Eigenschaften die gegebene Datenmenge besitzt, aus welchen Anforderungen an Ergebnisse oder Eigenschaften, die aus den Daten ermittelt werden sollen, die Notwendigkeit einer Weiterverarbeitung folgt und welche Eigenschaften die Ergebnisstruktur besitzen soll.

### 3.1 Ausgangsdaten

Gegeben ist ein 3-dimensionales digitales Objekt, welches als stark zusammenhängender, homogen-3-dimensionaler und dichter Subkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$  vorliegt.  $S$  wird als abgeschlossener Teilkomplex angenommen, d.h. es gilt  $S = Cl(S, A)$ . Die Einschränkung auf ein einzelnes Objekt ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn sofern der Komplex  $A$  in verschiedene nicht-zusammenhängende Subkomplexe  $S_1, S_2, \dots$  zerfällt, werden diese als unabhängig angesehen und können unabhängig voneinander verarbeitet werden.

Weiterhin wird davon ausgegangen, dass sich die Elemente  $c \in A$ , also die Zellen des gegebenen AC Komplexes, genau den beiden Mengen  $S$  und  $A \setminus S$  zuordnen lassen. Im weiteren wird die Menge  $S$  als Vordergrund und die Menge  $A \setminus S$  als

Hintergrund bezeichnet.

Der AC Komplex  $A$  ist ein lokal endlicher topologischer Raum  $T$  gemäß Definition LFS [25] (siehe S.157).  $T$  erfüllt weiterhin gemäß Theorem OS [25] (siehe S.161) das Axiom  $T_0$  der Punkttrennung. Jede Zelle  $c \in A$  besitzt somit immer nur endlich viele andere Zellen in ihrer Umgebung.

Wir stellen uns  $A$  zunächst als Kartesischen 3-dimensionalen Raum vor. Somit besitzt jede Zelle  $c \in A$  Koordinaten, die seiner Position im Raum entsprechen. Darüberhinaus kann aus den Koordinaten einer Zelle  $c$  seine Dimension abgeleitet werden (siehe Definition KA [19], S.167).

Um innerhalb eines AC Komplexes Abstände zwischen zwei Zellen  $c_1$  und  $c_2$  berechnen zu können, ist die Definition einer Metrik erforderlich. Innerhalb dieser Arbeit sei hierfür die Euklidische Metrik angenommen. Sie sei mit  $d$  bezeichnet und folgendermaßen definiert:

$$d(c_1, c_2) = \sqrt{(c_{1_x} - c_{2_x})^2 + (c_{1_y} - c_{2_y})^2 + (c_{1_z} - c_{2_z})^2} \quad (3.1)$$

Die Zellen von  $A$  sind dabei durch ihre 3-dimensionalen Ortsvektoren bestimmt.

Der gegebene Subkomplex  $S$  von Zellen aus  $A$  besitzt gemäß Definition BD [21] (siehe S.164) einen Rand  $\partial S$ , dessen Elemente jeweils mit Zellen aus  $S$  und aus  $A \setminus S$  inzidieren. Der Rand  $\partial S$  ist somit eine geschlossene 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Den bezüglich  $S$  relevanten Zellen  $c_r \in \partial S$  mit  $\dim(c_r) \leq n-2$  werden darüberhinaus geometrische Attribute zugeordnet. Gemäß Definitionen KX1 und KV1 kann eine bezüglich  $S$  relevante 1-Zelle  $c_r^1$  des Randes  $\partial S$  eines stark zusammenhängenden und dichten AC Komplexes  $A$  somit konvex oder konkav sein. Gemäß Definitionen KX0, KV0 und SP0 ist eine bezüglich  $S$  relevante 0-Zelle  $c_r^0$  aus  $\partial S$  konvex, konkav oder ein Sattelpunkt. Fläche bzw. nicht-relevante 1- und 0-Zellen werden nicht weiter betrachtet.

## 3.2 Trennung der Zellen

Gemäß Definitionen INT und EXT (siehe S.164) kann zu einem Teilkomplex  $S \subset A$  die Menge  $int(S, A)$  seiner inneren Zellen, kurz Inneres, und die Menge  $ext(S, A)$  seiner äußeren Zellen, kurz Äußeres, bestimmt werden. Zellen von  $int(S, A)$  befinden sich demnach *innerhalb* des Objektes  $S$ , Zellen von  $ext(S, A)$  befinden sich *außerhalb* von  $S$ .

Der Rand  $\partial S \subset S \subset A$  besitzt somit die Eigenschaft, die Menge der Vordergrundzellen von der Menge der Hintergrundzellen zu trennen. Das bedeutet, dass jeder Inzidenzpfad gemäß Definition IP [25] (siehe S.158), von einer Zelle  $c_I \in int(S, A)$  zu einer Zelle  $c_E \in ext(S, A)$  mindestens eine Zelle des Randes  $\partial S$  enthält.

Desweiteren folgt aus der Definition des Randes, dass keine Grundzellen, also Zellen der Dimension 3, zum Rand gehören, denn der Rand ist definiert als der Abschluss aller  $(n - 1)$ -dimensionalen Zellen, die jeweils  $n$ -dimensionale Zellen aus  $S$  und  $A \setminus S$  beranden. Somit liegen die 3-Zellen in der Ausgangsdatenmenge immer eindeutig innerhalb oder außerhalb des Randes, also der Oberfläche des Objektes.

Die Ausgangsdatenmenge lässt sich somit zunächst als drei disjunkte Teilmengen auffassen: das Innere  $int(S, A)$ , der Rand  $\partial S$  und das Äußere  $ext(S, A)$  des gegebenen Objektes  $S \subset A$ . Weiterhin besteht der Rand aus einer nicht-leeren Teilmenge von relevanten Zellen und aus einer Teilmenge von nicht-relevanten Zellen, die jedoch leer sein kann.

## 3.3 Repräsentation der Elemente

Das gegebene 3-dimensionale digitale Objekt liegt in Form eines Rasters vor, in welchem zunächst nur die 3-Zellen eine Markierung tragen, die angibt, ob die jeweilige 3-Zelle zum Objekt, also zur Menge  $S$ , oder zum Hintergrund, also zur Menge  $A \setminus S$ , gehört. Zellen niedrigerer Dimension im AC Komplex  $A$  tragen keine Markierung.

Da gefordert wird, dass das gegebene Objekt eine 3-dimensionale Mannigfaltig-

keit mit Rand ist, wird sichergestellt, dass es damit ein stark zusammenhängender, homogen-3-dimensionaler und dichter AC Komplex ist. Somit können die Zellen der Dimension 0 bis 2 sehr einfach markiert werden: Jede  $k$ -Zelle ( $k < 3$ ), die ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  berandet, wird ebenfalls als Vordergrundzelle markiert. Jede  $k$ -Zelle, die ausschließlich Zellen aus  $A \setminus S$  berandet, wird als Hintergrundzelle markiert. Die verbleibenden  $k$ -Zellen, also solche, die sowohl Zellen des Vordergrundes als auch Zellen des Hintergrundes beranden, gehören zum Rand  $\partial S$  und bekommen eine eigene Markierung.

Was nun vorliegt, ist ein 3-dimensionales Raster, in welchem jede Zelle genau eine der drei Markierungen (Vordergrund, Hintergrund, Rand) besitzt. Die so markierten Rasterelemente sind damit in expliziter Form gespeichert.

Die explizite Speicherung der Elemente des Rasters beinhaltet keine Informationen über die Topologie innerhalb des Rasters. Aufgrund der Eigenschaften des Subkomplexes  $S$  sind lediglich einige wenige globale topologische Informationen gegeben:

- $S$  und  $A \setminus S$  sind stark zusammenhängend, dicht und homogen-3-dimensional,
- der Rand  $\partial S$  ist eine geschlossene 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Weitere topologische Informationen, wie z.B. Informationen darüber, welche Zelle aus  $A$  mit welchen anderen Zellen aus  $A$  inzidiert oder mit wievielen Zellen aus  $S$ ,  $\partial S$  oder  $A \setminus S$ , sind nicht explizit gespeichert. Dies muss aus der Rasterstruktur in jedem Fall ermittelt werden.

Geometrische Informationen sind ebenfalls nicht in der Rasterstruktur gespeichert. Dazu gehören zunächst die lokalen geometrischen Informationen über die relevanten Zellen, also ob die 1-dimensionalen Randzellen konvex oder konkav sind und ob die 0-dimensionalen Randzellen konvexe, konkave oder Sattelpunkte sind. Globale geometrische Informationen, so zum Beispiel der Oberflächeninhalt des Randes, müssen auch aus den gegebenen Daten berechnet werden.

Ein weiterer wichtiger Punkt, der Beachtung finden sollte, ist der Speicherbedarf bei expliziter Speicherung aller Zellen des AC Komplexes  $A$ . Im 3-dimensionalen Fall ist für die Speicherung aller Zellen der Dimension 0 bis 3 achtmal mehr Spei-



cher erforderlich [23] als für die ausschließliche Speicherung der 3-Zellen, also derjenigen Zellen, die von den bildgebenden Geräten Werte zugeordnet bekommen. Darüberhinaus ist für die Speicherung der Oberfläche eines Objektes die explizite Repräsentation aller Zellen unnötig. Sofern das Objekt durch eine geschlossene Oberfläche, also eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, repräsentiert wird, sind die Zellen im Inneren der Oberfläche implizit gespeichert und können bei Bedarf mithilfe der Oberfläche rekonstruiert werden. Die Redundanz der expliziten Speicherung kann man sich an einem Beispiel verdeutlichen: Eine Kugel mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $(x_0, y_0, z_0)$  ist durch die Formel

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (3.2)$$

eindeutig bestimmt. Um die Beschreibung einer solchen Kugel zu speichern sind nur wenige Bytes notwendig. Eine digitale Kugel mit dem Radius 100 und einer 0-Zelle als Mittelpunkt besteht aus 523984 Voxeln (3-Zellen). Da die explizite Speicherung aller Zellen der Dimensionen 0 bis 3 achtmal mehr Speicher benötigt, müssen für dieses Objekt mehr als 4 Millionen Integer-Werte gespeichert werden. Pro Integer-Wert benötigt man im allgemeinen 4 Bytes, was zu einem Gesamtspeicherbedarf von ca. 16 MBytes führt.

Die bereits erwähnten fehlenden topologischen und geometrischen Informationen haben zur Folge, dass diese bei Bedarf in jedem Fall aus den Zellen innerhalb des Rasters berechnet werden müssen. Hierbei ist bei der Ermittlung der topologischen Informationen vorwiegend die Anwendung von Suchverfahren notwendig, geometrische Informationen benötigen meist Berechnungen mit Methoden der linearen Algebra. Da diese Informationen nicht im Raster gespeichert werden können, müssen sie immer dann, wenn sie benötigt werden, neu berechnet werden.

### 3.4 Eigenschaften der Zielstruktur

Wie in den vorigen Abschnitten gezeigt wurde, ist der Rand  $\partial S$  eines stark zusammenhängenden, homogen-3-dimensionalen und dichten Subkomplexes  $S$  eines AC Komplexes  $A$ , eine Oberfläche, die die Eigenschaft besitzt, Vordergrundzellen

von Hintergrundzellen zu trennen. Die Speicherung der Elemente der Oberfläche erfolgt explizit, also einzeln für jede Zelle von  $\partial S$ .

Eine zweckmäßige und effiziente Datenstruktur sollte jedoch neben der Trennung von Vordergrund- und Hintergrundzellen weitere Eigenschaften besitzen. Zunächst soll damit eine Oberfläche beschrieben werden, die eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand repräsentiert, also ein abstraktes Polyeder gemäß Definition AP (siehe S.8) ist.

Es sollte zweitens für die Repräsentation der Oberfläche eine effiziente Datenstruktur gewählt werden, die alle notwendigen topologischen und geometrischen Informationen enthält. Dazu zählen insbesondere:

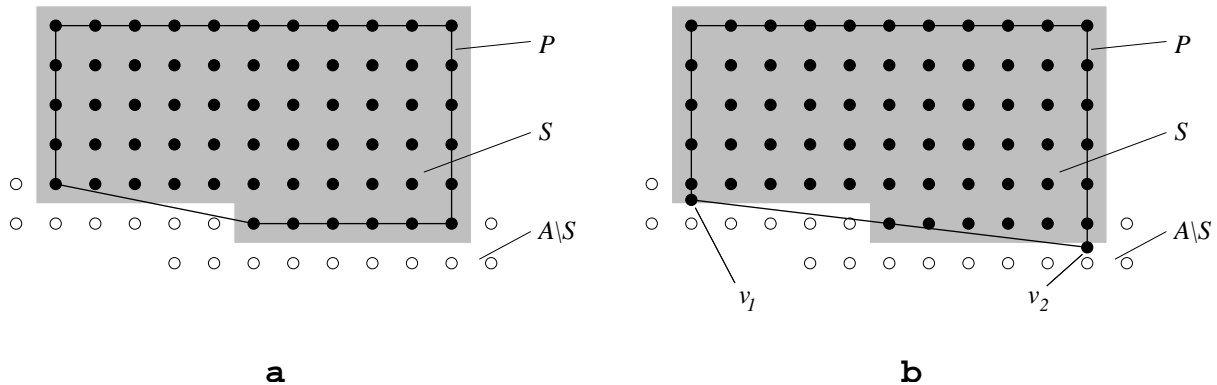
- Verweise auf inzidierende Zellen zu jeder einzelnen Zelle
- Informationen über die Konvexität der Teilflächen der Oberfläche (2-Blockzellen)
- Flächeninhalt jeder 2-Zelle
- Länge jeder 1-Zelle
- Koordinaten der 0-Zellen
- Flächeninhalt der Oberfläche

Als dritte Eigenschaft soll die Oberfläche minimal viele Flächen besitzen, also aus so wenig wie möglich Elementen bestehen. Dabei ist das Ziel, die Kodierung der Oberfläche mit minimalem Speicheraufwand zu realisieren, also eine möglichst sparsame Beschreibung der Oberfläche zu erzeugen.

Dies soll unter der Bedingung erreicht werden, dass die Ecken der Oberfläche Zellen aus  $S$  bzw. bei nicht-konvexen Objekten auch aus  $A \setminus S$  sind. Das bedeutet, dass die Ecken immer ganzzahlige Koordinaten (siehe Definition KK [19], S.167) besitzen sollen.

Ohne diese Forderung sind Oberflächen möglich, deren Ecken frei im Raum liegen können. Der Vorteil dabei bestünde in der Möglichkeit, die Oberfläche aus weniger Elementen zusammenzusetzen (siehe 2D-Analogon in Abbildung 3.1).

Nachteilig hierbei ist jedoch der erhöhte Speicheraufwand für die Koordinaten der Ecken, die in diesem Fall nicht mehr ganzzahlig sind.



**Abbildung 3.1:** (a) Polygon mit 5 Seiten, welches  $S$  von  $A \setminus S$  trennt und nur 2-Zellen aus  $S$  als Ecken besitzt. (b) Polygon mit 4 Seiten und frei im Raum liegenden Ecken  $v_1$  und  $v_2$ , welches ebenfalls  $S$  von  $A \setminus S$  trennt.

Die in Abbildung 3.1 dargestellten Polygone trennen beide die Zellen der Menge  $S$  von den Zellen der Menge  $A \setminus S$ . Dabei ist das Polygon in Abbildung 3.1 (a) dasjenige Polygon, welches minimal viele Seiten besitzt unter der Bedingung, dass die Ecken 2-Zellen aus  $S$  sind. Das Polygon in (b) besitzt dagegen minimal viele Seiten unter allen möglichen Polygonen, die  $S$  von  $A \setminus S$  trennen.

Ein anderes Optimierungskriterium, das neben der Flächenanzahl diskutiert werden soll, ist der Oberflächeninhalt des Polyeders. Die Minimierung des Oberflächeninhaltes in 3D entspricht dem 2D-Problem des Findens eines Polygons minimaler Länge (MLP, minimum length polygon) (siehe [17], S.343).

### 3.5 Zusammenfassung

Die hier vorgestellte Aufgabe soll das Problem lösen, zu einer gegebenen Menge von Voxeln eine Oberfläche zu finden, die bestimmte Eigenschaften besitzt. Um eine solche Oberfläche zu finden, wird ein Algorithmus benötigt, der aus der gegebenen

Datenmenge die Oberfläche mit den geforderten Eigenschaften berechnen kann.

Zusammenfassend sollen hier noch einmal die Anforderungen an die Ausgangsdaten aufgeführt werden:

- Die gegebenen Daten repräsentieren ein einzelnes 3-dimensionales digitales Objekt, also eine zusammenhängende Menge von Voxeln.
- Das Objekt liegt als Subkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$  in einem Raster vor.
- $S$  ist eine 3-Mannigfaltigkeit mit Rand gemäß Definition MA [21] (siehe S.166).
- $S$  ist somit stark zusammenhängend, homogen-3-dimensional und dicht gemäß Definitionen SZ [18] (siehe S.164), HN [23] (siehe S.164) und RD [19] (siehe S.164).
- Der AC Komplex  $A$  ist ein Kartesischer Komplex gemäß Definition KA [19] (siehe S.167). Somit besitzt jede Zelle aus  $A$  Koordinaten, die seiner Position im Raum entsprechen. Es gilt die Euklidische Metrik.
- Die 3-dimensionalen Zellen von  $A$  sind markiert als Zellen des Objektes  $S$  oder als Zellen des Hintergrundes  $A \setminus S$ .

Die zu berechnende Oberfläche soll folgende Forderungen erfüllen:

- Die Oberfläche trennt die 3-Zellen von  $S$  von den 3-Zellen von  $A \setminus S$  in einer Weise, dass die Menge  $S$  aus der erzeugten Oberfläche fehlerfrei rekonstruiert werden kann.
- Die Oberfläche besitzt Zellen der Menge  $S$  bzw. bei nicht-konvexen Objekten auch Zellen aus  $A \setminus S$  als Ecken.
- Die Oberfläche soll in einer effizienten Datenstruktur gespeichert werden. Das bedeutet, dass die Kodierung der Oberfläche frei von Redundanz ist und die fehlerfreie Rekonstruktion von  $S$  erlaubt.
- Es ist diejenige Oberfläche gesucht, die unter den bereits genannten Forderungen minimal viele Flächen besitzt, sofern dies ohne die Anwendung zusätzlicher Optimierungsverfahren möglich ist.

- Es soll untersucht werden, ob die erzeugte Oberfläche den minimalen Oberflächeninhalt besitzt und unter welchen Voraussetzungen dieser ohne die Anwendung zusätzlicher Optimierungsverfahren bei der Polyedrisierung der gegebenen Menge von Voxeln erzeugt wird.



# Kapitel 4

## Polyedrisierung

In diesem Kapitel soll der Algorithmus vorgestellt werden, der zu einer gegebenen Menge  $S$  von Voxeln ein abstraktes geometrisches Polyeder  $P$  berechnet, das die in Abschnitt 3.5 zusammengefassten Eigenschaften besitzt.

Der Algorithmus beginnt mit der Erzeugung der konvexen Hülle  $CH(S)$  des Teilkomplexes  $S$ .  $CH(S)$  ist gemäß Definition CH ein AG Polyeder. Sofern die gegebene Menge  $S$  von Zellen gemäß Definition DCS konvex ist, wurde hiermit bereits ein Polyeder erzeugt, welches die Zellen der Menge  $S$  von den Zellen der Menge  $A \setminus S$  trennt (siehe Lemma TR, S.97).

Im allgemeinen Fall ist die Menge  $S$  jedoch nicht-konvex. In dieser Situation führt der Algorithmus im Anschluss an die Erzeugung der konvexen Hülle von  $S$  eine rekursive Modifikation dieses AG Polyeders durch. Diese Modifikation erfolgt unter Abhängigkeit von der Art und Anzahl der innerhalb der konvexen Hülle liegenden zusammenhängenden Komponenten von Hintergrundvoxeln auf verschiedene Arten. Weiterhin spielt auch das Geschlecht der Oberfläche der Menge  $S$  für die Art der Weiterverarbeitung eine entscheidende Rolle.

Für die Lösung des Problems für Objekte, die ein Oberflächengeschlecht  $g > 0$  besitzen, sollen in diesem Kapitel zwei mögliche Ansätze untersucht und verglichen werden.

## 4.1 Die konvexe Hülle

### 4.1.1 Grundlagen

Die konvexe Hülle ist ein häufig verwendetes Mittel zur effizienten Beschreibung einer Menge von Punkten im Raum. Auf dem Gebiet der Computational Geometry wird die konvexe Hülle in einem breiten Feld von Anwendungen eingesetzt. Aufgrund langjähriger Forschung auf diesem Gebiet existieren viele verschiedene effiziente Algorithmen zur Erzeugung der konvexen Hülle in 2D. Einige dieser Algorithmen konnten erfolgreich auf den 3-dimensionalen Fall (bzw. auch höherdimensionalen Fall) verallgemeinert werden.

Man gliedert die Algorithmen zur Erzeugung der konvexen Hülle in 3D zunächst in drei verschiedene Kategorien [30]:

1. Gift Wrapping
2. Divide and Conquer
3. Inkrementelle Algorithmen

„Gift Wrapping“ ist ein Algorithmus, der in beliebigen Dimensionen arbeitet [7]. Die 3-dimensionale Version ist dabei eine direkte Verallgemeinerung der 2-dimensionalen Herangehensweise [30]. In jedem Schritt wird ein zusammenhängender Teil der konvexen Hülle erzeugt. Zu einer Fläche  $F$ , die bereits in der Teilhülle enthalten ist, wird eine Kante  $E$  gewählt, die  $F$ , aber noch keine zweite Fläche berandet. Die Erweiterung der Teilhülle erfolgt nun durch „Herumbiegen“ der Ebene  $\pi$ , die  $F$  enthält, entlang der Kante  $E$ , so weit bis ein Punkt  $p$  der gegebenen Menge von Punkten in  $\pi$  liegt. Mit der Kante  $E$  und dem Punkt  $p$  wird ein neues Dreieck aufgespannt, welches eine neue Fläche der Teilhülle darstellt. Dies wird so lange wiederholt, bis eine geschlossene triangulierte Oberfläche entstanden ist, also bis jede Kante der Teilhülle genau zwei Flächen berandet. Dieser Algorithmus ist mit einer Zeitkomplexität von  $O(n^2)$  implementierbar, wobei  $n$  die Anzahl der Punkte angibt, deren konvexe Hülle gesucht ist.

Divide-and-Conquer-Ansätze, wie in [30, 31] beschrieben, zeichnen sich durch



eine Zeitkomplexität von  $O(n \log n)$  aus, sind jedoch schwieriger zu implementieren als Gift Wrapping oder inkrementelle Algorithmen. Der erste Schritt bei dieser Klasse von Algorithmen ist das Sortieren der gegebenen Punkte nach einer ihrer Koordinaten (o.B.d.A. nach ihrer  $x$ -Koordinate). Diese so sortierte Menge wird nun in zwei Teilmengen zerlegt, so dass alle  $x$ -Koordinaten der einen Teilmenge kleiner sind als alle  $x$ -Koordinaten der anderen Teilmenge. Es wird zu jeder Teilmenge rekursiv die konvexe Hülle erzeugt. Die beiden entstehenden konvexen Hüllen der Teilmengen werden in einem Verbindungsschritt (Merging) zusammengefasst. Da die Koordinaten der Punkte sortiert wurden, sind die Teilhüllen zwei disjunkte Polyeder. Beim Verbinden der zwei Teilhüllen wird ähnlich dem Gift-Wrapping-Verfahren eine Menge von Ebenen um die Ecken der Teilhüllen „herumgefaltet“, so dass eine Menge von Dreiecken entsteht, die einen Zyklus bildet und dessen Rand Kanten der disjunkten Polyeder sind. Einige Flächen der Teilhüllen befinden sich nach dem Merging innerhalb des entstandenen Polyeders. Diese werden entfernt. Es verbleiben somit nur die äußeren Flächen sowie die sie verbindenden Dreiecke. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist die konvexe Hülle, die aus Dreiecken besteht und rekursiv berechnet wurde.

Inkrementelle Verfahren, wie z.B. in [3, 10], starten mit einem initialen Polyeder und erweitern dieses schrittweise. Das initiale Polyeder sei mit  $H_0$  bezeichnet und ist im allgemeinen Fall ein Tetraeder. Das Erweitern eines Polyeders  $H_i$  zum Polyeder  $H_{i+1}$  erfolgt durch die Wahl eines Punktes  $p$ , der sich außerhalb von  $H_i$  befindet und eines „Horizontes“, der durch eine Pyramide aus Dreiecken mit  $p$  verbunden wird. Auch hierbei gelangen wieder einige Flächen des Polyeders  $H_i$  in das Polyeder  $H_{i+1}$  hinein, die entfernt werden müssen. Sobald sich keine Punkte der gegebenen Menge mehr außerhalb von  $H_i$  befinden, ist das Polyeder  $H_i$  die konvexe Hülle dieser Menge.

Der in dieser Arbeit verwendete Algorithmus zur Erzeugung der konvexen Hülle wurde von W.A.Kovalevski entwickelt, in [24] vorgestellt und stellt ebenfalls ein Beispiel für einen inkrementellen Algorithmus dar. Er besitzt jedoch aufgrund der Anwendung auf dem Gebiet der 3-dimensionalen AC Komplexe einige Verbesserungen gegenüber herkömmlichen inkrementellen Algorithmen. Die Verbesserun-

gen beruhen auf der Tatsache, dass die konvexe Hülle einer gegebenen Menge  $S$  von Voxeln, die aus wenigen zusammenhängenden Komponenten besteht, identisch ist zur konvexen Hülle einer relativ kleinen Teilmenge  $S' \subset S$  von besonderen Zellen aus  $S$ . Diese besonderen Zellen sind solche, die Kandidaten für die Ecken der konvexen Hülle sind. Zwei mögliche Arten dieser Eckkandidaten werden in den folgenden beiden Abschnitten vorgestellt.

### 4.1.2 Lokale Ecken

Der erste Teil des Algorithmus zur Erzeugung der konvexen Hülle  $CH(S)$  eines Teilkomplexes  $S$  eines AC Komplexes  $A$  besteht in der Auswahl der besonderen Zellen, mit denen die konvexe Hülle aufgespannt werden soll. Hierfür werden Vektoren, die zu den Zellen zeigen, in einer Menge  $L$  zusammengefasst. Voraussetzung für die Verwendung der Vektoren ist die Zuordnung von Koordinaten an die Zellen der Menge  $S$ . Dies erfolgt unter Nutzung der kombinatorischen Koordinaten gemäß Definition KK bzw. KA [19] (siehe S.167). Im zweiten Schritt des Algorithmus erfolgt die Berechnung der konvexen Hülle der Menge  $L$ .

Ein Vektor  $\vec{v}$  ist ein Kandidat, wenn er keine Konvexkombination aus anderen Vektoren aus  $S$  darstellt, d.h. wenn er nicht durch folgende Formel beschreibbar ist:

$$\vec{v} = \sum \alpha_i \cdot \vec{v}_i \quad \text{mit } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ und } \sum \alpha_i = 1; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

Die Erkennung, ob die Vektoren der Menge  $S$  Konvexkombination anderer Vektoren aus  $S$  sind, ist äquivalent zum Problem der Erzeugung der konvexen Hülle. D.h. nur die Ecken der konvexen Hülle sind diejenigen Vektoren, die keine Konvexkombinationen sind.

Aus diesem Grund wurde von W.A.Kovalevski in [24] vorgeschlagen, Vektoren in einer lokalen Nachbarschaft zu testen, ob sie Konvexkombinationen von anderen Vektoren sind. Vektoren, die in einer solchen lokalen Nachbarschaft keine Konvexkombination darstellen, werden als *lokale Ecken* (engl. local corners) bezeichnet. Je größer dabei die betrachtete Nachbarschaft eines Vektors ist, desto kleiner ist

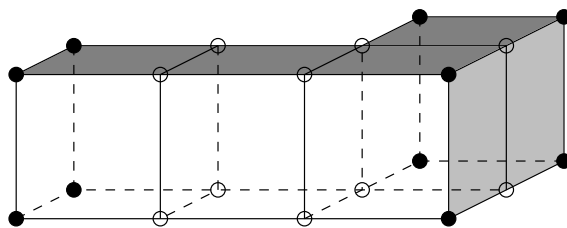
die Anzahl der gefundenen lokalen Ecken. Zweckmäßige Nachbarschaften für diese Überprüfung sind diejenigen Nachbarschaften, deren Vektoren sich in einer, zwei oder drei Koordinaten um genau 1 von den Koordinaten des untersuchten Vektors unterscheiden. Bei der Überprüfung von 6 Nachbarn eines Vektors  $\vec{v}$  mit den Koordinaten  $(x, y, z)$  werden drei Paare von Vektoren aus der Nachbarschaft von  $\vec{v}$  überprüft, wobei jedes Paar  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  symmetrisch zu  $\vec{v}$  ist, also z.B. die Koordinaten  $\vec{v}_1 = (x - 1, y, z)$  und  $\vec{v}_2 = (x + 1, y, z)$  besitzt. Wenn beide Vektoren zur Menge  $S$  gehören, ist  $\vec{v}$  keine lokale Ecke. Nur wenn in allen drei Paaren die Anzahl der jeweils zu  $S$  gehörenden Vektoren 0 oder 1 ist, ist  $\vec{v}$  eine lokale Ecke. Entsprechend werden bei der Überprüfung von 18 bzw. 26 Nachbarn 9 bzw. 13 Paare von Vektoren getestet.

### 4.1.3 Konvexe Ecken

Eine andere Möglichkeit, die Kandidatenvektoren zu ermitteln, ist die Wahl der konvexen Ecken aus  $S$ . Für den Fall, dass die zu erzeugende konvexe Hülle die 0-Zellen des Objektes  $S$  als Ecken besitzen soll, können die konvexen 0-Zellen (siehe Definition KX0, S.13) von  $S$  als Kandidatenvektoren verwendet werden. Für den in dieser Arbeit vorrangig betrachteten Fall, dass die Ecken der konvexen Hülle die 3-Zellen aus  $S$  sind, muss zunächst ermittelt werden, welche 3-Zellen aus  $S$  konvexe Ecken sind.

**Definition KX3:** Eine 3-Zelle  $c^3$  eines 3-dimensionalen AC Komplexes  $A$  heißt *konvex* bezüglich eines Teilkomplexes  $S \subset A$ , wenn sie mit mindestens einer bezüglich  $S$  konvexen 0-Zelle  $c^0$  inzidiert.

Alle solche 3-Zellen werden als konvexe Ecken und damit als Kandidatenvektoren aufgefasst. Ein Beispiel hierzu zeigt die folgende Abbildung:

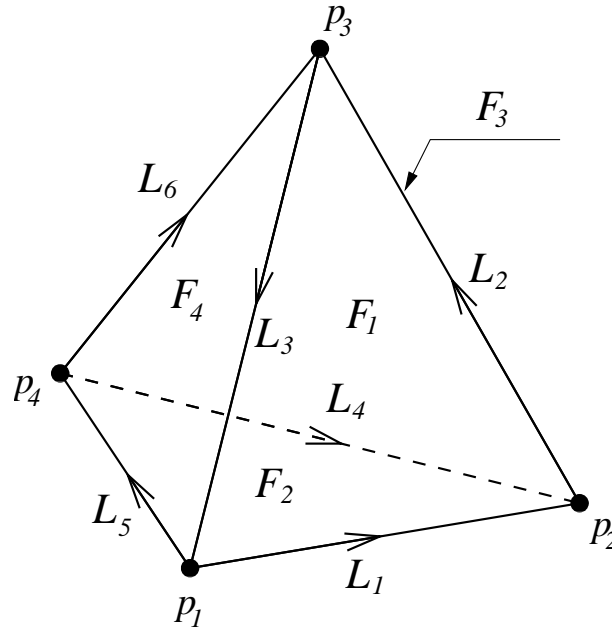


**Abbildung 4.1:** Ein Objekt  $S$  bestehend aus vier Voxeln. Seine konvexen 0-Zellen sind als schwarze Punkte, nicht-konvexe 0-Zellen sind als Kreise dargestellt. Das Voxel in der Mitte der vorderen Reihe inzidiert mit keiner konvexen 0-Zelle und ist demnach kein Kandidatenvektor.

Beide Möglichkeiten - lokale Ecken und konvexe Ecken - sind für die Auswahl der Kandidatenvektoren geeignet. Dabei sind die konvexen Ecken mit weniger Aufwand bestimmbar, jedoch wird durch die Betrachtung einer größeren lokalen Nachbarschaft für die Bestimmung der lokalen Ecken eine Reduzierung der Menge der Kandidatenvektoren erreicht, was die Erzeugung der konvexen Hülle beschleunigt.

#### 4.1.4 Die initiale konvexe Hülle

Wie bei allen inkrementellen Algorithmen zur Erzeugung der konvexen Hülle wird zunächst ein initiales Polyeder benötigt. Hierfür werden vier beliebige nicht-koplanare Kandidatenvektoren aus der Menge  $L$  ausgewählt und es wird aus ihnen ein Tetraeder (siehe Abbildung 4.2) aufgespannt. Dieses ist in jedem Fall konvex, denn jeweils drei Ecken des Tetraeders legen eine Ebene fest, die einen abgeschlossenen Halbraum berandet, in dem sich die vierte Ecke befindet und damit alle Ecken des Tetraeders. Dies gilt für alle möglichen Kombinationen aus drei Ecken des Tetraeders.



**Abbildung 4.2:** Vier Kandidatenvektoren  $(p_1, \dots, p_4)$  bilden ein Tetraeder.

Die Zellen der Oberfläche des Tetraeders werden in Form der 2-dimensionalen Zellenliste [18] gespeichert. Für das in Abbildung 4.2 dargestellte Tetraeder wird der Aufbau der Zellenliste in Anhang C erläutert.

#### 4.1.5 Erweiterung der initialen konvexen Hülle

Als nächster Schritt bei der Erzeugung der konvexen Hülle wird das initiale Polyeder erweitert. Dabei werden dem initialen Polyeder schrittweise Ecken aus der Menge  $L$  zugeführt. Das in jedem Schritt entstehende Polyeder sei als das *aktuelle Polyeder* (engl. current polyhedron) bezeichnet. Die Erweiterung des aktuellen Polyeders basiert auf dem Begriff der Sichtbarkeit, der folgendermaßen definiert ist:

**Definition VI:** Eine Fläche  $F$  eines konvexen AG Polyeders ist *sichtbar* (engl. visible) von einem Punkt  $p$ , wenn  $p$  im äußeren offenen Halbraum liegt, der durch die Fläche  $F$  berandet wird. Das bedeutet, dass das Skalarprodukt  $s_{Fp} = \vec{n} \cdot \vec{w}$  aus dem Normalenvektor  $\vec{n}$  der Fläche  $F$  und dem Vektor  $\vec{w}$ , der von einem beliebigen Punkt  $Q$  aus  $F$  zu  $p$  zeigt, positiv ist. Ist  $s_{Fp}$  negativ, ist  $F$  von  $p$  aus *unsichtbar*.

(engl. invisible). Wenn  $s_{Fp} = 0$ , dann ist  $F$  *komplanar* (engl. coplanar) mit  $p$ .

Die Wahl des Punktes  $Q$  als Anfangspunkt des Vektors  $\vec{w}$  beeinflusst den Wert des Skalarproduktes nicht, da alle Vektoren, die in  $F$  liegen, orthogonal zu  $\vec{n}$  sind und ihr Skalarprodukt mit  $\vec{n}$  daher 0 ist.

Die Erweiterung des aktuellen Polyeders erfolgt, indem eine (lokale oder konvexe) Ecke nach der anderen aus  $L$  genommen wird. Für jeden dieser Punkte  $p$  wird die Sichtbarkeit jeder Fläche  $F$  des Polyeders berechnet. Dafür wird das Skalarprodukt aus dem Vektor  $\vec{w}$ , der von einem Punkt der Fläche zu  $p$  zeigt, und dem Normalenvektor  $\vec{n}$  der Fläche  $F$  berechnet und es wird jede Fläche mit einem Label markiert, welches angibt, ob die Fläche von  $p$  aus sichtbar, unsichtbar oder mit  $p$  komplanar ist. Nachdem dies für alle Flächen des Polyeders erfolgt ist, können verschiedene Situationen eintreten: Die erste Möglichkeit besteht darin, dass keine der Flächen als sichtbar markiert wurde. In diesem Fall liegt der Punkt  $p$  innerhalb des Polyeders und das Polyeder muss nicht verändert werden. Der Punkt  $p$  wird aus  $L$  entfernt.

Die zweite Möglichkeit ist der Fall, dass eine nicht-leere Menge von sichtbaren Flächen existiert. Da das Polyeder in jedem Schritt konvex ist, ist diese Menge zusammenhängend. Es wird nun jeweils aus jeder Kante des Randes der Menge der sichtbaren Flächen und dem Punkt  $p$  ein Dreieck erzeugt, welches in das Polyeder aufgenommen wird.  $p$  wird dabei zu einer neuen Ecke. Die sichtbaren Flächen werden im Anschluss entfernt sowie auch alle Kanten und Ecken, die ausschließlich mit sichtbaren Flächen inzidieren. Zellen, die mit sichtbaren und unsichtbaren Zellen inzidieren, müssen aktualisiert werden, so dass der Verweis auf die sichtbare Fläche durch einen Verweis auf die neu hinzugefügte Fläche ersetzt wird. Gleiches gilt für die Verweise auf Kanten und Ecken, die entfernt bzw. aktualisiert wurden.

Eine dritte Möglichkeit, die auftreten kann, ist der Fall, dass sichtbare und komplanare Flächen bezüglich eines Punktes  $p$  existieren. Für die komplanaren Flächen muss eine spezielle Herangehensweise gewählt werden, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen werden soll.

Nachdem alle Ecken aus  $L$  verarbeitet wurden, endet das Verfahren zur Er-

zeugung der konvexen Hülle. Dabei sind die Elemente der Menge  $L$  im Ergebnis entweder Ecken der konvexen Hülle oder sie befinden sich innerhalb des Polyeders. Letzters schließt die Möglichkeit mit ein, dass Punkte  $p$  aus  $L$  auf dem Polyeder liegen, jedoch keine Ecken des Polyeders sind.

Dass dieses Verfahren die konvexe Hülle einer Menge von Voxeln erzeugt, wurde in [24] gezeigt. Eine Kurzfassung des Beweises befindet sich in Anhang B.

#### 4.1.6 Komplanare Flächen

Das aktuelle Polyeder besteht für den Fall, dass ein Punkt  $p$  aus  $L$  niemals komplanar mit einer Fläche  $F$  ist, ausschließlich aus Dreiecken, d.h. es ist eine triangulierte Oberfläche. Das liegt an der Erweiterung des aktuellen Polyeders mittels der Entfernung sichtbarer Flächen und dem Einfügen einer Menge von Dreiecken, die den Rand der sichtbaren Flächen mit dem Punkt  $p$  verbinden.

Da die konvexe Hülle von Objekten erzeugt werden soll, die in Form von Voxeln in einem orthogonalen Gitter liegen, können Punkte existieren, die mit Flächen des aktuellen Polyeders komplanar sind. Für die Erweiterung eines aktuellen Polyeders, welches zu einem Punkt  $p$  komplanare Flächen besitzt, sind verschiedene Herangehensweisen möglich.

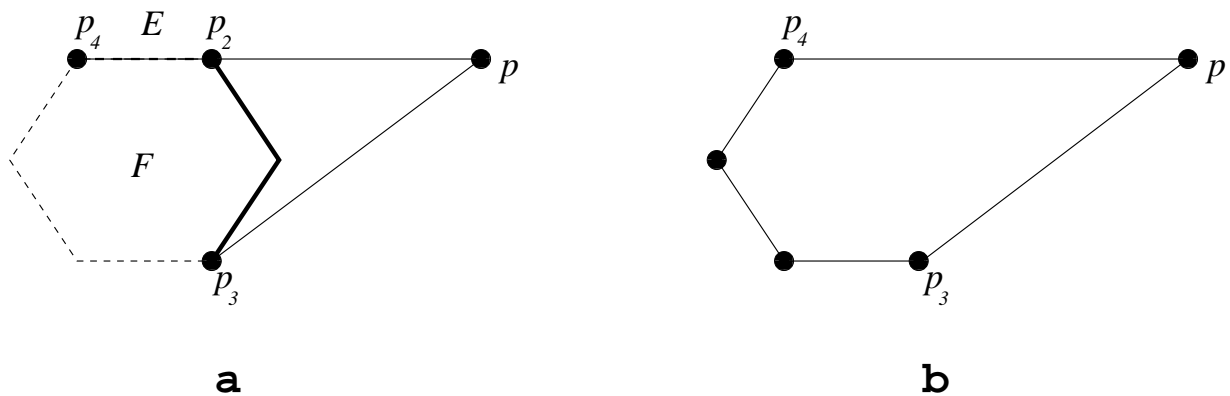
Zunächst können komplanare Flächen als unsichtbare interpretiert werden. In diesem Fall wird an den Kanten, die sichtbare und komplanare (also unsichtbare) Flächen beranden, mit dem aktuellen Punkt  $p$  ein neues Dreieck erzeugt. Dieses neue Dreieck ist dann ebenfalls komplanar mit der Fläche, die mit  $p$  komplanar ist.

Die zweite Möglichkeit ist die Interpretation komplanarer Flächen als sichtbare Flächen. In diesem Fall werden die komplanaren Flächen ebenso wie die sichtbaren entfernt und am Rand des sichtbaren Gebietes werden neue Dreiecke erzeugt.

Auch in diesen beiden Fällen ist ein aktuelles Polyeder immer ein trianguliertes Polyeder, da in jedem Schritt immer nur Dreiecke erzeugt werden. Einige dieser Dreiecke sind komplanar. Dies kann in einem anschließenden Zusammenfassungsschritt geändert werden, so dass alle komplanaren Dreiecke zu  $n$ -Ecken zusammen-

gefügt werden.

Eine dritte Möglichkeit besteht darin, für komplanare Flächen eine eigene Herangehensweise zu formulieren. Dabei wird der Punkt  $p$  in den Rand der komplanaren Fläche aufgenommen, indem der Punkt  $p$  mit dem Rand des sichtbaren Gebietes des Randes der komplanaren Fläche verbunden wird, d.h. Kanten, die außer der komplanaren Fläche  $F$  sichtbare oder ebenfalls komplanare andere Flächen beranden, werden entfernt und es wird je eine neue Kante zwischen  $P$  und den beiden Endpunkten des verbliebenen Randes erzeugt.



**Abbildung 4.3:** Erweiterung einer komplanaren Fläche  $F$  mit dem Punkt  $p$ .

Abbildung 4.3 (a) zeigt eine Fläche  $F$ , die mit einem Punkt  $p$  komplanar ist. Die beiden Kanten zwischen den Ecken  $p_2$  und  $p_3$  beranden neben  $F$  noch je eine sichtbare Fläche, die in Abbildung 4.3 nicht dargestellt ist, da sie in die Tiefe geht. Die Kante  $E$  berandet eine weitere mit  $p$  komplanare Fläche, weswegen  $E$  mit  $p$  kollinear ist. Wie im Teilbild (b) zu erkennen ist, wurden die Kanten, die sichtbare oder komplanare Flächen beranden, entfernt und die beiden Endpunkte  $p_3$  und  $p_4$  des verbliebenen Randes durch neue Kanten mit  $p$  verbunden.

Dieser Ansatz entspricht der Erweiterung der 2-dimensionalen konvexen Hülle, bestehend aus einem aktuellen konvexen Polygon, mit einem Punkt  $p$ .

Alle drei beschriebenen Möglichkeiten der Verarbeitung komplanarer Flächen wurden angewandt und praktisch untersucht. Bezüglich der Rechenzeit ist es von



Vorteil, in jedem Schritt durch das dritte Verfahren die Anzahl der Flächen im aktuellen Polyeder zu reduzieren, was bei der Überprüfung der Sichtbarkeit weniger Berechnungen erfordert. Dies kann mittels Tabelle 4.1 belegt werden. Für Objekte verschiedener Größe wurde die Zeit gemessen, die jeweils für die Erzeugung der konvexen Hülle nach den drei oben beschriebenen Möglichkeiten benötigt wurde. Dabei wurden die beiden Möglichkeiten der Erzeugung einer triangulierten Oberfläche mit der dritten Möglichkeit, also der Erweiterung komplanarer Flächen zu  $n$ -Ecken, verglichen.

Objekt	Rechenzeit für die Erzeugung der konvexen Hülle		
	Triangulation		Erweiterung
	komplanare Flächen sind unsichtbar	komplanare Flächen sind sichtbar	
Kugel ( $r = 12$ )	0,210s	0,110s	0,080s
Kugel ( $r = 16$ )	2,293s	1,812s	0,971s
Kugel ( $r = 20$ )	5,357s	1,932s	1,462s
Kugel ( $r = 24$ )	8,072s	4,937s	3,435s
Würfel ( $a = 5$ )	0,130s	0,040s	0,010s
Würfel ( $a = 10$ )	8,031s	0,180s	0,170s

**Tabelle 4.1:** Vergleich des Zeitaufwandes bei den drei verschiedenen Verfahren zur Erzeugung der konvexen Hülle für Kugeln mit verschiedenem Radius  $r$  und nicht-achsenparallele Würfel mit verschiedener Kantenlänge  $a$ .

Neben den in Tabelle 4.1 gezeigten Werten für die Berechnungszeiten der konvexen Hüllen verschiedener Objekte ist es weiterhin interessant zu vergleichen, aus wievielen Flächen die konvexen Hüllen bestehen, die durch die drei verschiedenen Verfahren erzeugt wurden.

Objekt	Anzahl der Flächen in der konvexen Hülle		
	Triangulation		Erweiterung
	komplanare Flächen sind unsichtbar	komplanare Flächen sind sichtbar	
Kugel ( $r = 12$ )	236	140	74
Kugel ( $r = 16$ )	492	428	218
Kugel ( $r = 20$ )	636	380	170
Kugel ( $r = 24$ )	668	524	290
Würfel ( $a = 5$ )	204	60	24
Würfel ( $a = 10$ )	716	60	22

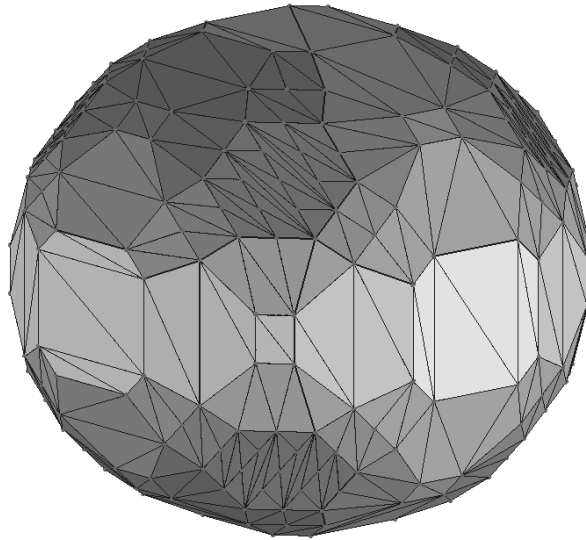
**Tabelle 4.2:** Vergleich der entstehenden Flächenanzahl bei den drei verschiedenen Möglichkeiten zur Erzeugung der konvexen Hülle.

Aus diesen Vergleichen lässt sich schlussfolgern, dass bezüglich Rechenzeit und Flächenanzahl die Methode der Erweiterung komplanarer Flächen die effizienteste ist. Soll die konvexe Hülle dagegen als Triangulation vorliegen, so ist es sinnvoller, komplanare Flächen als sichtbare Flächen zu interpretieren, denn hierbei werden weniger Flächen erzeugt als bei der Methode der Interpretation komplanarer Flächen als unsichtbare Flächen. Die Einsparung von Rechenzeit ergibt sich dann aus der geringeren Anzahl von Flächen, die in jedem Schritt auf Sichtbarkeit überprüft werden müssen.

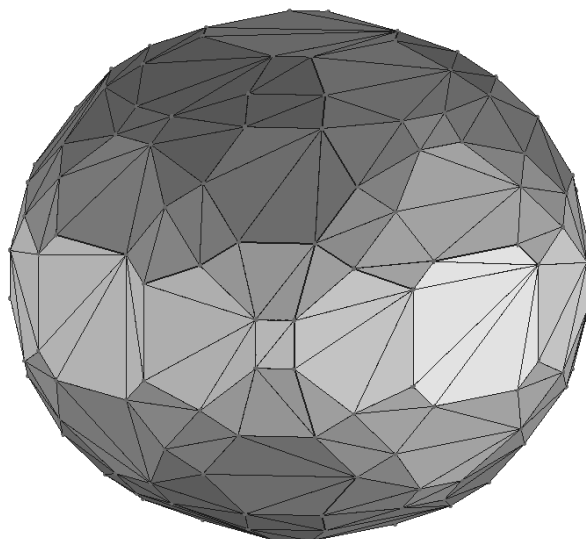
#### 4.1.7 Beispiele

In diesem Abschnitt folgen einige Beispiele für die verschiedenen Möglichkeiten der Erzeugung der konvexen Hülle  $CH(S)$  einer Menge  $S$  von Voxeln.

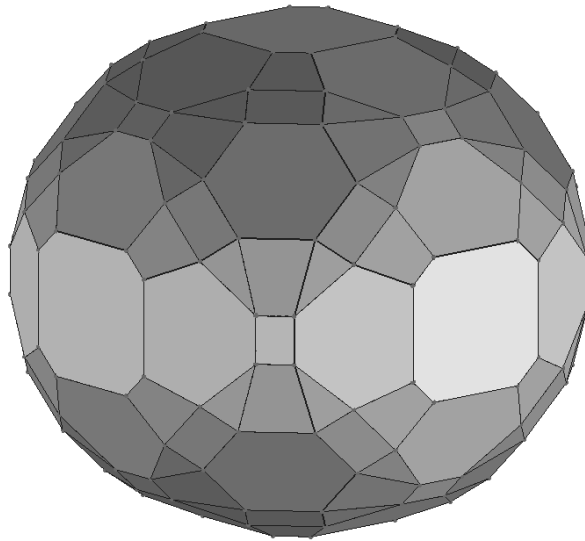
Die Abbildungen 4.4 bis 4.6 zeigen eines der in den Tabellen 4.4 und 4.5 erwähnten Beispiele digitaler Kugeln. Man erkennt hier deutlich die unterschiedliche Anzahl der erzeugten Flächen. Die Abbildungen 4.8 bis 4.10 zeigen das Beispiel eines nicht-achsenparallelen Würfels. Zu diesen Abbildungen sei angemerkt, dass hier die 0-Zellen des Objektes die Ecken der konvexen Hülle sind. Dies wurde aufgrund der besseren Darstellbarkeit ausgewählt.



**Abbildung 4.4:** Konvexe Hülle einer digitalen Kugel mit Radius  $r = 20$  Voxel, erzeugt als triangulierte Oberfläche. Komplanare Flächen wurden bei der Erweiterung als unsichtbare Flächen interpretiert.

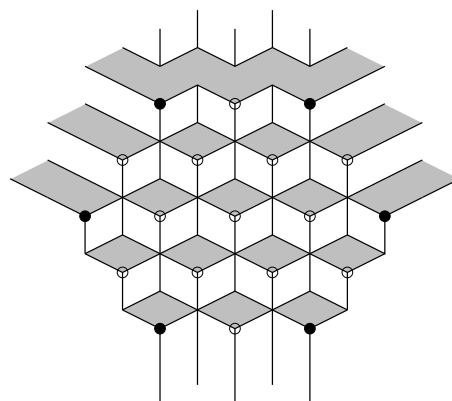


**Abbildung 4.5:** Komplanare Flächen wurden bei der Erweiterung als sichtbare Flächen interpretiert.



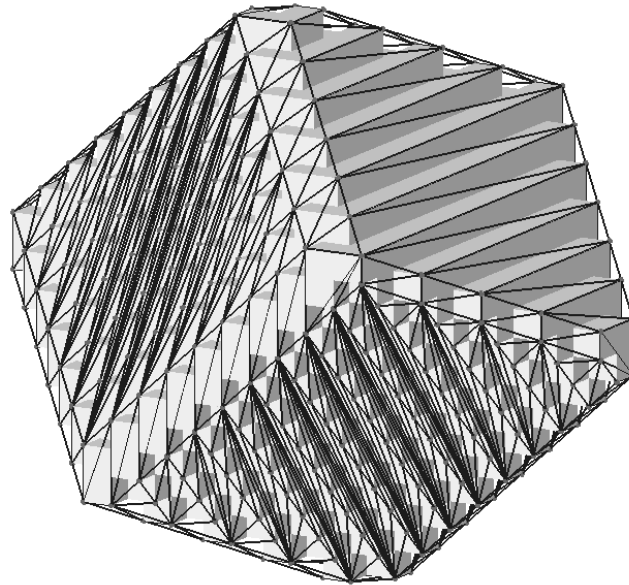
**Abbildung 4.6:** Komplanare Flächen wurden bei der Erweiterung des aktuellen Polyeders durch das Verfahren der 2D konvexen Hülle zu  $n$ -Ecken vergrößert.

Zu den in den Abschnitten 4.1.2 und 4.1.3 beschriebenen Möglichkeiten der Wahl der Kandidatenvektoren für die Ecken der konvexen Hülle soll das folgende Bild (Abbildung 4.7) zeigen, wie sich die Anzahl dieser beiden Arten von Ecken unterscheidet. In dieser Abbildung wird ein Ausschnitt des Objektes in Abbildung 4.6 dargestellt, nämlich die 6-eckige Fläche in der oberen Mitte des Objektes.

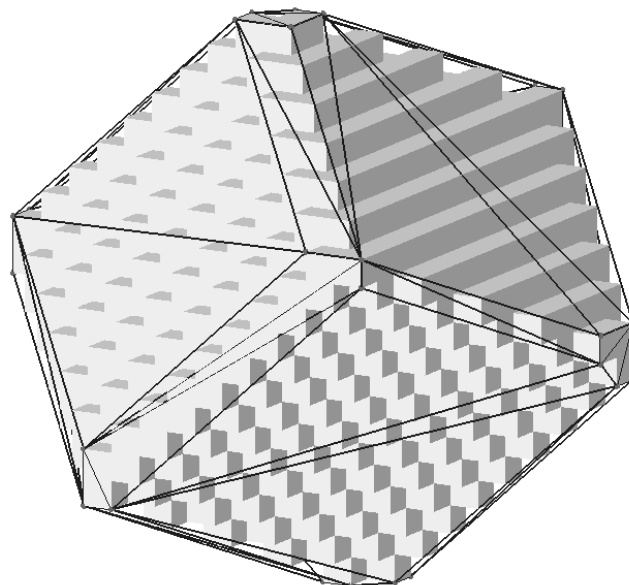


**Abbildung 4.7:** Die Kandidaten für die Ecken der konvexen Hülle: lokale Ecken (schwarze Punkte) und konvexe Ecken (schwarze Punkte und

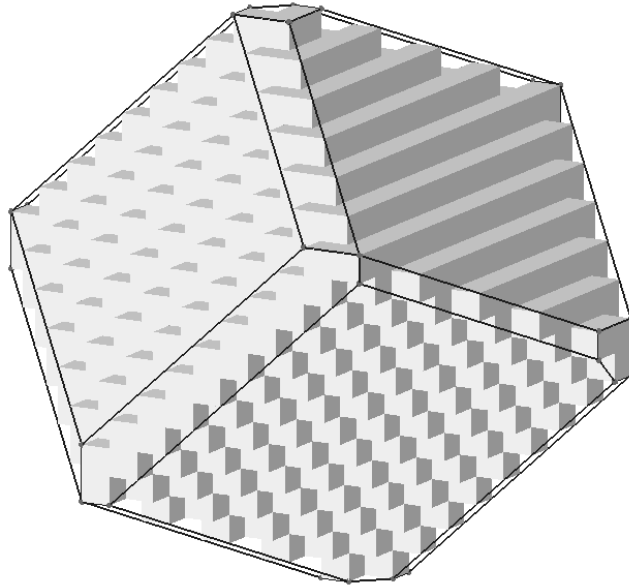
Kreise). Die Menge der Ecken der konvexen Hülle beinhaltet die in diesem Beispiel dargestellten lokalen Ecken.



**Abbildung 4.8:** Konvexe Hülle eines nicht-achsenparallelen Würfels mit Kantenlänge  $a = 10$  Voxel, erzeugt als triangulierte Oberfläche. Komplanare Flächen wurden bei der Erweiterung als unsichtbare Flächen interpretiert.



**Abbildung 4.9:** Komplanare Flächen wurden bei der Erweiterung als sichtbare Flächen interpretiert.



**Abbildung 4.10:** Komplanare Flächen wurden bei der Erweiterung des aktuellen Polyeders durch das Verfahren der 2D konvexen Hülle zu  $n$ -Ecken vergrößert.

#### 4.1.8 Optimierung des Algorithmus

Wie schon im vorletzten Abschnitt gezeigt wurde, ist die Rechenzeit zur Erzeugung der konvexen Hülle entscheidend davon abhängig, wie komplanare Flächen behandelt werden. Dabei wird die Zeit, die für die Erweiterung komplanarer Flächen aufgewendet wird, durch die Reduzierung der Anzahl der Flächen mehr als aufgeholt.

Eine weitere Verkürzung der Rechenzeit kann erreicht werden, indem die initiale konvexe Hülle so gewählt wird, dass die Abstände der vier Ecken des Tetraeders maximiert werden. Das bedeutet, dass dadurch erreicht werden kann, dass bei der Erweiterung der initialen Hülle Punkte aus der Menge  $L$  bereits im Inneren des Polyeders liegen und dass damit keine Flächen erzeugt oder gelöscht werden müssen. Dies tritt umso häufiger auf, je weniger Ecken die konvexe Hülle im Verhältnis zur Anzahl der Kandidatenvektoren besitzt. Ein Extrembeispiel hierfür ist ein achsenparalleler Würfel mit einem kugelförmigen Hohlraum (siehe Definition CA, S.51) im Inneren (siehe Abbildung 4.11).

Um die Erzeugung der konvexen Hülle diesbezüglich anzupassen, ist es erforderlich, die Menge  $L$  der Kandidatenvektoren zu sortieren. Im bisher beschriebenen Algorithmus wird die Menge  $L$  so abgearbeitet, dass eine lexikografische Sortierung der Vektoren benutzt wird, was bedeutet, dass die Vektoren zunächst nach ihrer  $x$ -Koordinate, dann nach ihrer  $y$ -Koordinate und ihrer  $z$ -Koordinate sortiert sind und in dieser Reihenfolge beim Erzeugen der konvexen Hülle verwendet werden.

Um nun die Abstände der Ecken des initialen Polyeders (des Tetraeders) zu maximieren, müssen die ersten vier zu benutzenden Vektoren in der Menge  $L$  diejenigen sein, deren Koordinaten in gewisser Weise extrem sind. Das heißt, dass folgende vier Vektoren als Ecken des Tetraeders verwendet werden können:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_{min} \\ y_{min} \\ z_{min} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_{max} \\ y_{min} \\ z_{min} \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} x_{min} \\ y_{max} \\ z_{min} \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} x_{min} \\ y_{min} \\ z_{max} \end{pmatrix}$$

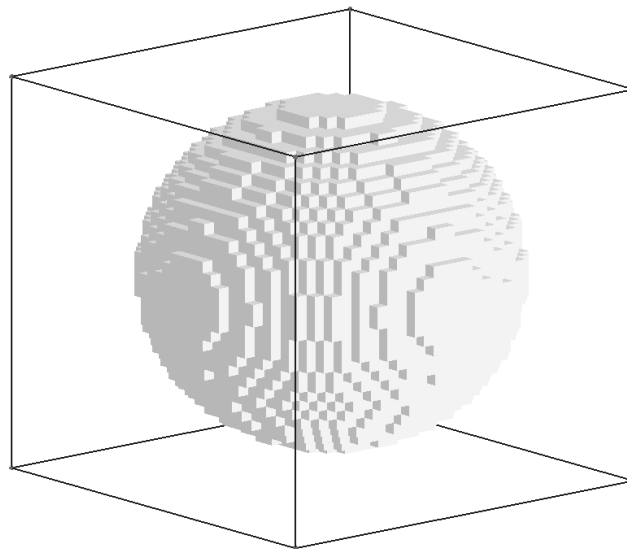
Hierbei bedeuten die Minimalwerte der Koordinaten, dass zunächst die minimale  $x$ -Koordinate gewählt wird, unter allen Vektoren mit diesem Wert für  $x$  dann die minimale  $y$ -Koordinate und unter allen diesen Vektoren dann die minimale  $z$ -Koordinate. Existiert nur ein Vektor mit minimaler  $x$ -Koordinate, so muss der zweite Vektor mit dem nächstgrößeren Wert für  $x$  gesucht werden. Gleiches gilt für die Wahl der Maximalwerte. Der Grund für diese Art der Auswahl ist, dass ein Vektor mit minimalem Wert in allen Koordinaten nicht in jedem Fall existiert. Dies tritt beispielsweise bei einer digitalen Kugel auf, deren minimale  $x$ -Koordinate sich dort befindet, wo  $y$ - und  $z$ -Koordinaten weder minimal noch maximal sind.

Nachdem nun die Ecken des Tetraeders gewählt wurden, ist eine weitere Sortierung der Vektoren der Menge  $L$  nötig, um die Beschleunigung weiter zu steigern. Die nächsten vier Kandidatenvektoren, mit denen die initiale konvexe Hülle erweitert wird, sollten dann die folgenden sein:

$$\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} x_{max} \\ y_{max} \\ z_{max} \end{pmatrix}, \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} x_{min} \\ y_{max} \\ z_{max} \end{pmatrix}, \vec{v}_7 = \begin{pmatrix} x_{max} \\ y_{min} \\ z_{max} \end{pmatrix}, \vec{v}_8 = \begin{pmatrix} x_{max} \\ y_{max} \\ z_{min} \end{pmatrix}$$

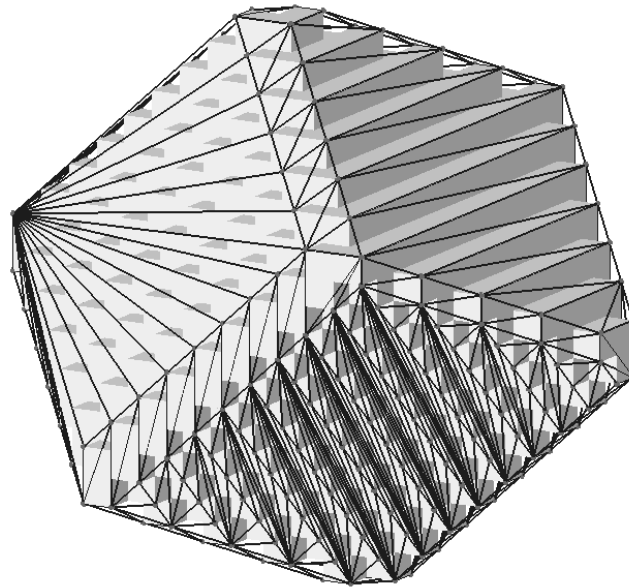
Mit diesen 8 Vektoren wird ein achteckiges Polyeder beschrieben, das in den anschließenden Schritten der Erzeugung der konvexen Hülle mit den verbleibenden Vektoren in  $L$  erweitert wird.

Es soll angemerkt werden, dass diese Idee nur für bestimmte Objekte eine Beschleunigung der Rechenzeit bringt, vor allem für nicht-konvexe Objekte oder Objekte mit vielen komplanaren oder kollinearen Kandidatenvektoren. Für das Objekt in Abbildung 4.11 ist aufgrund der achsenparallelen Lage die Wahl der ersten 8 Vektoren für das Erzeugen der konvexen Hülle gleichzeitig die Wahl aller Ecken, die in der konvexen Hülle enthalten sind. Alle weiteren Kandidatenvektoren liegen im Inneren, was zu einer Rechenzeitreduzierung von 2,183s (nicht-umsortierte Liste der Kandidatenvektoren) auf 0,711s (umsortierte Liste der Kandidatenvektoren) führt.



**Abbildung 4.11:** Konvexe Hülle eines Würfels mit kugelförmigem Hohlraum im Inneren. Die äußeren Randfacetten des Würfels sind in diesem Bild nicht dargestellt.





**Abbildung 4.12:** Die konvexe Hülle eines nicht-achsenparallelen Würfels, die aus der umsortierten Liste der Kandidatenvektoren erzeugt wurde (vgl. Abbildung 4.8).

Abbildung 4.12 zeigt dagegen die konvexe Hülle des nicht-achsenparallelen Würfels aus Abbildung 4.8. Für dieses Beispiel reduziert sich die Rechenzeit nur geringfügig von 8,031s auf 6,209s mit gleichzeitiger Reduzierung der Flächenanzahl von 716 auf 622.

## 4.2 Nicht-konvexe Mengen von Voxeln

Die konvexe Hülle einer Menge  $S$  von Voxeln, die einen stark zusammenhängenden, homogen-3-dimensionalen und dichten Subkomplex eines AC Komplexes  $A$  darstellt, ist nach Anwendung des im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahrens ein konvexes AG Polyeder, welches die Voxel aus  $S$  von den Hintergrundvoxeln, also den Voxeln der Menge  $A \setminus S$ , trennt, wenn  $S$  eine konvexe Teilmenge des Raumes  $A$  gemäß Definition DCS [19] (siehe S.169) ist. Weiterhin ist gemäß Definition CH (siehe S.9) die konvexe Hülle auch das kleinste konvexe AG Polyeder mit dieser Eigenschaft und besitzt damit den minimalen Oberflächeninhalt unter allen Polyedern, die eine konvexe Menge  $S$  von Voxeln von der Menge  $A \setminus S$  trennen

(siehe Lemma OB, S.107).

Da in dieser Arbeit vor allem auch Mengen  $S$  polyedrisiert werden sollen, die nicht-konvex sind, muss zunächst eine Unterscheidungsmöglichkeit zwischen konvexen und nicht-konvexen Mengen von Voxeln gefunden werden. Hierfür wird, wie in [36] vorgeschlagen, die Menge der Voxel aus  $A \setminus S$ , die sich innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$  befinden, in Zusammenhangskomponenten zerlegt und bezüglich der Anzahl disjunkter Mengen von stark zusammenhängenden Flächen von  $CH(S)$  untersucht.

### 4.2.1 Zusammenhangskomponenten

Um herauszufinden, ob Hintergrundvoxel, also Voxel der Menge  $A \setminus S$ , innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$  liegen, wird wiederum der Begriff der Sichtbarkeit gemäß Definition VI (siehe S.37) benötigt. Demnach liegt ein Voxel innerhalb der konvexen Hülle, wenn von diesem Voxel aus alle Flächen von  $CH(S)$  unsichtbar sind.

Um alle Hintergrundvoxel innerhalb der konvexen Hülle zu finden, muss das gesamte Gitter, welches die Voxel enthält, in einem Bereich abgesucht werden, der die konvexe Hülle vollständig enthält. Hierfür bietet es sich an, die minimalen und maximalen Werte der Koordinaten, die die Ecken der konvexen Hülle besitzen, in jeder Achsenrichtung des Gitters zu ermitteln und aus diesen einen Quader festzulegen, der als Suchbereich für die Hintergrundvoxel verwendet wird. Innerhalb dieses Quaders muss zu jedem Voxel der Menge  $A \setminus S$  die Sichtbarkeit aller Flächen der konvexen Hülle bestimmt werden.

Diejenigen Hintergrundvoxel, für die alle Flächen der konvexen Hülle unsichtbar sind, befinden sich innerhalb dieser. Die Menge der Hintergrundvoxel wird im Anschluss in zusammenhängende Komponenten zerlegt. Dafür wird das in [23] vorgestellte Verfahren benutzt, so dass als Ergebnis der Zerlegung stark zusammenhängende Komponenten von Hintergrundvoxeln innerhalb der konvexen Hülle vorliegen. Die Voxel der Zusammenhangskomponenten werden in Abhängigkeit von ihrer Zugehörigkeit zur entsprechenden Komponente mit den Indices dieser

markiert.

### 4.2.2 Arten der Zusammenhangskomponenten

Für eine Zusammenhangskomponente von Hintergrundvoxeln innerhalb der konvexen Hülle soll im weiteren Verlauf dieser Arbeit folgender Begriff verwendet werden:

**Definition ZKH:** Eine *ZKH* ist eine Zusammenhangskomponente von Voxeln der Menge  $A \setminus S$  innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$  eines Teilkomplexes  $S \subset A$ .

Innerhalb dieser Arbeit sei eine ZKH als abgeschlossener Teilkomplex  $S'$  bezüglich eines AC Komplexes  $A$  angenommen, d.h. es gilt  $Cl(S', A) = S'$ .

Jede ZKH ist ein stark zusammenhängender, homogen-3-dimensionaler und dichter Teilkomplex eines AC Komplexes  $A$ . Aus topologischer Sicht muss man jedoch zwischen verschiedenen Arten solcher Zusammenhangskomponenten unterscheiden. Hierfür wird für jede solche Komponente die Anzahl ihrer Berührungen mit den Flächen der konvexen Hülle gemäß der drei folgenden Definitionen bestimmt.

**Definition CO:** Eine *ZKH-Konkavität* (engl. ZKH concavity) ist eine ZKH, die zu genau einer stark zusammenhängenden Menge von Flächen der konvexen Hülle inzident ist.

Im Gegensatz zur Definition einer Konkavität gemäß [42] muss eine ZKH-Konkavität gemäß Definition CO keine „konvexe Ausbuchtung“ des Hintergrundes sein, d.h. eine ZKH-Konkavität muss keine konvexe Menge von Voxeln sein.

**Definition CA:** Ein *ZKH-Hohlraum* (engl. ZKH cavity) ist eine ZKH, die zu keiner Fläche der konvexen Hülle inzident ist.

**Definition TU:** Ein *ZKH-Tunnel* (engl. ZKH tunnel) ist eine ZKH, die mit mehr als einer stark zusammenhängenden Menge von Flächen der konvexen Hülle inzident ist. Wenn der ZKH-Tunnel mit genau zwei stark zusammenhängenden Mengen von Flächen inzidiert, heißt er *unverzweigt* (engl. non-branched). Wenn die Anzahl der stark zusammenhängenden Mengen von Flächen, mit denen der ZKH-Tunnel inzidiert, größer ist als zwei, heißt er *verzweigt* (engl. branched).

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden anstelle der Begriffe „ZKH-Konkavität“, „ZKH-Hohlraum“ und „ZKH-Tunnel“ die allgemeinen Begriffe „Konkavität“, „Hohlraum“ und „Tunnel“ verwendet. Gemeint sind dabei jedoch immer die hier definierten Begriffe.

Die Unterscheidung der ZKHs erfolgt auch hier wieder durch die Nutzung des Begriffs der Sichtbarkeit. Um zu prüfen, ob eine Menge von Flächen sichtbar ist, werden zunächst die 0-Zellen der aktuellen ZKH ermittelt und es wird mittels der Berechnung der Sichtbarkeit geprüft, ob es 0-Zellen dieser ZKH gibt, die außerhalb oder auf der konvexen Hülle liegen. Existieren zu einer ZKH keine 0-Zellen außerhalb oder auf der Hülle, bedeutet dies, dass die ZKH die Oberfläche nicht schneidet und somit nicht mit Flächen der konvexen Hülle inzidiert. In diesem Fall ist die aktuelle ZKH ein Hohlraum, da er vollständig von Voxeln des Objektes  $S$  umgeben ist (siehe Beispiel in Abbildung 4.11).

Sobald 0-Zellen der aktuellen ZKH außerhalb der konvexen Hülle liegen, existieren damit sichtbare Flächen. Die ZKH wird somit von den sichtbaren Flächen geschnitten und inzidiert dadurch mit der Oberfläche.

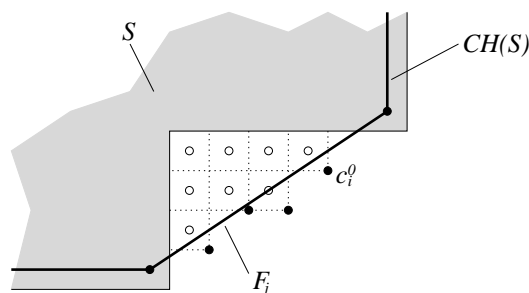
Um hiermit nun Konkavitäten und Tunnel unterscheiden zu können, ist es erforderlich, die von den 0-Zellen aus sichtbaren Flächen zu markieren und in stark zusammenhängende Komponenten zu zerlegen. Die Anzahl der Komponenten von Flächen ergibt dann eine Unterscheidungsmöglichkeit zwischen Konkavitäten (genau eine zusammenhängende Menge von Flächen), unverzweigten Tunneln (genau zwei zusammenhängende Mengen von Flächen) und verzweigten Tunneln (mehr als zwei zusammenhängende Mengen von Flächen).

### 4.2.3 Markierung sichtbarer Flächen

Zu jeder ZKH muss die Menge der sichtbaren Flächen gefunden werden. Zum einen ist dies notwendig, um die Art (Hohlraum, Konkavität, Tunnel) jeder ZKH bestimmen zu können, zum anderen müssen die Gebiete der Oberfläche ermittelt werden, an denen die Modifikation des Polyeders erfolgen soll. Wie bereits erwähnt, erfolgt diese Untersuchung unter Nutzung der 0-Zellen der Zusammenhangskomponente. Dies ist unabhängig davon, welche Arten von Zellen als Ecken des Polyeders verwendet werden.

Es sei zunächst der Fall betrachtet, dass eine ZKH  $S'$  eine Konkavität ist. Diese ist gemäß Definition CO inzident zu genau einer stark zusammenhängenden Menge von Flächen des Polyeders. Eine ZKH ist immer genau dann inzident zu einer Menge von Flächen, wenn sie von den Flächen geschnitten wird, was bedeutet, dass Zellen von  $S'$  außerhalb des Polyeders liegen. Es existieren damit 0-Zellen  $c_i^0 \in S'$  und Flächen  $F_j \in CH(S)$ , für die das Skalarprodukt eines Vektors  $\vec{w}_i$ , der von einem Punkt aus  $F_j$  zu  $c_i^0$  zeigt, und des Normalenvektors  $\vec{n}_j$  der Fläche  $F_j$  größer als 0 ist (Sichtbarkeit).

Abbildung 4.13 zeigt ein Beispiel für eine ZKH, die eine Konkavität darstellt. Einige 0-Zellen der ZKH liegen außerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$  und damit ist eine sichtbare Fläche  $F_j$  vorhanden.



**Abbildung 4.13:** Konkavität eines Objektes  $S$ . Einige 0-Zellen (z.B.  $c_i^0$ ) liegen außerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$  und damit existiert eine sichtbare Fläche  $F_j$ .

Sind von den 0-Zellen der Menge  $S'$  aus mehrere Flächen sichtbar, muss geprüft werden, ob die Menge der sichtbaren Flächen stark zusammenhängend ist. Dies kann erfolgen, indem eine beliebige sichtbare Fläche mit einer bestimmten Markierung versehen wird und ebenfalls auch alle weiteren sichtbaren Flächen, die mit der ersten eine gemeinsame Kante besitzen und wiederum auch die sichtbaren Flächen, die mit den bereits markierten eine gemeinsame Kante haben. Sollten somit alle sichtbaren Flächen markiert worden sein, ist die Menge der sichtbaren Flächen stark zusammenhängend. Ist dies nicht der Fall, wird mit einer noch nicht markierten sichtbaren Fläche und einem neuen Label auf die gleiche Art und Weise weiter markiert, bis alle sichtbaren Flächen ein Label besitzen. Die Anzahl der verschiedenen Markierungen, die benötigt werden, ergibt die Anzahl der stark zusammenhängenden Mengen von sichtbaren Flächen.

Ist die so ermittelte Anzahl größer als 1, handelt es sich bei der untersuchten Zusammenhangskomponente um einen Tunnel.

Als weiterer Fall sei betrachtet, dass die ZKH  $S'$  ein Hohlraum ist. Da gemäß Definition CA eine solche ZKH mit keiner Fläche der konvexen Hülle inzidieren darf, muss geprüft werden, ob alle Zellen aus  $S'$  innerhalb  $CH(S)$  liegen. Dies ist der Fall, wenn keine Fläche der konvexen Hülle von einer 0-Zelle aus  $S'$  aus sichtbar ist.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn keine 0-Zellen von  $S'$  außerhalb von  $CH(S)$  liegen, es jedoch 0-Zellen aus  $S'$  gibt, die mit Flächen der konvexen Hülle komplanar sind. Dieser Fall gilt dann ebenfalls als Konkavität, da auch in diesem Fall Flächen der konvexen Hülle mit 0-Zellen der ZKH inzidieren.

### 4.3 Geschlecht der Oberfläche

Das topologische Geschlecht einer Oberfläche ist eine topologische Invariante, also eine Eigenschaft, die unter Anwendung einer beliebigen homöomorphen Abbildung  $f(A)$  erhalten bleibt.

Gemäß Definition TG (siehe S.166) ist das topologische Geschlecht  $g$  einer Oberfläche definiert als die maximale Anzahl von einfachen, geschlossenen, sich nicht

überschneidenden Kurven, die sich auf der Oberfläche befinden können, ohne die Oberfläche zu zerschneiden. Diese Definition ist jedoch wenig zweckmäßig für eine algorithmische Bestimmung des Geschlechtes des Randes eines AC Komplexes  $S$ . Hierfür ist die Definition der EULER Charakteristik [44] günstiger:

**Definition EC:** Gegeben sei eine geschlossene Oberfläche mit Geschlecht  $g$ . Die *EULER Charakteristik* ist bestimmt durch die Formel

$$\chi(g) = 2 - 2g = n_0 - n_1 + n_2 \quad (4.2)$$

Dabei bezeichnen  $n_0, n_1$  und  $n_2$  die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der Oberfläche.

Angewendet auf einen Teilkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$  bedeutet dies, dass es sich bei der erwähnten Oberfläche um den Rand  $\partial S$  handelt. Die Ecken, Kanten und Flächen der Oberfläche sind die 0-, 1- und 2-Zellen in  $\partial S$ .

### 4.3.1 Berechnung von $g$

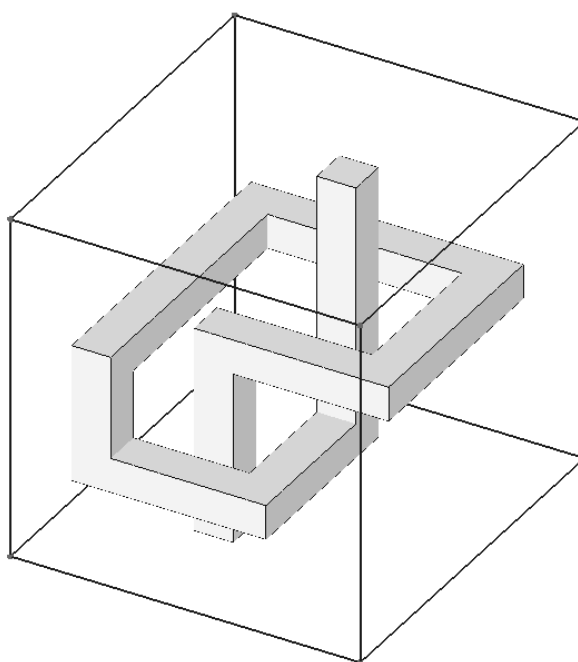
Um  $g$  berechnen zu können, also um das topologische Geschlecht von  $\partial S$  bestimmen zu können, ist es lediglich notwendig, Formel 4.2 nach  $g$  umzustellen:

$$g = 1 - \frac{n_0 - n_1 + n_2}{2} \quad (4.3)$$

Die Werte für  $n_0, n_1$  und  $n_2$  können durch Zählen der 0-, 1- und 2-Zellen des Randes  $\partial S$  bestimmt werden. Beispielsweise hat damit der Rand eines einzelnen Voxels erwartungsgemäß das Geschlecht  $g = 0$ , denn er besteht aus 8 0-Zellen, 12 1-Zellen und 6 2-Zellen.

Das topologische Geschlecht  $g$  des Randes  $\partial S$  eines stark zusammenhängenden, homogen-3-dimensionalen und dichten Teilkomplexes  $S$  eines AC Komplexes  $A$  ist ein wichtiges Merkmal zur Klassifikation der zu verarbeitenden Objekte. Da der Algorithmus für Objekte mit unterschiedlichem Geschlecht verschieden arbeitet, was im Folgenden noch detailliert beschrieben werden wird, ist diese Klassifikation

von grundlegender Bedeutung. Jedoch besteht eine entscheidende Schwachstelle in dieser Unterscheidung: eine bestimmte Klasse von Objekten wird dadurch nicht erkannt. Dies ist die Klasse der Objekte, die einen Knoten bilden, bzw. Objekte, die Tunnel enthalten, welche einen Knoten bilden. Objekte dieser Art unterscheiden sich in ihrem topologischen Geschlecht nicht von Objekten, die keine Knoten besitzen, haben jedoch andere topologische Eigenschaften.



**Abbildung 4.14:** Objekt mit einem Tunnel, der einen Knoten bildet. Die Voxel des Objektes sind nicht dargestellt, lediglich ihre konvexe Hülle und die darin enthaltenen Hintergrundvoxel, die einen knotenartigen Tunnel bilden.

Abbildung 4.14 zeigt ein Beispiel für ein Objekt mit  $g = 1$ . Für dieses Objekt ist die Anzahl der 0-Zellen  $n_0 = 742$ , die Anzahl der 1-Zellen  $n_1 = 1484$  und die Anzahl der 2-Zellen  $n_2 = 742$ . Dieses Objekt unterscheidet sich damit in seinem Geschlecht nicht von einem Torus, dessen Hintergrundvoxel innerhalb der konvexen Hülle keinen Knoten bilden.



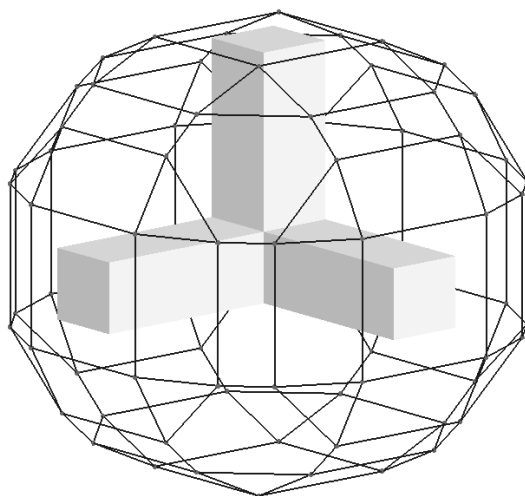
Die Erkennung von Knoten ist ein nicht-triviales Problem und ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Grundlagen über die Klassifikation von Knoten findet man beispielsweise in [1]. Ein den Knoten verwandtes Thema der verschlungenen Sphären behandelt [20].

Unabhängig von dem Problem der Erkennung von Knoten ist die Polyedrisierung dieser Objekte möglich, sofern sie stark zusammenhängende, homogen-3-dimensionale und dichte Teilkomplexe eines Zellenkomplexes bilden.

### 4.3.2 Geschlecht der Oberfläche und Tunnel

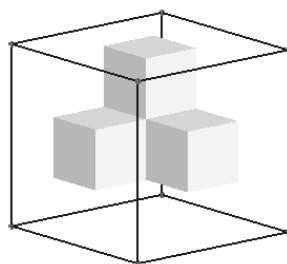
Wie im vorigen Abschnitt dargelegt, kann das Geschlecht  $g$  der Oberfläche eines Objektes  $S$ , welches eine 3-Mannigfaltigkeit mit Rand ist, durch Abzählen der 0-, 1- und 2-Zellen in  $\partial S$  und mit Hilfe von Formel 4.3 berechnet werden. Dies ist notwendig, um nach dem Erzeugen der konvexen Hülle  $CH(S)$  die Modifikation der Oberfläche entsprechend der Klasse des Objektes  $S$  durchführen zu können. Konkret bedeutet das, dass Objekte mit  $g = 0$  auf das Vorhandensein von Konkavitäten und Hohlräumen untersucht werden und nicht auf (verzweigte oder unverzweigte) Tunnel.

Für Objekte, die Tunnel besitzen, ist durch das Geschlecht der Oberfläche nicht die Art des oder der Tunnel, die von den Hintergrundvoxeln gebildet werden, bestimmt. Man stelle sich als Beispiel zwei Objekte vor, wobei eines zwei disjunkte Tunnel besitzt und das andere einen einfach verzweigten Tunnel (siehe Abbildung 4.15). In beiden Fällen ist  $g = 2$ . Die Unterscheidung dieser Fälle erfolgt nach dem in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Verfahren, also durch die Markierung sichtbarer Flächen zu jeder ZKH. Das bedeutet, dass das Objekt mit den zwei disjunkten Tunneln zwei ZKHs besitzt, die einzeln und nacheinander betrachtet werden. Das Objekt mit einem verzweigten Tunnel besitzt lediglich eine ZKH.



**Abbildung 4.15:** Objekt mit verzweigtem Tunnel. Das Geschlecht  $g$  des Randes dieses Objektes ist 2, denn  $n_0 = 790$ ,  $n_1 = 1584$  und  $n_2 = 792$ .

Hierbei ist anzumerken, dass bestimmte Objekte existieren, die aufgrund der geringen Anzahl von Flächen in ihrer konvexen Hülle ZKHs besitzen können, die Tunnel bilden, welche aber nicht als Tunnel interpretiert werden, da die mit den Tunnelenden inzidierenden Flächen der konvexen Hülle eine einzige stark zusammenhängende Menge bilden (siehe Abbildung 4.16). Solche ZKHs gelten gemäß Definition CO als Konkavitäten.



**Abbildung 4.16:** Objekt mit verzweigtem Tunnel, welcher als Konkavität behandelt wird. Das Geschlecht der Oberfläche dieses Objektes ist  $g = 2$ .

## 4.4 Modifikation der konvexen Hülle

Nachdem alle ZKHs des Objektes  $S$  gefunden und klassifiziert wurden, kann die konvexe Hülle modifiziert werden. Wie bereits erwähnt wurde, ist die konvexe Hülle ein konvexes Polyeder. Da durch die folgenden Schritte der Modifikation die Konvexität zerstört wird, kann im Folgenden nicht mehr von der konvexen Hülle gesprochen werden. Als Bezeichnung hierfür wird von nun an „das Polyeder“ oder „die Oberfläche“ verwendet.

Zu Beginn dieses Kapitels wurde bereits erwähnt, dass die Modifikation durch ein rekursives Verfahren realisiert wird. Dabei werden die markierten ZKHs einzeln und unabhängig voneinander verarbeitet. Die Rekursion besteht darin, dass die Verarbeitung einer ZKH, die nicht konvex ist, mit dem gleichen Verfahren erfolgt, wie die Verarbeitung des Ausgangsobjektes  $S$  selbst. Es müssen lediglich die Rollen von innen und außen vertauscht werden. Das Modifikationsverfahren besteht letztendlich aus dem Erzeugen der Oberfläche der ZKH und dem Zusammenfügen von Teiloberflächen.

Die Modifikation erfolgt unterschiedlich für verschiedene Klassen von Objekten. Die drei Arten der Zusammenhangskomponenten innerhalb eines Polyeders (Konkavitäten, Hohlräume und Tunnel) sind topologisch soweit verschieden, dass die Verarbeitung jeweils eigene Ansätze benötigt.

### 4.4.1 Modifikation an Konkavitäten

Gemäß Definition CO existiert zu einer Konkavität genau eine stark zusammenhängende Menge von Flächen des Polyeders, die mit der Konkavität inzidiert. Hiermit wird jedoch noch nicht zwischen den zwei möglichen Klassen von Konkavitäten unterschieden. Es kann nämlich Konkavitäten geben, die lediglich eine geometrische Eigenschaft der Oberfläche sind und keine topologische. Solche Konkavitäten besitzen eine Oberfläche mit  $g = 0$ , d.h. sie enthalten selbst keine Tunnel. Konkavitäten mit Tunneln sind aus topologischer Sicht verschieden von den Konkavitäten ohne Tunnel und werden bei der Polyedrisierung anders verarbeitet, da sie Objekte mit  $g > 0$  (siehe Abschnitt 4.5) sind. In diesem Abschnitt werden

daher die Konkavitäten ohne Tunnel betrachtet.

Da Objekte mit Konkavitäten, die keine Tunnel besitzen, somit topologisch äquivalent zu konvexen Objekten sind, wird für die Modifikation des Polyeders eine Operation benötigt, die die Topologie erhält, also das Geschlecht  $g$  des Polyeders nicht verändert.

Die dafür verwendete Operation wird „Eindrücken“ genannt. Der Name soll verdeutlichen, dass das Polyeder nach innen verformt wird und dabei nicht zerschnitten oder verklebt wird, was der Definition einer topologieerhaltenden Abbildung, also dem Homöomorphismus, entspricht.

**Definition PR:** Das *Eindrücken* (engl. pressing-in) eines Polyeders  $P$  zu einer nicht-leeren Menge von Zellen, genannt *Zielzellen*, die sich innerhalb des Polyeders  $P$  befinden, ist eine topologieerhaltende Operation, die eine zusammenhängende Menge  $S_1$  von Flächen von  $P$  durch eine neue zusammenhängende Menge  $S_2$  von Flächen ersetzt, so dass der Rand  $\partial S_1$  und der Rand  $\partial S_2$  identisch sind.

Im einfachsten Fall besteht die Menge  $S_1$  aus genau einer Fläche von  $P$  und die Menge der Zellen, zu der das Eindrücken erfolgt, besteht aus einer Zelle  $c$ , die sich innerhalb von  $P$  befindet, aber nicht zu  $S$  gehört. In diesem einfachsten Fall bildet die Menge  $S_1$  die Grundfläche einer Pyramide  $P'$  mit der Spitze  $c$  und den Flächen der Menge  $S_2$  als Seiten.  $S_2$  ist somit eine Menge von Dreiecken, die jeweils  $c$  mit einer Kante der Grundfläche der Pyramide  $P'$  verbinden. Der Inhalt von  $P'$  befindet sich vollständig innerhalb von  $P$ . Im allgemeinen Fall des Eindrückens besteht die Menge  $S_1$  jedoch aus mehreren Flächen und die Menge der Zielzellen des Eindrückens besteht aus mehreren Zellen.

Um das Eindrücken zu realisieren, müssen diejenigen Flächen, die durch diese Operation ersetzt werden sollen, markiert werden. Der in Abschnitt 4.2.3 beschriebene Ansatz des Markierens sichtbarer Flächen zur Unterscheidung der Arten der Zusammenhangskomponenten muss für das Eindrücken konkretisiert werden, denn die Sichtbarkeit einer Fläche allein reicht nicht als Kriterium für ihre Auswahl aus, denn damit würden auch Flächen eingedrückt werden, die nicht mit der ZKH in-

zidieren. Dies liegt an der Definition der Sichtbarkeit, denn auch solche Flächen können als sichtbar gelten, die keine Abschlüsse von Hintergrundvoxeln schneiden und demnach nicht mit der ZKH inzidieren.

Alle der folgenden drei Bedingungen müssen von einer Fläche  $F$  erfüllt werden, damit diese zum Eindrücken ausgewählt wird:

- (i) Die Fläche  $F$  ist sichtbar von mindestens einer 0-Zelle  $c^0$  der ZKH  $S'$  oder mindestens eine 0-Zelle  $c^0$  von  $S'$  ist komplanar mit  $F$ .
- (ii) Wenn eine 0-Zelle  $c^0$  von  $S'$  außerhalb von  $P$  und ein Hintergrundvoxel  $c^3 \in S'$  mit  $c^0 \in Cl(c^3)$  innerhalb oder auf  $P$  liegt, dann muss die Projektion von  $c^3$  auf  $F$  innerhalb des Randes von  $F$  sein.
- (iii) Die 0-Zelle  $c^0$  von  $S'$  liegt nicht auf dem Rand der Fläche  $F$ .

Mit diesen Kriterien wird sichergestellt, dass eine einzudrückende sichtbare (i) Fläche  $F$  von der Verbindungsstrecke  $\overline{c^0c^3}$  geschnitten wird (ii). Weiterhin wird verhindert, dass Flächen ausgewählt werden, die  $S'$  lediglich mit einer Kante oder einer Ecke berühren (iii).

Die beiden Kriterien (ii) und (iii) dienen dazu, beim Eindrücken die Oberfläche so zu modifizieren, dass möglichst wenige Zellen aus  $S$  nach der Modifikation außerhalb der Oberfläche liegen.

Die Zielzellen des Eindrückens sind solche Zellen, die, analog zu den Kandidatenvektoren beim Aufspannen der konvexen Hülle, lokalen oder konvexen Ecken entsprechen (siehe Abschnitt 4.1.2 bzw. Abschnitt 4.1.3). Diese werden in einer Liste  $L'$  gespeichert. Auch hier soll damit erreicht werden, dass die Anzahl der Vektoren, die als Ecken der konvexen Hülle von  $S'$  in Frage kommen, reduziert wird, um Berechnungszeit zu sparen.

An dieser Stelle wird nun das Verfahren zur Erzeugung der konvexen Hülle auf die Menge  $S'$  der Hintergrundvoxel angewendet. Das dafür zunächst benötigte initiale Polyeder wird jedoch nicht wie beim Erzeugen der konvexen Hülle aus vier beliebigen nicht-koplanaren Zellen aus  $L'$  erzeugt, sondern es wird aus der Menge  $M$  der zum Eindrücken markierten Flächen und einer Zelle aus  $L'$ , die mit keiner

markierten Fläche komplanar ist, aufgespannt. Dadurch entsteht ein Polyeder  $P'$ , welches aufgrund bereits erfolgter Modifikationen des Polyeders  $P$  auch nicht-konvex sein kann. Dieses Polyeder  $P'$  wird im Folgenden auch als *aktuelles Polyeder* bezeichnet.

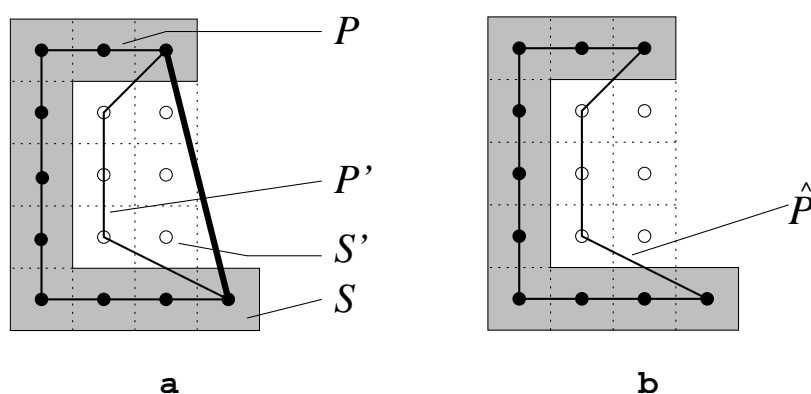
Das initiale bzw. aktuelle Polyeder  $P'$  wird nun analog zum Erweitern der initialen konvexen Hülle durch Zuführen von Zellen der Menge  $L'$  erweitert. Hierbei wird der Begriff der Sichtbarkeit von Flächen gemäß Definition VI (siehe S.37) angewandt. Das Verfahren der Erweiterung eines aktuellen Polyeders  $P'$  unterscheidet sich lediglich in einem Punkt von der Erweiterung der initialen konvexen Hülle: Die Flächen des initialen Polyeders, welche den markierten Flächen aus  $P$  entsprechen, also die Flächen der Menge  $M$ , nehmen eine besondere Rolle ein. Sie werden in keinem Schritt als sichtbar markiert und auch nicht durch komplanare Punkte erweitert. Dies ist notwendig, um die gemäß Definition PR (siehe S.60) geforderte Identität der Ränder der Mengen  $S_1$  und  $S_2$  sicherzustellen.

Nachdem alle Zellen aus  $L'$  verarbeitet wurden, ist das umschließende Polyeder  $P'$  der Menge  $S'$  vollständig erzeugt. An diesem Punkt des Polyedrisierungsverfahrens erfolgt nun die Anwendung der Rekursion: Es wird zunächst geprüft, ob das Polyeder  $P'$  Objektvoxel, also Voxel der Menge  $S$ , in seinem Inneren enthält. Ist dies nicht der Fall, endet die Modifikation der aktuellen Komponente mit dem Zusammenfügen der Polyeder  $P$  und  $P'$  (siehe unten). Sind in  $P'$  jedoch Zellen aus  $S$ , also Objektvoxel, enthalten, erfolgt die Modifikation des Polyeders  $P'$  nach dem gleichen Verfahren wie die Modifikation des Polyeders  $P$ . Damit dies realisierbar ist, müssen an dieser Stelle die Rollen von Objekt- und Hintergrundvoxeln getauscht werden. Danach werden wieder ZKHs (in diesem Fall mit Zellen aus  $S$ ) gebildet und klassifiziert. Im Anschluss daran werden diese entsprechend ihrer Art (Konkavität, Tunnel) durch das Modifikationsverfahren verarbeitet.

Das Zusammenfügen der Polyeder  $P$  und  $P'$  erfolgt, indem die Menge  $M$  der zur Modifikation markierten Flächen von  $P$  entfernt und durch diejenigen Flächen des Polyeders  $P'$  ersetzt wird, die nicht der Menge  $M$  der markierten Flächen aus  $P$  entsprechen (siehe Abbildung 4.17). Damit die Orientierung der Flächen des modifizierten Polyeders  $\hat{P}$  einheitlich ist, müssen beim Zusammenfügen die Flächen

von  $P'$  „umgedreht“ werden. Das bedeutet, dass der Umlaufsinn des Randes jeder Fläche sowie ihr Normalenvektor  $\vec{n}$  in die entgegengesetzte Richtung gebracht werden. Als Ergebnis zeigt dann jeder Normalenvektor nach außen und die Kanten jeder Fläche sind von außen gesehen gegen den Uhrzeigersinn orientiert.

Das Zusammenfügen der Zellenlisten der Polyeder  $P$  und  $P'$  erfolgt durch Entfernung der Einträge derjenigen Flächen der Zellenliste von  $P$ , die zum Eindringen markiert wurden. Weiterhin werden auch die Einträge in der Liste der 1- und 0-Blockzellen entfernt, die ausschließlich mit den entfernten Flächen inzidiert haben. Im Anschluss daran werden die Indices der Zellen des Polyeders  $P'$  um die jeweils maximalen Index-Werte der Teillisten von  $P$  erhöht und es werden die Einträge der Teillisten von  $P'$  in die Teillisten von  $P$  aufgenommen und entsprechend der Inzidenz der jeweiligen Blockzellen aktualisiert.



**Abbildung 4.17:** 2D-Analogen zweier Polyeder  $P$  und  $P'$  beim Zusammenfügen (a) sowie das resultierende Polyeder  $\hat{P}$  des Zusammenfügens (b).

#### 4.4.2 Modifikation bei Hohlräumen

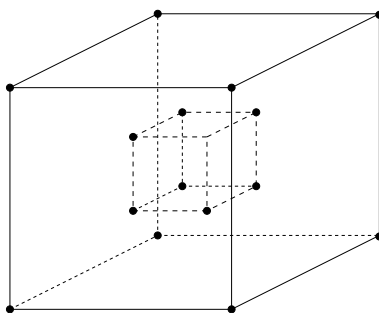
Die Modifikation eines Polyeders  $P$ , welches eine Zusammenhangskomponente von Hintergrundvoxeln enthält, die gemäß Definition CA (siehe S.51) einen Hohlraum bildet, erfolgt verschieden von der Modifikation eines Polyeders, welches eine Konkavität besitzt. Hohlräume inzidieren mit keiner Fläche des Polyeders  $P$ . Demnach

kann das Polyeder  $P$  nicht durch Eindrücken modifiziert werden.

Zwei digitale Objekte, die bis auf einen Hohlraum im Inneren identisch sind, unterscheiden sich jedoch topologisch voneinander, da es keinen Homöomorphismus gibt, der ein Objekt ohne Hohlraum auf ein Objekt mit Hohlraum abbildet. Anhand der EULER Charakteristik lässt sich dies jedoch nicht in jedem Fall korrekt erkennen. Deswegen wurde von Lhuilier im Jahre 1812 folgende Verallgemeinerung vorgeschlagen (siehe [17], S.218 und [40], S.12ff):

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2(b - t + 1) + p \quad (4.4)$$

Hierbei bezeichnen  $n_0$ ,  $n_1$  und  $n_2$  die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen des entsprechenden Polyeders,  $b$  die Anzahl der Hohlräume (engl. bubbles),  $t$  die Anzahl der Tunnel und  $p$  die Anzahl der Polygone innerhalb der Flächen des Polyeders (sog. Tunnelausgänge). Diese Formel liefert für das Beispiel in Abbildung 4.18 den Wert  $b = 1$ , wogegen die EULER Charakteristik das Geschlecht der Oberfläche  $g = -1$  liefert.



**Abbildung 4.18:** Würfel mit Hohlraum im Inneren.

Da die Topologie eines Polyeders  $P$  ohne Hohlraum somit verändert werden muss, um in ein Polyeder mit Hohlraum umgewandelt zu werden, kommt für die Modifikation nur eine Operation in Frage, die dies auch realisieren kann. Diese Operation ist jedoch trivial, denn es besteht keine Inzidenz zwischen den Zellen des Hohlraumes und dem Polyeder  $P$ , so dass ein unabhängiges Polyeder um den Hohlraum herum aufgespannt werden kann.



Dies wird durch die Erzeugung der konvexen Hülle des Hohlraumes mit anschließender Modifikation (falls es notwendig ist) realisiert. Auch hier werden zunächst die Kandidaten der Ecken dieses Polyeders bestimmt und in einer Liste  $L$  gespeichert, die während des Aufspanns der konvexen Hülle abgearbeitet wird. Die Modifikation der konvexen Hülle des Hohlraumes kann in gleicher Weise wie die des Objektes  $S$  erfolgen.

Sofern der Hohlraum keine konvexe Menge von Zellen ist (siehe Definition DCS, S.169), ist eine Modifikation notwendig. Das bedeutet, dass, falls der Hohlraum  $S'$  Konkavitäten besitzt, die konvexe Hülle  $CH(S')$  eingedrückt werden muss (siehe Abschnitt 4.4.1), bzw. falls  $S'$  Tunnel besitzt, dann müssen die weiter unten beschriebenen Verfahren durchgeführt werden (siehe Abschnitt 4.5). Der Hohlraum  $S'$  selbst kann wiederum keine Hohlräume enthalten, da sonst die Menge  $S$  kein zusammenhängender Teilkomplex  $S \subset A$  eines AC Komplexes  $A$  ist, was jedoch gemäß Problemstellung gefordert ist.

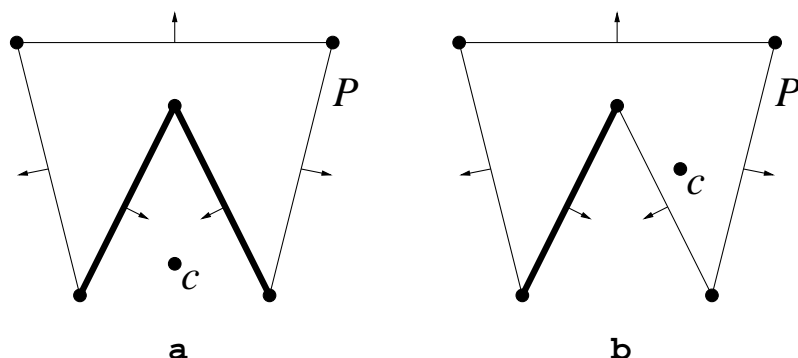
Nach Abschluss der Erzeugung des Polyeders, welches die Zellen des Hohlraumes von den Zellen von  $S$  trennt, ist jedoch zu beachten, dass die Rolle von Innerem und Äußerem korrekt definiert werden muss. Durch die unabhängige Erzeugung dieses Polyeders sind die Zellen des Hohlraumes das Innere und die Zellen des Objektes  $S$  das Äußere. Dies muss, wie auch beim Zusammenfügen der beiden Teilpolyeder beim Eindrücken, durch Umorientieren der Normalenvektoren der Flächen und Umlaufrichtungen der Kanten umgekehrt werden.

Die Vereinigung der Zellenlisten benötigt keine besonderen Maßnahmen, jedoch besteht die Oberfläche des resultierenden Polyeders nun aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten, da die Blockzellen des Polyeders des Hohlraumes mit keiner Blockzelle des äußeren Polyeders inzidieren.

### 4.4.3 Zellen innerhalb nicht-konvexer Polyeder

Die in Abschnitt 4.2.1 beschriebene Erkennung der Hintergrundvoxel innerhalb der konvexen Hülle ist für ein bereits modifiziertes, also nicht-konvexes Polyeder nicht mehr anwendbar. Wie im 2D-Beispiel in Abbildung 4.19 zu erkennen ist,

können sichtbare Flächen sowohl für Zellen im Inneren als auch im Äußeren eines Polyeders existieren. Daher ist die Verwendung der Sichtbarkeitsuntersuchung für nicht-konvexe Polyeder nicht geeignet.

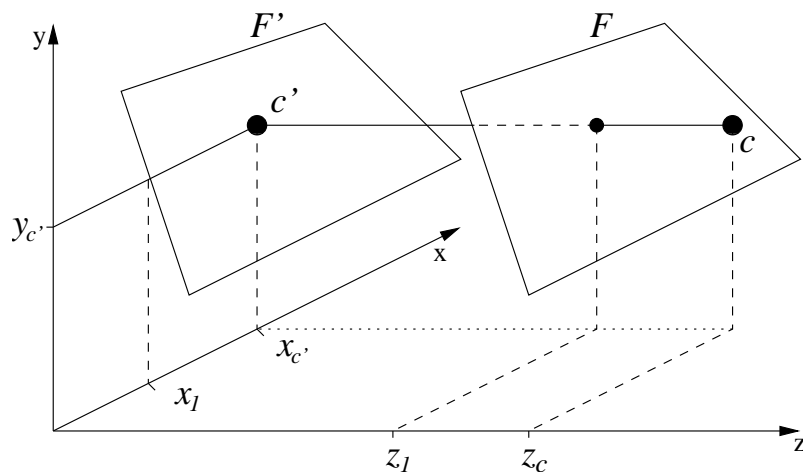


**Abbildung 4.19:** Ein nicht-konvexes Polyeder  $P$  und eine Zelle  $c$  außerhalb (a) bzw. innerhalb (b) von  $P$ . Sichtbare Flächen sind als fette Linien dargestellt.

Es existieren verschiedene Möglichkeiten, Zellen innerhalb bzw. außerhalb nicht-konvexer Polyeder zu erkennen. Eine dieser Möglichkeiten funktioniert folgendermaßen: Ausgehend von der zu prüfenden Zelle  $c$  wird eine Halbgerade senkrecht zu einer Koordinatenebene definiert. Liegt die Zelle  $c$  im Inneren, muss die Anzahl der Schnittpunkte der Halbgeraden mit Flächen des Polyeders  $P$  ungerade sein. Ist die Anzahl gerade, liegt  $c$  außerhalb von  $P$ .

Um zu prüfen, ob eine solche Halbgerade die Flächen von  $P$  schneidet, wird jede Fläche in eine Koordinatenebene, beispielsweise die  $xy$ -Ebene, projiziert (siehe Abbildung 4.20). Der Fußpunkt  $c'$  der Halbgeraden, also der Schnittpunkt der Halbgeraden mit der  $xy$ -Ebene, muss nun innerhalb der Projektion  $F'$  jeder Fläche  $F$ , also innerhalb des projizierten Randes, liegen. Um dies zu überprüfen muss abermals eine Halbgerade erzeugt werden, nämlich vom Projektionsfußpunkt  $c'$  senkrecht zu einer Koordinatenachse, z.B. zur  $y$ -Achse. Hier werden die Schnittpunkte mit den Kanten des Randes von  $F'$  gezählt. Das Zählen erfolgt, indem alle  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte in eine Liste aufsteigend einsortiert werden. Die

Einträge dieser Liste werden nun mit dem  $x$ -Wert des Projektionsfußpunktes  $c'$  verglichen und es wird die Anzahl derjenigen  $x$ -Koordinaten der Liste ermittelt, die kleiner sind als der  $x$ -Wert von  $c'$ . Ist diese Anzahl ungerade, liegt der Fußpunkt innerhalb der Projektion der Fläche  $F$ , sonst außerhalb.



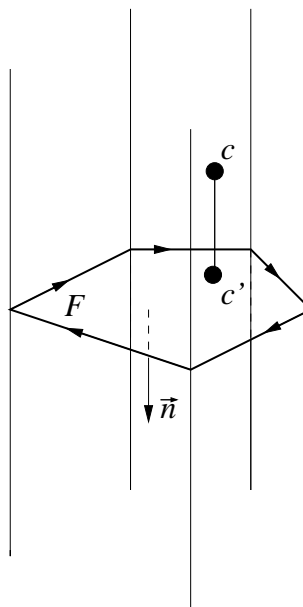
**Abbildung 4.20:** Projektion einer Zelle  $c$  und einer Fläche  $F$  in die  $xy$ -Ebene. Schneidet die Halbgerade, die von  $c$  ausgeht, die Fläche  $F$ , so liegt ihr Fußpunkt  $c'$  innerhalb des Randes von  $F'$ .

Nachdem diese Projektion für jede Fläche durchgeführt wurde, ist bekannt, wieviele Flächen von einer von  $c$  ausgehenden Halbgeraden geschnitten werden. Von den Schnittpunkten dieser Halbgeraden werden nun die  $z$ -Koordinaten in eine Liste einsortiert und es findet wieder ein Vergleich statt, um die Anzahl der  $z$ -Werte zu ermitteln, die kleiner als der  $z$ -Wert von  $c$  sind.

Ein Sonderfall kann eintreten, wenn ein Fußpunkt  $c'$  einer Zelle  $c$  auf eine Kante oder eine Ecke von  $F'$  projiziert wird. Aber auch dann gilt der Fußpunkt als innerhalb der Projektion der Fläche  $F$ . Gleiches gilt, wenn eine Zelle  $c$  selbst innerhalb einer Fläche  $F$  liegt. Auch dann gilt die Zelle  $c$  als innerhalb des Polyeders.

Das Projektionsverfahren zur Überprüfung, ob eine Zelle  $c$  innerhalb oder außerhalb eines nicht-konvexen Polyeders liegt, ist aufwändig, aber auch anwendbar, wenn die Flächen selbst nicht-konvex sind. Unter der Annahme, dass alle Flächen

des Polyeders konvex sind (siehe Abschnitt 4.5.6), lässt sich eine effizientere Methode anwenden, um zu prüfen, ob der Fußpunkt  $c'$  einer Zelle  $c$  innerhalb des Randes einer Fläche  $F$  liegt. Hierzu spannt man mit dem Normalenvektor  $\vec{n}$  der Ebene  $F$  und jeder Kante des Randes von  $F$  Ebenen auf, die jeweils senkrecht zu  $F$  sind (siehe Abbildung 4.21). Die Berechnung dieser  $m$  Flächen muss so erfolgen, dass die Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  bis  $\vec{n}_m$  entweder alle nach innen oder alle nach außen (bezüglich des Inneren von  $F$ ) orientiert sind. Im Folgenden sei angenommen, dass die Orientierung nach außen gewählt wird. Nun kann mit Hilfe der Berechnung des Skalarproduktes geprüft werden, auf welcher Seite jeder dieser Ebenen die Zelle  $c$  liegt. Ist das Skalarprodukt für jede Fläche negativ, befindet sich  $c$  auf der Innenseite jeder Fläche. Ist das Skalarprodukt für mindestens eine Fläche positiv, so befindet sich  $c$  auf der Außenseite dieser Fläche und somit befindet sich auch sein Fußpunkt  $c'$  außerhalb des Randes von  $F$ .



**Abbildung 4.21:** Der Fußpunkt  $c'$  einer Zelle  $c$  liegt innerhalb des Randes einer konvexen Fläche  $F$ , wenn  $c$  auf der Innenseite aller Ebenen liegt, die aus Kanten von  $F$  und dem Normalenvektor  $\vec{n}$  aufgespannt wurden.

Diese Möglichkeiten zur Erkennung von Zellen innerhalb nicht-konvexer Polyeder können angewendet werden, sofern alle Flächen des Polyeders konvex sind. Sollten neben der Nicht-Konvexität von Flächen auch Flächen mit mehreren Rändern (siehe Abschnitt 4.5.1) im Polyeder  $P$  existieren, ist lediglich die Projektionsmethode anwendbar.

## 4.5 Behandlung von Objekten mit $g > 0$

Im vorigen Abschnitt wurden bereits die Modifikationsverfahren für Objekte mit Konkavitäten, die keine Tunnel besitzen, und Hohlräumen vorgestellt. Die dritte mögliche Art der ZKHs sind Tunnel gemäß Definition TU (siehe S.51). Aufgrund der Vertauschbarkeit der Rollen von Objekt- und Hintergrundvoxeln schließt die Klasse der Objekte mit Tunneln auch diejenigen Objekte mit ein, die selbst einer Kugel homöomorph sind, jedoch innerhalb ihrer konvexen Hülle Konkavitäten mit Tunneln haben (siehe Abbildung 4.25). Solche Objekte besitzen das Geschlecht  $g = 0$ , die Zusammenhangskomponente der Hintergrundvoxel hat dagegen das Geschlecht  $g \geq 1$ .

Die Modifikation von Polyedern, die Tunnel enthalten, ist ein schwierigeres Problem als die Modifikation von Polyedern mit Konkavitäten oder Hohlräumen, da die Oberfläche von Objekten mit Tunneln nicht homöomorph zu einer Kugeloberfläche ist und die Modifikation somit eine topologieverändernde Operation erfordert. Zunächst muss hierbei jedoch zwischen verschiedenen geometrischen Arten von Tunneln unterschieden werden, die verschiedene Ansätze zur Modifikation erfordern.

**Definition TUE:** Eine ZKH  $S'$ , die einen unverzweigten Tunnel gemäß Definition TU bildet und in ihrer konvexen Hülle  $CH(S')$  keine Zusammenhangskomponenten von Voxeln der Menge  $S$  mit Geschlecht  $g > 0$  enthält, heißt *einfacher Tunnel* (engl. simple tunnel). Enthält  $CH(S')$  Zusammenhangskomponenten von Voxeln der Menge  $S$  mit  $g > 0$ , so heißt  $S'$  *nicht-einfacher Tunnel* (engl. non-simple tunnel).

### 4.5.1 Modifikation von einfachen Tunneln

Die erste zu betrachtende Klasse von Tunneln sind die einfachen Tunnel gemäß Definition TUE. Für solche Tunnel ist das Polyeder  $P$  durch eine einfache topologieverändernde Operation modifizierbar. Da sich das Geschlecht der Oberfläche durch diese Operation verändert, ist sie keine homöomorphe Abbildung.

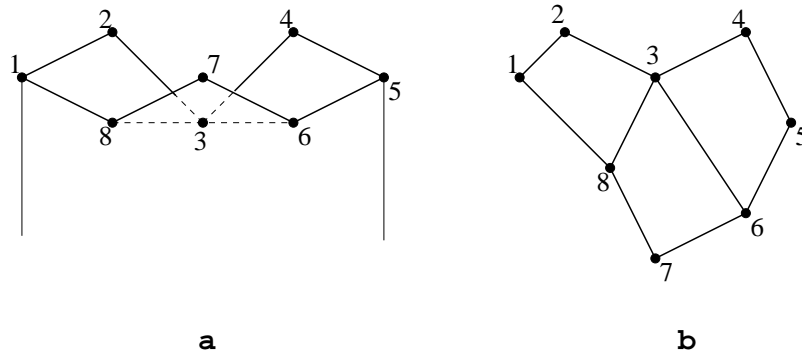
**Definition AU:** Das *Ausschneiden* (engl. cutting-out) eines Tunnels aus einem Polyeder  $P$  ist eine topologieverändernde Operation, die zwei disjunkte Mengen  $S_1, S_2$  stark zusammenhängender Flächen von  $P$  durch eine einzige stark zusammenhängende Menge  $S_T$  von Flächen, die sich selbst nicht schneiden, ersetzt, so dass  $\partial S_1 \cup \partial S_2$  und  $\partial S_T$  identisch sind.

Gemäß Definition AU werden bei einem einfachen Tunnel die beiden zusammenhängenden Mengen von Flächen von  $P$  durch eine zusammenhängende Menge von Flächen derart ersetzt, dass das Geschlecht von  $P$  um 1 erhöht wird. Da Polyeder mit verschiedenem Geschlecht der Oberfläche nicht homöomorph zueinander sind, ist die Operation des Ausschneidens keine homöomorphe Abbildung.

Die zusammenhängenden Mengen von Flächen von  $P$  werden als bereits markiert angenommen (siehe Abschnitt 4.2.3). Die Erzeugung der Menge  $S_T$  der Seitenflächen des Tunnels erfolgt ähnlich des in Abschnitt 4.4.1 beschriebenen Verfahrens: Zunächst wird ein initiales Polyeder  $P'$  aufgespannt. Dieses besteht aus der Menge  $S_1$  von markierten Flächen und einer weiteren Zelle, die keine Ecke von  $S_1$  ist, sondern eine beliebige Ecke von  $S_2$ . Das initiale Polyeder  $P'$  wird nun erweitert, indem die Ecken von  $S_2$  und auch die Eckkandidaten der Menge  $S'$  zu  $P'$  hinzugenommen werden bis damit die konvexe Hülle der Ecken von  $S_1, S_2$  und  $S'$  erzeugt wurde.

Da sowohl  $S_1$  als auch  $S_2$  Teile eines nicht-konvexen Polyeders sein können, ist es möglich, dass die so aufgespannte Hülle nicht genau die Menge  $S_2$  als Flächen enthält, sondern einige Ecken des Randes von  $S_2$  innerhalb des aufgespannten Polyeders  $P'$  liegen und keine Ecken von  $P'$  sind (siehe Abbildung 4.22). Das bedeutet,

dass die Menge  $S_2$  dann teilweise im Inneren der so aufgespannten konvexen Hülle  $CH(S_1 \cup S_2 \cup S')$  liegt. Für die Menge  $S_1$  ist dies nicht möglich, da die Flächen von  $S_1$  unverändert in das initiale Polyeder übernommen werden.



**Abbildung 4.22:** Zusammenhängende Menge von Flächen als Seitenansicht (a) und Draufsicht (b). Die konvexe Hülle dieser Menge und einer zweiten Menge unterhalb dieser enthält die Punkte 1, 2, 4, 5, 6, 7 und nicht die Punkte 3 und 8.

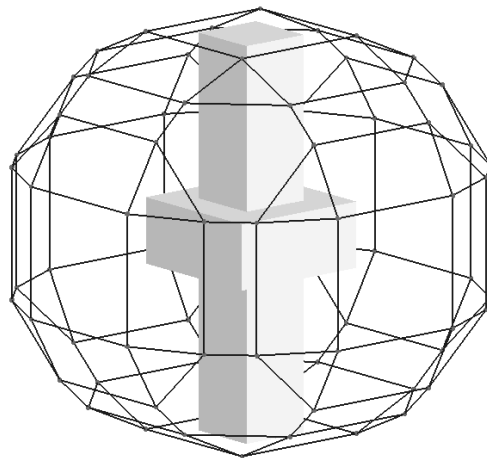
Um dies zu beheben, ist auch hier eine sofort anschließende Modifikation von  $P'$  notwendig, die Flächen von  $P'$  zu Ecken des Randes von  $S_2$  eindrückt. Somit wird erreicht, dass  $P'$  die Kanten des Randes von  $S_1$  und  $S_2$  enthält. Da diese beiden Ränder 1-dimensionale geschlossene digitale Kurven sind, separieren sie  $P'$  in 3 disjunkte Mengen von Flächen:  $S_1$ ,  $S_T$  und eine Menge  $S'_2$ , die den gleichen Rand besitzt wie  $S_2$ .

Der Rand von  $P \setminus (S_1 \cup S_2)$  wird nun mit  $S_T$  vereinigt und es entsteht damit ein Polyeder  $\hat{P}$  dessen Geschlecht  $g$  um 1 größer ist als das Geschlecht von  $P$ .

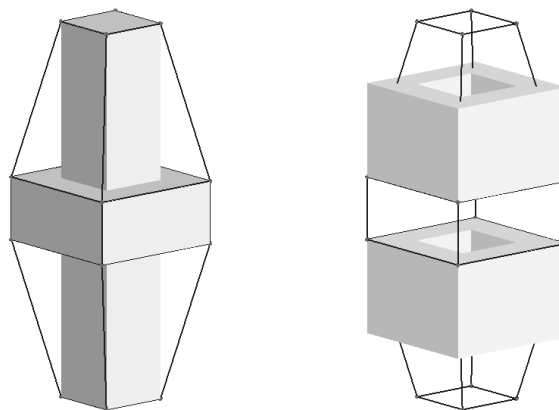
Weiterhin ist es bei der Klasse der einfachen Tunnel möglich, dass das mit den Ecken der Mengen  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S'$  aufgespannte Polyeder  $P'$  Konkavitäten (mit  $g = 0$ ) besitzt. Diese werden mit Hilfe der Modifikation durch Eindrücken (siehe Abschnitt 4.4.1) verarbeitet.

### 4.5.2 Nicht-einfache Tunnel

Die zweite Klasse von Tunneln sind solche ZKHs  $S'$ , die unverzweigt sind und die nicht-einfache Tunnel gemäß Definition TUE (siehe S.69) sind. Der Unterschied zu den einfachen Tunneln besteht darin, dass die innerhalb  $CH(S')$  liegenden Objektvoxel Zusammenhangskomponenten mit Geschlecht  $g > 0$  bilden (siehe Abbildung 4.23 und Abbildung 4.24).



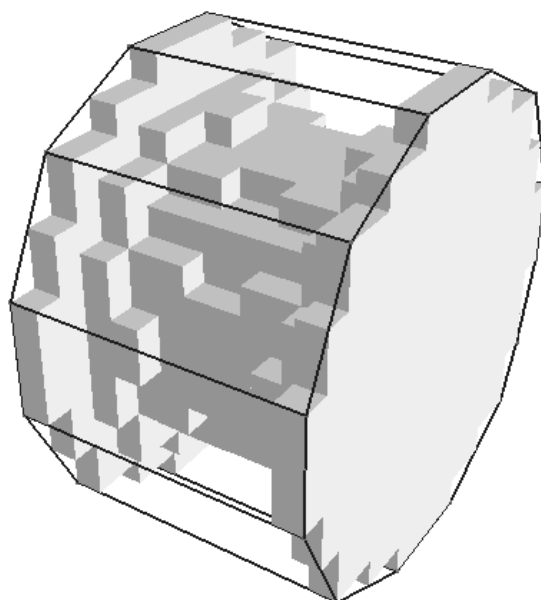
**Abbildung 4.23:** Die konvexe Hülle eines Objektes  $S$  mit einem nicht-einfachen Tunnel im Inneren. Die Voxel der Menge  $S$  sind nicht dargestellt, lediglich die Voxel der Menge  $A \setminus S$ .



**Abbildung 4.24:** Links:  $CH(S')$ . Rechts: ZKHs von Objektvoxeln in  $CH(S')$  mit  $g = 1$ .



Wie zu Beginn dieses Abschnittes bereits erwähnt wurde, besteht aufgrund der Vertauschbarkeit der Rollen von Objekt- und Hintergrundvoxeln zwischen der Klasse der nicht-einfachen Tunnel und der Klasse der Konkavitäten mit  $g > 0$  eine Analogie: Bei den Tunneln besitzt die Menge  $S$ , also das Objekt, eine Oberfläche mit  $g > 0$ , die ZKH ist jedoch vom Geschlecht  $g = 0$ , wogegen bei Objekten mit Konkavitäten mit  $g > 0$  die Menge  $S$  eine Oberfläche mit  $g = 0$  besitzt und die ZKH das Geschlecht  $g > 0$  besitzt (siehe Beispiel in Abbildung 4.25).



**Abbildung 4.25:** Objekt  $S$  mit  $g = 0$ . Die ZKH  $S'$  ist eine Konkavität und bildet innerhalb  $CH(S)$  einen Torus. Sie besitzt damit eine Oberfläche mit  $g = 1$ .

Bei der Modifikation solcher Polyeder muss jedoch trotzdem zunächst unterschieden werden, ob die Menge  $S$  oder die Menge  $S'$  diejenige Menge mit  $g > 0$  ist. Besitzt das Objekt  $S$  das Geschlecht  $g > 0$ , also ist  $S$  ein Torus oder ein Objekt mit  $g$  Henkeln, so muss zunächst die Ausschneideoperation durchgeführt werden, da die Topologie der Oberfläche verändert werden muss. Im Anschluss daran muss die Modifikation des Tunnels erfolgen, der gemäß Definition TUE in seiner konvexen

Hülle Zusammenhangskomponenten von Objektvoxeln enthält, die das Geschlecht  $g > 0$  besitzen.

Die notwendige Modifikation eines Polyeders  $P$ , welches eine Menge  $S$  mit  $g = 0$  und eine Menge  $S'$  mit  $g > 0$  enthält, was also bedeutet, dass die ZKH einen Torus oder ein Objekt mit  $g$  Henkeln bildet, kann nicht durch das Ausschneiden gemäß Definition AU (siehe S.70) erfolgen, da sowohl  $P$  als auch  $S$  das Geschlecht  $g = 0$  besitzen und demnach keine Veränderung der Topologie erfolgen darf. Bei solchen Objekten existiert nur genau eine stark zusammenhängende Menge von Flächen von  $P$ , die mit der ZKH  $S'$  inzidiert. Diese stark zusammenhängende Menge von Flächen besitzt darüberhinaus einen aus mehreren Komponenten bestehenden Rand. Das Eindrücken gemäß Definition PR (siehe S.60) ist aus diesem Grund jedoch ebenfalls nicht möglich, da hierfür vorausgesetzt wird, dass die Menge der Flächen, die mit der Konkavität inzidiert, nur genau eine Randkomponente besitzt. Es wird demnach ein anderer Ansatz benötigt. Zwei Möglichkeiten hierfür werden in den beiden folgenden Abschnitten vorgestellt.

### 4.5.3 Heuristisches Verfahren

Das erste mögliche Verfahren zur Modifikation von Polyedern, die ZKHs enthalten, welche das Geschlecht  $g > 0$  besitzen, ist ein heuristischer Ansatz.

#### Problembeschreibung

Gegeben sei eine 3-Mannigfaltigkeit mit Rand, somit also ein stark zusammenhängender, homogen-3-dimensionaler und dichter Subkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$ . Die konvexe Hülle  $CH(S)$  enthält die Menge  $S$  vollständig und weiterhin eine Menge  $S'$  von Voxeln aus  $A \setminus S$ , die genau eine Zusammenhangskomponente bildet, deren Rand  $\partial S'$  das Geschlecht  $g > 0$  besitzt.

Gesucht ist das Polyeder  $P$ , welches die in Abschnitt 3.5 zusammengefassten Eigenschaften besitzt.

### Lösungsansatz

Wie schon in der Problemformulierung erwähnt wurde, ist der erste Schritt der Polyedrisierung der Menge  $S$  die Erzeugung der konvexen Hülle  $CH(S)$ . Erst mithilfe der konvexen Hülle kann festgestellt werden, dass die Menge  $S'$  der Hintergrundvoxel innerhalb  $CH(S)$  das Geschlecht  $g > 0$  besitzt.

Die zwei Hauptprobleme bei der Modifikation der konvexen Hülle einer solchen Menge  $S$  sind die Markierung derjenigen Flächen von  $CH(S)$ , die ersetzt werden müssen, um die Voxel der Menge  $S'$  aus  $CH(S)$  auszuschließen und die Auswahl der Zellen aus  $S'$ , die Ecken vom modifizierten Polyeder  $P$  werden sollen. Da bei dieser Art der Modifikation nicht das Geschlecht  $g$  der Oberfläche verändert wird, ist eine topologieerhaltende Operation auf  $CH(S)$  möglich, die der des Eindrückens ähnlich ist. Jedoch kann das Eindrücken gemäß Definition PR (siehe S.60) hier nicht in der gleichen Art und Weise angewendet werden, da die Menge der zu ersetzenden Flächen mehrere Randkomponenten besitzt.

Die Voraussetzung für die Anwendung einer dem Eindrücken ähnlichen Operation ist eine Zerlegung der Menge aller Flächen von  $CH(S)$  in mehrere disjunkte Teilmengen. Diese sind:

- die stark zusammenhängende Menge  $S_T$  von Flächen, die mit der ZKH  $S'$  inzidieren (siehe Abschnitt 4.2.3), also diejenigen Flächen, die von den 0-Zellen von  $S'$  aus sichtbar sind. Diese Menge  $S_T$  besitzt genau  $g + 1$  Randkomponenten, wobei  $g$  das Geschlecht der Oberfläche von  $S'$  ist.
- die stark zusammenhängenden Mengen  $S_i$  ( $i = 1, \dots, g + 1$ ) von Flächen, die jeweils den gleichen Rand besitzen wie eine der Randkomponenten von  $S_T$ .

Beispielsweise wird für eine ZKH  $S'$  mit  $g = 1$  davon ausgegangen, dass das Objekt  $S$  einen Tunnel darstellt, der in Anlehnung an Definition TU mit zwei zusammenhängenden Mengen  $S_1$  und  $S_2$  von Flächen aus  $P$  inzidiert. Da diese beiden Mengen disjunkt sind und nicht miteinander zusammenhängen, existiert die dritte Menge  $S_T$ , die alle Flächen aus  $P$  enthält außer die von  $S_1$  und  $S_2$ . Zwischen diesen drei Mengen existiert ein Rand  $\partial S_T$ , der aus zwei Komponenten besteht: jeweils ein Rand zwischen  $S_1$  und  $S_T$  und zwischen  $S_2$  und  $S_T$ .

Für die Ausführung der Modifikation wird nun eine abgewandelte Definition des Eindrückens verwendet:

**Definition PR2:** Das *Eindrücken* eines Polyeders  $P$  zu einer nicht-leeren Menge  $S'$  von Zellen, die sich innerhalb des Polyeders  $P$  befindet und deren Oberfläche das Geschlecht  $g > 0$  besitzt, ist eine topologieerhaltende Operation, die eine stark zusammenhängende Menge  $S_T$  von Flächen von  $P$ , die mehrere Randkomponenten besitzt, durch eine neue stark zusammenhängende Menge  $S'_T$  ersetzt, so dass die Randkomponenten von  $S_T$  denen von  $S'_T$  identisch sind.

Für das so definierte Eindrücken sind die Menge  $S_T$  der zu ersetzenden Flächen und die Zellen, die Ecken der neuen Menge  $S'_T$  von Flächen werden, bekannt. Die Realisierung des Eindrückens gemäß Definition PR2 erfolgt nun als Folge von Eindrückoperationen gemäß Definition PR. Das heißt, dass schrittweise zu jedem Eckkandidaten der Menge  $S'$  eine stark zusammenhängende Teilmenge  $S_{T_i} \subset S_T$  von Flächen aus  $S_T$  zugeordnet wird, die gemäß Definition PR zu dieser einen Zelle eingedrückt wird.

Um diese Folge von Eindrückoperationen durchführen zu können, muss festgelegt werden, welche Flächen zu dem aktuellen Eckkandidaten zugeordnet werden sollen. Hierbei muss sichergestellt werden, dass die neue Menge  $S'_T$  von Flächen nicht das Objekt  $S$  schneidet. Diese Zuordnung kann nicht mit Hilfe der Sichtbarkeit gemäß Definition VI (siehe S.37) erfolgen, da die Eckkandidaten im Inneren von  $CH(S)$  liegen und es demnach keine sichtbaren Flächen gibt.

Bevor die Kriterien der Zuordnung formuliert werden können, sind zwei weitere Definitionen notwendig, nämlich die der Normalen eines Punktes:

**Definition PN0:** Die *Punktnormale*  $\dot{n}$  einer konvexen 0-Zelle  $c^0$  eines Teilkomplexes  $S \subset A$  ist der Vektor  $\dot{n} = \vec{c}^0 - \vec{c}^3$ , zeigt also von der 3-Zelle  $c^3 \in S \subset A$  zu  $c^0 \in Cl(c^3, S)$ .

**Definition PN3:** Die *Punktnormale*  $\dot{n}$  einer 3-dimensionalen Zelle  $c^3$  eines Teil-

komplexes  $S \subset A$ , die mit einer konvexen 0-Zelle  $c^0$  und mindestens einer weiteren 3-Zelle aus  $S \subset A$  inzidiert, ist der Vektor  $\vec{c}^0 - \vec{c}^3$ , zeigt also von  $c^3$  zu  $c^0$ . Inzidiert  $c^3$  mit mehreren konvexen 0-Zellen, so ist  $\vec{n}$  der Vektor von  $c^3$  zum Schwerpunkt aller konvexen 0-Zellen, die mit  $c^3$  inzidieren.

Dabei ist die Punktnormale in beiden Fällen ein Vektor von einer 3-Zelle zu einer mit ihr inzidierenden 0-Zelle (oder dem Schwerpunkt von 0-Zellen). Da die konvexen 0-Zellen nur mit der einen 3-Zelle  $c^3$  des Objektes  $S$  inzidieren, zeigt die Punktnormale  $\vec{n}$  immer von  $S$  weg.

Die Zuordnung für das Eindringen gemäß Definition PR2 erfolgt nun, indem Zellen aus  $S'$  und Flächen aus  $S_T$  folgende Kriterien erfüllen: Eine Fläche  $F_i \in S_T$  wird einer Zelle  $c_j \in S'$  zugeordnet, wenn

- (i) die Projektion (das Lot) von  $c_j$  innerhalb des Randes  $\partial F_i$ , auf dem Rand  $\partial F_i$  oder mit einem geringen Abstand  $d_{ij}$  außerhalb des Randes  $\partial F_i$  liegt,
- (ii) der Winkel  $\gamma_{ij}$  zwischen der Normalen  $\vec{n}_i$  der Fläche  $F_i$  und der Normalen  $\vec{n}_j$  der Zelle  $c_j$  kleiner ist als eine Schwelle  $w$ ,
- (iii) keine Voxel des Objektes  $S$  zwischen  $c_j$  und  $F_i$  liegen.

Die Überprüfung, ob Objektvoxel zwischen einer Zelle  $c_j$  und einer Fläche  $F_i$  erfolgt durch Abtastung einer koordinatenachsenparallelen Zeile von Voxeln zwischen  $c_j$  und  $F_i$ .

Die Kriterien (i) und (ii) sind dahingehend heuristisch, da die Werte für  $d_{ij}$  und  $w$  beliebig gewählt werden können. Sie sind objektabhängig und führen nur in bestimmten Wertebereichen zu brauchbaren Ergebnissen.

Nach der Zuordnung der Zellen  $c_j$  aus  $S'$  zu den Flächen der Menge  $S_T$  erfolgt die Modifikation durch Eindringen gemäß Definition PR, indem jeweils zu einer Zelle aus  $S'$  eine Menge  $S_{T_i}$  markierter Flächen durch eine neue Menge von Flächen ersetzt wird, deren Rand dem von  $S_{T_i}$  identisch ist und die diesen Rand durch Dreiecke mit der Zelle  $c_j \in S'$  verbindet.

Das Eindringen erfolgt schrittweise. Nach jedem solchen Ersetzungsschritt wird als nächste Zelle diejenige gewählt, die zur vorigen den geringsten Abstand hat.

Dies ist notwendig, da zu den im jeweils vorigen Schritt erzeugten Dreiecken ebenfalls die drei Kriterien der Zuordnung geprüft werden müssen, um diese Dreiecke, wenn nötig, ebenfalls mit einzudrücken.

Mit Hilfe der Zuordnungskriterien und den damit verbundenen Parametern  $d_{ij}$  und  $w$  kann ein Polyeder  $P$ , welches eine ZKH  $S'$  im Inneren enthält, die eine Oberfläche mit  $g > 0$  besitzt, modifiziert werden. Das Anpassen der Parameter  $d_{ij}$  und  $w$  an die Erfordernisse des Objektes  $S$  erfolgte bislang experimentell. Das automatische Ermitteln dieser Parameter ist ein noch offenes Problem.

#### 4.5.4 Zerlegung der mehrfach zusammenhängenden Komponenten

Aufgrund der Unsicherheit, die durch die Wahl der Parameter  $d_{ij}$  und  $w$  im heuristischen Verfahren bezüglich der Lösbarkeit des Polyedrisierungsproblems besteht, entstand die Frage nach einem deterministischen Verfahren zur Lösung dieses Problems. Ein möglicher Ansatz dafür ist die Zerlegung mehrfach zusammenhängender Komponenten von Hintergrundvoxeln in konvexe Teilkomponenten, um das in Abschnitt 4.4.1 beschriebene Verfahren des Eindrückens anwenden zu können.

##### Problembeschreibung

Das Eindrückverfahren zur Modifikation eines Polyeders  $P$  setzt voraus, dass die ZKH  $S'$  einer Kugel homöomorph ist und dass die Menge  $M$  der Flächen von  $P$ , die mit  $S'$  inzidieren, eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist, also einen Rand besitzt, der eine 1-dimensionale Sphäre darstellt.

Die Zerlegung einer ZKH  $S'$ , die das Geschlecht  $g > 0$  besitzt, in Mengen  $S'_1, \dots, S'_m$ , die jeweils einer Kugel homöomorph sind, sollte zweckmäßigerweise so erfolgen, dass das Eindrücken zu einer solchen Komponente keine weiteren Modifikationsschritte erfordert, d.h., dass also die Tiefe der Rekursion an einer solchen Komponente gleich 1 ist. Diese Forderung soll sicherstellen, dass die konvexe Hülle  $CH(S'_i)$  einer solchen Komponente keine Tunnel oder Tori enthält, aber auch keine Konkavitäten.

Um dies zu erfüllen, ist es erforderlich, dass die Mengen  $S'_1, \dots, S'_m$  konvexe Mengen gemäß Definition DCS (siehe S.169) sind, denn nur für konvexe Mengen  $S'_i$  von Voxeln enthält die konvexe Hülle keine Voxel des Komplementes  $A \setminus S'_i$ .

Die Aufgabe besteht nun darin, eine ZKH  $S'$ , die das Geschlecht  $g > 0$  besitzt, in konvexe Teilmengen  $S'_1, \dots, S'_m$  zu zerlegen. Um eine triviale Lösung auszuschließen, wird gefordert, dass die Anzahl  $m$  der Komponenten von  $S'$  minimiert wird. Eine triviale Lösung wäre eine solche, bei der die Teilmengen  $S'_1, \dots, S'_m$  einzelne Voxel sind.

Das Problem der Zerlegung einer Menge  $S'$  von Voxeln in minimal viele konvexe Teilmengen  $S'_1, \dots, S'_m$  ist ein schwieriges Optimierungsproblem und soll hier nur durch eine Näherung gelöst werden. Zwei neue und weniger strenge Bedingungen für eine Optimierungsaufgabe sollen hier betrachtet werden:

1. Die Komponenten  $S'_1, \dots, S'_m$  sind nicht nur konvex, sondern sogar digitale Kugeln.
2. Es wird nicht nach minimal vielen Komponenten, sondern nach maximal großen Komponenten gesucht.

Mit diesen beiden Einschränkungen der Aufgabe wird somit nach Komponenten von  $S'$  gesucht, die maximal große digitale Kugeln (siehe Definition DK3, S.169) sind.

### Lösungsansatz

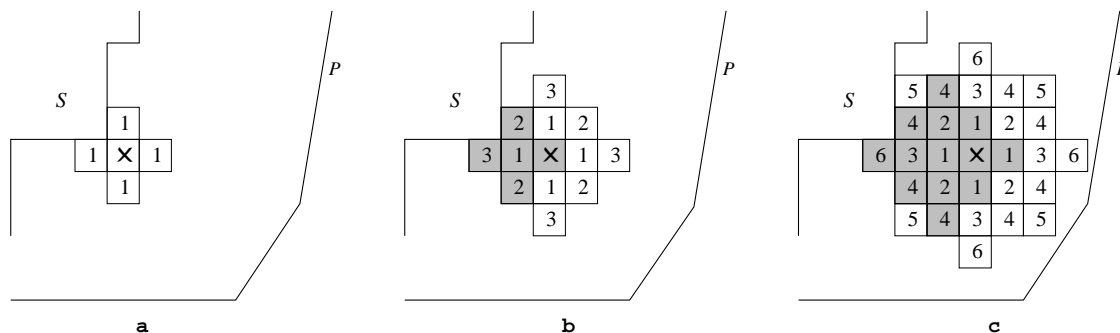
Das Erzeugen von maximal großen digitalen Kugeln wird durch den im Folgenden beschriebenen Algorithmus durchgeführt. Hierfür wird jeweils mit einem beliebigen Voxel  $c^3 \in S'$  gestartet, welches gemäß Definition DK3 eine digitale Kugel ist. Die Maximierung der Größe der digitalen Kugel erfolgt durch schrittweise Vergrößerung des Radius  $r$  der digitalen Kugel derart, dass in jedem Schritt

- (a) die Anzahl der Voxel der digitalen Kugel wächst und
- (b) die Voxel, die zur digitalen Kugel hinzugefügt werden, Voxel der Menge  $S'$  sind.

Im ersten Vergrößerungsschritt kommen zu einem einzelnen Voxel diejenigen hinzu, die mit dem ersten eine gemeinsame Facette (2-Zelle) besitzen, also seine 6 Nachbarn. Dies sind die Voxel, die sich vom ersten Voxel in genau einer Koordinate um genau 1 unterscheiden. In den nächsten Schritten folgen weitere Voxel, die sich innerhalb einer Sphäre mit Radius  $r$  um das erste Voxel herum befinden. Die Koordinaten der weiteren Voxel sowie die Radien  $r$ , bei denen Voxel zu einer digitalen Kugel hinzukommen, können in einer Look-up-Tabelle abgelegt werden, damit die Berechnung der Koordinaten zu einem Radius  $r$ , bei dem sich etwas ändert, nicht für jede digitale Kugel neu erfolgen muss.

Sobald in einem Vergrößerungsschritt die hinzuzunehmenden Voxel nicht alle zur Menge  $S'$  gehören, stoppt die Erzeugung der aktuellen digitalen Kugel.

Um die Anzahl der Voxel in einer digitalen Kugel weiter zu maximieren, wird nach dem Abbruch der Vergrößerung geprüft, ob eine andere digitale Kugel mit einem Startvoxel, welches eine gemeinsame Facette mit dem Startvoxel der gerade erzeugten Kugel besitzt, existiert, welche die gerade erzeugte Kugel vollständig enthält (siehe Abbildung 4.26). Diese Teiloperation kann auch so interpretiert werden: Die digitale Kugel, die nicht weiter vergrößert werden kann, wird um ein Voxel in einer der 6 Koordinatenrichtungen  $(-x, +x, -y, +y, -z, +z)$  verschoben und es wird geprüft, ob an dieser neuen Position eine Vergrößerung möglich ist. Wenn ja, wird sie durchgeführt, wenn nein, wird die digitale Kugel vor dem Verschieben als maximal groß angesehen.



**Abbildung 4.26:** Aufspannen einer digitalen Kugel mit Startvoxel X. Die Zahl in jedem Voxel gibt an, in welchem Schritt dieses Voxel der



Kugel hinzugefügt wurde. Die Kugel in (a) kann nicht vergrößert werden, da im nächsten Schritt Voxel der Menge  $S$  hinzugefügt werden müssten. Die Kugel in (b) enthält die Kugel in (a) vollständig, wie auch die Kugel in (c) die Kugel in (b) enthält.

Die Modifikation des Polyeders  $P$  erfolgt nun derart, dass nach der Erzeugung der ersten digitalen Kugel aus Voxeln der Menge  $S'$  sofort ein Eindringen gemäß Definition PR ausgeführt wird. Dies ist erforderlich, da sich die Menge  $S'$  nach jedem Eindringen verändert und die vollständige Zerlegung der Menge  $S' = S'_1 \cup S'_2 \cup \dots \cup S'_m$  nach dem ersten Modifizieren von  $P$  nicht mehr korrekt wäre, da im Allgemeinen nicht nur die Voxel einer einzelnen digitalen Kugel  $S'_i$  aus  $P$  ausgeschlossen werden, sondern auch weitere Voxel der Menge  $S' \setminus S'_i$ . Aus diesem Grund erfolgt das Eindringen sofort nach der Erzeugung einer maximal großen digitalen Kugel. Im Anschluss daran wird wieder eine maximal große digitale Kugel erzeugt und zwar aus der Menge der aus  $S'$  in  $P$  verbliebenen Voxel. Diese wird dann wieder modifiziert. Diese Schritte werden wiederholt bis kein Voxel aus der Menge  $S'$  mehr in  $P$  liegt.

Die Auswahl der Menge der Flächen, die bezüglich einer digitalen Kugel  $S'_i$  eingedrückt werden sollen, erfolgt nun analog zum Verfahren bei Konkavitäten (siehe Abschnitt 4.2.3), denn die so erzeugten digitalen Kugeln sind Konkavitäten mit  $g = 0$ .

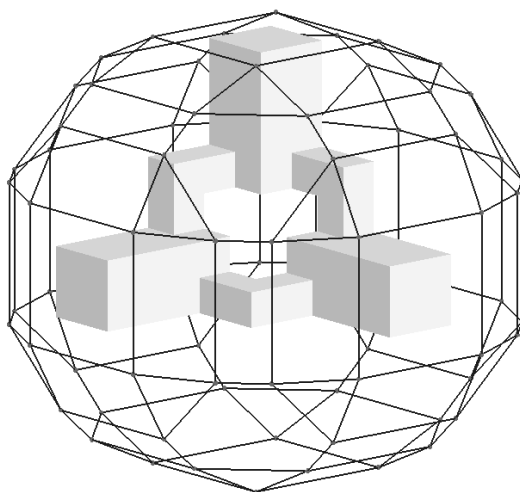
Im Laufe des Zerlegungsverfahrens kommt es auch dazu, dass keine digitale Kugel mehr erzeugt werden kann, die aus mehr als einem einzelnen Voxel besteht. In diesem Fall muss das Eindringen für dieses einzelne Voxel durchgeführt werden, was sich jedoch nicht vom Eindringen gemäß Definition PR unterscheidet, denn auch hier gibt es eine Fläche, die mit der aus einem Voxel bestehenden ZKH inzidiert, d.h. mindestens eine 0-Zelle, die das einzelne Voxel berandet, liegt auf der anderen Seite der Fläche als das einzelne Voxel.

Das hier beschriebene Verfahren zur Zerlegung einer Menge von Hintergrundvoxeln, die innerhalb eines Polyeders  $P$  ein Objekt mit  $g > 0$  bilden, fasst die Menge der Hintergrundvoxel als Menge von konvexen Komponenten auf und führt die Modifikation wie bei Objekten mit Konkavitäten durch. Prinzipiell ist dieses

Verfahren auf jede Art von Zusammenhangskomponenten von Hintergrundvoxeln anwendbar, die mit Flächen des Polyeders  $P$  inzidieren. Jedoch ist die Anwendung dieses Verfahrens aufgrund der aufwändigen Zerlegung in digitale Kugeln für Zusammenhangskomponenten, die durch rekursives Eindrücken handhabbar sind, nicht zweckmäßig. Vor allem besteht hierfür der Grund in der Möglichkeit des Auftretens einzelner Voxel bei der Zerlegung und der darauf aufbauenden Modifikation durch Eindrücken.

#### 4.5.5 Verzweigte Tunnel

Eine weitere Klasse von Zusammenhangskomponenten von Hintergrundvoxeln innerhalb eines Polyeders  $P$  bleibt zu untersuchen. Hierbei handelt es sich um die durch Definition TU (siehe S.51) beschriebenen Tunnel, die mit mehr als zwei Mengen zusammenhängender Flächen von  $P$  inzidieren, also die Klasse der verzweigten Tunnel.



**Abbildung 4.27:** Konvexe Hülle eines Objektes  $S$  mit verzweigtem Tunnel, dessen Oberfläche selbst das Geschlecht  $g = 1$  besitzt.

Definition TU erlaubt es, dass verzweigte Tunnel eine Oberfläche mit Geschlecht  $g \geq 0$  besitzen, d.h. sie können selbst Tunnel enthalten (siehe Beispiel in Abbildung

4.27). Die konvexe Hülle  $CH(S')$  einer ZKH  $S'$  kann Zusammenhangskomponenten von Objektvoxeln enthalten, die eine Oberfläche mit Geschlecht  $g \geq 0$  besitzen, d.h. die Komponenten der Objektvoxel können ebenfalls Tunnel enthalten. Die Menge dieser Objektvoxel sei mit  $S''$  bezeichnet.

Die Modifikation eines Polyeders  $P$ , welches verzweigte Tunnel enthält, muss in Abhängigkeit vom Geschlecht  $g$  der Oberfläche von  $S'$  und  $S''$  verschieden durchgeführt werden. Dabei sind die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

- (I) Die Menge  $S'$  und die Menge  $S''$  besitzen jeweils eine Oberfläche mit  $g = 0$ .
- (II) Die Menge  $S'$  besitzt eine Oberfläche mit  $g = 0$  und die Oberfläche der Menge  $S''$  besitzt das Geschlecht  $g > 0$ .
- (III) Die Menge  $S'$  besitzt eine Oberfläche mit  $g > 0$  und die Oberfläche der Menge  $S''$  besitzt das Geschlecht  $g = 0$ .
- (IV) Beide Mengen  $S'$  und  $S''$  besitzen jeweils eine Oberfläche mit  $g > 0$ .

Der Fall (I) entspricht dem verzweigten Analogon eines einfachen unverzweigten Tunnels, d.h. die konvexe Hülle  $CH(S')$  enthält keine Zusammenhangskomponenten von Objektvoxeln mit  $g > 0$ . Objekte dieser Klasse können mittels des Verfahrens des Ausschneidens mit anschließender Modifikation, wie in Abschnitt 4.5.1 beschrieben, polyedrisiert werden. Der Unterschied besteht hierbei lediglich in der Anzahl der Randkomponenten der Menge  $S_T$  von Flächen.

Die Fälle (II) bis (IV) enthalten in der Menge der Objektvoxel oder in der Menge der Hintergrundvoxel oder in beiden Mengen Zusammenhangskomponenten, deren Oberfläche das Geschlecht  $g > 0$  besitzt. Diese Objekte können genau wie die Objekte mit nicht-einfachen unverzweigten Tunneln gemäß der in den Abschnitten 4.5.3 bzw. 4.5.4 dargestellten Verfahren polyedrisiert werden.

Eine Übersicht über die Klassen von Zusammenhangskomponenten ist in Abschnitt 4.6.1 dargestellt.

Die Modifikation von Objekten, die in ihrer konvexen Hülle verzweigte Tunnel als ZKHs enthalten bzw. von Objekten, die in ihrer konvexen Hülle selbst einen

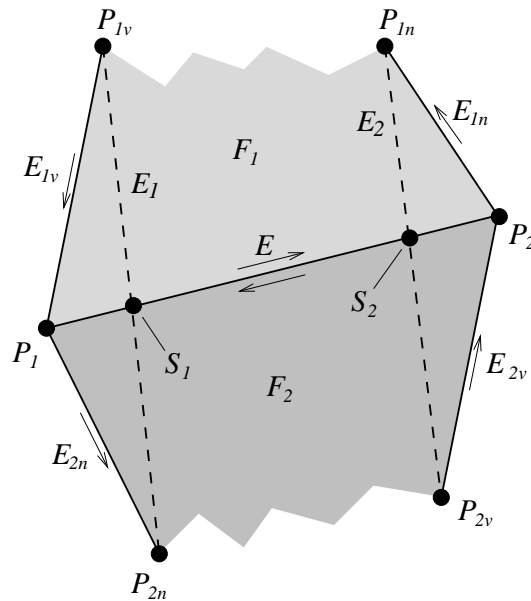
verzweigten Tunnel bilden, erfolgt somit durch bereits beschriebene Verfahren und erfordert nicht die Entwicklung neuer Ansätze.

#### 4.5.6 Erhaltung der Konvexität von Flächen

Konvexe Polyeder besitzen ausschließlich konvexe Flächen. Durch die Modifikation eines Polyeders geht die Konvexität verloren und Flächen, deren Rand aus mehr als drei Kanten besteht, können nicht-konvex sein. Bei der Realisierung des in Abschnitt 4.5.3 beschriebenen Verfahrens wurde festgestellt, dass nicht-konvexe Flächen das Eindringen erschweren, da das einzudrückende Gebiet der Oberfläche Ausläufer besitzen kann, die weit von den Zielzellen des Eindringens entfernt sind. Bei einer solchen Modifikation wird das Polyeder so verformt, dass die Polyedrisierung erschwert wird.

Um dieses Problem beim heuristischen Verfahren zu umgehen und auch, um eine Oberfläche zu erzeugen, die aus kompakten Flächen besteht, ist es erforderlich, nicht-konvexe Flächen zu vermeiden und demnach die Konvexität von Flächen zu erzwingen. Da die Nicht-Konvexität von Flächen nur dann auftreten kann, wenn nach einer Modifikation zwei Polyeder zusammengefügt werden und dabei zwei benachbarte komplanare Flächen entstehen, ist die Überprüfung der Erhaltung der Konvexität lediglich an dieser Stelle erforderlich. Der dafür entwickelte Ansatz prüft demnach beim Zusammenfügen zweier komplanarer Flächen, ob die resultierende Fläche weiterhin konvex ist.

Abbildung 4.28 zeigt ein Beispiel für das Zusammenfügen zweier komplanarer Flächen  $F_1$  und  $F_2$ . Die Kante  $E$ , mit der beide Flächen inzidieren, hat die Endpunkte  $P_1$  und  $P_2$ . Vom Rand der Fläche  $F_1$  inzidiert die Kante  $E_{1v}$  mit  $P_1$  und die Kante  $E_{1n}$  mit  $P_2$ . Analog inzidiert  $E_{2n}$  mit  $P_1$  und  $E_{2v}$  mit  $P_2$ . Die Strecke  $E_1$ , die den Startpunkt  $P_{1v}$  von  $E_{1v}$  mit dem Endpunkt  $P_{2n}$  von  $E_{2n}$  verbindet, schneidet die Gerade, die durch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt ist, im Schnittpunkt  $S_1$ . Analoges gilt für  $S_2$ .



**Abbildung 4.28:** Kriterium zur Überprüfung der Konvexität beim Zusammenfügen zweier Flächen  $F_1$  und  $F_2$ .

Das konvexitätserhaltende Kriterium sei durch folgendes Theorem bestimmt:

**Theorem KE:** Zwei komplanare konvexe Flächen  $F_1$  und  $F_2$  können zu einer konvexen Fläche  $F$  zusammengefügt werden, wenn  $S_1$  und  $S_2$  auf der mit beiden Flächen inzidierenden Kante  $E$  zwischen den Endpunkten  $P_1$  und  $P_2$  oder auf  $P_1$  bzw.  $P_2$  liegen.

*Beweis:* Im Folgenden sei  $S_1$  betrachtet. Gemäß der Definition einer konvexen Menge  $K$  liegt die Verbindungsstrecke zweier Punkte aus  $K$  immer vollständig innerhalb  $K$ . Da die Kante  $E$  mit zwei konvexen Flächen  $F_1$  und  $F_2$  inzidiert, liegt sie beim Zusammenfügen der beiden Flächen vollständig innerhalb der resultierenden Fläche  $F$ .

Für den Fall, dass  $F$  konvex ist, muss auch die Verbindungsstrecke  $E_1$  der Punkte  $P_{1v}$  und  $P_{2n}$  vollständig innerhalb  $F$  liegen. Da der Punkt  $P_1$  auf einer Seite dieser Verbindungsstrecke liegt und  $P_2$  auf der anderen, da  $P_2$  nicht zum Dreieck  $P_{1v}P_1P_{2n}$  gehört, müssen sich  $E_1$  und  $E$  innerhalb  $F$  im Punkt  $S_1$  schneiden. Da  $E$  und  $E_1$  vollständig innerhalb  $F$  liegen, liegt auch  $S_1$  innerhalb  $F$  und somit auf

$E$  zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$ .

Der besondere Fall, in dem  $E_{1v}$  und  $E_{2n}$  kollinear sind, führt dazu, dass die Strecke  $E_1$  den Punkt  $P_1$  enthält und damit die Strecke  $E$  in diesem Punkt schneidet. In diesem Fall sind  $S_1$  und  $P_1$  identisch.

Das hier für den Schnittpunkt  $S_1$  Gesagte gilt analog auch für den Schnittpunkt  $S_2$ .

□

Die Überprüfung der Erhaltung der Konvexität beim Zusammenfügen zweier komplanarer Flächen  $F_1$  und  $F_2$  erfolgt somit durch die Berechnung der Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  und dem Vergleich ihrer Koordinaten mit denen der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , um festzustellen, ob sich sowohl  $S_1$  als auch  $S_2$  im Intervall  $[P_1, P_2]$  befinden. Ist dies erfüllt, ist die zusammengefügte Fläche  $F$  konvex.

Hierbei sei anzumerken, dass sowohl  $P_{1v}$  und  $P_{1n}$  als auch  $P_{2v}$  und  $P_{2n}$  identisch sein können, d.h. dass sowohl  $F_1$  als auch  $F_2$  Dreiecke sein können. Sind beide Flächen Dreiecke, existiert nur ein Schnittpunkt, der jedoch auch in diesem Fall zwischen  $P_1$  und  $P_2$  liegen muss, damit die aus beiden Dreiecken zusammengesetzte Fläche konvex ist.

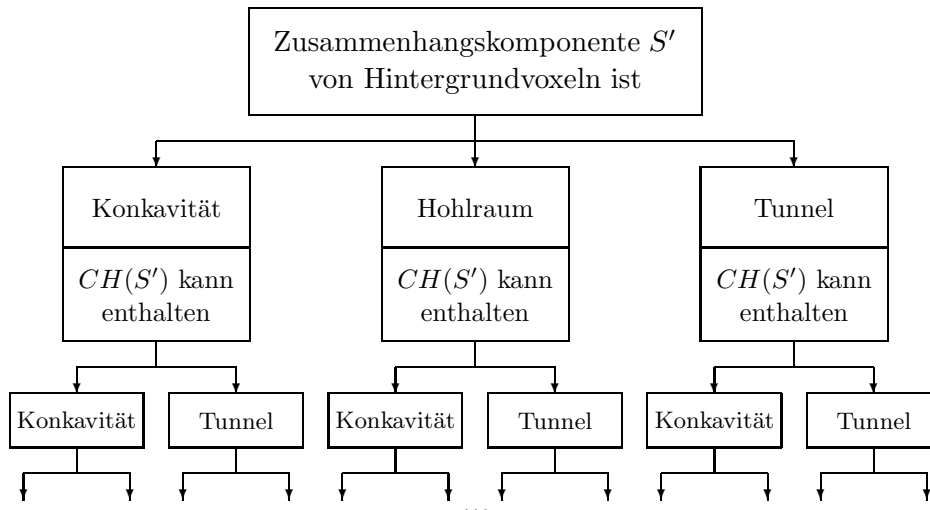
## 4.6 Zusammenfassung

### 4.6.1 Klassifikation der Objekte

Gemäß der Definitionen in Abschnitt 4.2.2 soll hier zusammengefasst werden, welche Arten von Zusammenhangskomponenten  $S'$  von Hintergrundvoxeln innerhalb eines Polyeders  $P$  existieren können und welche Arten von Zusammenhangskomponenten von Objektvoxeln sich innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S')$  befinden können.

Die Definitionen CO, CA und TU erzeugen eine Unterteilung aller möglichen Zusammenhangskomponenten von Hintergrundvoxeln nach der Anzahl der stark zusammenhängenden Mengen von Flächen eines Polyeders  $P$ , die mit jeder Zu-

sammenhangskomponente inzidieren. Abbildung 4.29 soll diese Unterteilung verdeutlichen:

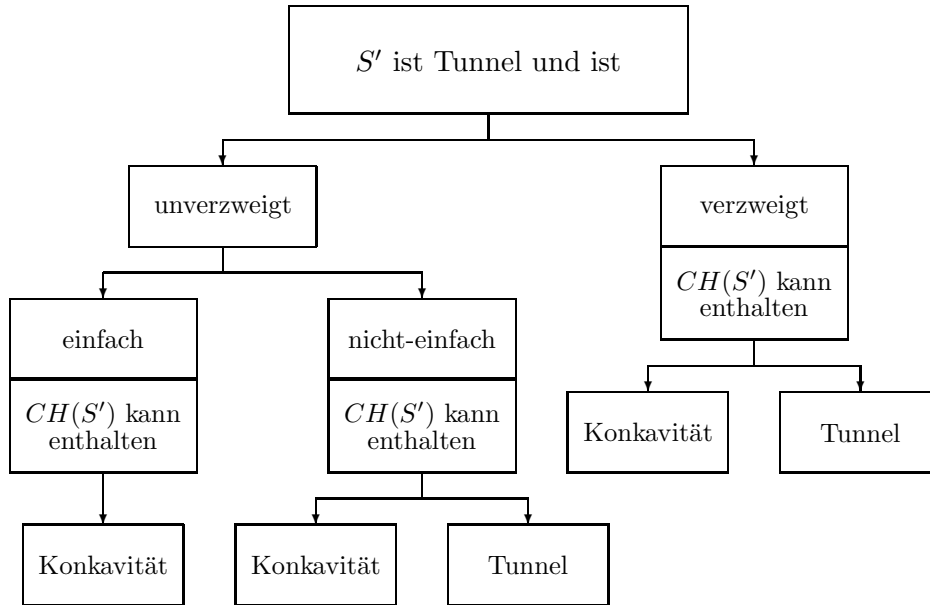


**Abbildung 4.29:** Klassifikation der Zusammenhangskomponenten von Hintergrundvoxeln innerhalb eines Polyeders  $P$ .

Mit Abbildung 4.29 soll veranschaulicht werden, dass jede ZKH, sofern sie nicht konvex ist, wiederum Zusammenhangskomponenten von Objektvoxeln enthalten kann, die innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S')$  der Komponente  $S'$  entweder eine Konkavität oder einen Tunnel bilden können. Zusammenhangskomponenten von Objektvoxeln, die Hohlräume bilden, können in  $CH(S')$  nicht enthalten sein, da diese Voxel dann nicht mit den Voxeln der Menge  $S$ , die außerhalb von  $CH(S')$  liegen, stark zusammenhängend sind, was jedoch aus der Forderung an die Eigenschaften der Menge  $S$  folgt. Daher können lediglich Konkavitäten und Tunnel in den tieferen Ebenen des rekursiven Enthaltenseins auftreten.

Das Geschlecht  $g$  des Randes  $\partial S'$  wird nach den Definitionen CO, CA und TU nicht betrachtet. Daher kann beispielsweise eine Konkavität gemäß Definition CO ein Torus sein oder ein Hohlraum kann Tunnel enthalten. Dies ist für die Klassifikation der ZKHs jedoch nicht von Bedeutung, da die entsprechenden Untersuchungen während der Modifikation durchgeführt werden, so dass eine Konkavität, die einen Torus bildet, anhand ihres Geschlechts  $g$  erkannt wird.

Die weitere Unterteilung der Klasse der Zusammenhangskomponenten, die Tunnel bilden, soll in der folgenden Abbildung zusammengefasst werden:



**Abbildung 4.30:** Klassifikation der Tunnel.

Anhand dieser beiden Übersichten über die Klassifikation der Zusammenhangskomponenten sollen die in Abschnitt 4.4 und 4.5 beschriebenen Modifikationsverfahren den entsprechenden Klassen zugeordnet werden.

Eine Zusammenhangskomponente  $S'$  von Hintergrundvoxeln, welche innerhalb eines Polyeders  $P$  eine Konkavität bildet, wird durch Eindrücken gemäß Definition PR (siehe Abschnitt 4.4.1) modifiziert. Dabei kann  $S'$  eine konvexe Menge sein, was bedeutet, dass die Modifikation an dieser Zusammenhangskomponente eine Rekursionstiefe von 1 erreicht. Die Menge  $S'$  kann jedoch auch nicht-konvex sein, was weitere Modifikationsschritte erfordert.

Bildet eine Zusammenhangskomponente  $S'$  einen Hohlraum in  $P$ , so wird für diese Komponente eine unabhängige Polyedrisierung durchgeführt. Wie in Abschnitt 4.4.2 erwähnt wurde, muss im Anschluss daran jedoch die Orientierung der Oberfläche in die entgegengesetzte Richtung gebracht werden.

Zusammenhangskomponenten, die Tunnel bilden, werden nach Definition TU in verzweigte und unverzweigte Tunnel klassifiziert. Die Klasse der unverzweig-



ten Tunnel gliedert sich dabei weiterhin in einfache und nicht-einfache Tunnel, die sich durch die Art der möglicherweise enthaltenen Zusammenhangskomponenten unterscheiden. Dabei sind einfache Tunnel diejenigen, die konvex sind oder Konkavitäten mit  $g = 0$  besitzen. Die hierfür angewandte Modifikation ist das Ausschneiden gemäß Definition AU (siehe Abschnitt 4.5.1).

Für nicht-einfache Tunnel, also solche, die unverzweigt sind, aber selbst Tunnel aus Voxeln der jeweils anderen Art besitzen können, wurden zwei mögliche Modifizierungsverfahren vorgestellt, nämlich ein heuristisches Verfahren (siehe Abschnitt 4.5.3) und das Verfahren der Komponentenerlegung (siehe Abschnitt 4.5.4).

Auch für die Klasse der verzweigten Tunnel können diese beiden Verfahren angewandt werden.

Somit ist für jede mögliche Zusammenhangskomponente von Hintergrundvoxeln innerhalb eines Polyeders  $P$  ein Modifizierungsverfahren entwickelt worden, welches durch rekursives Anwenden zu einem Polyeder  $\hat{P}$  führt, welches im Inneren nur Voxel der Menge  $S$  enthält und keine Voxel der Menge  $A \setminus S$  und bei dem sich keine Voxel der Menge  $S$  im Äußeren befinden, denn solange das Polyeder  $P$  nicht die Menge  $S$  von der Menge  $A \setminus S$  trennt, finden weitere Modifizierungen statt.

### 4.6.2 Grad der Nicht-Konvexität

Die in diesem Kapitel beschriebenen Modifikationsverfahren für nicht-konvexe Polyeder  $P$  führen zu einer schrittweisen Veränderung des Grades der Nicht-Konvexität  $G_{nc}(P)$ . Die erwähnte Tiefe der Rekursion des Verfahrens des Eindrückens passt zur Definition dieses Maßes, denn in jedem Schritt des Eindrückens wird das Polyeder um eine konvexe Ein- bzw. Ausbuchtung verändert, was  $G_{nc}(P)$  gemäß Definition NK (siehe S.10) um 1 erhöht, wenn die betrachtete Konkavität diejenige ist, die den maximalen Grad der Nicht-Konvexität besitzt.

Da der Grad der Nicht-Konvexität für Konkavitäten definiert wurde, bleibt zu erwähnen, wie sich dieses Maß bei Hohlräumen und Tunneln verändert.

Eine Menge  $S$  von Zellen ist nur dann konvex, wenn sie gemäß Definition DCS (siehe S.169) der Durchschnitt digitaler Halbräume ist. Die konvexe Hülle  $CH(S)$

einer konvexen Menge  $S$  von Zellen enthält keine Zellen des Komplementes von  $S$ , also der Menge  $A \setminus S$ , da die konvexe Hülle vollständig innerhalb jeder durch die Seitenflächen bestimmten abgeschlossenen Halbräume liegt und somit den Durchschnitt all dieser Halbräume darstellt. Das Polyeder  $P$ , welches die konvexe Hülle  $CH(S)$  einer konvexen Menge  $S$  repräsentiert, trennt damit  $S$  von  $A \setminus S$ .

Ein nicht-konvexes Polyeder  $P$ , welches  $S$  von  $A \setminus S$  trennt, enthält im Allgemeinen keine konvexe Menge  $S$ , denn für eine konvexe Menge würde die Polyedrisierung bereits nach der Erzeugung der konvexen Hülle beendet sein.

Da ein nicht-konvexes und trennendes Polyeder  $P$  Konkavitäten, Hohlräume und Tunnel besitzen kann, soll der Grad der Nicht-Konvexität jeweils auch durch Hohlräume und Tunnel verändert werden können. Hierfür sei die Definition des Grades der Nicht-Konvexität dahingehend zu erweitern, dass auch ein Tunnel oder ein Hohlraum den Wert dieses Maßes in der gleichen Weise wie Konkavitäten erhöhen. Das bedeutet, dass eine Menge  $S$  von Voxeln, die keine Konkavität enthält, jedoch einen konvexen Hohlraum  $S'$  im Inneren, nach Anwendung der Polyedrisierung von einem Polyeder  $P$  umschlossen wird, welches den Grad  $G_{nc}(P) = 1$  besitzt, da die konvexe Hülle  $CH(S)$  aufgrund des Hohlraumes genau einmal modifiziert werden muss, um  $S$  von  $A \setminus S$  zu trennen. In gleicher Weise trifft dies auch auf Tunnel zu.

Nicht-konvexe Hohlräume oder Tunnel unterliegen ebenso der rekursiven Modifikation, was die Anwendung des Grades der Nicht-Konvexität auch hier ermöglicht.

Damit besitzt ein modifiziertes Polyeder  $\hat{P}$ , welches Hohlräume oder Tunnel enthält, den Grad der Nicht-Konvexität, der um genau eins größer ist, als der maximale Grad der Nicht-Konvexität jener Polyeder  $P'$ , die die Hohlräume oder Tunnel von den Zellen der Menge  $S$  trennen.

### 4.6.3 Endlichkeit des Algorithmus

Gemäß seiner intuitiven Definition (siehe z.B. [45]) muss ein Algorithmus nach endlich vielen Schritten enden. Diese Forderung wird von dem in diesem Kapitel beschriebenen Polyedrisierungsalgorithmus für jedes Objekt  $S$  erfüllt. Um dies zu

zeigen, ist es notwendig, zu belegen, dass

1. der Algorithmus zur Erzeugung der konvexen Hülle einer Menge  $S$  von Voxeln nach endlich vielen Schritten endet und
2. dass die rekursive Anwendung des Algorithmus zur Erzeugung der konvexen Hülle auf Teilmengen aus  $S$  bzw.  $A \setminus S$  nur endlich oft erfolgt.

Zunächst soll gezeigt werden, dass die Erzeugung der konvexen Hülle einer Menge  $S$  von Voxeln nur endlich viele Schritte benötigt. Hierfür kann vorausgesetzt werden, dass die Menge  $S$  endlich ist, da dies gemäß Problemdefinition (siehe S.21) festgelegt ist. Die für das Aufspannen der konvexen Hülle benötigte Menge der Kandidatenvektoren ist eine Teilmenge der Zellen aus  $S$  und ist somit ebenfalls endlich. Das initiale Tetraeder hat endlich viele Flächen, Kanten und Ecken. Beim Erweitern des Tetraeders mit der Menge  $L$  der Kandidatenvektoren sind gemäß Definition VI (siehe S.37) endlich viele Flächen sichtbar und werden durch Anwendung endlich vieler Schritte durch neue Flächen ersetzt, deren Anzahl ebenfalls endlich ist. Da somit jede zu verarbeitende Menge endlich viele Elemente besitzt und in jedem Teilschritt des Algorithmus endlich viele Teiloperationen auszuführen sind, endet der Algorithmus zur Erzeugung der konvexen Hülle ebenfalls nach endlich vielen Schritten.

Das Polyedrisierungsverfahren ist eine rekursiv wiederholte Anwendung des Algorithmus zur Erzeugung der konvexen Hülle. Damit dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten endet, muss sichergestellt sein, dass die rekursiv wiederholte Anwendung der Erzeugung der konvexen Hülle nur endlich oft erfolgt. Dies ist dadurch gegeben, dass eine ZKH  $S'$  innerhalb eines Polyeders  $P$  eine echte Teilmenge aller Voxel innerhalb  $P$  ist. Bei der rekursiven Modifikation des Polyeders  $P$  ist jede Zusammenhangskomponente  $S''$  von Voxeln innerhalb eines Teilpolyeders  $P'$ , welches die Menge  $S'$  vollständig umschließt, ebenfalls eine echte Teilmenge aller Voxel innerhalb  $P'$ . Aus diesem Grund wird mit zunehmender Rekursionstiefe die Anzahl der Voxel innerhalb einer Zusammenhangskomponente kleiner. Weiterhin können innerhalb eines Polyeders  $P$  nur endlich viele Zusammenhangskomponenten von Voxeln enthalten sein, da die Menge der Voxel in jedem Schritt endlich

ist. Da nun also Rekursionstiefe und Anzahl der Zusammenhangskomponenten endlich sind, ist der Polyedrisierungsalgorithmus ein nach endlich vielen Schritten endendes Verfahren.

#### 4.6.4 Zeitkomplexität des Algorithmus

Wie in Abschnitt 4.1.1 bereits erwähnt wurde, sind die Algorithmen zur Erzeugung der konvexen Hülle mit einer Zeitkomplexität von  $O(n^2)$  bzw.  $O(n \log n)$  realisierbar. Das hier verwendete Verfahren zur Erzeugung der konvexen Hülle einer Menge  $S$  von Voxeln ist ein inkrementelles Verfahren und hat eine quadratische Zeitkomplexität. Diese kommt zustande durch eine lineare Abhängigkeit des Algorithmus von der Anzahl der Voxel und die in jedem Schritt linear wachsende Anzahl von Flächen des Polyeders, die bezüglich der Sichtbarkeit zu prüfen sind.

Der Polyedrisierungsalgorithmus besitzt die Erzeugung der konvexen Hülle als Teiloperation, die wiederholt ausgeführt wird. Eine weitere Teiloperation, die von der Form und der Größe des Objektes  $S$  abhängt, ist die Bestimmung der Zusammenhangskomponenten von Hintergrundvoxeln, welche durch einen Algorithmus mit linearer Zeitkomplexität realisiert wird. Die Klassifikation der Zusammenhangskomponenten in Konkavitäten, Hohlräume und Tunnel erfolgt durch das Markieren sichtbarer Flächen des Polyeders und besitzt ebenfalls lineare Zeitkomplexität in Bezug auf die Anzahl der Flächen des Polyeders.

Die Zeitkomplexität der rekursiven Modifikation hängt von der Anzahl und Form (Grad der Nicht-Konvexität) der Zusammenhangskomponenten ab und wird als von der Anzahl der Voxel in  $S$  unabhängig angesehen.

Die Kombination der Teiloperationen bei der Polyedrisierung führt zu einer Gesamtzeitkomplexität von  $O(n^2 + m^2 \cdot k)$ , wobei  $n$  auf die Anzahl der Voxel in  $S$  bezogen ist,  $m$  auf den Grad der Nicht-Konvexität des resultierenden Polyeders  $P$  und  $k$  auf die Anzahl der Komponenten von Hintergrundvoxeln in  $CH(S)$ . Damit besitzt der Polyedrisierungsalgorithmus eine Zeitkomplexität der Größenordnung  $O(n^3)$ .

# Kapitel 5

## Berechnung des Volumens der Polyeder

### 5.1 Definition

Zu einem AC Komplex  $A$ , der in den Kartesischen Raum eingebettet ist, kann das Volumen bestimmt werden. Das Volumen  $V_S$  eines Teilkomplexes  $S \subset A$  ist bestimmt durch

$$V_S = N_V \cdot h^3 \quad (5.1)$$

Dabei bezeichnet  $N_V$  die Anzahl der 3-Zellen in  $S$  und  $h$  die Gitterkonstante, also die Länge einer 1-Zelle. Das Volumen  $V_S$  der Menge  $S$  kann somit durch Abzählen seiner 3-Zellen sehr einfach berechnet werden.

Die Berechnung des Volumens  $V_P$  eines Polyeders, welches die Menge  $S$  im Inneren enthält, ist dagegen nicht durch eine einfache Formel berechenbar. So wie im 2-dimensionalen Raum der Flächeninhalt eines allgemeinen Polygons nur durch Zerlegung in Dreiecke berechnet werden kann, muss die Berechnung des Volumens eines Polyeders erfolgen, indem der eingeschlossene Raum in Tetraeder zerlegt wird. Da nicht vorausgesetzt werden kann, dass diese Tetraeder in irgendeiner Form regelmäßig sind, kommt die allgemeine Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide zum Einsatz:

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot l \quad (5.2)$$

Hierbei ist  $A_G$  der Flächeninhalt der Grundfläche des Tetraeders und  $l$  seine Höhe.

Da die Grundfläche des Tetraeders ein Dreieck ist und da die Koordinaten der Ecken bekannt sind, kann  $A_G$  gemäß der Formeln 7.2 und 7.3 (siehe S.113) berechnet werden. Die Höhe  $l$  ist definiert als der Abstand der Spitze einer Pyramide von seiner Grundfläche. Hierfür muss demnach der Abstand der vierten Ecke des Tetraeders von der Ebene berechnet werden, die durch die drei anderen Ecken bestimmt wird. Die Berechnung des Abstandes  $d$  eines Punktes von einer Ebene im Raum kann gemäß folgender Formel [5] erfolgen:

$$d = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \quad (5.3)$$

Dabei bezeichnen  $\vec{n}$  den normierten Normalenvektor der Ebene,  $\vec{x}$  den Ortsvektor eines Punktes innerhalb der Ebene und  $\vec{p}$  den Ortsvektor des Punktes, dessen Abstand zur Ebene berechnet werden soll.

## 5.2 Berechnung

Die Berechnung des Volumens  $V_P$  des Polyeders  $P$  kann erfolgen, indem  $P$  in Tetraeder zerlegt wird. Dies entspricht der 3-dimensionalen Verallgemeinerung des Problems der Triangulation eines Polygons im 2-dimensionalen Raum. Es gibt zu diesem Problem jedoch keine triviale Lösung, sondern es ist ein Algorithmus erforderlich, um das Problem zu lösen.

Das Zerlegungsproblem soll hier jedoch umgangen werden, da die Volumenberechnung auch inkrementell während der Polyedrisierung erfolgen kann.

Während des Polyedrisierungsverfahrens ist in jedem Schritt die Berechnung des Volumens des aktuellen Polyeders effizient möglich. Zunächst wird mit der Erzeugung der konvexen Hülle begonnen und dies erfolgt durch Aufspannen eines initialen Polyeders, welches ein Tetraeder ist (siehe Abschnitt 4.1.4). Das Volumen des initialen Polyeders kann somit gemäß Formel 5.2 berechnet werden.

Bei der Erzeugung der konvexen Hülle wächst in jedem Schritt, in dem sichtbare Flächen vorhanden sind, das Volumen, da diejenige Zelle der Menge  $L$ , die eine neue Ecke der konvexen Hülle wird, außerhalb des aktuellen Polyeders liegt und in dieses aufgenommen wird. Es muss somit zu dem Volumen des aktuellen Polyeders

das Volumen addiert werden, welches von den sichtbaren Flächen und den neu erzeugten Dreiecken eingeschlossen wird. Hierbei treten zwei Fälle auf:

1. Die konvexe Hülle ist ein trianguliertes Polyeder und besitzt ausschließlich Dreiecke als Flächen.
2. Die konvexe Hülle ist kein trianguliertes Polyeder und besitzt  $n$ -Ecke ( $n \geq 3$ ) als Flächen.

In beiden Fällen kann die Menge der sichtbaren Flächen aus mehreren Flächen bestehen, die weiterhin im Allgemeinen nicht komplanar sind. Aus diesem Grund kann das zu addierende Volumen des Polyeders, welches aus den sichtbaren und den neuen Flächen besteht, nicht gemäß der Formel 5.2 berechnet werden.

Weiterhin haben beide Fälle gemeinsam, dass aus je einer sichtbaren Fläche und der neuen Ecke eine Pyramide bestimmt werden kann, deren Volumen gemäß Formel 5.2 zu berechnen ist. Der Unterschied beider Fälle besteht lediglich darin, dass im ersten Fall die Pyramide ein Tetraeder ist und im zweiten Fall nicht unbedingt.

Das Volumen  $V_{CH(S)}$  der konvexen Hülle ist somit die Summe der Volumina aller Pyramiden, die in jedem Schritt erzeugt werden.

Bei der Modifikation der konvexen Hülle einer nicht-konvexen Menge  $S$  erfolgen mit den Operationen des Eindrückens (siehe S.60) und des Ausschneidens (siehe S.70) auch Veränderungen des Volumens des Polyeders  $P$ . Bei diesen Operationen wird eine Menge von Flächen von  $P$  durch eine neue Menge von Flächen ersetzt, die innerhalb von  $P$  liegen. Das eingeschlossene Volumen im Polyeder  $P'$ , welches aus der Menge der beim Eindrücken bzw. Ausschneiden zu ersetzenden Flächen und den neu erzeugten Flächen besteht, liegt dabei vollständig im Inneren von  $P$ , wodurch sich das Volumen  $V_P$  um  $V_{P'}$  verringert.

Beim Eindrücken wird ähnlich der Erzeugung der konvexen Hülle ein Polyeder  $P'$  erzeugt, welches schrittweise durch Erweitern eines initialen Polyeders entsteht. Da das initiale Polyeder beim Eindrücken nicht zwangsläufig ein Tetraeder ist, sondern aus der Menge der sichtbaren Flächen des einzudrückenden Polyeders und einer weiteren Ecke  $c_1 \in L'$  aufgespannt wird, muss die Volumenberechnung

des initialen Polyeders erfolgen, indem mit jeder sichtbaren Fläche und der Ecke  $c_1$  eine Pyramide erzeugt wird, deren Volumen gemäß Formel 5.2 berechnet werden kann. Beim Erweitern der initialen Hülle kann dann analog der Erzeugung der konvexen Hülle vorgegangen werden, so dass nach der Aufnahme aller Zellen aus  $L'$  in  $P'$  die Summe aller Volumina der in jedem Schritt erzeugten Pyramiden das Volumen von  $P'$  ergibt. Bei der Vereinigung von  $P$  mit  $P'$  muss somit lediglich das Volumen von  $P'$  von  $P$  subtrahiert werden.

Beim Ausschneiden kann in analoger Weise das Volumen des Polyeders  $P'$  berechnet werden, welches mit  $P$  vereinigt wird. Auch in diesem Fall liegt der Rauminhalt von  $P'$  vollständig in  $P$ , so dass das Volumen von  $P'$  vom Volumen von  $P$  subtrahiert werden muss, um das Volumen des modifizierten Polyeders zu erhalten.

Die rekursive Anwendung der Modifikation eines Polyeders durch Eindringen bzw. Ausschneiden ist mit der Volumenberechnung ebenfalls vereinbar, denn in jedem Schritt wird ein zu modifizierendes Polyeder mit einem zweiten, kleineren Polyeder vereinigt, welches vollständig innerhalb des ersten liegt, wodurch in jedem Schritt das Volumen des zweiten Polyeders von dem Volumen des ersten Polyeders subtrahiert werden kann, um das Volumen des modifizierten Polyeders zu ermitteln.

Somit kann während der Polyedrisierung die Volumenberechnung des resultierenden Polyeders  $\hat{P}$  erfolgen.



# Kapitel 6

## Minimalität der Flächenanzahl der Polyeder

In diesem Kapitel soll untersucht werden, für welche Klassen von Objekten die erzeugten Polyeder eine minimale Flächenanzahl besitzen.

### 6.1 Flächenanzahl der konvexen Hülle konvexer Objekte

Gemäß Definition CH ist die konvexe Hülle  $CH(S)$  eines Teilkomplexes  $S$  eines AC Komplexes  $A$  das kleinste AG Polyeder  $P$ , welches  $S$  vollständig enthält und konvex ist. Ist dabei die Menge  $S$  eine konvexe Menge gemäß Definition DCS (siehe S.169), so gilt folgende Aussage:

**Lemma TR:** Die konvexe Hülle  $CH(S)$  einer digitalen konvexen Teilmenge  $S$  von 3-Zellen eines AC Komplexes  $A$  enthält keine 3-Zellen der Menge  $A \setminus S$ .

*Beweis:* Ein Subkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$  ist eine digitale konvexe Teilmenge, wenn  $S$  der Durchschnitt digitaler Halbräume ist. Daraus folgt, dass jede 3-Zelle  $c^3 \in S$  alle Ungleichungen erfüllt, die die Halbräume bestimmen, deren Durchschnitt  $S$  ist. Und es folgt weiterhin, dass in  $S$  keine Zelle liegt, die mindestens eine Ungleichung nicht erfüllt.

Das AG Polyeder  $P$ , das die konvexe Hülle  $CH(S)$  der Menge  $S$  repräsentiert, besitzt ausschließlich 3-Zellen  $c^3 \in S$  als Ecken. Dies folgt aus der Definition der Menge  $L$  der Kandidatenvektoren (siehe Abschnitt 4.1.2 bzw. 4.1.3), welche eine Teilmenge aller Zellen aus  $S$  ist. Gemäß Definition CP (siehe S.8) erfüllt jede Ecke von  $P$  alle linearen Ungleichungen, die zu jeder Fläche von  $P$  gehören. Damit erfüllen auch alle Zellen aus  $S$ , die im Inneren von  $P$  liegen, die Ungleichungen, die zu den Flächen von  $P$  gehören.

Es bleibt zu zeigen, dass alle 3-Zellen aus  $A$ , die innerhalb  $P$  liegen, zum Teilkomplex  $S$  gehören. Da jede Ecke einer Fläche  $F_i$  von  $P$  einer 3-Zelle aus  $S$  entspricht, bestimmt die Ungleichung der Fläche  $F_i$  einen Halbraum  $H_i$ , in dem alle 3-Zellen aus  $S$  liegen. Der Durchschnitt aller Halbräume  $H_i$  ist gemäß Definition DCS eine digitale konvexe Teilmenge  $\bar{S}$  mit  $S \subseteq \bar{S}$ , da alle 3-Zellen aus  $S$  in jedem Halbraum  $H_i$  liegen.

Eine 3-Zelle  $c^3_S \in \bar{S}$ , die gleichzeitig zur Menge  $A \setminus S$  gehört, kann keine Ecke von  $P$  sein, da alle Ecken von  $P$  3-Zellen aus  $S$  sind.  $c^3_S$  kann weiterhin auch nicht in einer Fläche  $F$  von  $P$  liegen, da sie dann eine Konvexkombination der Ecken von  $F$  wäre, was bedeuten würde, dass sie entweder zu  $S$  gehören müsste oder  $S$  wäre sonst nicht konvex.  $c^3_S$  kann aus dem gleichen Grund auch nicht auf einer Kante von  $P$  liegen. Abschließend kann  $c^3_S$  auch nicht im Inneren von  $P$  liegen, da sie auch in diesem Fall eine Konvexkombination von Ecken von  $P$  und somit von 3-Zellen aus  $S$  wäre und demnach entweder zu  $S$  gehört oder  $S$  wäre nicht konvex.

Somit wurde gezeigt, dass keine 3-Zelle  $c^3_S \in \bar{S}$ , die innerhalb von  $P$  liegt, eine Zelle von  $A \setminus S$  ist. Somit gilt  $\bar{S} = S$ , was bedeutet, dass der Durchschnitt  $\bar{S}$  der Halbräume  $H_i$ , die durch die Flächen der konvexen Hülle  $CH(S)$  bestimmt sind, genau die Menge  $S$  ist.

□

Damit gilt, dass ein Polyeder  $P$ , welches die konvexe Hülle  $CH(S)$  einer digitalen konvexen Teilmenge  $S$  repräsentiert, keine 3-Zellen der Menge  $A \setminus S$  enthält, da sonst  $S$  nicht konvex wäre.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Flächenanzahl der konvexen Hülle minimal

ist. Das bedeutet, dass kein Polyeder  $P$  existiert, welches eine digitale konvexe Teilmenge  $S$  von  $A \setminus S$  trennt, ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  als Ecken besitzt und weniger Flächen besitzt als  $CH(S)$ . Hierbei wird vorausgesetzt, dass die konvexe Hülle keine komplanaren Flächen besitzt (siehe Abschnitt 4.1.6).

Um die Minimalität der Flächenanzahl beweisen zu können, sind zuvor zwei Lemmata notwendig:

**Lemma TRE:** Es existiert kein Polyeder  $P$ , welches eine digitale konvexe Teilmenge  $S$  von  $A \setminus S$  trennt, als Ecken ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  besitzt und dessen Eckenanzahl kleiner ist als die der konvexen Hülle  $CH(S)$ .

*Beweis:* Jede 3-Zelle aus  $S$ , die keine Ecke von  $CH(S)$  ist, ist eine Konvexkombination aus anderen 3-Zellen aus  $S$ . Damit ist jede Ecke von  $CH(S)$  eine 3-Zelle aus  $S$ , für die keine Konvexkombination anderer 3-Zellen aus  $S$  existiert. Ein trennendes Polyeder  $P$ , welches weniger Ecken besitzt als die konvexe Hülle  $CH(S)$ , jedoch als Ecken nur 3-Zellen aus  $S$  besitzt, kann demnach nicht alle 3-Zellen als Ecken besitzen, die keine Konvexkombination anderer 3-Zellen aus  $S$  sind.

Eine 3-Zelle  $c^3 \in S$ , die keine Konvexkombination anderer 3-Zellen aus  $S$  und keine Ecke von  $P$  ist, muss demnach im Inneren von  $P$ , auf  $P$  (ohne Ecke von  $P$  zu sein) oder außerhalb von  $P$  liegen. Eine solche 3-Zelle  $c^3$  kann jedoch nicht im Inneren von  $P$  oder auf  $P$  (ohne Ecke von  $P$  zu sein) liegen, da sie in diesen Fällen eine Konvexkombination anderer 3-Zellen aus  $S$  ist.  $c^3$  kann auch nicht außerhalb von  $P$  liegen, da  $P$  dann die Forderung verletzt, ein Polyeder zu sein, welches  $S$  von  $A \setminus S$  trennt.

Somit besitzt kein trennendes Polyeder  $P$ , welches als Ecken ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  besitzt, weniger Ecken als die konvexe Hülle  $CH(S)$ .

□

**Lemma TRC:** Ein Polyeder  $P$ , welches eine digitale konvexe Teilmenge  $S$  von  $A \setminus S$  trennt und dessen Ecken ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  sind, besitzt die gleichen Ecken wie die konvexe Hülle  $CH(S)$ .

*Beweis:* Eine Ecke  $v$  von  $P$ , die keine Ecke der konvexen Hülle  $CH(S)$  ist, kann eine der folgenden Zellen sein:

1.  $v$  ist eine 3-Zelle aus  $S$  und liegt innerhalb von  $CH(S)$ .
2.  $v$  ist eine 3-Zelle aus  $S$  und liegt innerhalb einer Fläche  $F$  von  $CH(S)$ , jedoch nicht auf dem Rand  $\partial F$  dieser Fläche.
3.  $v$  ist eine 3-Zelle aus  $S$  und liegt auf einer Kante von  $CH(S)$ , ist jedoch keine Ecke von  $CH(S)$ .
4.  $v$  ist eine Zelle aus  $S$ , jedoch keine 3-Zelle.
5.  $v$  ist keine Zelle aus  $S$ .

Zu 1.: Liegt  $v$  im Inneren der konvexen Hülle  $CH(S)$ , so ist keine Ebene, die  $v$  enthält, der Rand eines Halbraumes, der alle 3-Zellen aus  $S$  enthält, denn die konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die  $S$  enthält. Ein Polyeder  $P$ , welches eine Ecke  $v$  im Inneren von  $CH(S)$  besitzt, wäre damit kleiner und könnte somit  $S$  nicht vollständig enthalten, was die Forderung verletzt, dass  $P$  die Menge  $S$  von  $A \setminus S$  trennt.

Zu 2.: Liegt  $v$  auf einer Fläche  $F$  von  $CH(S)$ , so ist  $v$  eine Konvexkombination derjenigen 3-Zellen aus  $S$ , die die Ecken von  $F$  sind. Durch die Ecken von  $F$  ist jedoch eine Ebene bestimmt, die einen Halbraum berandet, in dem sich alle Zellen aus  $S$  befinden. Somit muss diese Ebene ebenfalls von den Ecken einer Fläche eines trennenden Polyeders  $P$  bestimmt werden, wenn  $P$  ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  als Ecken besitzen soll. Besitzt  $P$  weiterhin diese 3-Zelle  $v$  als Ecke, so entstehen komplanare Flächen in  $P$ , die laut Forderung ausgeschlossen sind.

Zu 3.: Liegt  $v$  auf einer Kante von  $CH(S)$ , so entstehen analog zu 2. ebenfalls komplanare Flächen, die laut Forderung ausgeschlossen sind.

Zu 4.: Ist  $v$  eine  $k$ -Zelle aus  $S$  mit der Dimension  $k < 3$ , so widerspricht das der Forderung, dass jede Ecke von  $P$  eine 3-Zelle aus  $S$  ist.

Zu 5.: Ist  $v$  eine Zelle aus  $A \setminus S$ , so widerspricht das der Forderung, dass jede Ecke von  $P$  eine 3-Zelle aus  $S$  ist.

## 6.1. FLÄCHENANZAHL DER KONVEXEN HÜLLE KONVEXER OBJEKTE 101

Somit besitzt jedes Polyeder  $P$ , welches  $S$  von  $A \setminus S$  trennt und dessen Ecken ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  sind, die gleichen Ecken wie die konvexe Hülle  $CH(S)$ .

□

Es kann nun gezeigt werden, dass die Anzahl der Flächen der konvexen Hülle eines digitalen konvexen Objektes minimal ist.

**Theorem TRM:** Es existiert kein Polyeder  $P$ , welches eine digitale konvexe Teilmenge  $S$  von  $A \setminus S$  trennt, als Ecken ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  besitzt und dessen Flächenanzahl kleiner ist als die der konvexen Hülle  $CH(S)$ .

*Beweis:* Gemäß Lemma TR befinden sich innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$  einer digitalen konvexen Teilmenge  $S \subset A$  keine 3-Zellen aus  $A \setminus S$ , wenn die Ecken von  $CH(S)$  ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  sind. Daher ist die konvexe Hülle  $CH(S)$  ein Polyeder, welches  $S$  von  $A \setminus S$  trennt, denn keine 3-Zelle aus  $A \setminus S$  liegt innerhalb  $CH(S)$  oder innerhalb von Flächen von  $CH(S)$  und keine 3-Zelle aus  $S$  liegt außerhalb von  $CH(S)$ .

Die Ecken von  $CH(S)$  sind eindeutig bestimmt. Es sind alle diejenigen 3-Zellen aus  $S$ , die nicht als Konvexkombination anderer 3-Zellen aus  $S$  dargestellt werden können.

Gemäß Lemma TRC ist die Menge der Ecken eines trennenden Polyeders  $P$ , welches als Ecken 3-Zellen der Menge  $S$  besitzt, identisch zur Menge der Ecken der konvexen Hülle  $CH(S)$ . Jede Fläche eines trennenden Polyeders  $P$  enthält alle Ecken, die eine Ebene bestimmen, auf deren einer Seite alle anderen Ecken von  $P$  liegen. Da dies der Definition der konvexen Hülle entspricht, besitzt jedes trennende Polyeder  $P$  die gleichen Flächen wie  $CH(S)$  und somit ebenfalls die gleiche Flächenanzahl.

Das bedeutet, dass kein trennendes Polyeder  $P$  zu einer konvexen Menge  $S$  existiert, welches ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  als Ecken besitzt und verschieden ist von  $CH(S)$ , womit gezeigt wurde, dass die konvexe Hülle ein trennendes Polyeder mit minimaler Flächenanzahl ist.

□

## 6.2 Polyeder mit konvexen Hohlräumen

Gegeben sei ein Subkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$ , der nicht-konvex ist in dem Sinne, dass  $CH(S)$  ZKHs  $S'_i, S'_i \in A \setminus S$  enthält, die gemäß Definition CA (siehe S.51) Hohlräume in  $CH(S)$  bilden. Die ZKHs  $S'_i$  seien digital konvex, d.h.  $CH(S'_i)$  enthält keine 3-Zellen aus  $S$ .

Es soll nun gezeigt werden, dass ein AG Polyeder  $P$ , welches einen solchen Teilkomplex  $S$  von  $A \setminus S$  trennt, minimal viele Flächen besitzt, wenn  $P$  durch das Polyedrisierungsverfahren erzeugt wurde.

**Theorem THM:** Ein AG Polyeder  $P$ , welches einen nicht-konvexen Teilkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$  von dem Teilkomplex  $A \setminus S$  trennt, wobei  $CH(S)$  ZKHs enthält, die konvexe Hohlräume bilden, besitzt die minimale Flächenanzahl unter allen trennenden Polyedern, wenn  $P$  mittels des Polyedrisierungsverfahrens erzeugt wurde.

*Beweis:* Gemäß Definition CA inzidiert keine Zelle eines Hohlräume  $S' \in A \setminus S$  mit den Flächen der konvexen Hülle  $CH(S)$ . Da somit alle Zellen des Hohlräume  $S'$  vollständig innerhalb  $CH(S)$  liegen, trennt  $CH(S)$  alle 3-Zellen von  $S$  von den 3-Zellen der Menge  $A \setminus S$ , die nicht zu  $S'$  gehören.

Wie in Abschnitt 4.4.2 beschrieben, erfolgt die Polyedrisierung eines solchen Objektes  $S$  durch die Erzeugung der konvexen Hülle  $CH(S)$  und die unabhängige Erzeugung der konvexen Hüllen  $CH(S'_i)$ . Das AG Polyeder  $P$ , welches  $S$  von  $A \setminus S$  trennt, wird aus der zusammenhängenden Menge von Flächen von  $CH(S)$  und den zusammenhängenden Mengen von Flächen der konvexen Hüllen  $CH(S'_i)$  zusammengefügt, wobei diese zusammenhängenden Mengen von Flächen sich nicht schneiden oder gemeinsame Zellen besitzen.

Durch die unabhängige Erzeugung der konvexen Hülle  $CH(S')$  eines konvexen Hohlräume  $S'$  ist die Eigenschaft der Trennung so erfüllt, dass  $CH(S')$  ausschließlich 3-Zellen der Menge  $S'$  als Ecken besitzt und sich im Inneren von  $CH(S')$  und auf  $CH(S')$  keine Zellen der Menge  $S$  befinden. Weiterhin befinden sich keine Zel-

len des Hohlraumes  $S'$  außerhalb von  $CH(S')$ . Für das aus  $CH(S)$  und  $CH(S'_i)$  zusammengesetzte Polyeder  $P$  muss daher in der Zellenliste gespeichert werden, zu welcher Menge ( $S$  oder  $A \setminus S$ ) die jeweilige Ecke von  $P$  gehört (siehe Abschnitt 3.4).

Die Flächenanzahl  $N_F$  des AG Polyeders  $P$  entspricht der Summe der Flächenanzahlen der konvexen Hüllen  $CH(S)$  und  $CH(S'_i)$ . Gemäß Theorem TRM ist die Anzahl der Flächen jeder Teilhülle minimal und damit auch die Summe der Flächenanzahlen.

□

Es wurde somit gezeigt, dass ein AG Polyeder  $P$ , welches einen Teilkomplex  $S$ , der in  $CH(S)$  konvexe Hohlräume besitzt, von  $A \setminus S$  trennt, minimal viele Flächen besitzt.

### 6.3 Polyeder mit konvexen Konkavitäten

Das Polyedrisierungsverfahren erzeugt aus der konvexen Hülle  $CH(S)$  eines Subkomplexes  $S$ , der nicht-konvex in dem Sinne ist, dass er in  $CH(S)$  gemäß Definition CO (siehe S.51) Konkavitäten besitzt, die digital konvex sind, ein trennendes Polyeder  $P$ . Die Erzeugung läuft rekursiv ab und auch für konvexe Konkavitäten erfolgt im Allgemeinen eine mehrstufige Modifikation, denn das Eindrücken erzeugt zunächst nicht die konvexe Hülle  $CH(S')$ , sondern die konvexe Hülle der Menge  $M$  der markierten Flächen aus  $CH(S)$  und der Menge  $S'$ , also  $CH(M \cup S')$ , welche  $CH(S')$  echt enthält. Aus diesem Grund enthält  $CH(M \cup S')$  im Allgemeinen auch 3-Zellen aus  $S$ . Das Objekt in Abschnitt 8.1.1 ist ein Beispiel hierfür.

Die Flächenanzahl des durch das Polyedrisierungsverfahren erzeugten Polyeders  $P$  wird bei Objekten, die konvexe Konkavitäten besitzen, durch drei Faktoren bestimmt:

1. die Anzahl der Flächen der konvexen Hülle  $CH(S)$
2. die Anzahl der Flächen in der Menge  $M$  der markierten Flächen, die mit der Konkavität  $S'$  inzidieren

3. die Anzahl der Flächen der konvexen Hülle  $CH(M \cup S')$ .

Zu 1.: Die Minimalität der Flächenanzahl der konvexen Hülle konvexer Objekte wurde durch Theorem TRM (siehe S.101) gezeigt. Die konvexe Hülle ist für nicht-konvexe Objekte kein trennendes Polyeder. Dabei verletzen jedoch nur diejenigen Flächen der konvexen Hülle die Forderung der Trennung, die mit der ZKH  $S'$  inzidieren. Inzidenz bedeutet hierbei, dass diese Flächen die Abschlüsse der Hintergrundvoxel, die sich innerhalb  $CH(S)$  befinden, schneiden (siehe Abschnitt 4.2.3). Bei diesen Flächen handelt es sich um genau die Menge  $M$  der zum Eindrücken markierten Flächen. Daraus folgt, dass die Flächen aus  $CH(S) \setminus M$  die Trennungsforderung erfüllen und in ihrer Anzahl minimal sind, da diese Flächen durch die Erzeugung der konvexen Hülle eindeutig festgelegt sind.

Zu 2.: Die Anzahl der markierten Flächen, die mit  $S'$  inzidieren, folgt aus der Definition der Inzidenz von Flächen mit der Konkavität (siehe Abschnitt 4.2.3). Diese Anzahl wird durch die Form des Objektes  $S$  und die Lage und Größe der Flächen in  $CH(S)$  bestimmt und ist innerhalb des Polyedrisierungsverfahrens durch die Auswahl derjenigen Flächen, die die Abschlüsse der Hintergrundvoxel in  $S'$  schneiden, festgelegt und damit nicht variabel.

Zu 3.: Aufgrund der Tatsache, dass die konvexe Hülle  $CH(M \cup S')$  im Allgemeinen nicht ausschließlich Hintergrundvoxel, also 3-Zellen der Menge  $S'$  enthält, sondern auch Objektvoxel, erfolgt die Modifikation von  $CH(M \cup S')$  analog zur Modifikation von  $CH(S)$ . Diese rekursive Modifikation erreicht ihren Rekursionsanfang, wenn die konvexe Hülle einer Zusammenhangskomponente ausschließlich Voxel einer Art, also entweder Objekt- oder Hintergrundvoxel enthält. Sofern bei der rekursiven Modifikation keine Zusammenhangskomponente von Voxeln einer Art innerhalb der konvexen Hülle von Voxeln der jeweils anderen Art enthalten ist, deren Oberfläche das Geschlecht  $g > 0$  besitzt, kann die Minimalität der Flächenanzahl dadurch gewährleistet werden, dass am Rekursionsanfang die konvexe Hülle einer Komponente von Voxeln keine Voxel der jeweils anderen Art mehr enthält und somit ein trennendes Polyeder ist. Die Minimalität der Flächenanzahl ist durch Theorem TRM gezeigt worden.

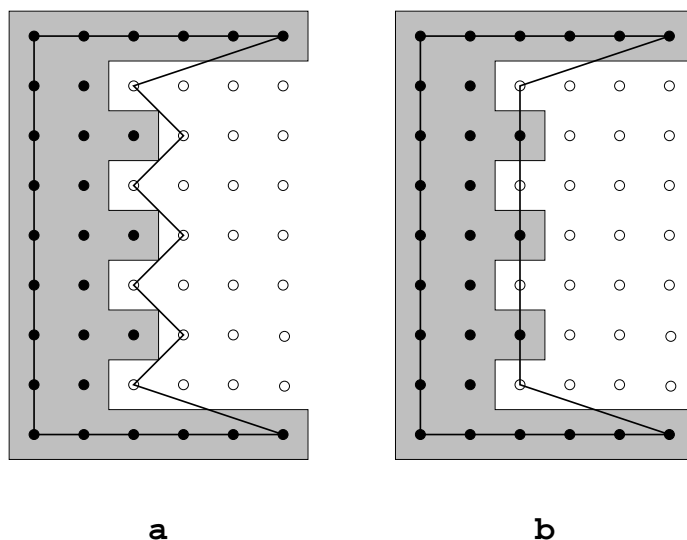


Beim Zusammenfügen der Teilpolyeder werden in jedem Vereinigungsschritt zwei Mengen von Flächen zu einem Polyeder zusammengefügt. Jede dieser beiden Mengen ist eine 2-Mannigfaltigkeit mit Rand, wobei die Ränder beider Mengen identisch sind. Da als Ecken der Polyeder sowohl 3-Zellen aus  $S$  als auch aus  $A \setminus S$  erlaubt sind, enthält das zusammengefügte Polyeder Zellen beider Arten als Ecken. Hierbei ist es jedoch möglich, dass durch den Austausch bestimmter Ecken des Polyeders die Flächenanzahl weiter reduziert werden kann. Austauschen von Ecken bedeutet hier, dass eine Ecke, die eine 3-Zelle aus  $S$  ist, zu einer benachbarten 3-Zelle aus  $A \setminus S$  verschoben werden kann, sofern dabei die Trennung im geforderten Sinne beibehalten wird. Wenn die dabei neu in das Polyeder aufgenommene Ecke mit anderen Ecken des Polyeders komplanar ist, kann somit durch das Zusammenfügen komplanarer Flächen die Flächenanzahl des Polyeders verringert werden. Diese Reduzierung der Flächenanzahl ist jedoch nicht im Polyedrisierungsverfahren enthalten und erfordert ein Optimierungsverfahren im Anschluss an die Polyedrisierung. Diese Idee wird im nächsten Abschnitt in Abbildung 6.1 verdeutlicht.

## 6.4 Polyeder mit nicht-konvexen ZKHs

Nicht-konvexe ZKHs sind alle diejenigen Mengen  $S'$  von Voxeln innerhalb einer konvexen Hülle  $CH(S)$ , die nicht gemäß Definition DCS konvex sind. Dies können Konkavitäten, Hohlräume und Tunnel sein.

Wie bereits in den vorigen Abschnitten gezeigt, wird zu einer konvexen ZKH ein trennendes Polyeder mit minimaler Flächenanzahl erzeugt. Lediglich das Zusammenfügen der Teilpolyeder kann dazu führen, dass durch das Austauschen der Ecken des Polyeders  $P$  die Flächenanzahl reduziert werden kann. Für nicht-konvexe ZKHs kann somit die Minimalität der Flächenanzahl des trennenden Polyeders nicht bewiesen werden.



**Abbildung 6.1:** Reduzierung der Flächenanzahl bei nicht-konvexen Konkavitäten.

## 6.5 Zusammenfassung

Ziel dieses Kapitels war es, zu zeigen, für welche Klassen von Objekten der in Kapitel 4 beschriebene Algorithmus Polyeder mit minimaler Flächenanzahl produziert.

Gemäß Theorem TRM ist die Anzahl der Flächen der konvexen Hülle  $CH(S)$  einer digitalen konvexen Teilmenge  $S \subset A$  minimal, d.h. es existiert kein trennendes Polyeder  $P$  mit weniger Flächen als die konvexe Hülle besitzt. Für Objekte mit konvexen Hohlräumen konnte mit Theorem THM ebenfalls bewiesen werden, dass die Flächenanzahl der erzeugten trennenden Polyeder minimal ist.

Für Polyeder mit konvexen Konkavitäten und für Polyeder mit nicht-konvexen ZKHs ist eine minimale Flächenanzahl durch das Polyedrisierungsverfahren nicht garantiert. Hierfür muss eine Optimierung der Flächenanzahl an die Erzeugung der Polyeder anschließen, was in dieser Arbeit aber nicht betrachtet werden soll.

# Kapitel 7

## Minimalität des Oberflächeninhaltes der Polyeder

In diesem Kapitel soll untersucht werden, für welche Klassen von Objekten der Oberflächeninhalt der vom Polyedrisierungsverfahren erzeugten Polyeder minimal ist.

### 7.1 Oberflächeninhalt der konvexen Hülle konvexer Objekte

Mit Lemma TR (siehe S.97) wurde gezeigt, dass ein Polyeder  $P$ , welches die konvexe Hülle  $CH(S)$  einer digitalen konvexen Teilmenge  $S$  repräsentiert, keine 3-Zellen der Menge  $A \setminus S$  enthält, da sonst  $S$  nicht konvex wäre. Damit ist  $P$  das kleinste AG Polyeder, welches  $S$  von  $A \setminus S$  trennt.

Die Eigenschaft, das kleinste Polyeder zu sein, bedeutet weiterhin, dass ein solches Polyeder auch den kleinstmöglichen Oberflächeninhalt unter allen Polyedern besitzt, die eine digitale konvexe Teilmenge  $S$  von ihrem Komplement  $A \setminus S$  trennen.

**Lemma OB:** Es existiert kein AG Polyeder, welches eine digitale konvexe Teilmenge  $S$  enthält und einen kleineren Oberflächeninhalt besitzt als die konvexe Hülle  $CH(S)$ .

*Beweis:* Die konvexe Hülle  $CH(S)$  eines Teilkomplexes  $S \subset A$ , welcher konvex ist gemäß Definition DCS (siehe S.169), ist gemäß Definition CH (siehe S.9) das kleinste konvexe AG Polyeder  $P$ , welches  $S$  enthält. Das besagt, dass kein von  $P$  verschiedenes konvexes Polyeder innerhalb  $P$  existiert, welches ebenfalls die Menge  $S$  vollständig enthält.

Angenommen, es gäbe ein von  $P$  verschiedenes Polyeder  $P'$  mit kleinerem Oberflächeninhalt als  $P$ , welches  $S$  vollständig enthält.  $P'$  soll dabei ebenfalls die Eigenschaft erfüllen,  $S$  von  $A \setminus S$  zu trennen. Gemäß Lemma TRC (siehe S.99) muss jedes trennende Polyeder, welches eine digitale konvexe Teilmenge enthält, die gleichen Ecken besitzen wie die konvexe Hülle. Da durch die Festlegung der Ecken eines Polyeders und durch die Forderung der Trennung auch seine Flächen bestimmt sind, kann  $P'$  nicht von  $P$  verschieden sein und besitzt somit auch keinen kleineren Oberflächeninhalt.

Aus diesem Grund ist die konvexe Hülle dasjenige AG Polyeder mit kleinstem Oberflächeninhalt, welches eine digitale konvexe Teilmenge  $S$  enthält.

□

Mit den Lemmata TR und OB wurde gezeigt, dass die konvexe Hülle  $CH(S)$  eines konvexen Teilkomplexes  $S$  eines AC Komplexes  $A$  dasjenige Polyeder  $P$  ist, welches die Voxel der Menge  $S$  von den Voxeln der Menge  $A \setminus S$  so trennt, dass kein Voxel aus  $A \setminus S$  innerhalb oder auf  $P$  liegt und dabei den kleinsten Oberflächeninhalt besitzt.

## 7.2 Polyeder mit konvexen Hohlräumen

Gegeben sei ein AG Polyeder  $P$  und ein Teilkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$ .  $S$  sei nicht-konvex in der Art, dass  $CH(S)$  Zusammenhangskomponenten von Zellen der Menge  $A \setminus S$  enthält, die Hohlräume bilden und gleichzeitig digital konvex sind. Das Polyeder  $P$ , welches  $S$  von  $A \setminus S$  trennt, muss dabei zusammenhängende Mengen von Flächen besitzen, die jeweils einer 2-Sphäre homöomorph sind und die

sich nicht schneiden oder gemeinsame Zellen besitzen. Die Anzahl dieser zusammenhängenden Mengen von Flächen ist dabei um eins höher als die Anzahl der Hohlräume, da neben  $CH(S)$  auch die konvexen Hüllen  $CH(S'_i)$  der Hohlräume  $S'_i$  Teile von  $P$  sind. Dieses Polyeder  $P$  besitzt die folgende Eigenschaft:

**Lemma OH:** Ein AG Polyeder  $P$ , welches einen nicht-konvexen Teilkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$  von dem Teilkomplex  $A \setminus S$  trennt, wobei  $S$  in  $P$  lediglich konvexe Hohlräume bildet, besitzt den minimalen Oberflächeninhalt unter allen trennenden Polyedern, wenn  $P$  durch das Polyedrisierungsverfahren aus der konvexen Hülle  $CH(S)$  erzeugt wurde.

*Beweis:* Gemäß Lemma OB trennt die konvexe Hülle eine digitale konvexe Teilmenge von ihrem Komplement mit minimalem Oberflächeninhalt. Ist die gegebene Menge  $S$  nicht-konvex in dem Sinne, dass  $CH(S)$  Hohlräume enthält, trennt  $CH(S)$  die Menge  $S$  von allen Zellen aus  $A \setminus S$ , die nicht Zellen der Hohlräume sind, denn gemäß Definition CA (siehe S.51) inzidieren die Zellen eines Hohlräumens nicht mit Flächen der konvexen Hülle  $CH(S)$ .  $CH(S)$  besitzt dabei ebenfalls den minimalen Oberflächeninhalt.

Das Polyedrisierungsverfahren erzeugt für jede Zusammenhangskomponente  $S'_i$ , die einen Hohlraum bildet und konvex ist, zunächst unabhängig die konvexe Hülle  $CH(S'_i)$ .  $CH(S'_i)$  trennt dabei die Zellen der Menge  $S'_i$  von den Zellen  $A \setminus S'_i$ , da  $S'_i$  konvex ist. Der Oberflächeninhalt von  $CH(S'_i)$  ist gemäß Lemma OB minimal.

Das Verfahren erzeugt das Polyeder  $P$ , welches  $S$  von  $A \setminus S$  trennt, indem es  $CH(S)$  und die konvexen Hüllen  $CH(S'_i)$  aller konvexen Hohlräume  $S'_i$  zu einem Polyeder zusammenfasst. Da sich die so zusammengefassten Teilpolyeder nicht schneiden oder gemeinsame Zellen besitzen, repräsentiert jedes Teilpolyeder eine Komponente von  $P$  mit minimalem Oberflächeninhalt. Da jede Komponente von  $P$  den minimalen Oberflächeninhalt besitzt, besitzt auch  $P$  den minimalen Oberflächeninhalt.

□

Auch hier sei angemerkt, dass es trotz der Forderung der Trennung der Zellen von  $S$  und  $A \setminus S$  erlaubt ist, dass sowohl Zellen aus  $S$  als auch aus  $A \setminus S$  auf  $P$  liegen dürfen, insbesondere als Ecken von  $P$ , was aus der unabhängigen Erzeugung der konvexen Hüllen der Hohlräume folgt, da hier Zellen aus  $A \setminus S$  als Ecken verwendet werden. Es bleibt jedoch in jedem Fall ausgeschlossen, dass Zellen aus  $S$  außerhalb  $P$  oder Zellen aus  $A \setminus S$  innerhalb  $P$  liegen. Die Zellen auf  $P$  müssen für die Rekonstruktion der Menge  $S$  in der Zellenliste des Polyeders  $P$  als Objekt- oder Hintergrundzellen markiert werden.

### 7.3 Minimierung des Oberflächeninhaltes durch Kanten-tausch in nicht-planaren Vierecken

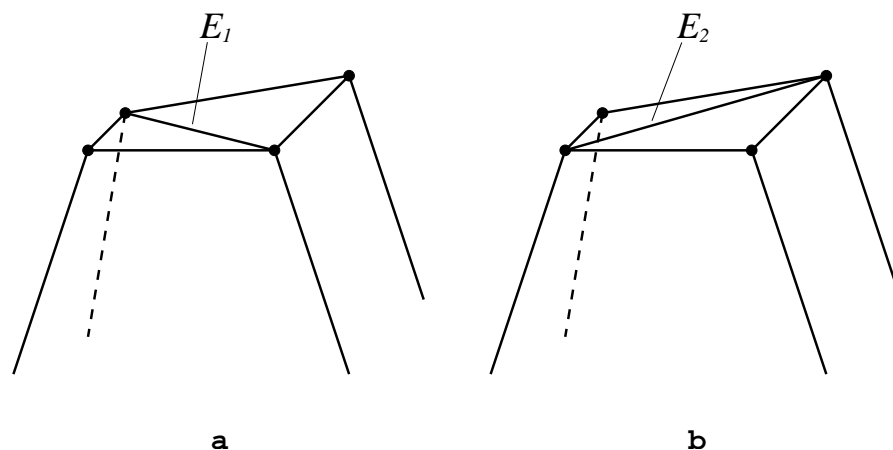
Für die bisher erwähnten Klassen von Objekten wurde gezeigt, dass der Oberflächeninhalt der vom Polyedrisierungsverfahren erzeugten Polyeder bereits minimal ist. Eine Minimierung des Oberflächeninhaltes ist nur für bestimmte Klassen von Objekten möglich, für welche das Verfahren keine Polyeder mit minimalem Oberflächeninhalt erzeugt.

Eine Möglichkeit, den Oberflächeninhalt zu minimieren, ohne dabei die Flächenanzahl zu verändern, besteht im Vertauschen einer Kante in nicht-planaren Vierecken. Nicht-planare Vierecke sind alle diejenigen Paare von Dreiecken, die eine gemeinsame Kante besitzen und nicht komplanar sind (siehe Abbildung 7.1).

Die Voraussetzung für die Minimierung des Oberflächeninhaltes durch Kanten-tausch besteht in der Erhaltung der Trennung der Zellen aus  $S$  und  $A \setminus S$  durch das Polyeder  $P$  nach erfolgtem Austausch einer Kante in einem nicht-planaren Viereck. Dies muss demnach bei jeder Möglichkeit des Austausches geprüft werden, sonst ist dieser Schritt nicht zulässig.

Ein nicht-planares Viereck besteht aus vier Ecken in allgemeiner Lage. Durch diese vier Ecken wird ein Tetraeder bestimmt, von welchem zwei Flächen Teil des Polyeders  $P$  sind, die beiden anderen Flächen nicht. Das bedeutet weiterhin, dass fünf der sechs Kanten des Tetraeders Teil der Oberfläche sind. Da vier dieser fünf Kanten mit anderen Flächen von  $P$  inzidieren, besteht für diese vier Kanten keine

Möglichkeit der Veränderung. Die fünfte Kante (im Folgenden bezeichnet mit  $E_1$ , siehe Abbildung 7.1a) ist jedoch die Kante, die lediglich mit den beiden Dreiecken des Tetraeders, die zu  $P$  gehören, inzidiert. Diese Kante  $E_1$  kann nun durch die Kante  $E_2$  (siehe Abbildung 7.1b) ersetzt werden, welche die sechste Kante des Tetraeders ist, das durch die vier Ecken des nicht-planaren Vierecks bestimmt wird.

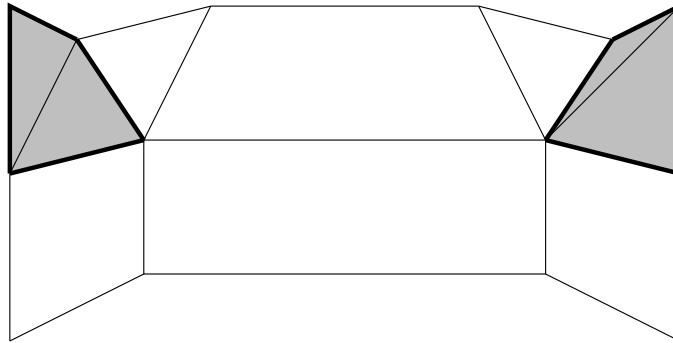


**Abbildung 7.1:** Teil eines Polyeders mit einem nicht-planaren Viereck, welches durch die beiden existierenden Möglichkeiten durch eine Kante in Dreiecke zerlegt wird.

Neben der Prüfung der Zulässigkeit des Kantentausches muss weiterhin geprüft werden, wie sich die Summen der Flächeninhalte der beiden Dreieckspaare unterscheiden, also ob der aktuelle Tausch den Oberflächeninhalt von  $P$  verringert. Hierfür werden gemäß Formel 7.2 die Flächeninhalte der Dreiecke berechnet. Für den Fall, dass der aktuelle Kantentausch zulässig ist und den Oberflächeninhalt von  $P$  verringert, werden die beiden Dreiecke, die von  $E_1$  berandet werden, durch die Dreiecke ersetzt, die von  $E_2$  berandet werden.

Ein interessanter Nebeneffekt des Kantentausches ist die Wiederherstellung möglicherweise in  $S$  vorhandener, aber in  $P$  nicht erhaltener Symmetrien. Der Symmetrieverlust bei der Polyedrisierung kommt dadurch zustande, dass bei einer Erweiterung eines aktuellen Polyeders sichtbare Flächen gemäß der Orientierung ihrer Kanten umlaufen werden. Da die Kanten, die eine Fläche beranden, als ver-

kettete Liste in der Zellenliste gespeichert sind, erfolgt das Anfügen neuer Flächen an den Rand sichtbarer Flächen durch ein Umlaufen der sichtbaren Flächen entgegen dem Uhrzeigersinn. Dies führt dazu, dass nicht-planare Vierecke, für die beide Kanten  $E_1$  und  $E_2$  in einem trennenden Polyeder existieren können, zu nicht-symmetrischen Flächenanordnungen in  $P$  führen (siehe Abbildung 7.2).



**Abbildung 7.2:** Teil eines Polyeders mit symmetrisch angeordneten nicht-planaren Vierecken, deren Zerlegung die Symmetrie zerstört.

Sofern sich der Flächeninhalt der beiden nicht-planaren Vierecke unterscheidet, führt die Minimierung des Oberflächeninhaltes durch Kantentausch gleichzeitig zur Wiederherstellung der Symmetrie in  $P$ .

## 7.4 Polyeder mit Konkavitäten mit $g = 0$

Das Polyedrisierungsverfahren erzeugt zu einer nicht-konvexen Menge  $S$ , die innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$  Zusammenhangskomponenten von Zellen der Menge  $A \setminus S$  besitzt, die Konkavitäten gemäß Definition CO (siehe S.51) sind, ein nicht-konvexes Polyeder  $P$ . Im Weiteren wird angenommen, dass sowohl 3-Zellen aus  $S$  als auch aus  $A \setminus S$  auf den Flächen von  $P$  liegen können. Der Oberflächeninhalt von  $P$  berechnet sich gemäß der Formel

$$O_P = \sum_{i=1}^m A_i \quad (7.1)$$



Dabei bezeichnet  $m$  die Anzahl der Flächen von  $P$  und  $A_i$  den Flächeninhalt der Fläche  $F_i$ . Sofern  $P$  nicht als triangulierte Oberfläche erzeugt wurde, erfolgt die Berechnung des Flächeninhaltes einer Fläche  $F_i$  von  $P$  durch Zerlegung in Dreiecke und Aufsummierung der Flächeninhalte dieser Dreiecke. Dafür (und für den Fall, dass  $P$  eine Triangulation ist) ist es zweckmäßig, den Flächeninhalt eines Dreiecks gemäß der folgenden Formel [5] zu berechnen, da hierfür nur die Längen der Seiten, also die Abstände der Ecken voneinander, benötigt werden.

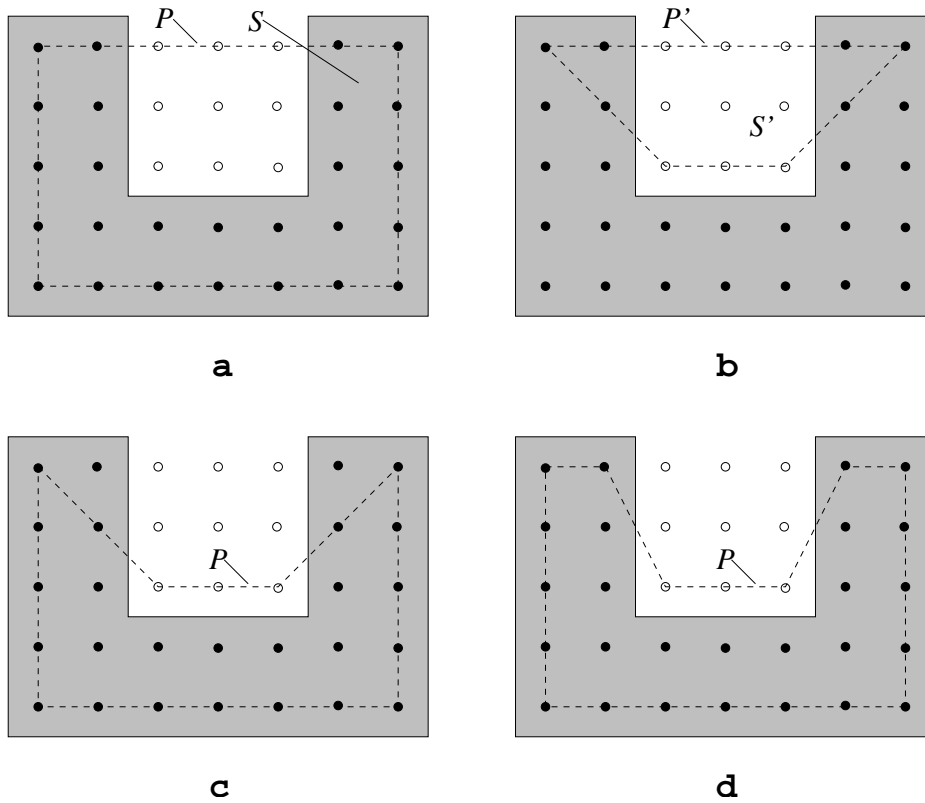
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (7.2)$$

Hierbei bezeichnen  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Längen der Dreiecksseiten, also die Abstände der Ecken des Dreiecks und  $s$  ist der halbe Dreiecksumfang [5] gemäß

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad (7.3)$$

Es soll nun gezeigt werden, dass das Polyeder  $P$ , welches durch das Polyedrisierungsverfahren erzeugt wurde, den minimalen Oberflächeninhalt besitzt, der für die angenommene Art der Trennung von 3-Zellen möglich ist.

Zuvor sei erwähnt, dass die Modifikation eines konvexen Polyeders mittels Eindrücken an einer Konkavität im Allgemeinen nicht nur einen Modifikationsschritt erfordert, sondern auch eine Modifikation des Polyeders  $P'$ , welches  $S'$  von  $S$  trennt, wobei  $S'$  eine Konkavität in  $P$  bildet und eine digitale konvexe Menge ist. Der Grund ist, dass im Allgemeinen die Menge der sichtbaren Flächen von  $P$  nicht nur die Abschlüsse der 3-Zellen aus  $S'$  schneidet, sondern auch solche aus  $S$ . Dies würde ohne Eindrücken von  $P'$  dazu führen, dass nicht alle 3-Zellen aus  $S$  innerhalb des modifizierten Polyeders liegen, wie bei dem Beispiel in Abbildung 7.3 der Fall ist.



**Abbildung 7.3:** Konvexe Hülle einer Menge  $S$  von 3-Zellen (a), Ein-  
drücken durch Aufspannen der konvexen Hülle der Hintergrund-Voxel  
ausgehend von sichtbaren Flächen (b), resultierendes Polyeder ohne (c)  
und mit Modifikation der konvexen Hülle der Hintergrundvoxel (d).

Aus diesem Grund ist auch ein Polyeder  $P$  mit  $G_{nc}(P) = 1$  und einer einzelnen Konkavität im Allgemeinen nur durch mehrere Modifikationsschritte erzeugbar.

**Theorem OK:** Ein Polyeder  $P$ , welches eine nicht-konvexe Menge  $S$  von 3-Zellen enthält, die in  $CH(S)$  Konkavitäten mit  $g = 0$  besitzt und wobei  $P$

- 3-Zellen der Menge  $S$  von den 3-Zellen der Menge  $A \setminus S$  trennt,
- 3-Zellen als Ecken besitzt und
- 3-Zellen aus  $S$  und aus  $A \setminus S$  in den Flächen besitzen darf,

besitzt bis auf die Möglichkeit des Kantentausches minimalen Oberflächeninhalt, wenn es durch das Polyedrisierungsverfahren erzeugt wurde.

*Beweis:* Zunächst sei  $P$  angenommen als Polyeder mit genau einer Konkavität  $S'$  und  $G_{nc}(P) = 1$ . In diesem Fall ist die in  $P$  enthaltene Konkavität  $S'$  eine digitale konvexe Menge gemäß Definition DCS. Die konvexe Hülle  $CH(S')$  trennt gemäß Lemma TR die 3-Zellen der Menge  $S'$  von den 3-Zellen der Menge  $A \setminus S'$ . Bei der Modifikation der konvexen Hülle  $CH(S)$  wird aus einer Menge  $M$  sichtbarer Flächen von  $CH(S)$  die konvexe Hülle  $CH(M \cup S')$  erzeugt, die nicht in jedem Fall die Trennung erfüllt. Zunächst sei jedoch angenommen, dass  $CH(M \cup S')$  die Trennung erfüllt und das  $CH(M \cup S') = CH(S')$  gilt. Der Fall, dass die Trennung nicht erfüllt ist, entspricht dem Fall einer nicht-konvexen Menge  $S'$ , der unten erwähnt ist.

Da  $S'$  und  $S$  disjunkte Mengen von 3-Zellen sind, trennt  $CH(S')$  auch die 3-Zellen der Menge  $S'$  von den 3-Zellen der Menge  $S$ .  $CH(S')$  besitzt minimalen Oberflächeninhalt, denn gemäß Lemma OB kann zu einer digitalen konvexen Teilmenge kein trennendes Polyeder existieren, welches einen kleineren Oberflächeninhalt als die konvexe Hülle besitzt. Die Ecken von  $CH(S')$  sind gemäß dem Verfahren zur Erzeugung der konvexen Hülle 3-Zellen aus  $S'$ . Weiterhin können sowohl 3-Zellen aus  $S$  als auch aus  $S'$  auf den Flächen von  $CH(S')$  liegen.

Es bleibt zu zeigen, dass die Vereinigung der Polyeder  $P$  und  $P' = CH(S')$  minimalen Oberflächeninhalt besitzt. Bei der Vereinigung zweier Polyeder wird die Menge der sichtbaren Flächen aus  $P$  entfernt und durch die Menge der Flächen aus  $P'$  ersetzt, die von den sichtbaren Flächen verschieden sind. Da die verbleibende Menge von Flächen aus  $P$  aufgrund der Trennungsforderung keinen kleineren Flächeninhalt besitzen kann und auch die verbleibende Menge von Flächen aus  $P'$ , bleibt lediglich zu zeigen, dass die Ecken des Randes beider Mengen aufgrund der Trennungsforderung nicht entfernt bzw. verändert werden können. Dies ist der Fall, da diese Ecken (der Rand der beiden Mengen von Flächen aus  $P$  und  $P'$  hat ausschließlich Ecken, die 3-Zellen aus  $S$  sind) nicht durch Verkleinern der Oberfläche nach außen gelangen dürfen, da das die Trennungsforderung verletzen würde. Weiterhin können diese Ecken auch nicht innerhalb des resultierenden Polyeders liegen, da das nur durch eine Vergrößerung der Oberfläche möglich wäre. Die weiteren Ecken in  $P'$ , die nicht zu diesem Rand gehören, sind 3-Zellen aus  $S'$

und müssen ebenfalls aufgrund der Minimalität des Oberflächeninhaltes von  $P'$  Ecken des resultierenden Polyeders bleiben.

Ein Polyeder  $P$ , welches mehrere konvexe Konkavitäten enthält, die in der konvexen Hülle  $CH(S)$  Mengen von sichtbaren Flächen besitzen, die keine gemeinsamen Zellen haben, also die disjunkte Randkomplexe besitzen, werden in gleicher Weise verarbeitet und führen ebenfalls zu einem minimalen Oberflächeninhalt von  $P$ .

Randkomplexe der Mengen sichtbarer Flächen verschiedener konvexer Konkavitäten, die nicht disjunkt sind, aber trotzdem keine gemeinsamen Kanten besitzen und demnach zusammenhängend wären, können lediglich eine gemeinsame Ecke besitzen, was jedoch ebenfalls nicht die unabhängige Verarbeitung Konkavitäten behindert.

Der letzte zu betrachtende Fall des Beweises ist die Modifikation der konvexen Hülle, die nicht-konvexe Konkavitäten besitzt. Hierbei seien jedoch nur die Konkavitäten gemeint, die eine Oberfläche mit dem Geschlecht  $g = 0$  besitzen. In diesem Fall gelten in jedem Modifikationsschritt die oben erwähnten Eigenschaften, so dass jedes Polyeder  $P$ , welches durch Modifikation aus der konvexen Hülle  $CH(S)$  hervorgeht, die konvexe oder nicht-konvexe Konkavitäten enthält, minimalen Oberflächeninhalt besitzt.

□

Es kann also zusammenfassend gesagt werden, dass durch die Auswahl der sichtbaren Flächen eines Polyeders auch die Ecken festgelegt werden, die das Polyeder nach der Modifikation besitzt. Sofern dieses Polyeder nach der Modifikation die Trennungsforderung bereits erfüllt, also nicht weiter modifiziert werden muss, sind damit die Ecken des Polyeders festgelegt und der Oberflächeninhalt kann nicht weiter minimiert werden.

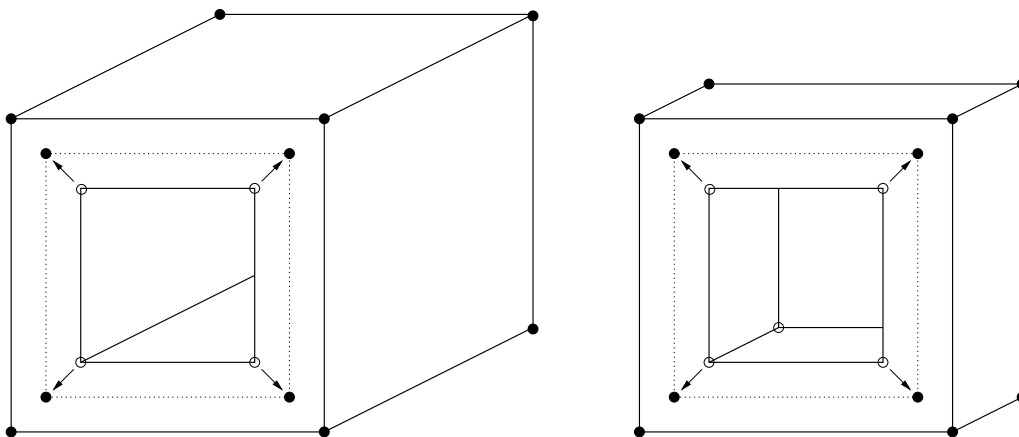
## 7.5 Polyeder mit Konkavitäten mit $g > 0$ und Tunneln

Ein Polyeder  $P$ , welches eine nicht-konvexe Menge  $S$  von der Menge  $A \setminus S$  trennt, kann außer Hohlräumen und Konkavitäten mit  $g = 0$  auch Tunnel und Konka-

vitäten mit einer Oberfläche vom Geschlecht  $g > 0$  besitzen. Tunnel sind gemäß Definition TU (siehe S.51) Zusammenhangskomponenten  $S'$  von Hintergrundvoxeln innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$ , die mehrere zusammenhängende Mengen sichtbarer Flächen von  $CH(S)$  besitzen (siehe Abschnitt 4.2.3). Konkavitäten  $S'$  mit  $g > 0$  besitzen genau eine zusammenhängende Menge sichtbarer Flächen der konvexen Hülle  $CH(S)$ , jedoch enthält die konvexe Hülle  $CH(S')$  einer solchen Konkavität  $S'$  einen (oder mehrere) Tunnel, also Zusammenhangskomponenten von Objektvoxeln in  $CH(S')$ .

Das Geschlecht der Oberfläche der Polyeder, die einfache Tunnel enthalten und mittels des Polyedrisierungsverfahrens gemäß Definition AU (siehe S.70) modifiziert wurden, ist  $g > 0$ . Die Berechnung des Oberflächeninhaltes eines solchen Polyeders erfolgt ebenfalls nach Formel 7.1.

Ein Polyeder  $P$ , welches Tunnel oder Konkavitäten mit  $g > 0$  enthält und mittels des Polyedrisierungsverfahrens erzeugt wurde, hat nicht in jedem Fall den minimalen Oberflächeninhalt. Der Grund ist, dass die konvexe Hülle  $CH(S')$  der Menge  $S'$  einen minimalen Oberflächeninhalt besitzt, jedoch damit nicht in jedem Fall das Polyeder  $P$ . Dies soll zunächst an einem Beispiel gezeigt werden.



**Abbildung 7.4:** Zwei Polyeder mit Tunnel. Die Kantenlängen der Außenseiten sind  $9 \times 9 \times 9$  bzw.  $9 \times 9 \times 3$ .

Der Oberflächeninhalt dieses Polyeders berechnet sich gemäß folgender Formel:

$$O_P = O_A + O_I + O_D \quad (7.4)$$

Hierbei bezeichnet  $O_A$  den Flächeninhalt der vier äußeren Mantelflächen,  $O_I$  den Flächeninhalt der vier inneren Mantelflächen und  $O_D$  steht für den Flächeninhalt der beiden Deckflächen. Diese Flächeninhalte berechnen sich für das in Abbildung 7.4 dargestellte Beispiel mit quadratischen Deckflächen folgendermaßen:

$$O_A = 4 \cdot T \cdot B_a \quad (7.5)$$

$$O_I = 4 \cdot T \cdot B_i \quad (7.6)$$

$$O_D = 2 \cdot B_a^2 - 2 \cdot B_i^2 \quad (7.7)$$

Hierbei bezeichnet  $T$  die Tiefe des Polyeders, also 9 bzw. 3 Voxelkantenlängen in diesem Beispiel.  $B_a$  und  $B_i$  bezeichnen die Kantenlängen der quadratischen Deckflächen, jeweils außen bzw. innen.

Der Gesamtoberflächeninhalt des Polyeders in Abbildung 7.4 berechnet sich somit gemäß folgender Formel:

$$O_P = 4 \cdot T \cdot (B_a + B_i) + 2 \cdot (B_a^2 - B_i^2) \quad (7.8)$$

Wie das Beispiel in Abbildung 7.4 zeigt, können als Ecken des Polyeders entweder ausschließlich Zellen der Menge  $S$  gewählt werden (dargestellt als die Ecken des gestrichelten Randes innerhalb der Deckflächen) oder es können auch Zellen der Menge  $S'$  als Ecken verwendet werden, so wie es bei der Erzeugung der konvexen Hülle  $CH(S')$  passiert. In beiden Fällen wird die Trennung der Voxel unter den geforderten Bedingungen erfüllt, d.h. durch Markierung der Zugehörigkeit der Ecken innerhalb der Zellenliste des Polyeders. Dabei liegen keine Zellen der Menge  $S$  außerhalb  $P$  und keine Zellen der Menge  $A \setminus S$  innerhalb  $P$ .

Im Beispiel bedeutet dies, dass die Kantenlängen der inneren Aussparung in den Deckflächen entweder  $5 \times 5h^2$  oder  $7 \times 7h^2$  groß ist ( $1h$  entspricht der Länge einer Voxelkante).

Die Berechnung des Oberflächeninhaltes für die beiden Beispielobjekte in Abbildung 7.4 ergibt damit folgende Ergebnisse: Das linke Objekt besitzt bei der Wahl

von ausschließlich 3-Zellen aus  $S$  einen Oberflächeninhalt von  $640h^2$ . Werden als Ecken auch 3-Zellen aus  $A \setminus S$  zugelassen, was durch die Erzeugung von  $CH(S')$  der Fall ist, so beträgt der Oberflächeninhalt des Objektes  $616h^2$ . Für das rechts abgebildete Objekt betragen die Werte des Oberflächeninhaltes  $256h^2$  für den Fall, dass alle Ecken 3-Zellen aus  $S$  sind und  $280h^2$  für den Fall, dass die Ecken auch Zellen aus  $A \setminus S$  sein können.

Das bedeutet also, dass in Abhängigkeit der Tiefe dieses Beispielobjektes der Oberflächeninhalt in einem Fall kleiner ist, wenn nur 3-Zellen aus  $S$  als Ecken verwendet werden und im anderen Fall, wenn Ecken auch 3-Zellen aus  $A \setminus S$  benutzt werden. Der Oberflächeninhalt für ein solches Objekt ist in beiden Fällen gleich, wenn die Tiefe  $6h$  beträgt.

Dieses Beispiel soll zeigen, dass das Polyedrisierungsverfahren nicht generell für Objekte, die einen Tunnel enthalten, ein Polyeder mit minimalem Oberflächeninhalt erzeugt. Daher muss für Objekte dieser Klasse nach der Polyedrisierung ein Optimierungsverfahren anschließen, welches durch die Verschiebung von Ecken, die 3-Zellen aus  $A \setminus S$  sind, zu Ecken, die 3-Zellen aus  $S$  sind, den Oberflächeninhalt minimiert.

Weiterhin sei zu diesem Beispiel und insbesondere zu den Formeln 7.4 bis 7.8 angemerkt, dass die gemachten Aussagen nur für diese spezielle Art von Objekten gelten, die parallel zu den Koordinatenachsen ausgerichtet sind. Schräg im Raum liegende Objekte besitzen im Allgemeinen eine Oberfläche, die aus einer größeren Anzahl von Flächen besteht, so dass die Berechnung des Oberflächeninhaltes in Abhängigkeit von der Wahl der Ecken des Polyeders nicht durch diese einfachen Formeln möglich ist.

## 7.6 Polyeder mit nicht-konvexen Hohlräumen

Da in Abschnitt 7.2 zunächst nur konvexe Hohlräume betrachtet wurden, soll nun noch der Fall betrachtet werden, dass Hohlräume  $S'$  wie die Objekte  $S$  selbst ebenfalls nicht-konvexe Mengen von Voxeln sein können. Für die Berechnung des Oberflächeninhaltes gelten damit die gleichen Eigenschaften wie für ein Objekt  $S$ , was

bedeutet, dass für Hohlräume, deren konvexe Hülle  $CH(S')$  keine Konkavitäten mit  $g > 0$  oder Tunnel enthalten, der Oberflächeninhalt durch die Polyedrisierung der Menge  $S'$  ebenfalls minimal ist. Da ein Hohlraum nicht mit den Flächen der konvexen Hülle  $CH(S)$  des Objektes  $S$  inzidiert, berechnet sich der Gesamtoberflächeninhalt eines Polyeders mit Hohlräumen aus der Summe der Teilpolyeder, so dass durch den minimalen Oberflächeninhalt des Polyeders, welches die Zellen eines Hohlraumes  $S'$  von den Zellen des Objektes  $S$  trennt, auch die Summe der Oberflächeninhalte minimal ist.

## 7.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde untersucht, für welche Klassen von Objekten das in Kapitel 4 beschriebene Verfahren Polyeder mit minimalem Oberflächeninhalt erzeugt. Es konnte gezeigt werden, dass die konvexe Hülle  $CH(S)$  konvexer Objekte ein Polyeder  $P$  repräsentiert, welches die 3-Zellen des Objektes  $S$  von den 3-Zellen des Hintergrundes  $A \setminus S$  trennt und dabei den minimalen Oberflächeninhalt besitzt.

Der Oberflächeninhalt der trennenden Polyeder  $P$  für nicht-konvexe Objekte  $S$  ist nur minimal, wenn die Objekte zu bestimmten Klassen gehören. Für Objekte, die in ihrer konvexen Hülle  $CH(S)$  Hohlräume enthalten, die konvex sind, ist der Oberflächeninhalt der erzeugten Polyeder in jedem Fall minimal. Objekte mit Konkavitäten müssen weiter unterschieden werden in Objekte mit Konkavitäten, deren Oberfläche das Geschlecht  $g = 0$  oder das Geschlecht  $g > 0$  besitzen. Für Objekte mit Konkavitäten mit  $g = 0$  konnte gezeigt werden, dass der Oberflächeninhalt der erzeugten Polyeder minimal ist, damit ebenso auch Objekte, die Hohlräume besitzen, die in gleicher Weise wie die Objekte selbst Konkavitäten mit  $g = 0$  besitzen.

Objekte, die in ihrer konvexen Hülle Tunnel oder Konkavitäten mit  $g > 0$  besitzen, erhalten durch das Polyedrisierungsverfahren trennende Polyeder  $P$ , die nicht in jedem Fall den minimalen Oberflächeninhalt besitzen. Für bestimmte Objekte, bei denen die Ecken des Polyeders nicht variiert werden können, kann durch das Verfahren des Kantentausches in nicht-planaren Vierecken der Oberflächenin-



halt verringert werden und wird damit minimal unter Festhaltung der gewählten Ecken. Im Allgemeinen kann ein minimaler Oberflächeninhalt für diese Klasse von Objekten nur durch eine anschließende Optimierung erreicht werden, welche in dieser Arbeit nicht betrachtet werden soll.

Das Verfahren des Kantentausches in nicht-planaren Vierecken führt weiterhin zu einer Wiederherstellung von Symmetrien, die das Objekt  $S$  besitzt und die das Polyeder  $P$  unter Umständen nicht erhielt.

Mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Polyedrisierungsverfahren wurde somit ein Algorithmus entwickelt, der zu mehreren Klassen von Objekten Polyeder mit minimalem Oberflächeninhalt produziert. Für die verbleibenden Klassen ist durch das erzeugte trennende Polyeder eine Basis für eine anschließende Optimierung gelegt, die den Oberflächeninhalt minimiert.

## 7.8 Vergleich der Minimalitätseigenschaften

Abschließend soll in diesem Kapitel gegenübergestellt werden, für welche Klassen von Objekten die erzeugten Polyeder die minimale Flächenanzahl bzw. den minimalen Oberflächeninhalt besitzen.

Die folgende Tabelle zeigt zusammenfassend die Minimalitätseigenschaften bezüglich der Flächenanzahl und des Oberflächeninhaltes:

Objektklasse	Flächenanzahl	Oberflächeninhalt
digitale konvexe Objekte	minimal (gemäß Theorem TRM)	minimal (gemäß Lemma OB)
Objekte mit konvexen Hohlräumen	minimal (gemäß Theorem THM)	minimal (gemäß Lemma OH)
Objekte mit konvexen Konkavitäten	nicht minimal	minimal <sup>1</sup> (gemäß Theorem OK)
Objekte mit unverzweigten einfachen Tunneln	nicht minimal	nicht minimal
Objekte mit unverzweigten nicht-einfachen Tunneln	nicht minimal	nicht minimal
Objekte mit verzweigten Tunneln	nicht minimal	nicht minimal
Objekte mit nicht-konvexen Konkavitäten ( $g = 0$ )	nicht minimal	minimal <sup>1</sup> (gemäß Theorem OK)
Objekte mit nicht-konvexen Konkavitäten ( $g > 0$ )	nicht minimal	nicht minimal
Objekte mit nicht-konvexen Hohlräumen	nicht minimal	minimal <sup>2</sup>

**Tabelle 7.1:** Vergleich der Minimalitätseigenschaften.

<sup>1</sup>Die Minimalität wird bis auf die Möglichkeit des Kantentausches (siehe Abschnitt 7.3) erzielt.

<sup>2</sup>Die Minimalität des Oberflächeninhaltes ist nur dann gegeben, wenn der Teilkomplex  $S'$ , der den Hohlraum bildet, selbst zu der entsprechenden Objektklasse gehört, für die die Minimalität erfüllt ist.

# Kapitel 8

## Experimente und Beispiele

In diesem Kapitel sollen Beispiele gezeigt werden, wie die Ergebnisse der Anwendung des Polyedrisierungsalgorithmus auf Voxelobjekte aussehen.

Zunächst sollen in diesem Kapitel Polyedrisierungsergebnisse und Zwischenschritte bei der Polyedrisierung für verschiedene Klassen von Objekten gezeigt werden. Die Polyeder werden hinsichtlich ihrer Flächenanzahl untersucht und mit den Ergebnissen des Marching Cubes Verfahrens [29] verglichen. Dieses Verfahren wird als Vergleich herangezogen, da eine Marching Cubes Triangulation ebenfalls ein Polyeder ist, welches Objektvoxel von Hintergrundvoxeln trennt. Weiterhin ist es in der Computergrafik ein sehr weit verbreitetes Verfahren, welches hunderte Publikationen referenzieren [9].

Die in diesem Kapitel gezeigten Polyeder besitzen aufgrund der besseren Darstellbarkeit 0-Zellen als Ecken.

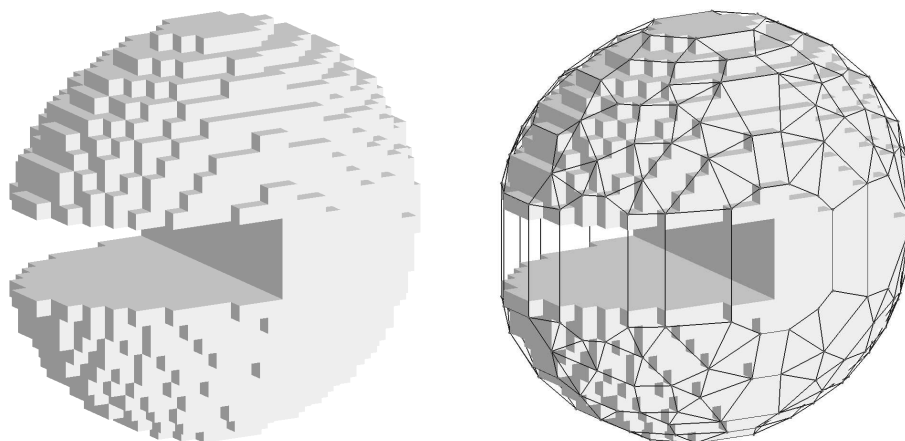
### 8.1 Objekte mit Konkavitäten vom Geschlecht $g = 0$

#### 8.1.1 Objekte mit $G_{nc}(P) = 1$

Abbildung 8.1 zeigt die Menge  $S$  der Voxel eines digitalen Ellipsoids mit den Achsenlängen  $a = b = 13$  und  $c = 8$ , aus welchem eine Teilmenge  $S'$  der Voxel entfernt wurde, die eine konvexe Konkavität innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$  des Ellipsoids bildet.

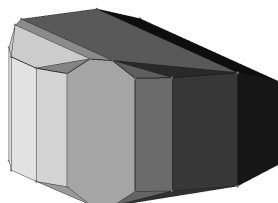
Das Objekt in Abbildung 8.1 (links) besitzt 4949 Voxel (3-Zellen) und 2594

Randfacetten (2-Zellen). Die konvexe Hülle dieses Objektes (siehe rechte Seite in Abbildung 8.1) enthält 288 Flächen. Die Menge  $S'$  der Hintergrundvoxel innerhalb der konvexen Hülle besteht aus 835 Voxeln.



**Abbildung 8.1:** Links: Ellipsoid mit Konkavität. Rechts: Konvexe Hülle dieses Objektes.

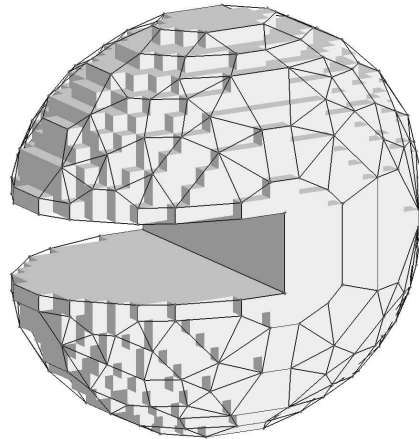
Das Polyedrisierungsverfahren ermittelt 11 Flächen der konvexen Hülle als inzident mit der ZKH  $S'$  und spannt ausgehend von dieser Menge  $M$  von 11 Flächen die konvexe Hülle  $CH(S' \cup M)$  auf (siehe Abbildung 8.2).  $CH(S' \cup M)$  enthält 32 Flächen, von denen die 11 Flächen, die in  $CH(S)$  markiert wurden, identisch in  $CH(S)$  und  $CH(S' \cup M)$  sind. Ließe man an diesem Punkt der Polyedrisierung außer Acht, dass  $CH(S' \cup M)$  neben den Hintergrundvoxeln auch Voxel der Menge  $S$  enthält, so bestünde die Vereinigung der beiden Polyeder aus  $288 - 11 + 32 - 11 = 298$  Flächen.



**Abbildung 8.2:** Konvexe Hülle  $CH(S' \cup M)$  der Menge der Hintergrundvoxel in  $CH(S)$  und der markierten Flächen von  $CH(S)$ .

Da das Polyedrisierungsverfahren jedoch rekursiv arbeitet, wird vor der Vereinigung der Polyeder geprüft, ob Objektvoxel innerhalb der konvexen Hülle der Hintergrundvoxel liegen. In diesem Beispiel enthält  $CH(S' \cup M)$  424 Voxel der Menge  $S$ , die zwei Zusammenhangskomponenten  $S_1''$  und  $S_2''$  bilden.  $CH(S_1'')$  und  $CH(S_2'')$  bestehen aus jeweils 22 Flächen, von denen je 10 mit den Flächen von  $CH(S' \cup M)$  identisch sind.

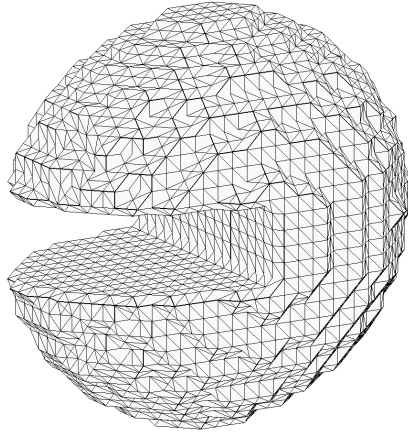
$CH(S_1'')$  und  $CH(S_2'')$  enthalten keine Voxel der Menge  $S'$ . Aus diesem Grund kann nun die Vereinigung von  $CH(S' \cup M)$  mit  $CH(S_1'')$  und  $CH(S_2'')$  zu einem nicht-konvexen Polyeder  $P_1$  erfolgen, welches 36 Flächen besitzt. Da  $P_1$  keine weiteren ZKHs besitzt und demnach nicht weiter modifiziert werden muss, kann nun  $CH(S)$  mit  $P_1$  vereinigt und zu einem nicht-konvexen Polyeder  $P_2$  zusammengefügt werden (siehe Abbildung 8.3).  $P_2$  besitzt 302 Flächen.



**Abbildung 8.3:** Resultierendes Polyeder  $P_2$  nach Anwendung des Polyedrisierungsverfahrens.

Wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, besitzen die Polyeder aufgrund der besseren Darstellbarkeit 0-Zellen als Ecken. Das resultierende Polyeder  $P_2$  in diesem Beispiel besitzt 0-Zellen der Menge  $S$  als Ecken und trennt somit nicht die 3-Zellen von  $S$  von denen aus  $A \setminus S$  vollständig, d.h.  $P_2$  enthält 3-Zellen des Hintergrundes. Damit ist eine Rekonstruktion der Menge  $S$  aus dem Polyeder  $P_2$  nicht fehlerfrei möglich. Das diesem Beispiel entsprechende Polyeder, welches 3-Zellen aus  $S$  als

Ecken besitzt, hat jedoch die gleiche Flächenanzahl.



**Abbildung 8.4:** Polyeder  $P_{mc}$ , welches durch Marching Cubes Triangulation des Objektes  $S$  erzeugt wurde.

Das Polyeder  $P_2$ , welches als Ergebnis der Polyedrisierung der Menge  $S$  vorliegt, soll nun bezüglich Flächenanzahl und Berechnungszeit mit dem Ergebnis des Marching Cubes Verfahrens (siehe Abbildung 8.4) verglichen werden.

Durch das Marching Cubes Verfahren wird ebenfalls ein Polyeder erzeugt, welches im Folgenden mit  $P_{mc}$  bezeichnet werden soll.  $P_{mc}$  besitzt die Eigenschaft, 3-Zellen aus  $S$  von 3-Zellen aus  $A \setminus S$  zu trennen.

Zunächst soll erwähnt werden, dass die Berechnungszeit für die Erzeugung der Marching Cubes Triangulation im Allgemeinen sehr gering ist. Dies resultiert daraus, dass das Marching Cubes Verfahren lokal arbeitet und linear von der Anzahl der Voxel der zu triangulierenden Menge  $S$  abhängt. Diesem Vorteil steht als Nachteil gegenüber, dass durch die lokale Arbeitsweise keine größeren Flächen (also Mengen von benachbarten komplanaren Dreiecken) zusammengefasst werden können, wodurch die Anzahl der erzeugten Dreiecke sehr groß ist. Diese Anzahl ist im Durchschnitt doppelt so groß wie die Anzahl der Randfacetten des gegebenen Objektes.

Ein weiterer Nachteil, der aus der lokalen Arbeitsweise des Marching Cubes Verfahrens resultiert, ist die Beschränktheit der erzeugten Dreiecke auf wenige

Orientierungen, wodurch lediglich eine schlechte Approximation der Oberfläche des kontinuierlichen Urbildes erzeugt wird.

Die folgende Tabelle stellt zunächst für das untersuchte Objekt die Berechnungsdauer des Polyedrisierungsverfahrens der des Marching Cubes Verfahrens gegenüber:

	Rechenzeit
Polyedrisierungsverfahren	
Aufspannen $CH(S)$	3,936s
Aufspannen $CH(S' \cup M)$	2,214s
Aufspannen $CH(S''_1)$	1,493s
Aufspannen $CH(S''_2)$	1,493s
Vereinigung	1,868s
gesamt	11,004s
Marching Cubes Triangulation	0,040s

**Tabelle 8.1:** Vergleich der Rechenzeit für das obige Beispiel.

Zu Tabelle 8.1 sei angemerkt, dass die Vergleiche unter Microsoft Windows XP auf einem AMD Athlon Prozessor mit 1666 MHz durchgeführt wurden. Die Algorithmen wurden in der Sprache C implementiert, jedoch wurde keine Optimierung des Codes bezüglich der Rechenzeit durchgeführt.

Die folgende Tabelle stellt die Anzahl der Flächen bei beiden Verfahren gegenüber:

	Flächenanzahl
Polyedrisierungsverfahren	302
Marching Cubes Triangulation	5184

**Tabelle 8.2:** Vergleich der Flächenanzahl beim Polyedrisierungsverfahren und Marching Cubes.

Wie bereits in [24] gezeigt, kann der durchschnittliche Speicheraufwand beim Marching Cubes Verfahren mit folgender Formel abgeschätzt werden:

$$size_{tr} = 3 \cdot N_V + 3 \cdot N_T = (3/2 + 3) \cdot N_T \quad (8.1)$$

Die Anzahl der durchschnittlich zu speichernden Integer-Werte pro Dreieck beträgt somit 4,5, da die Anzahl  $N_T$  der Dreiecke durchschnittlich doppelt so groß ist, wie die Anzahl  $N_V$  der Ecken.

Wie ebenfalls in [24] gezeigt wurde, kann der Speicheraufwand bei der Kodierung der nicht-redundanten Zellenliste eines Polyeders mit folgender Formel berechnet werden, wenn angenommen wird, dass das erzeugte Polyeder durchschnittlich 5 Ecken pro Fläche besitzt:

$$size_{cl} = 3 \cdot N_V + 5 \cdot N_F \quad (8.2)$$

Hierbei bezeichnet  $N_V$  die Anzahl der Ecken des Polyeders und  $N_F$  die Anzahl seiner Flächen.

Für das obige Beispiel ergeben sich somit die folgenden Werte:

	Flächen	Ecken	Integer-Werte
Polyedrisierungsverfahren	302	268	2314
Marching Cubes Triangulation	5184	~ 2592	23328

**Tabelle 8.3:** Vergleich des Speicheraufwandes beim Polyedrisierungsverfahren und Marching Cubes.

Für Objekte, wie dem Beispiel in Abbildung 8.1, zeigen die folgenden Tabellen und das dazugehörige Diagramm (Abbildung 8.5), welcher Speicheraufwand für die Kodierung der Oberfläche bei verschiedenen Objektgrößen beim Polyedrisierungsverfahren und beim Marching Cubes Verfahren auftritt.

Objekt	Größe des Ellipsoides	Voxel	Facetten	Voxel in Konkavität
1	$a = b = 10, c = 7$	2664	1708	448
2	$a = b = 11, c = 8$	3528	2052	544
3	$a = b = 13, c = 8$	4949	2594	835
4	$a = b = 14, c = 9$	6264	3016	1128
5	$a = b = 15, c = 10$	7968	3560	1344
6	$a = b = 16, c = 11$	10966	4430	2051

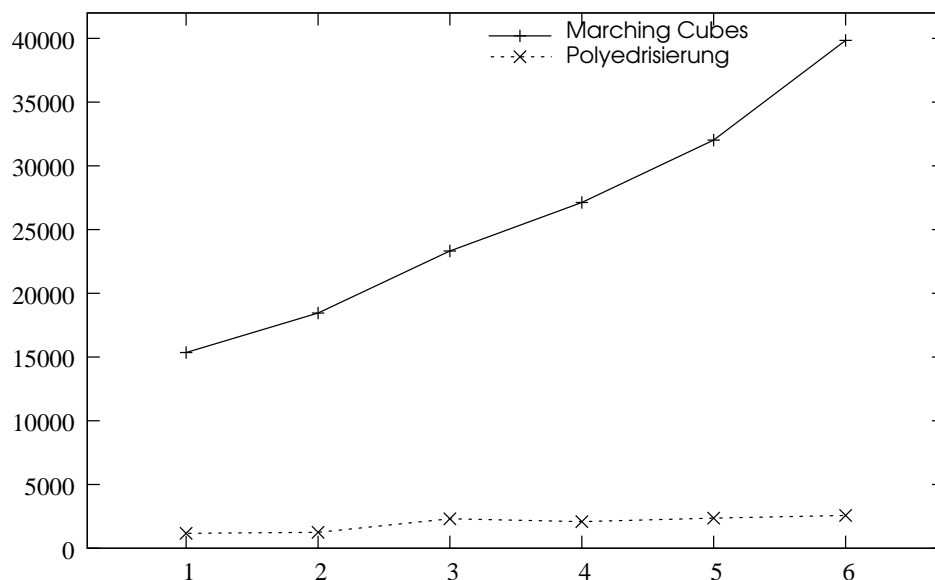
**Tabelle 8.4:** Objekte für den Vergleich des Speicheraufwandes.



Objekt	Polyedrisierung			Marching Cubes	
	Flächen	Ecken	Integer-Werte	Dreiecke	Integer-Werte
1	134	164	1162	3412	15354
2	144	176	1248	4100	18450
3	302	268	2314	5184	23328
4	250	280	2090	6028	27126
5	284	316	2368	7116	32022
6	312	338	2574	8856	39852

**Tabelle 8.5:** Vergleich des Speicheraufwandes beim Polyedrisierungsverfahren und Marching Cubes für Objekte verschiedener Größe.

Der Speicheraufwand, gemessen in Integer-Werten, des Polyedrisierungsverfahrens soll im Folgenden Diagramm dem Speicheraufwand des Marching Cubes Triangulationsverfahrens gegenübergestellt werden.



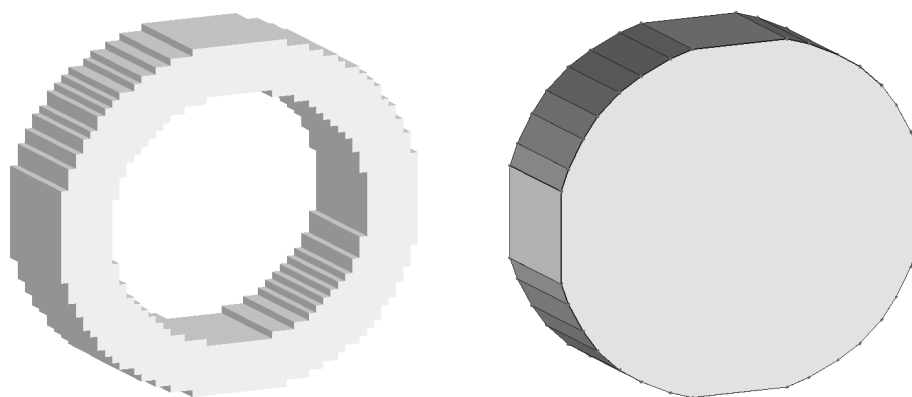
**Abbildung 8.5:** Vergleich des Speicheraufwandes für die Kodierung der Oberflächen beim Polyedrisierungsverfahren und bei Marching Cubes.

## 8.2 Objekte mit Konkavitäten vom Geschlecht $g > 0$ und mit Tunneln

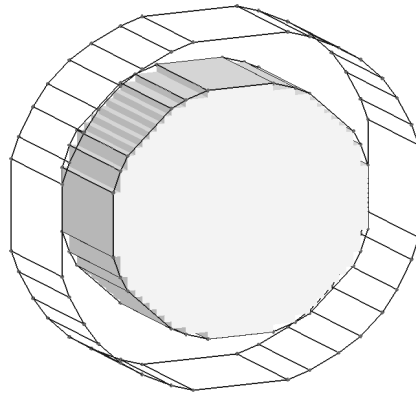
In diesem Abschnitt sollen Objekte betrachtet werden, die entweder selbst eine Oberfläche mit  $g > 0$  und damit Tunnel besitzen oder die Konkavitäten besitzen, die eine Oberfläche mit  $g > 0$  haben. In beiden Fällen sind diese Objekte nicht-konvex und die konvexe Hülle enthält mindestens eine zusammenhängende Menge von Voxeln mit  $g > 0$  – entweder die Menge der Vordergrund- oder die der Hintergrundvoxel.

### 8.2.1 Tunnel

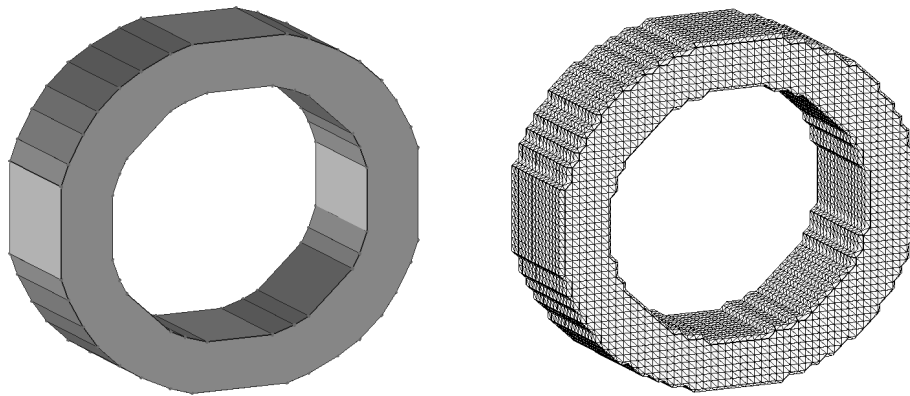
Ein einfaches Objekt mit einem Tunnel zeigt Abbildung 8.6. Hierbei handelt es sich um einen Zylinder mit einem zylindrischen Tunnel, der konvex und damit ein einfacher Tunnel ist. Das Objekt in Abbildung 8.6 besitzt einen Durchmesser von 50 Voxeln und eine Höhe von 15 Voxeln. Der Durchmesser des Tunnels beträgt 35 Voxel. Es besteht damit aus insgesamt 14520 Objektvoxeln und enthält in seiner konvexen Hülle 14595 Hintergrundvoxel (siehe Abbildung 8.7).



**Abbildung 8.6:** Links: Zylinder mit Tunnel. Rechts: Konvexe Hülle dieses Objektes.



**Abbildung 8.7:** Menge der Hintergrundvoxel  $S'$  in der konvexen Hülle  $CH(S)$  des Objektes  $S$  mit konvexer Hülle  $CH(S')$ .



**Abbildung 8.8:** Links: Resultierendes Polyeder. Rechts: Marching Cubes Triangulation.

Für Objekte verschiedener Größe, analog zu dem in Abbildung 8.6, zeigen die folgenden Tabellen, welcher Speicheraufwand für die Kodierung der Oberfläche bei verschiedenen Objektgrößen beim Polyedrisierungsverfahren und beim Marching Cubes Verfahren auftritt.

Objekt	Größe des Zylinders	Voxel	Facetten	Voxel im Tunnel
1	$d_a = 25, d_i = 10, h = 15$	6060	2848	1200
2	$d_a = 50, d_i = 35, h = 15$	14520	6976	14595
3	$d_a = 75, d_i = 60, h = 15$	23460	11192	42420
4	$d_a = 100, d_i = 85, h = 15$	32160	15328	87135

**Tabelle 8.6:** Objekte für den Vergleich des Speicheraufwandes.

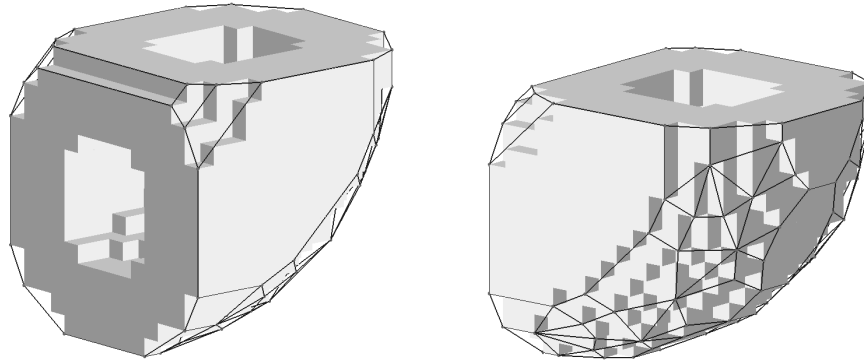
Objekt	Polyedrisierung			Marching Cubes	
	Flächen	Ecken	Integer-Werte	Dreiecke	Integer-Werte
1	30 (32)	56	318 (328)	5696	25632
2	58 (60)	112	626 (636)	13952	62784
3	78 (80)	152	846 (856)	22384	100728
4	82 (84)	160	890 (900)	30656	137952

**Tabelle 8.7:** Vergleich des Speicheraufwandes beim Polyedrisierungsverfahren und Marching Cubes für Objekte verschiedener Größe.

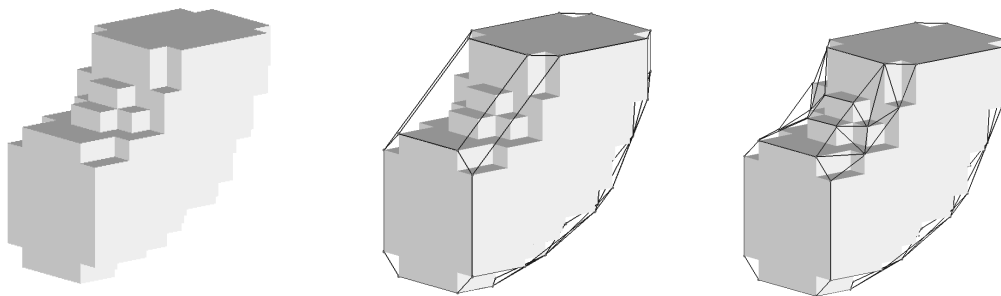
Zu Abbildung 8.8 (links) und Tabelle 8.7 sei Folgendes angemerkt: Da die Deckflächen des Zylinders und die des Tunnels komplanar sind, erfolgt bei der Vereinigung der konvexen Hülle des Objektes und der des Tunnels aufgrund der sich nicht schneidenden Ränder der komplanaren Flächen zunächst eine Erzeugung von Flächen mit einem Loch, also mit zwei Randkomponenten. Um ein Polyeder, welches solche Flächen enthält, wieder in ein zulässiges Polyeder zu transformieren, ist es notwendig, die Flächen mit mehreren Randkomponenten in Flächen mit jeweils genau einer Randkomponente zu zerlegen. Hierfür müssen genau zwei Kanten eingefügt werden, wodurch aus einer Fläche mit Loch genau zwei Flächen werden, die jeweils eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand sind. Sollte weiterhin gefordert werden, dass auch diese Flächen konvex sind, so ist es zweckmäßig, die nicht-konvexen Flächen zunächst mit klassischen Verfahren der Triangulierung von Polygonen (siehe z.Bsp. [30]) in Dreiecke zu zerlegen und diese dann unter Berücksichtigung des Konvexitätserhaltenden Kriteriums (siehe Abschnitt 4.5.6) zusammenzufügen. Abbildung 8.8 (links) zeigt lediglich das zunächst erzeugte Polyeder, welches Flächen mit mehreren Randkomponenten enthält. In der zweiten und vierten Spalte von Tabelle 8.7 stehen die Werte in Klammern für die Zerlegung der Flächen mit zwei Randkomponenten in zwei Flächen mit je einer Randkomponente.

Ein weiteres Objekt mit einem einfachen Tunnel zeigt Abbildung 8.9. Hierbei handelt es sich um einen Teil eines Torus mit einem Tunnel im Inneren. Die Hin-

tergrundvoxel innerhalb der konvexen Hülle des Objektes zeigt Abbildung 8.10.



**Abbildung 8.9:** Objekt und konvexe Hülle eines Torusabschnitts mit Tunnel (dargestellt aus zwei verschiedenen Betrachtungsrichtungen).



**Abbildung 8.10:** Links: Zusammenhangskomponente  $S'$  der Hintergrundvoxel innerhalb der konvexen Hülle des Objektes in Abbildung 8.9. Mitte: konvexe Hülle  $CH(S')$ . Rechts: modifizierte konvexe Hülle.

Das hier dargestellte Objekt  $S$  besitzt in seiner konvexen Hülle  $CH(S)$  eine ZKH, die mit genau zwei nicht-zusammenhängenden Flächen von  $CH(S)$  inzidiert. Somit ist die ZKH ein Tunnel. Die Hintergrundvoxel des Tunnels (siehe Abbildung 8.10) besitzen in ihrer konvexen Hülle  $CH(S')$  eine Konkavität, denn eine Zusammenhangskomponente von Objektvoxeln liegt innerhalb  $CH(S')$  und inzidiert mit genau einer zusammenhängenden Menge von Flächen von  $CH(S')$ .

Die konvexe Hülle  $CH(S)$  des Objektes in Abbildung 8.10 besitzt 78 Flächen und enthält 430 Hintergrundvoxel im Inneren, die den Tunnel bilden. Die konvexe

Hülle  $CH(S')$  des Tunnels besteht aus 38 Flächen. Das Polyeder  $P'$ , welches durch die Modifikation aus  $CH(S')$  erzeugt wird, besteht aus 56 Flächen. Somit entsteht bei der Vereinigung der Teilhüllen  $CH(S)$  und  $P'$  ein trennendes Polyeder  $P$ , welches aus 134 Flächen besteht. Dem gegenüber besteht die Marching Cubes Triangulation aus 2772 Dreiecken.

### 8.2.2 Konkavitäten vom Geschlecht $g > 0$

In diesem Abschnitt soll das in Abbildung 4.25 (siehe S.73) dargestellte Objekt mit den beiden verschiedenen Ansätzen aus Abschnitt 4.5.3 bzw. Abschnitt 4.5.4 polyedrisiert werden.

Das Objekt besteht aus 1160 Voxeln und ist einer Kugel homöomorph, d.h. seine Oberfläche besitzt das Geschlecht  $g = 0$ . Die konvexe Hülle  $CH(S)$  dieses Objektes  $S$  besteht aus 15 Flächen und enthält im Inneren 752 Hintergrundvoxel, die eine ZKH  $S'$  bilden und mit genau einer stark zusammenhängenden Menge von Flächen inzidieren. Somit ist  $S'$  gemäß Definition CO (siehe S.51) eine Konkavität.

Da die Konkavität  $S'$  eine Oberfläche mit dem Geschlecht  $g = 1$  besitzt, kann die Polyedrisierung nicht durch Eindrücken (siehe Definition PR, S.60) der konvexen Hülle erfolgen, sondern erfordert eine Herangehensweise für tunnelartige Objekte und damit einen der beiden Ansätze aus Abschnitt 4.5, also den heuristischen Ansatz oder den Ansatz der Zerlegung der Menge der Hintergrundvoxel in digitale Kugeln.

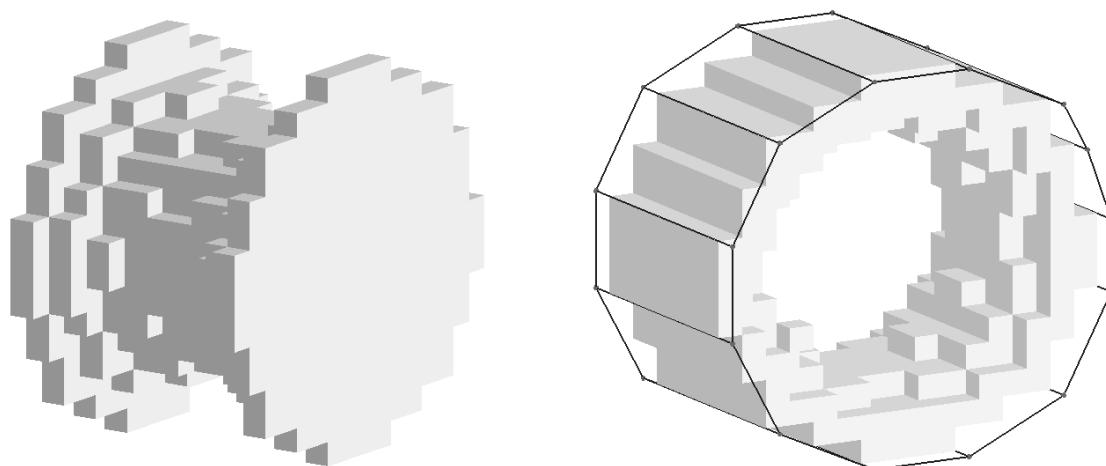
#### Ergebnisse des heuristischen Verfahrens

Wie in Abschnitt 4.5.3 beschrieben, basiert das heuristische Verfahren zur Behandlung von Objekten  $S$  mit  $g > 0$  darauf, dass die Modifikation der konvexen Hülle  $CH(S)$  schrittweise durch ein abgewandeltes Eindrücken gemäß Definition PR2 (siehe S.76) erfolgt.

Die Kriterien des heuristischen Ansatzes (siehe S.77) erfordern die Wahl zweier Parameter für die Markierung einzudrückender Flächen. Diese beiden Parameter  $d_{ij}$  und  $w$  wurden für das Beispiel auf S.73 experimentell ermittelt, indem geprüft

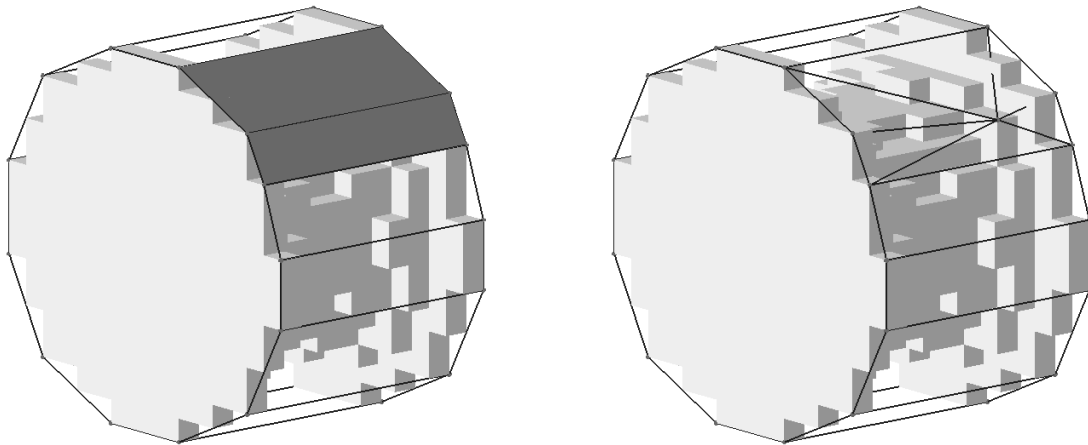
wurde, für welche Werte die Polyedrisierung ein Polyeder  $P$  produziert, welches die Voxel des Objektes von den Voxeln des Hintergrundes trennt, indem in jedem Schritt des Eindrückens gemäß Definition PR2 die gleichen Parameter-Werte angewendet werden konnten. Die ermittelten Werte der Parameter in diesem Beispiel sind  $d_{ij} = 0,69h$  und  $w = 105^\circ$ .

Abbildung 8.11 zeigt das zu polyedrisierende Objekt  $S$  sowie die in der konvexen Hülle  $CH(S)$  dieses Objektes liegenden Hintergrundvoxel, die einen Torus bilden und damit eine Oberfläche mit Geschlecht  $g = 1$  besitzen.

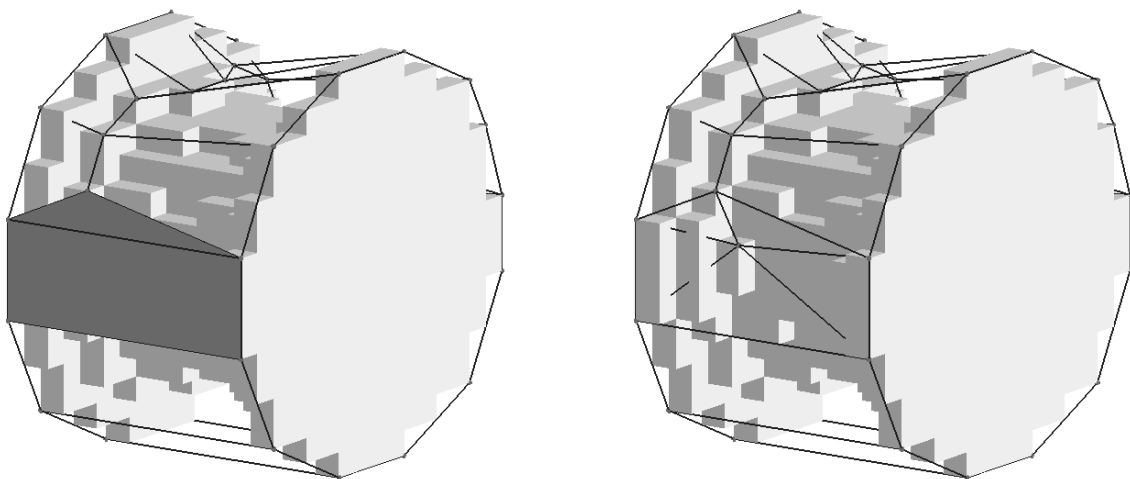


**Abbildung 8.11:** Objekt „Felge“ (links) und konvexe Hülle dieses Objektes mit der Menge der Hintergrundvoxel innerhalb der konvexen Hülle (rechts).

Die folgenden Abbildungen zeigen einige Zwischenschritte bei der Polyedrisierung des Objektes in Abbildung 8.11 mittels des heuristischen Verfahrens.

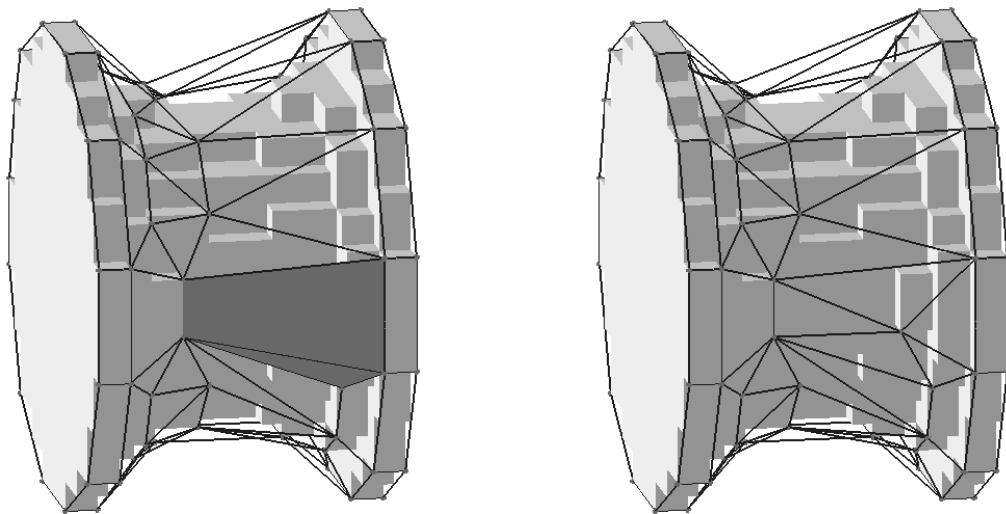


**Abbildung 8.12:** Gemäß der heuristischen Kriterien zum ersten Eindruck markierte Flächen der konvexen Hülle (links) und Ergebnis des ersten Eindrucks (rechts).

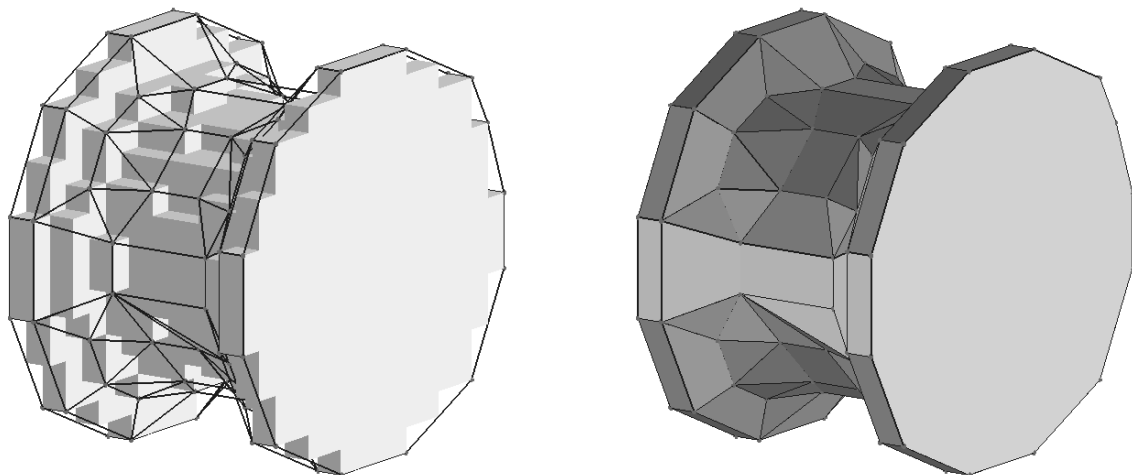


**Abbildung 8.13:** Schritt 12 des Eindrucks im heuristischen Verfahren.





**Abbildung 8.14:** Schritt 69 des Eindrückens im heuristischen Verfahren.



**Abbildung 8.15:** Ergebnis des Eindrückens im heuristischen Verfahren.

Im Ergebnis der Polyedrisierung dieses Objektes entsteht ein Polyeder mit 127 Flächen (siehe Abbildung 8.15).

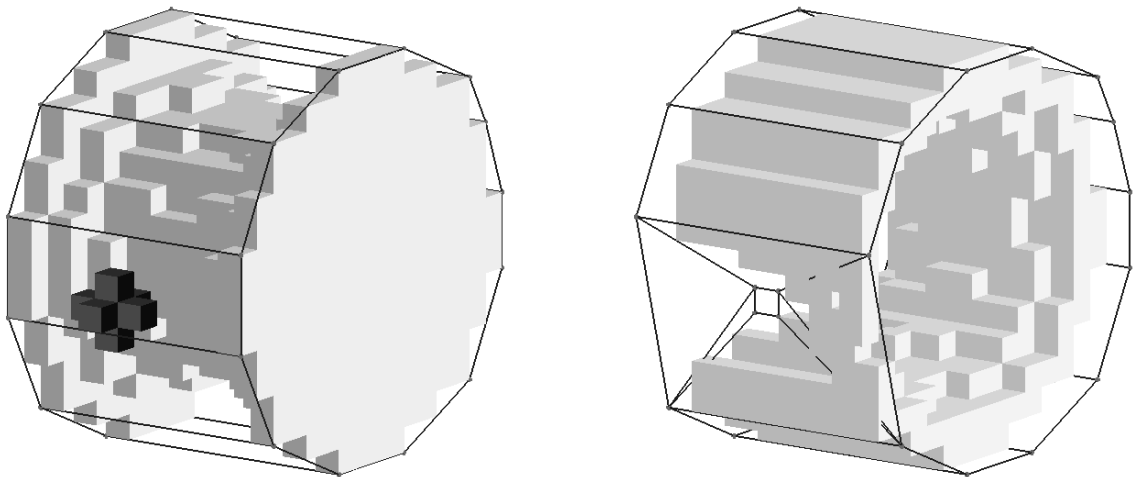
### Ergebnisse des Zerlegungsverfahrens

Das Zerlegungsverfahren, welches in Abschnitt 4.5.4 beschrieben wurde, dient dazu, die Menge  $S'$  der Hintergrundvoxel, welche sich innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$  des Objektes  $S$  befinden, in maximal große digitale Kugeln zu zerteilen, so

dass die Modifikation der konvexen Hülle durch das Eindringen gemäß Definition PR (siehe S.60) erfolgen kann, denn jede digitale Kugel besitzt eine Oberfläche mit dem Geschlecht  $g = 0$ .

Für das in diesem Abschnitt untersuchte Objekt ist die Menge  $S'$  der Hintergrundvoxel in Abbildung 8.11 (rechts) dargestellt. Diese Menge wird schrittweise zerlegt, was bedeutet, dass beginnend mit einem einzelnen Voxel  $v \in S'$  eine maximal große Kugel durch Hinzunahme benachbarter Voxel und durch Verschiebung um ein Voxel in  $x$ -,  $y$ - oder  $z$ -Richtung erzeugt wird. Dabei ist anzumerken, dass durch diese Vorgehensweise die erzeugte digitale Kugel im Allgemeinen ein lokales Maximum repräsentiert. Das Erreichen des globalen Maximums ist nur durch geeignete Wahl des Startvoxels möglich, jedoch ist dies für das Verfahren der Polyedrisierung nicht erforderlich.

Nach dem Auffinden einer maximal großen digitalen Kugel  $K \subset S'$  erfolgt sofort die Modifikation des Polyeders, d.h. das Eindringen. Dadurch wird die Menge  $S'$  der Hintergrundvoxel ebenfalls nach jedem Schritt verändert.



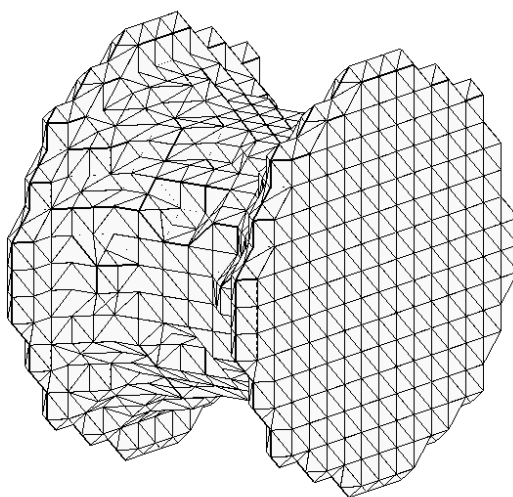
**Abbildung 8.16:** Erste ermittelte digitale Kugel  $K \subset S'$  (links) und resultierendes Polyeder nach dem Eindringen mit der verbleibenden Menge der Hintergrundvoxel (rechts).

Abbildung 8.16 zeigt den ersten Schritt des Zerlegungsverfahrens mit anschließen-

dem Eindrücken der konvexen Hülle  $CH(S)$ . Die in diesem Schritt erzeugte digitale Kugel  $K \subset S'$  besitzt den Radius  $1h$ , so dass zum Startvoxel alle diejenigen Voxel hinzugefügt wurden, die mit dem Startvoxel gemeinsame Facetten besitzen. Ein Vergrößern der Kugel  $K$  ist an dieser Stelle nicht mehr möglich, da die Forderung, dass alle Voxel von  $K$  zu  $S'$  gehören sollen, beim weiteren Vergrößern oder Verschieben verletzt wird.

Durch das Eindrücken können in jedem Schritt auch Voxel der Menge  $S$  nach außen gelangen. Nachdem alle Voxel der Menge  $S'$  durch die Modifikation außerhalb des Polyeders liegen, ist somit wieder eine Vertauschung der Rollen von Objekt- und Hintergrundvoxeln notwendig, um durch das umgekehrte Eindrücken die Voxel der Menge  $S$  wieder ins Innere von  $P$  zu bekommen.

Nach Abschluss des Ein- bzw. Herausdrückens von Flächen des Polyeders  $P$  wird auch beim Zerlegungsverfahren ein trennendes Polyeder erzeugt (siehe Abbildung 8.15).



**Abbildung 8.17:** Marching Cubes Triangulation des in diesem Abschnitt untersuchten Objektes.

Abbildung 8.17 zeigt als Vergleich die Triangulation, die durch das Marching Cubes Verfahren erzeugt wurde. Dieses Polyeder besteht aus 2160 Dreiecken, wogegen

die durch das Polyedrisierungsverfahren erzeugte Oberfläche nur aus 127 Flächen besteht.

### 8.3 Schlussfolgerungen

In diesem Kapitel konnte experimentell gezeigt werden, dass die Anzahl der Dreiecke in der Marching Cubes Triangulation und der damit verbundene Speicheraufwand für die Repräsentation des erzeugten trennenden Polyeders zu einem gegebenen Objekt deutlich größer ist als die Anzahl der Flächen eines vom Polyedrisierungsverfahren erzeugten Polyeders. Auch für Objekte, für die die Minimalität der Flächenanzahl nicht bewiesen werden konnte, ist diese Anzahl deutlich geringer als die Anzahl der Dreiecke bei der Marching Cubes Triangulation.

Die untersuchten Beispiele haben gezeigt, dass der Speicheraufwand für die Codierung der durch das Polyedrisierungsverfahren erzeugten Oberflächen nicht so stark mit der Größe des Objektes wächst wie beim Marching Cubes Verfahren, bei dem die Anzahl der Dreiecke direkt mit der Anzahl der Oberflächenelemente (Facetten) des Objektes zusammenhängt. Dies bedeutet somit, dass die Größe der Zellenliste bei den Polyedern, die durch das hier vorgestellte Verfahren erzeugt wurden, vorrangig von der Komplexität des Objektes abhängt und nur in sehr geringem Maße von seiner Größe (vgl. Tabelle 8.5 und Tabelle 8.7).

## Kapitel 9

# Folgerungen für den 2-dimensionalen Fall

Das Prinzip des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens zur Polyedrisierung 3-dimensionaler Voxelmengen ist auch im 2-dimensionalen Raum anwendbar. Das Problem hier ist dementsprechend die Erzeugung eines Polygons  $P_2$ , welches zu einer gegebenen Menge  $S_2$  von Pixeln, die als stark zusammenhängender, homogener 2-dimensionaler und dichter Subkomplex eines 2-dimensionalen AC Komplexes  $A$  vorliegen, die Trennung der Pixel aus  $S_2$  von  $A \setminus S_2$  erfüllt und dabei minimalen Umfang bzw. minimale Kantenzahl besitzt.

### 9.1 Polygonisierung

Die Erzeugung der konvexen Hülle  $CH(S_2)$  erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie im 3-dimensionalen Fall und beginnt mit der Extraktion der lokalen bzw. konvexen Ecken, also der Menge  $L_2$  der Eckkandidaten. Aus dieser Menge wird die konvexe Hülle aufgespannt, indem auch hier das Prinzip der Sichtbarkeit umgesetzt wird. Die Sichtbarkeit ist im 2-dimensionalen Fall in gleicher Weise wie im 3-dimensionalen Fall mit Hilfe des Skalarproduktes definiert. Die 2D-Analogie der komplanaren Flächen sind kollineare Kanten, deren Behandlung auch im 3-dimensionalen Fall notwendig ist und in [24] untersucht wurde.

Nach der Erzeugung der konvexen Hülle  $CH(S_2)$  bleibt nun zu betrachten, wel-

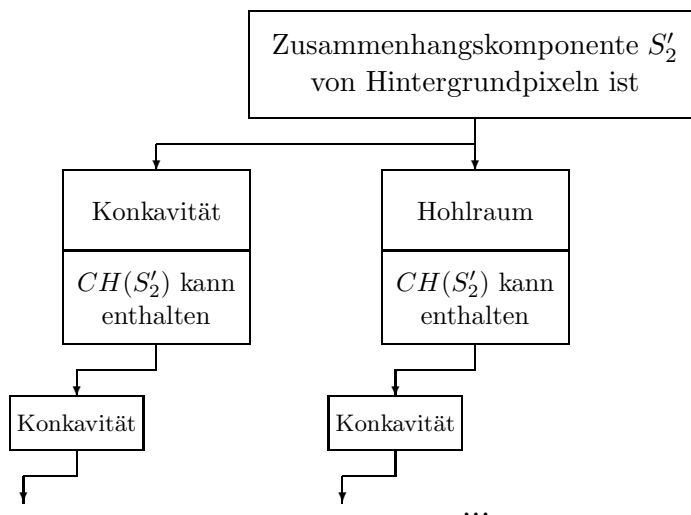
che Arten von Zusammenhangskomponenten  $S'_2$  von Pixeln der Menge  $A \setminus S_2$  in  $CH(S_2)$  liegen können, um herauszufinden, wie die konvexe Hülle der gegebenen Menge  $S_2$  von Pixeln modifiziert werden muss, um ein trennendes Polygon für die Menge  $S_2$  zu werden. Hierfür sollen die 3 Klassen von ZKHs (siehe S.51) dahingehend untersucht werden, ob sie im 2-dimensionalen Fall vorkommen können. Die Definition der ZKH kann ohne Einschränkungen auch in 2 Dimensionen angewendet werden.

- Konkavitäten: Gemäß Definition CO inzidiert eine Konkavität mit genau einer zusammenhängenden Menge von Flächen der konvexen Hülle. Die Entsprechung der Flächen sind im 2-dimensionalen Fall die Kanten der konvexen Hülle  $CH(S_2)$ . Mit dieser Abänderung sind die Konkavitäten in 2D ohne Schwierigkeiten möglich.
- Hohlräume: Gemäß Definition CA ist ein Hohlraum eine ZKH, die mit keiner Fläche der konvexen Hülle inzidiert. Im 2-dimensionalen Fall ist ein Hohlraum eine zusammenhängende Menge von Pixeln, die mit keiner Kante der konvexen Hülle  $CH(S_2)$  inzidiert. Damit sind Hohlräume in 2D definiert und können innerhalb der konvexen Hülle von stark zusammenhängenden, homogen-2-dimensionalen und dichten Teilkomplexen vorkommen.
- Tunnel: Definition TU legt fest, dass ein Tunnel mit mehr als einer zusammenhängenden Menge von Flächen der konvexen Hülle inzidiert. In 2D würde dies bedeuten, dass eine zusammenhängende Menge von Hintergrundpixeln mit mindestens zwei zusammenhängenden Mengen von Kanten inzidiert. Dies ist im 2-dimensionalen Fall nicht möglich, da der Tunnel somit die Menge  $S_2$  in mehrere Teile zerlegen würde, was jedoch gemäß der Forderung, dass  $S_2$  stark zusammenhängend ist, nicht erlaubt ist. Daher gibt es keine 2D-Tunnel in zusammenhängenden Mengen von Pixeln.

Weitere Klassen von ZKHs sind in 2 Dimensionen ebenfalls nicht möglich, da alle möglichen Fälle bezüglich der Anzahl zusammenhängender Mengen von Kanten von  $CH(S_2)$  abgedeckt sind. Daher beschränkt sich die Modifikation der konvexen Hülle  $CH(S_2)$  auf die Behandlung von Konkavitäten und Hohlräumen.

Das im 3-dimensionalen Fall auftretende Problem, dass Konkavitäten selbst Zusammenhangskomponenten von Objektvoxeln enthalten können, deren konvexe Hülle Tunnel enthält, kann in keiner Weise im 2-dimensionalen Fall auftreten, da Tunnel in 2D nicht existieren und somit jede ZKH mit mehr als einer Randkomponente die gegebene Menge  $S_2$  von Pixeln in mehrere disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegt.

Damit kann die konvexe Hülle lediglich Konkavitäten oder Hohlräume enthalten. Sofern die in  $CH(S_2)$  enthaltenen ZKHs  $S'_2$  wiederum selbst nicht-konvex sind, kann die konvexe Hülle der jeweiligen ZKH nur noch Konkavitäten enthalten. In Anlehnung an Abbildung 4.29 (siehe S.87) soll die Klassifikation der 2-dimensionalen Zusammenhangskomponenten  $S'_2$ , die innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S_2)$  liegen können, in der folgenden Abbildung gezeigt werden:



**Abbildung 9.1:** Klassifikation der Zusammenhangskomponenten von Hintergrundpixeln innerhalb eines Polygons.

Die Modifikation der konvexen Hülle  $CH(S_2)$  nicht-konvexer Mengen  $S_2$  erfolgt durch die Erzeugung einer unabhängigen konvexen Hülle bei einem Hohlraum bzw. durch Eindringen bei Konkavitäten. Das Eindringen erfolgt analog zum 3-dimensionalen Eindringen gemäß Definition PR (siehe S.60) und ist in Abbildung 4.17 bereits schematisch dargestellt. Hier werden somit markierte Kanten der konvexen Hülle  $CH(S_2)$  durch diejenigen Kanten ersetzt, die bei der Erzeugung und

Modifikation der konvexen Hülle der Konkavität entstehen und verschieden sind von den Kanten von  $CH(S_2)$ . Das Eindrücken erfolgt rekursiv. Jedoch ist im Gegensatz zum 3-dimensionalen Fall keine andere Klasse von ZKHs möglich als Konkavitäten, so dass lediglich das Eindrücken so lange ausgeführt werden muss, bis das resultierende Polygon  $P_2$  die Forderung der Trennung erfüllt.

Abschließend zum 2-dimensionalen Fall soll nun noch betrachtet werden, welche Aussagen über die Flächenanzahl und den Oberflächeninhalt der Polyeder in 3D entsprechend in 2D auf die Kantenzahl und den Umfang der Polygone zutreffen.

## 9.2 Minimalität der Kantenzahl

Zunächst soll betrachtet werden, welche Aussagen über die Kantenzahl der so erzeugten Polygone aus den Lemmata und Theoremen aus Kapitel 6 folgen.

Die Gültigkeit der Lemmata TR, TRE und TRC (siehe S.97ff) lässt sich für den 2-dimensionalen Fall erhalten, wenn in den entsprechenden Aussagen und Beweisen die Begriffe 3-Zelle, Polyeder, Halbraum und Fläche durch 2-Zelle, Polygon, Halbebene und Kante ersetzt werden. Mit Hilfe dieser drei Lemmata wird durch Theorem TRM (siehe S.101) gezeigt, dass eine digitale konvexe Teilmenge  $S \subset A$  mit der konvexen Hülle  $CH(S)$  ein trennendes Polyeder mit minimaler Flächenanzahl besitzt. Auch hier können die Begriffe 3-Zelle, Polyeder und Fläche durch 2-Zelle, Polygon und Kante ersetzt werden, so dass die Aussage für den 2-dimensionalen Fall gilt, also dass kein Polygon  $P_2$  existiert, welches eine digitale konvexe Teilmenge  $S_2$  von  $A \setminus S_2$  trennt, als Ecken ausschließlich 2-Zellen aus  $S_2$  besitzt und dessen Kantenzahl kleiner ist als die der konvexen Hülle  $CH(S_2)$ .

Die 2D-Analogie zu Polyedern mit konvexen Hohlräumen sind Polygone mit konvexen Hohlräumen. Theorem THM (siehe S.102) kann auch im 2-dimensionalen Fall als gültig angesehen werden, da die Beweisidee auf der unabhängigen Erzeugung der konvexen Hülle  $CH(S'_2)$  des digital konvexen Hohlraumes  $S'_2$  beruht, welche hier in gleicher Form für 2 Dimensionen angewendet wird. Somit erzeugt die 2D-Version des in dieser Arbeit vorgestellten Polyedrisierungsverfahrens für Objekte mit konvexen Hohlräumen Polygone mit minimaler Kantenzahl, die



die Bedingung erfüllen, Vordergrund- von Hintergrundpixeln zu trennen.

Ebenso wie in 3D kann in 2D die Minimalität der Kantenzahl bei Konkavitäten und den verbleibenden nicht-konvexen ZKHs (zu dieser Klasse gehören in 2D nur die nicht-konvexen Hohlräume) nicht bewiesen werden, da durch das Austauschen der Ecken, die zu  $S_2$  bzw.  $A \setminus S_2$  gehören, die Kantenzahl unter Beibehaltung der Trennung reduziert werden könnte, was auch in 2D nur durch ein geeignetes Optimierungsverfahren realisiert werden kann.

### 9.3 Minimalität des Umfanges

Die 2D-Analogie der Minimalität des Oberflächeninhaltes (siehe Kapitel 7) ist die Minimalität des Umfanges der erzeugten Polygone. Zunächst sei auch hier die Minimalität bei der konvexen Hülle digital konvexer Objekte betrachtet. Für den 3-dimensionalen Fall besagt Lemma OB (siehe S.107), dass die konvexe Hülle dasjenige Polyeder ist, welches eine digitale konvexe Teilmenge  $S \subset A$  enthält und den minimalen Oberflächeninhalt besitzt. Auch in diesem Beweis können die Begriffe Polyeder, Oberflächeninhalt und Fläche durch ihre 2-Analoga Polygon, Umfang und Kante ersetzt werden, so dass die Aussage im 2-dimensionalen Fall ihre Gültigkeit behält. Somit ist gezeigt, dass die 2-dimensionale konvexe Hülle einer digital konvexen Teilmenge  $S_2$  ein trennendes Polygon mit minimalem Umfang ist.

Der gleiche Ansatz kann für Polygone mit konvexen Hohlräumen gewählt werden, so dass auch Lemma OH (siehe S.109) angewandt auf den 2-dimensionalen Raum seine Gültigkeit behält.

Für Polygone mit Konkavitäten kann Theorem OK (siehe S.114) nicht ohne weiteres auf den 2-dimensionalen Fall übertragen werden. Zunächst müssen die 2D-Konkavitäten nicht bezüglich  $g$  unterschieden werden. Jede Konkavität  $S'_2$  ist eine 2-Mannigfaltigkeit mit Rand, wobei der Rand einem Kreis homöomorph ist. Weiterhin gibt es in 2D keine Analogie zum Kantentausch (siehe Abschnitt 7.3), denn die Zellen der Dimension  $n - 2$  sind in 2D die 0-Zellen, die als Ecken des Polygons verwendet werden. Der Grad der Nicht-Konvexität ist in 2D ebenfalls anwendbar, wenn in Definition NK (siehe S.10) der Begriff Polyeder durch Poly-

gon ersetzt wird. Theorem OK muss für den 2-dimensionalen Fall demnach neu formuliert werden:

**Theorem OK2:** Ein Polygon  $P_2$ , welches eine nicht-konvexe Menge  $S_2$  von 2-Zellen enthält, die in  $CH(S_2)$  Konkavitäten besitzt und wobei  $P_2$

- 2-Zellen der Menge  $S$  von den 2-Zellen der Menge  $A \setminus S$  trennt,
- 2-Zellen als Ecken besitzt und
- 2-Zellen aus  $S$  und aus  $A \setminus S$  auf den Kanten besitzen darf,

besitzt den minimalen Umfang, wenn es durch 2D-Variante des Polyedrisierungsverfahrens erzeugt wurde.

*Beweis:* Zunächst sei  $P_2$  angenommen als Polygon mit genau einer Konkavität  $S'_2$  und  $G_{nc}(P) = 1$ . In diesem Fall ist die in  $P_2$  enthaltene Konkavität  $S'_2$  eine digitale konvexe Menge. Die konvexe Hülle  $CH(S'_2)$  trennt gemäß Lemma TR die 2-Zellen der Menge  $S'_2$  von den 2-Zellen der Menge  $A \setminus S'_2$ . Bei der Modifikation der konvexen Hülle  $CH(S_2)$  wird aus einer Menge  $M$  sichtbarer Kanten von  $CH(S_2)$  die konvexe Hülle  $CH(M \cup S'_2)$  erzeugt, die nicht in jedem Fall die Trennung erfüllt. Zunächst sei jedoch angenommen, dass  $CH(M \cup S'_2)$  die Trennung erfüllt und das  $CH(M \cup S'_2) = CH(S'_2)$  gilt. Der Fall, dass die Trennung nicht erfüllt ist, entspricht dem Fall einer nicht-konvexen Menge  $S'_2$ , der unten erwähnt ist.

Da  $S'_2$  und  $S_2$  disjunkte Mengen von 2-Zellen sind, trennt  $CH(S'_2)$  auch die 2-Zellen der Menge  $S'_2$  von den 2-Zellen der Menge  $S_2$ .  $CH(S'_2)$  besitzt minimalen Umfang, denn gemäß der 2D-Interpretation von Lemma OB kann zu einer digitalen konvexen Teilmenge kein trennendes Polygon existieren, welches einen kleineren Umfang als die konvexe Hülle besitzt. Die Ecken von  $CH(S'_2)$  sind gemäß dem Verfahren zur Erzeugung der konvexen Hülle 2-Zellen aus  $S'_2$ . Weiterhin können sowohl 2-Zellen aus  $S_2$  als auch aus  $S'_2$  auf den Kanten von  $CH(S'_2)$  liegen.

Es bleibt zu zeigen, dass die Vereinigung der Polygone  $P_2$  und  $P'_2 = CH(S'_2)$  minimalen Umfang besitzt. Bei der Vereinigung zweier Polygone wird die Menge der sichtbaren Kanten aus  $P_2$  entfernt und durch die Menge der Kanten aus

$P'_2$  ersetzt, die von den sichtbaren Kanten verschieden sind. Da die verbleibende Menge von Kanten aus  $P_2$  aufgrund der Trennungsforderung keinen kleineren Umfang besitzen kann und auch die verbleibende Menge von Kanten aus  $P'_2$ , bleibt lediglich zu zeigen, dass die Ecken des Randes beider Mengen aufgrund der Trennungsforderung nicht entfernt werden können. Dies ist der Fall, da diese Ecken (der Rand der beiden Mengen von Kanten aus  $P_2$  und  $P'_2$  hat ausschließlich Ecken, die 2-Zellen aus  $S_2$  sind) nicht durch Verkleinern des Umfangs nach außen gelangen dürfen, da das die Trennungsforderung verletzen würde. Weiterhin können diese Ecken auch nicht innerhalb des resultierenden Polygons liegen, da das nur durch eine Vergrößerung des Umfangs möglich wäre. Die weiteren Ecken in  $P'_2$ , die nicht zu diesem Rand gehören, sind 2-Zellen aus  $S'_2$  und müssen ebenfalls aufgrund der Minimalität des Umfangs von  $P'_2$  Ecken des resultierenden Polygons bleiben.

Ein Polygon  $P_2$ , welches mehrere konvexe Konkavitäten enthält, die in der konvexen Hülle  $CH(S_2)$  Mengen von sichtbaren Kanten besitzen, die keine gemeinsamen Zellen haben, also die disjunkte Randkomplexe besitzen, werden in gleicher Weise verarbeitet und führen ebenfalls zu einem minimalen Umfang von  $P_2$ .

Der letzte zu betrachtende Fall des Beweises ist die Modifikation der konvexen Hülle, die nicht-konvexe Konkavitäten besitzt. In diesem Fall gelten in jedem Modifikationsschritt die oben erwähnten Eigenschaften, so dass jedes Polygon  $P_2$ , welches durch Modifikation aus der konvexen Hülle  $CH(S_2)$  hervorgeht, die konvexe oder nicht-konvexe Konkavitäten enthält, minimalen Umfang besitzt.

□

Zusammenfassend kann somit gesagt werden, dass in der 2-dimensionalen Version des Polyedrisierungsverfahrens für alle Klassen von Objekten, die stark zusammenhängende, homogen-2-dimensionale und dichte Teilkomplexe  $S_2$  eines 2-dimensionalen AC Komplexes  $A$  sind, Polygone mit minimalem Umfang erzeugt werden.



# Kapitel 10

## Abschließende Bemerkungen

In dieser Arbeit wurde das Problem der Polyedrisierung von Voxelmengen betrachtet und ein Algorithmus vorgestellt, der zu einer gegebenen Menge von Voxeln, die als stark zusammenhängender, homogen-3-dimensionaler und dichter Teilkomplex  $S$  eines AC Komplexes  $A$  vorliegt, ein abstraktes Polyeder  $P$  erzeugt, welches die Voxel aus  $S$  von den Voxeln aus  $A \setminus S$  trennt, so dass dabei keine Voxel aus  $S$  außerhalb  $P$  und keine Voxel aus  $A \setminus S$  innerhalb  $P$  liegen.

### 10.1 Zusammenfassung

Das Polyedrisierungsproblem existiert seit Anfang der 1990´er Jahre [12]. Viele Arbeiten beschäftigen sich mit der Lösung dieses Problems durch Anwendung der Methode der digitalen Ebenen (digital plane segmentation) [2, 32, 37]. Diese Verfahren produzieren jedoch aufgrund der lokalen Arbeitsweise der Ebenensegmentierung in Abhängigkeit vom Startpunkt unterschiedliche Ergebnisse. Weiterhin besteht im Allgemeinen keine Möglichkeit, im gegebenen Objekt enthaltene Symmetrien zu erhalten.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Polyedrisierungsverfahren arbeitet mit dem bekannten Algorithmus zur Erzeugung der konvexen Hülle [24] und dessen rekursiver Anwendung auf Teilmengen der gegebenen Menge  $S$  von Voxeln. Die konvexe Hülle einer gegebenen Menge ist eindeutig definiert und durch den Algorithmus mit einer quadratischen Zeitkomplexität effizient zu erzeugen. Sofern die Menge  $S$

digital konvex ist, hat die konvexe Hülle die Eigenschaft, ein Polyeder zu sein, welches  $S$  von  $A \setminus S$  trennt und dabei die minimale Flächenanzahl und den minimalen Oberflächeninhalt besitzt.

Um nicht-konvexe Objekte  $S$  polyedrisieren zu können, wurde zunächst die Klassifizierung der Zusammenhangskomponenten von Hintergrundvoxeln innerhalb der konvexen Hülle  $CH(S)$  in Anlehnung an [42] in Konkavitäten, Hohlräume und Tunnel verwendet und verfeinert. Diese Klassifizierung ist notwendig, um die Modifikation der konvexen Hülle zu einem trennenden Polyeder in Abhängigkeit von der Topologie und der Geometrie des gegebenen Objektes auf verschiedene Weise durchführen zu können.

Die resultierenden trennenden Polyeder besitzen für nicht-konvexe Objekte, die konvexe Hohlräume enthalten, die minimale Flächenanzahl und den minimalen Oberflächeninhalt. Polyeder für Objekte mit Konkavitäten mit  $g = 0$  besitzen ebenfalls einen minimalen Oberflächeninhalt, was für Objekte mit Konkavitäten mit  $g > 0$  oder Tunneln nicht ohne ein an die Polyedrisierung anschließendes Optimierungsverfahren erreicht wird. Eine minimale Flächenanzahl kann im Allgemeinen für Konkavitäten und Tunnel ebenfalls nur durch eine Optimierung der Oberfläche erzielt werden.

Der Grund für die Forderung nach der Trennung der 3-Zellen der Menge  $S$  von den 3-Zellen der Menge  $A \setminus S$  liegt in der Möglichkeit einer vollständigen Rekonstruierbarkeit der gegebenen Menge  $S$  aus dem erzeugten Polyeder  $P$ , was gleichzeitig eine implizite Speicherung der Menge  $S$  bedeutet. Hierfür ist es notwendig, für die erlaubte Eigenschaft der Polyeder, dass sowohl Zellen aus  $S$  als auch aus  $A \setminus S$  auf  $P$  liegen dürfen, in der Zellenliste von  $P$  zu speichern, zu welcher Menge die jeweils auf  $P$  liegenden 3-Zellen gehören.

Neben der Entwicklung des Algorithmus zur Lösung des Polyedrisierungsproblems sowie der Klassifizierung der Objekte und der Untersuchung der damit verbundenen Eigenschaften, wurden in dieser Arbeit einige Lösungsansätze zu kleineren Problemen vorgestellt. Hierzu zählen insbesondere die Verbesserung des Algorithmus zur Erzeugung der konvexen Hülle durch Maximierung der Größe des Startpolyeders (siehe Abschnitt 4.1.8), die Erhaltung der Konvexität beim Zusam-

menfügen komplanarer Flächen (siehe Abschnitt 4.5.6) und die Minimierung des Oberflächeninhaltes der Polyeder durch Kantentausch (siehe Abschnitt 7.3).

Aus theoretischer Sicht wurde mit der Einführung des Begriffes des Grades der Nicht-Konvexität (siehe Abschnitt 2.2 und Abschnitt 4.6.2) ein Maß angegeben, mit welchem die Komplexität von Polyedern mit Konkavitäten, Hohlräumen und Tunneln angegeben werden kann. Weiterhin wurde gezeigt, dass in der in dieser Arbeit untersuchten Klasse von Zellenkomplexen, nämlich stark zusammenhängenden, homogen-3-dimensionalen und dichten Teilkomplexen  $S \subset A$ , die Begriffe Rand und Begrenzung identisch sind (siehe Abschnitt 2.4). Dieser Satz gilt darüber hinaus für alle Dimensionen  $n \geq 2$ .

Bezugnehmend auf die Forderungen an die zu erzeugende Oberfläche aus Abschnitt 3.5 (siehe S.27) sollen die Eigenschaften der erzeugten Polyeder hier zusammengefasst werden:

- Die erzeugten Polyeder trennen die 3-Zellen von  $S$  von den 3-Zellen von  $A \setminus S$ , so dass die Menge  $S$  aus der erzeugten Oberfläche fehlerfrei rekonstruiert werden kann.
- Die Polyeder besitzen Zellen der Menge  $S$  bzw. bei nicht-konvexen Objekten auch Zellen aus  $A \setminus S$  als Ecken. Für die Rekonstruktion wird zu jeder auf dem Polyeder liegenden 3-Zelle die Zugehörigkeit zu  $S$  bzw.  $A \setminus S$  in der Zellenliste gespeichert.
- Die Polyeder werden in Form einer effizienten Datenstruktur gespeichert. Damit ist die Kodierung der Oberfläche frei von Redundanz und die Möglichkeit der fehlerfreien Rekonstruktion von  $S$  wird gewährleistet.
- Die erzeugten Polyeder besitzen unter den genannten Forderungen die minimale Flächenanzahl für die Klasse der konvexen Objekte sowie für nicht-konvexe Objekte, die in ihrer konvexen Hülle konvexe Hohlräume enthalten. Für die verbleibenden Klassen von Objekten wurde gezeigt, dass die Minimalität der Flächenanzahl nur durch anschließende Optimierungsverfahren erreicht werden kann.

- Die erzeugten Polyeder besitzen unter den genannten Forderungen den minimalen Oberflächeninhalt für die Klasse der konvexen Objekte sowie für nicht-konvexe Objekte, die in ihrer konvexen Hülle konvexe Hohlräume, konvexe Konkavitäten oder nicht-konvexe Konkavitäten mit  $g = 0$  enthalten. Für die verbleibenden Klassen von Objekten wurde gezeigt, dass die Minimalität des Oberflächeninhaltes nur durch anschließende Optimierungsverfahren erreicht werden kann.

## 10.2 Offene Probleme

Einige Probleme, die während der Entwicklung des Lösungsansatzes für das Polyedrisierungsproblem aufgetreten sind, konnten im Rahmen dieser Arbeit nicht gelöst werden. Diese offenen Probleme sollen in diesem Abschnitt beschrieben werden.

Das heuristische Verfahren zur Polyedrisierung von Objekten mit Konkavitäten mit  $g > 0$  bzw. nicht-einfachen Tunneln (siehe Abschnitt 4.5.3) benutzt die beiden Parameter  $d_{ij}$  und  $w$  bei der Zuordnung von Zellen, die Eckkandidaten sind, zu den Flächen, die eingedrückt werden sollen. Diese beiden Parameter wurden experimentell ermittelt und sind objektabhängig. Eine bessere Methode besteht im Anlernen dieser Parameter durch entsprechende Verfahren, um das heuristische Verfahren objektunabhängig anwenden zu können.

Das Zerlegungsverfahren (siehe Abschnitt 4.5.4) unterteilt die Menge  $S'$  der Hintergrundvoxel innerhalb  $CH(S)$  in maximal große digitale Kugeln. Da die Modifikation der konvexen Hülle durch Eindrücken lediglich topologische Kugeln benötigt, wäre es effizienter, die Menge  $S'$  in minimal viele Komponenten zu zerlegen. Diese Komponenten müssen dabei nicht einmal Kugeln sein, sondern eine Zerlegung in minimal viele konvexe Teilmengen wäre hier das Zweckmäßigste. Jedoch ist ein solches Zerlegungsverfahren nicht auf triviale Art und Weise zu entwickeln, so dass dies ein weiteres offenes und auch anspruchsvolles Problem ist.

Bezüglich der Minimalität der Flächenanzahl konnte das Polyedrisierungsverfahren nicht dahingehend entwickelt werden, dass für jede Klasse von Objekten



diese Minimalität erreicht wird. Hierfür ist ein Optimierungsverfahren notwendig, welches an die Polyedrisierung anschließt und speziell beim Vereinigen der Teilpolyeder prüft, ob die Flächenanzahl unter Beibehaltung der Trennungsforderung reduziert werden kann (siehe Abschnitt 6.4).

Die Minimalität des Oberflächeninhaltes ist ebenfalls nicht für jede Klasse von Objekten durch die Polyedrisierung erreicht. Auch hier muss beim Vereinigen der Teilpolyeder geprüft werden, ob die Wahl anderer Ecken unter Erhaltung der Trennung zu einer Reduzierung des Oberflächeninhaltes führt (siehe Abschnitt 7.5).



# Anhang A

## Definitionen und Theoreme

In diesem Kapitel soll eine Übersicht über die Definitionen und Theoreme gegeben werden, die für die Gebiete der digitalen Topologie und digitalen Geometrie von Bedeutung sind. Jedoch ist dieses Kapitel nicht als vollständige Zusammenfassung aller Begriffe und Theoreme auf diesen Gebieten zu verstehen. Hier werden lediglich die Definitionen und Sätze aufgeführt, die innerhalb dieser Arbeit von Belang sind.

### A.1 Allgemeine Topologie

Die Basis für die Theorie der abstrakten Zellenkomplexe bildet die allgemeine Topologie. Die in diesem Abschnitt aufgeführten Definitionen stammen aus [33].

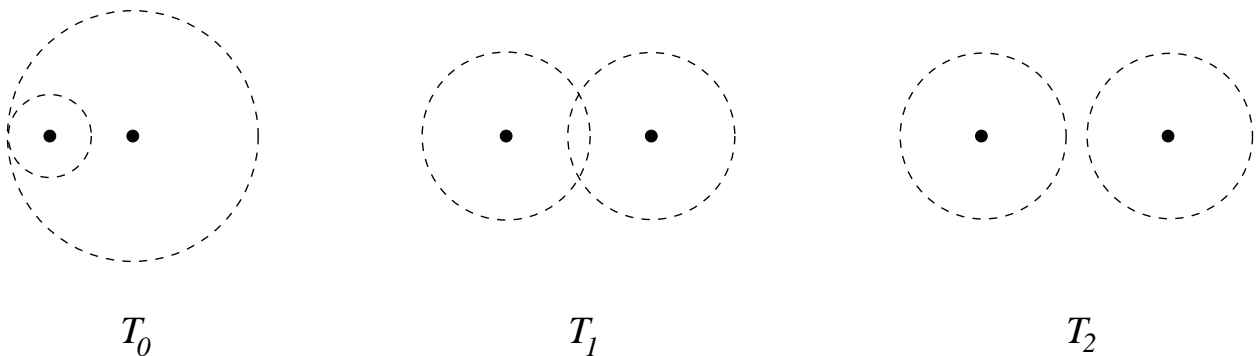
**Definition TR:** Ein *topologischer Raum*  $T$  ist ein Paar  $(M, SY)$  bestehend aus einer Menge  $M$  und einem System  $SY$  von Teilmengen von  $M$ . Die Teilmengen  $S_i$  werden *offene Teilmengen* des Raumes genannt und müssen den folgenden Axiomen genügen:

- (C1) Die leere Teilmenge  $\emptyset$  und die Menge  $M$  gehören zu  $SY$ .
- (C2) Für jede Familie  $F$  von Teilmengen  $S_i$ , die zu  $SY$  gehören, gehört die Vereinigung aller Teilmengen, die Elemente von  $F$  sind, ebenfalls zu  $SY$ .
- (C3) Wenn die Teilmengen  $S_1$  und  $S_2$  zu  $SY$  gehören, so gehört auch ihr Durchschnitt  $S_1 \cap S_2$  zu  $SY$ .

**Definition TA:** Ein topologischer Raum  $T$  ist  $T_i$ -trennbar und heißt somit  $T_i$ -Raum, wenn für ihn das Axiom  $(T_i)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) erfüllt ist:

- $(T_0)$  Zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y$  des Raumes gibt es eine offene Menge, die den einen, aber nicht den anderen Punkt enthält. (Kolmogoroff, 1935)
- $(T_1)$  Zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y$  des Raumes gibt es eine offene Menge, die  $x$  und nicht  $y$  enthält und eine andere offene Menge, die  $y$  und nicht  $x$  enthält. (Fréchet, 1928)
- $(T_2)$  Zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y$  des Raumes gibt es zwei disjunkte offene Mengen, die jeweils einen der Punkte enthalten. (Hausdorff, 1914)

Abbildung A.1 soll die Axiome der Punkttrennung verdeutlichen.



**Abbildung A.1:** Veranschaulichung der drei Trennungsaxiome [25].

**Definition HOM:** Eine eindeutige Abbildung  $f$  eines topologischen Raumes  $T$  auf einen topologischen Raum  $T'$  ist genau dann ein *Homöomorphismus*, wenn folgendes gilt:

$$f : T \longleftrightarrow T' \text{ stetig und } f^{-1} : T' \longleftrightarrow T \text{ stetig}$$

Eine andere Bezeichnung für Homöomorphismus ist *topologische Abbildung*. Zwei topologische Räume sind *topologisch äquivalent*, wenn zwischen ihnen eine homöomorphe Abbildung existiert.

**Definition TI:** Sei  $f$  ein beliebiger Homöomorphismus. Eine Eigenschaft einer Teilmenge  $M'$  eines topologischen Raumes  $T$  ist eine *topologische Invariante* genau dann, wenn die selbe Eigenschaft auch für die Menge  $f(M')$  gilt.

## A.2 Digitale Topologie

Alle in diesem Kapitel aufgeführten Definitionen und Theoreme stammen aus Publikationen von W.A.Kovalevski [18]-[25].

### A.2.1 Lokal endliche Räume

Innerhalb der digitalen Topologie besteht zunächst die Notwendigkeit, den Begriff des digitalen topologischen Raumes, also den des lokal endlichen Raumes, axiomatisch zu definieren, denn für die explizite Repräsentation dieses Raumes mit Hilfe des Computers ist der topologische Raum gemäß Definition TR nicht geeignet, da dieser aus nicht-endlichen Mengen von Elementen besteht. Die hier folgenden Definitionen stammen aus [25]. Die Elemente eines lokal endlichen Raumes werden nicht als Punkte bezeichnet, da es in einem solchen Raum Elemente mit verschiedenen topologischen Eigenschaften gibt.

**Definition NB:** Zu jedem Element  $e$  eines Raumes  $T$  gibt es bestimmte Teilmengen, die  $e$  enthalten. Eine solche Teilmenge heißt *Nachbarschaft* (engl. neighborhood) von  $e$  und wird mit  $N(e)$  bezeichnet. Der Durchschnitt zweier Nachbarschaften von  $e$  ist wieder eine Nachbarschaft von  $e$ .

**Definition LFS:** Eine nicht-leere Menge  $T$  heißt *lokal endlicher Raum* (engl. locally finite space), kurz *LF Raum*, wenn jedem Element  $e \in T$  bestimmte Teilmengen von  $T$  als Nachbarschaften zugeordnet sind.

**Definition SN:** Der Durchschnitt aller Nachbarschaften eines Elementes  $e$  eines LF Raumes  $T$  heißt *kleinste Nachbarschaft* von  $e$  (engl. smallest neighborhood)

und wird mit  $SN(e)$  bezeichnet.

**Definition NR:** Die *Nachbarschaftsrelation*  $N$  (engl. neighborhood relation) ist eine binäre Relation auf der Menge der Elemente eines LF Raumes  $T$ . Das geordnete Paar  $(a, b)$  ist in  $N$  genau dann, wenn  $a \in SN(b)$ .

Bevor man nun die Axiome der für diese Arbeit geeigneten lokal endlichen Räume formulieren kann, sind zwei weitere Gruppen von Begriffen notwendig, nämlich die des Zusammenhanges und des Randes.

**Definition IN:** Zwei Elemente  $a, b$  eines LF Raumes  $T$  heißen miteinander *inzident* (engl. incident), wenn entweder  $a \in SN(b)$  oder  $b \in SN(a)$ .

**Definition IP:** Sei  $S \subseteq T$  eine Teilmenge eines LF Raumes  $T$ . Eine Folge  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ ,  $a_i \in S, i = 1, \dots, k$ , in welcher zwei aufeinanderfolgende Elemente miteinander inzidieren, heißt *Inzidenzpfad in  $S$*  (engl. incidence path) von  $a_1$  bis  $a_k$ .

**Definition ZS:** Eine Teilmenge  $S \subseteq T$  des LF Raumes  $T$  heißt *zusammenhängend* (engl. connected) genau dann, wenn für je zwei Elemente aus  $S$  ein Inzidenzpfad existiert, der beide Elemente enthält und vollständig in  $S$  liegt.

**Definition FR:** Der topologische Rand, auch *Begrenzung* (engl. frontier), einer nicht-leeren Teilmenge  $S \subset T$  des LF Raumes  $T$  ist die Menge aller Elemente  $e \in T$ , die in ihrer kleinsten Nachbarschaft  $SN(e)$  sowohl Elemente aus  $S$  als auch Elemente aus  $T \setminus S$  enthalten. Die Begrenzung einer Teilmenge  $S \subset T$  wird mit  $Fr(S, T)$  bezeichnet.

**Definition OT:** Ein Paar  $(a, b)$  von Elementen der Begrenzung  $Fr(S, T)$  einer Teilmenge  $S \subset T$  heißt *Opponenten* (engl. opponents) von einander, wenn  $a \in SN(b)$ ,  $b \in SN(a)$ ,  $a$  oder  $b$  Element von  $S$  ist und das jeweils andere Element

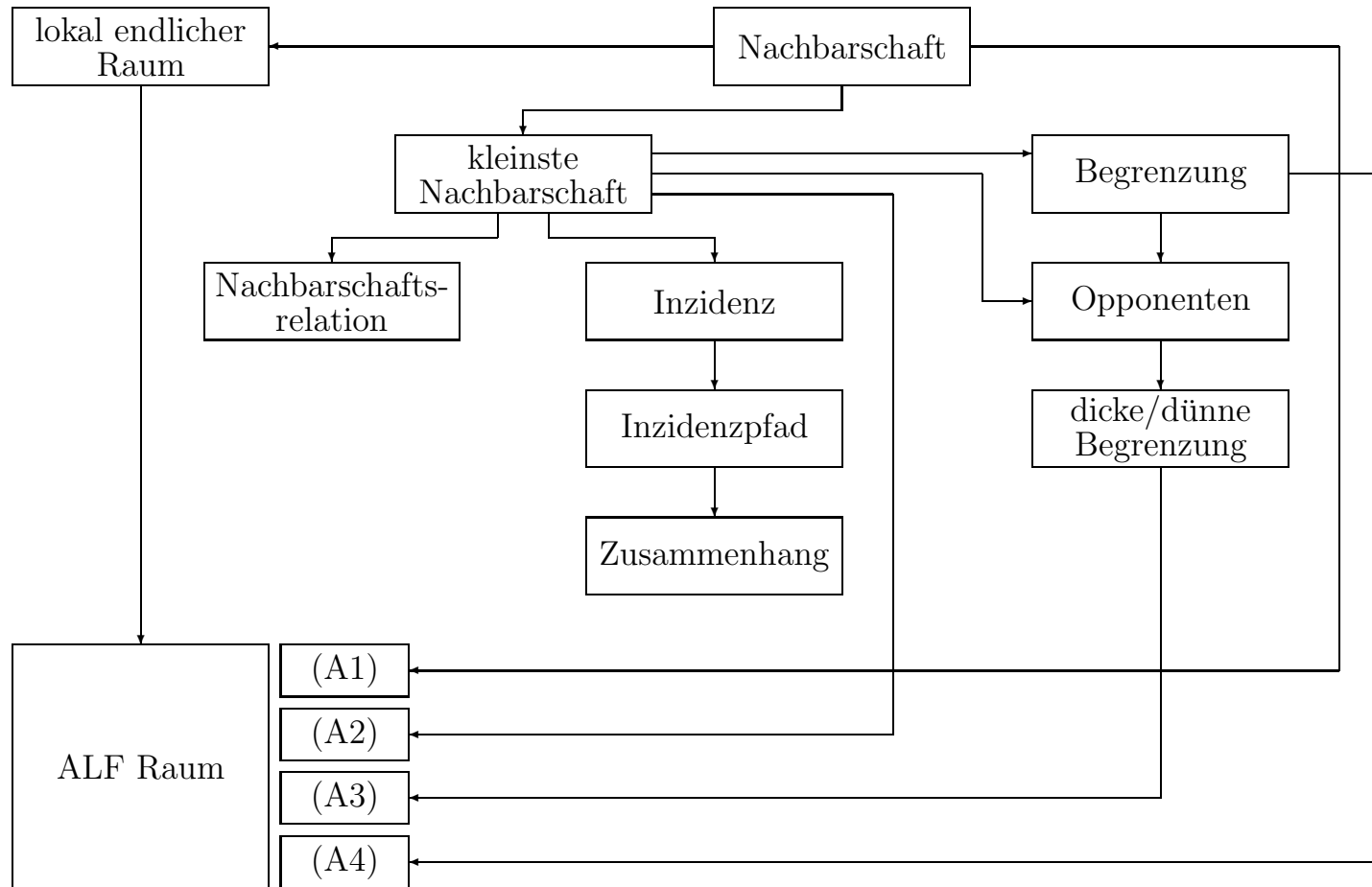
von  $T \setminus S$  ist.

**Definition TF:** Die Begrenzung  $Fr(S, T)$  einer Teilmenge  $S \subset T$  heißt *dick* (engl. thick), wenn sie mindestens ein Paar von Opponenten enthält. Sonst heißt sie *dünn* (engl. thin).

**Definition ALF:** Ein lokal endlicher Raum  $T$ , der die folgenden Axiome erfüllt, heißt *ALF Raum*:

- (A1) Zu jedem Element  $e$  des Raumes  $T$  existieren Nachbarschaften  $N(e)$ , die  $e$  enthalten. Der Durchschnitt zweier Nachbarschaften von  $e$  ist wieder eine Nachbarschaft von  $e$ .
- (A2) Es existieren Elemente  $e$  des Raumes  $T$ , die in ihrer kleinsten Nachbarschaft  $SN(e)$  mehr als ein Element besitzen.
- (A3) Die Begrenzung  $Fr(S, T)$  jeder Teilmenge  $S \subset T$  ist dünn.
- (A4) Die Begrenzung von  $Fr(S, T)$  ist identisch zur Begrenzung  $Fr(S, T)$  selbst, d.h.  $Fr(Fr(S, T), T) = Fr(S, T)$ .

Abbildung A.2 veranschaulicht die Zusammenhänge im Teilgebiet der ALF Räume. In dieser Übersicht geben die Pfeile an, in welcher Richtung ein Begriff die Definition eines anderen Begriffes beeinflusst.



**Abbildung A.2:** Veranschaulichung der Zusammenhänge zwischen Begriffen und Axiomen im Gebiet der lokal endlichen Räume.



### A.2.2 Eigenschaften der lokal endlichen Räume

**Theorem TF:** Ein lokal endlicher Raum  $T$  erfüllt das Axiom (A3) genau dann, wenn die Nachbarschaftsrelation  $N$  des Raumes  $T$  antisymmetrisch ist.

**Definition OP:** Eine Teilmenge  $O \subset T$  heißt *offen in  $T$*  (engl. open), wenn sie keine Elemente ihrer Begrenzung  $Fr(O, T)$  enthält.

**Definition CL:** Eine Teilmenge  $C \subset T$  heißt *abgeschlossen in  $T$*  (engl. closed), wenn sie alle Elemente ihrer Begrenzung  $Fr(C, T)$  enthält.

**Lemma SI:** Eine Teilmenge  $S \subset T$  ist offen in  $T$  gemäß Definition OP genau dann, wenn sie zu jedem Element  $a \in S$  auch die kleinste Nachbarschaft  $SN(a)$  enthält.

**Theorem OS:** Teilmengen eines ALF Raumes  $T$ , die in  $T$  offen sind, gemäß Definition OP, erfüllen die Axiome (C1)-(C3) des topologischen Raumes (Definition TR) und sind daher offen im Sinne der klassischen Topologie.

**Definition BR:** Eine irreflexive, asymmetrische binäre Relation  $B$  zwischen zwei Elementen  $a, b$  des ALF Raumes  $T$  heißt *Berandungsrelation* (engl. bounding relation), wenn folgendes gilt:

- $a \neq b$  (Irreflexivität)
- $a \in SN(b)$
- $a \in SN(b) \implies b \notin SN(a)$  (Asymmetrie)

Man sagt dann:  $a$  wird berandet von  $b$  bzw.  $b$  berandet  $a$ .

**Definition MM:** Elemente eines ALF Raumes  $T$ , die keine anderen Elemente aus  $T$  beranden, heißen *maximale* Elemente. Elemente aus  $T$ , die von keinen anderen Elementen aus  $T$  berandet werden, heißen *minimale* Elemente.

**Lemma MM:** Wenn  $T$  ein ALF Raum ist und die Berandungsrelation  $B$  transitiv ist, dann enthält  $T$  minimale und maximale Elemente.

**Lemma NM:** Sei  $S \subset T$ . Wenn die Berandungsrelation  $B$  transitiv ist, dann enthält  $Fr(S, T)$  keine maximalen Elemente aus  $T$ . Für jedes Element  $a$  aus  $T$  enthält  $SN(a)$  mindestens ein maximales Element von  $T$ .

**Theorem TR:** Ein LF Raum erfüllt Axiom (A4) genau dann, wenn die Berandungsrelation transitiv ist.

**Korollar HO:** Die Berandungsrelation  $B$ , welche irreflexiv, asymmetrisch und transitiv ist, ist eine irreflexive Halbordnung und man kann  $a < b$  anstelle von  $aBb$  schreiben.

**Korollar NO:** Die kleinste Nachbarschaft jedes Elementes  $a$  eines ALF Raumes  $T$  ist offen gemäß Definition OP und gemäß der Axiome (C1)-(C3) der klassischen Topologie. Sie ist die kleinste offene Teilmenge, die  $a$  enthält.

**Korollar T0:** Die kleinsten Nachbarschaften in einem ALF Raum erfüllen das Axiom  $(T_0)$ .

**Definition SON:** Die kleinste offene Teilmenge eines ALF Raumes  $T$ , die ein Element  $a \in T$  enthält, heißt *kleinste offene Umgebung* (engl. smallest open neighborhood) von  $a$  in  $T$  und wird mit  $SON(a, T)$  bezeichnet. Gemäß Korollar NO gilt  $SON(a, T) = SN(a)$ .

**Definition CS:** Die kleinste abgeschlossene Teilmenge eines ALF Raumes  $T$ , die ein Element  $a \in T$  enthält, heißt *Abschluss* (engl. closure) von  $a$  in  $T$  und wird mit  $Cl(a, T)$  bezeichnet.

### A.2.3 Abstrakte Zellenkomplexe

Für die Anwendung der digitalen Topologie in der digitalen Bildverarbeitung und Computergrafik haben sich die abstrakten Zellenkomplexe als zweckmäßig erwiesen. Abstrakte Zellenkomplexe sind Spezialfälle der ALF Räume. Sie erfüllen sowohl die Axiome (A1)-(A4) als auch die Axiome der klassischen Topologie (C1)-(C3) sowie das Axiom ( $T_0$ ).

**Definition ACC:** Ein *abstrakter Zellenkomplex* (AC Komplex, engl. abstract cell complex)  $A = (E, B, dim)$  ist eine Menge  $E$  von abstrakten Elementen, versehen mit einer asymmetrischen, irreflexiven und transitiven Berandungsrelation  $B \subset E \times E$  und mit einer Dimensionsfunktion  $dim : E \rightarrow I$  von  $E$  in die Menge  $I$  der nicht-negativen ganzen Zahlen, wobei  $dim(a) < dim(b)$  für alle Paare  $(a, b) \in B$  gilt.

Die Elemente von  $E$  heißen *abstrakte Zellen*. Es wird in diesem Zusammenhang der Begriff *abstrakt* verwendet, um zu verdeutlichen, dass die Zellen nicht als Punkte eines Euklidischen Raumes betrachtet werden sollen.

Wenn eine Zelle  $a$  eine von ihr verschiedene Zelle  $b$  berandet, dann heißt  $a$  eine *Seite* von  $b$ . Seiten von  $b$  sind keine Teilmengen von  $b$ . Im Gegensatz zum Euklidischen Raum ist der Durchschnitt zweier abstrakter Zellen immer leer.

Wenn  $d = dim(e)$ , dann heißt  $e$  *d-dimensionale Zelle* oder auch *d-Zelle*. Ein AC Komplex heißt *k-dimensional* oder *k-Komplex*, wenn  $k$  die maximale Dimension seiner Zellen ist.

**Definition SC:** Ein *Teilkomplex* (engl. subcomplex)  $S = (E', B', dim')$  eines gegebenen AC Komplexes  $A = (E, B, dim)$  ist ein AC Komplex, dessen Menge  $E'$  eine Teilmenge von  $E$  und die Berandungsrelation  $B'$  ein Durchschnitt von  $B$  mit  $E' \times E'$  ist. Die Dimension  $dim'$  ist gleich der Dimension  $dim$  für alle Zellen von  $E'$ .

**Definition NP:** Eine Folge von paarweise inzidenten Zellen eines AC Komplexes  $A$  der Form

$$c_0^n c_1^{n-1} c_2^n \dots c_{l-1}^{n-1} c_l^n$$

wobei  $c_i^n$  eine  $n$ -dimensionale und  $c_i^{n-1}$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Zelle von  $A$  ist, heißt ein  *$n$ -dimensionaler Weg* (engl.  $n$ -dimensional path) in  $A$ .

**Definition SZ:** Ein  $n$ -dimensionaler AC Komplex  $A$  heißt *stark zusammenhängend* (engl. strongly connected), wenn zwei beliebige  $n$ -dimensionale Zellen aus  $A$  mit einem  $n$ -dimensionalen Weg in  $A$  verbunden werden können.

**Definition HN:** Ein  $n$ -dimensionaler AC Komplex  $A$  heißt *homogen  $n$ -dimensional* (engl. homogeneously  $n$ -dimensional), wenn jede  $k$ -dimensionale Zelle  $c^k$  von  $A$  mit  $k < n$  mit einer  $n$ -Zelle  $c^n$  von  $A$  inzident ist.

**Definition RG:** Eine *Region* (engl. region)  $R$  ist ein offener zusammenhängender Teilkomplex eines AC Komplexes  $A$ .

**Definition RD:** Eine Region  $R$  eines  $n$ -dimensionalen AC Komplexes  $A$  heißt *dicht* (engl. solid) oder *dichte Region*, wenn jede Zelle  $c \in A, c \notin R$  mit einer  $n$ -dimensionalen Zelle des Komplementes  $A \setminus R$  inzident ist.

**Definition INT:** Das *Innere* (engl. interior)  $int(S, A)$  eines Teilkomplexes  $S$  bezüglich eines AC Komplexes  $A$  ist die Menge aller Zellen aus  $S$ , die nicht zur Begrenzung  $Fr(S, A)$  gehören:  $int(S, A) = S \setminus Fr(S, A)$ .

**Definition EXT:** Das *Äußere* (engl. exterior)  $ext(S, A)$  eines Teilkomplexes  $S$  bezüglich eines AC Komplexes  $A$  ist das Innere des Komplementes von  $S$  bezüglich  $A$ :  $ext(S, A) = int(A \setminus S, A) = A \setminus (S \cup Fr(A \setminus S, A))$ .

**Definition BD:** Der *Rand* (engl. boundary)  $\partial S$  eines  $n$ -dimensionalen Teilkomplexes  $S$  eines  $n$ -dimensionalen AC Komplexes  $A$  ist die Vereinigung aller Abschlüsse von  $(n - 1)$ -Zellen von  $A$ , die jeweils genau eine  $n$ -Zelle von  $S$  beranden.

#### A.2.4 Mannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeiten stellen in der allgemeinen Topologie eine wichtige Klasse von Objekten dar, die besondere Eigenschaften besitzen. Auch innerhalb der AC Komplexe lassen sich Mannigfaltigkeiten definieren [21].

**Definition PC:** Eine 1-Zelle  $c^1$  eines AC Komplexes  $A$  heißt *echt* (engl. proper), wenn sie von genau zwei 0-Zellen  $c_1^0$  und  $c_2^0$  aus  $A$  berandet wird.

**Definition ES:** Eine *elementare Unterteilung* (engl. elementary subdivision) einer echten 1-Zelle  $c^1$ , welche von den beiden 0-Zellen  $c_1^0$  und  $c_2^0$  berandet wird, ersetzt den Komplex  $C' = (c_1^0 < c^1 > c_2^0)$  durch den 1-Komplex  $C'' = (c_1^0 < c_1^1 > c_3^0 < c_2^1 > c_2^0)$ , wobei  $c_1^1$  und  $c_2^1$  1-Zellen und  $c_3^0$  eine neue 0-Zelle sind.

Die folgende Definition soll rekursiv aufgefasst werden, also zunächst für  $m = 1$ , dann für  $m = 2$ , usw.

**Definition MB:** Ein  $m$ -Komplex  $C$ , der durch  $k \geq 0$  elementare Unterteilungen einer einzelnen echten  $m$ -Zelle entsteht, heißt *offene kombinatorische  $m$ -Kugel* (engl. open combinatorial  $m$ -ball). Für  $m = 1$  ist dies eine Folge von paarweise inzidenten 1- und 0-Zellen, die mit 1-Zellen beginnt und endet. Eine einzelne 1-Zelle ist eine offene kombinatorische 1-Kugel.

**Definition MS:** Der Rand einer offenen  $m$ -Kugel heißt *kombinatorische  $(m-1)$ -Sphäre* (engl. combinatorial  $(m-1)$ -sphere). Für  $m = 1$  besteht er aus genau zwei 0-Zellen. Der Abschluß einer  $m$ -Kugel heißt *abgeschlossene  $m$ -Kugel*. Die Vereini-

gung zweier abgeschlossener  $m$ -Kugeln mit identischem Rand heißt *kombinatorische  $m$ -Sphäre*.

Eine  $m$ -Zelle  $c^m$  mit  $m > 1$  heißt *echt*, wenn ihr Rand  $\partial c^m$  eine kombinatorische  $(m-1)$ -Sphäre ist. Ein AC Komplex heißt *echt*, wenn alle seine Zellen *echt* sind.

Eine elementare Unterteilung in einem  $n$ -Komplex ersetzt eine echte  $m$ -Zelle  $c^m$  mit  $1 < m \leq n$  durch zwei echte  $m$ -Zellen  $c_1^m, c_2^m$  und eine neue echte  $(m-1)$ -Zelle  $c^{(m-1)}$ , die  $c_1^m$  und  $c_2^m$  berandet. Der Rand  $\partial c^{(m-1)}$  ist dabei eine  $(m-2)$ -Sphäre  $S^{(m-2)} \subset \partial c^m$  mit  $\partial(c_1^m \cup c^{(m-1)} \cup c_2^m) = \partial c^m$  und  $c^{(m-1)} \notin \partial c^m$ .

**Definition KH:** Zwei echte AC Komplexe heißen *kombinatorisch homöomorph* (engl. combinatorial homeomorphic), wenn sie isomorphe elementare Unterteilungen besitzen.

**Definition MA:** Eine  $n$ -dimensionale *kombinatorische Mannigfaltigkeit* oder kurz  *$n$ -Mannigfaltigkeit* (engl. combinatorial manifold,  $n$ -manifold)  $M_n$  ohne Rand ist ein  $n$ -dimensionaler AC Komplex, in welchem der Rand der kleinsten offenen Umgebung  $SON(c^0, M_n)$  jeder 0-Zelle  $c^0$  einer  $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre homöomorph ist. In einer Mannigfaltigkeit mit Rand gibt es 0-Zellen  $c^0$ , deren kleinste offene Umgebungen  $SON(c^0, M_n)$  einen Rand haben, der einer  $(n-1)$ -dimensionalen „Halb-Sphäre“, d.h. einer  $(n-1)$ -Kugel, homöomorph ist.

Aus dieser Definition und der Definition der elementaren Unterteilung folgt, dass eine Mannigfaltigkeit ein dichter AC Komplex ist.

**Definition TG:** Das *topologische Geschlecht* (engl. topological genus) einer Oberfläche ist definiert als die maximale Anzahl von einfachen, geschlossenen, sich nicht überschneidenden Kurven, die sich auf der Oberfläche befinden können, ohne die Oberfläche zu zerschneiden, d.h. in mehrere Komponenten zu zerlegen. [44]

### A.2.5 Kartesische Komplexe

Eine besondere Klasse der AC Komplexe bilden die Kartesischen Komplexe [19, 25], die in diesem Unterabschnitt definiert werden sollen.

**Definition CU:** Ein zusammenhängender eindimensionaler AC Komplex  $A$ , in dem alle Zellen, bis auf zwei, mit genau zwei anderen Zellen inzidieren, heißt *topologische Kurve* (engl. topological line).

**Definition KK:** Es können den Zellen einer topologischen Kurve  $S$  ganze Zahlen derart zugeordnet werden, dass eine Zelle mit der Nummer  $i$  mit den Zellen mit den Nummern  $i - 1$  und  $i + 1$  inzidiert. Diese Zahlen nennt man *kombinatorische Koordinaten* (engl. combinatorial coordinates) der Zellen des eindimensionalen AC Komplexes  $S$ .

**Definition KA:** Das Kartesische Produkt eindimensionaler AC Komplexe wird als *Kartesischer AC Komplex* (engl. Cartesian AC complex) oder kurz *Kartesischer Komplex* bezeichnet. Die  $n$  eindimensionalen AC Komplexe werden als Koordinatenachsen  $A_i$  eines  $n$ -dimensionalen Raumes aufgefasst. Die Zellen des  $n$ -dimensionalen Kartesischen AC Komplexes sind  $n$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  mit  $a_i \in A_i$ .

Die Berandungsrelation eines  $n$ -dimensionalen Kartesischen AC Komplexes  $A^n$  ist folgendermaßen definiert: Ein  $n$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  berandet ein von ihm verschiedenes  $n$ -Tupel  $(b_1, \dots, b_n)$  genau dann, wenn für alle  $i = 1, \dots, n$  die Zelle  $a_i$  mit der Zelle  $b_i$  in  $A_i$  inzidiert und  $\dim(a_i) \leq \dim(b_i)$  in  $A_i$ . Die Dimension der Produktzelle ist die Summe der Dimensionen der Faktorzellen der eindimensionalen AC Komplexe.

Unter der Voraussetzung, dass die Zuordnung der kombinatorischen Koordinaten an die Zellen eines eindimensionalen AC Komplexes derart erfolgt, dass 0-Zellen immer gerade und 1-Zellen immer ungerade Koordinaten erhalten, kann die Dimension einer Zelle eines  $n$ -dimensionalen Kartesischen Komplexes aus der

Anzahl seiner ungeraden Koordinaten bestimmt werden.

### A.3 Lineare Algebra

Für die Bestimmung der linearen Abhängigkeit von Vektoren existiert der Begriff der Linearkombination gemäß folgender Definition [45]:

**Definition LK:** Eine *Linearkombination*  $x$  von endlich vielen Elementen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  einer Menge  $M$  ist die Summe von beliebigen Vielfachen dieser Elemente. Um die Vielfachen berechnen zu können, sind Faktoren zu wählen, mit denen die Elemente multipliziert werden. Diese Faktoren nennt man *Koeffizienten* der Linearkombination.

In einem endlichdimensionalen Vektorraum gilt:

$$x = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

Sind die Koeffizienten  $a_i$  der Linearkombination alle größer oder gleich 0, so spricht man von einer *konischen Linearkombination*. Ist die Summe der Koeffizienten  $a_i$  gleich 1, so handelt es sich um eine *Affinkombination*.

**Definition LKK:** Eine konische Affinkombination heißt *Konvexkombination*.

### A.4 Digitale Geometrie

Auf der Basis der oben definierten Begriffe der Kartesischen Koordinaten und der Kartesischen Komplexe lassen sich weitere Begriffe definieren [19, 23], die einen metrischen Raum voraussetzen.

**Definition DHS:** Ein *digitaler Halbraum* (engl. digital half-space) ist eine dichte Region eines 3-dimensionalen AC Komplexes, die alle 3-dimensionalen Zellen enthält, dessen Koordinaten eine lineare Ungleichung der folgenden Form erfüllen.



$$H(x, y, z) = p \cdot x + q \cdot y + r \cdot z + s > 0 \quad (\text{A.2})$$

Die Parameter  $p$ ,  $q$ ,  $r$  und  $s$  sind dabei ganze Zahlen.

**Definition DCS:** Ein nicht-leerer Durchschnitt digitaler Halbräume heißt *digitale konvexe Teilmenge* (engl. digital convex subset) eines 3-dimensionalen Raumes.

Analog zu den beiden Definitionen DHS und DCS lassen sich diese Begriffe auch auf die Dimensionen 2 übertragen: Eine *digitale Halbebene* (engl. digital half-plane) ist eine dichte Region eines 2-dimensionalen AC Komplexes, die alle 2-dimensionalen Zellen enthält, dessen Koordinaten eine lineare Ungleichung erfüllen. Ein nicht-leerer Durchschnitt digitaler Halbebenen heißt *digitale konvexe Teilmenge* eines 2-dimensionalen Raumes.

**Definition DSS:** Eine *digitale Strecke* (engl. digital straight line segment, DSS) ist eine beliebige zusammenhängende Teilmenge der Begrenzung einer digitalen Halbebene.

**Definition DPP:** Ein *digitales Ebenenstück* (engl. digital plane patch, DPP) ist eine beliebige zusammenhängende Teilmenge der Begrenzung eines digitalen Halbraumes.

**Definition DK2:** Eine *digitale Kreisscheibe* (engl. digital disk) ist eine 2-dimensionale dichte Region, die alle 2-dimensionalen Zellen enthält, die die folgende Ungleichung erfüllen.

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 < r^2 \quad (\text{A.3})$$

Hierbei bezeichnen  $x$  und  $y$  die Koordinaten der 2-Zellen,  $x_c$  und  $y_c$  die Koordinaten des Mittelpunktes und  $r$  den Radius der digitalen Kreisscheibe.

**Definition DK3:** Eine *digitale Kugel* (engl. digital ball) ist eine 3-dimensionale dichte Region, die alle 3-dimensionalen Zellen enthält, die die folgende Ungleichung erfüllen.

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 < r^2 \quad (\text{A.4})$$

Hierbei bezeichnen  $x$ ,  $y$  und  $z$  die Koordinaten der 3-Zellen,  $x_c$ ,  $y_c$  und  $z_c$  die Koordinaten des Mittelpunktes und  $r$  den Radius der digitalen Kugel.

## A.5 Datenstrukturen

Zur Speicherung der topologischen und geometrischen Eigenschaften 2- und 3-dimensionaler digitaler Bilder mit Hilfe des Computers sind spezielle Datenstrukturen notwendig. Für das Gebiet der abstrakten Zellenkomplexe wurde in [18] eine solche Datenstruktur, genannt *Zellenliste*, eingeführt.

### A.5.1 Blockkomplexe

Die Datenstruktur der Zellenliste basiert auf dem Begriff des Blockkomplexes [33], der in [18] modifiziert auf das Gebiet der AC Komplexe übertragen wurde.

**Definition BK:** Sei  $M$  eine Zerlegung eines Komplexes  $A$  in Teilmengen  $S_i^k$ . Teilmengen mit  $k = 0$  sind 0-Zellen von  $A$ . Jede Teilmenge mit  $k > 0$  ist kombinatorisch homöomorph zu einer offenen  $k$ -dimensionalen Kugel. Eine Berandungsrelation  $BR$  und eine Dimensionsfunktion  $Dim$  sind auf  $M$  in natürlicher Weise erklärt. Das Tripel  $B(A) = (M, BR, Dim)$  heißt *Blockkomplex von  $A$*  (engl. block complex of  $A$ ); die Teilmengen  $S_i^k$  heißen  *$k$ -dimensionale Blöcke* oder auch  *$k$ -Blöcke* (engl.  $k$ -dimensional blocks,  $k$ -blocks). Die Elemente von  $M$  sind *Blockzellen* (engl. block cells).

Nach dieser Definition sind die  $n$ -Blöcke eines  $n$ -dimensionalen AC Komplexes Regionen. Diese werden berandet von den  $k$ -Blöcken mit  $0 \leq k < n$ .  $k$ -Blockzellen mit  $k \leq n - 2$  können *verzweigt* sein, d.h. sie inzidieren mit mindestens drei  $n$ -Blockzellen. Anderenfalls heißen sie *unverzweigt*.

**Definition IS:** Die *Inzidenzstruktur*  $IS$  eines Blockes  $BC$  eines echten Blockkomplexes  $B(A)$  ist ein Teilkomplex von  $B(A)$ , der alle Blöcke enthält, die mit  $BC$  inzidieren, außer  $BC$  selbst [22]:

$$IS(BC, B(A)) = SON^*(BC, B(A)) \cup Cl^*(BC, B(A)) \quad (A.5)$$

Hierbei bezeichnen

$$SON^*(BC, B(A)) = SON(BC, B(A)) \setminus \{BC\} \quad (A.6)$$

und

$$Cl^*(BC, B(A)) = Cl(BC, B(A)) \setminus \{BC\} \quad (A.7)$$

### A.5.2 Zellenlisten

Im Folgenden soll die 3-dimensionale geometrische Zellenliste beschrieben werden. Im Gegensatz zur topologischen Zellenliste enthält die geometrische Zellenliste nicht nur Informationen, welche Zelle mit welcher anderen Zelle inzidiert, sondern auch Koordinaten der Zellen. [21]

Für die Erzeugung der Zellenliste wird die Inzidenzstruktur jeder Blockzelle eines Blockkomplexes betrachtet. Es werden für die Beschreibung 3-dimensionaler Objekte vier Teillisten benötigt, jeweils für die Blockzellen der Dimension 0 bis 3.

Die Teilliste der 0-Blöcke enthält als topologische Informationen die Anzahl der mit jeder 0-Blockzelle inzidierenden 1-Blöcke sowie deren Indices innerhalb der Liste der 1-Blockzellen. Als geometrische Information werden zu jeder 0-Blockzelle ihre Koordinaten gespeichert.

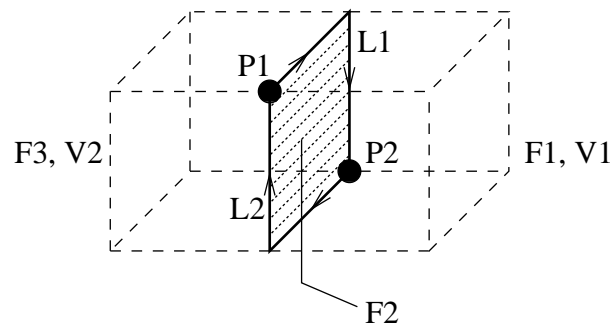
Die Liste der 1-Blockzellen enthält die Anzahl der Zellen, die von der jeweiligen 1-Blockzelle berandet werden, also Zellen der Dimension 2 und 3. Weiterhin enthält diese Teilliste den Start- und den Endpunkt jeder 1-Blockzelle und einen Zeiger

auf eine verkettete Liste. Diese verkettete Liste enthält für jede 1-Blockzelle die von ihr berandeten 2- und 3-Blockzellen. Die verkettete Liste ist im mathematisch positiven Sinn orientiert.

Die Teilliste der 2-Blockzellen enthält die Anzahl der Zellen, die die jeweilige 2-Blockzelle beranden, sowie einen Zeiger auf eine verkettete Liste, die den Rand der 2-Blockzelle beschreibt. Diese verkettete Liste ist orientiert und legt damit für die jeweilige 2-Blockzelle eine Orientierung fest, die wiederum dem mathematisch positiven Sinn entspricht. Des Weiteren enthält diese Teilliste die Indices der beiden 3-Blockzellen, die auf der positiven bzw. negativen Seite der 2-Blockzelle liegen.

In der Teilliste der 3-Blockzellen befindet sich nun lediglich die Anzahl der 2-Blockzellen, die die jeweilige 3-Blockzelle beranden, sowie deren Indices in der Liste der 2-Blockzellen.

Die Beschreibung eines 3-dimensionalen Blockkomplexes durch diese vier Teillisten soll an einem Beispiel aus [21] gezeigt werden.



**Abbildung A.3:** Beispiel für einen 3-dimensionalen Blockkomplex bestehend aus den 0-Blockzellen  $P_1$  und  $P_2$ , den 1-Blockzellen  $L_1$  und  $L_2$ , den 2-Blockzellen  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  sowie den 3-Blockzellen  $V_1$  und  $V_2$ .

Die zu diesem Beispiel gehörenden Teillisten sehen folgendermaßen aus:

0-Blockzelle	$N_{SON}$	1-Blockzellen	Koordinaten
$P_1$	2	$-L_1, +L_2$	$(x_1, y_1, z_1)$
$P_2$	2	$+L_1, -L_2$	$(x_2, y_2, z_2)$

**Tabelle A.1:** Liste der 0-Blockzellen.

1-Blockzelle	SP	EP	$N_{SON}$	Zeiger	verkettete Liste
$L_1$	$P_1$	$P_2$	5	$Z_1$	$-F_1 \rightarrow V_1 \rightarrow -F_2 \rightarrow V_2 \rightarrow +F_3 \rightarrow 0$
$L_2$	$P_2$	$P_1$	5	$Z_2$	$-F_1 \rightarrow V_1 \rightarrow -F_2 \rightarrow V_2 \rightarrow +F_3 \rightarrow 0$

**Tabelle A.2:** Liste der 1-Blockzellen.

2-Blockzelle	$+V$	$-V$	$N_{Cl}$	Zeiger	verkettete Liste
$F_1$	$-$	$V_1$	4	$Z_3$	$P_1 \rightarrow -L_2 \rightarrow P_2 \rightarrow -L_1 \rightarrow P_1$
$F_2$	$V_1$	$V_2$	4	$Z_4$	$P_1 \rightarrow -L_2 \rightarrow P_2 \rightarrow -L_1 \rightarrow P_1$
$F_3$	$-$	$V_2$	4	$Z_5$	$P_1 \rightarrow +L_1 \rightarrow P_2 \rightarrow +L_2 \rightarrow P_1$

**Tabelle A.3:** Liste der 2-Blockzellen.

3-Blockzelle	$N_{Cl}$	2-Blockzellen
$V_1$	2	$+F_1, -F_2$
$V_2$	2	$+F_2, +F_3$

**Tabelle A.4:** Liste der 3-Blockzellen.



## Anhang B

### Theorem zur konvexen Hülle

In [24] wurde gezeigt, dass der dort vorgestellte Algorithmus zur Erzeugung der konvexen Hülle einer gegebenen Menge von Voxeln tatsächlich die konvexe Hülle berechnet. Die dafür notwendigen Lemmata und das Theorem werden in diesem Abschnitt aufgeführt. Für die Beweise der Lemmata sei auf [24] verwiesen.

Theorem PL besagt, dass der in Abschnitt 4.1 vorgestellte Algorithmus die konvexe Hülle  $CH(V)$  einer gegebenen Menge  $V$  von Voxeln erzeugt. Dafür werden zuvor die Lemmata LZ, CH und BE benötigt.

**Lemma LZ:** Sei  $V$  eine Menge von 3-dimensionalen Vektoren  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , die jeweils zu Voxeln (3-Zellen) oder zu Voxelecken (0-Zellen) zeigen. Sei  $T$  eine Teilmenge von  $V$ , in der alle Vektoren bestimmte lineare Ungleichungen erfüllen, d.h. die Ungleichung schneidet  $T$  aus  $V$  aus. Dann enthält  $T$  mindestens einen Vektor, der keine Konvexkombination von Vektoren aus  $V$  ist.

**Lemma CH:** Sei  $V$  eine Menge von 3-dimensionalen Vektoren and sei  $K$  ein AG Polyeder, welches die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1.  $K$  ist konvex;
2.  $K$  enthält alle lokalen Ecken von  $V$ ;
3. jede Ecke von  $K$  ist identisch zu einer lokalen Ecke von  $V$ .

Dann ist  $K$  die konvexe Hülle von  $V$  gemäß Definition CH (siehe S.9).

**Lemma BE:** Wenn eine Kante  $E$  eines Polyeders  $K$  zwischen einer Fläche  $F_v$  und einer Fläche  $F_n$  liegt, wobei  $F_v$  von einem Punkt  $P$  aus sichtbar ist und  $F_n$  von  $P$  aus nicht, dann liegt das Polyeder  $K$  vollständig im abgeschlossenen Halbraum, der durch die Ebene  $(P, E)$  berandet wird, welche durch  $P$  und  $E$  geht.

**Theorem PL:** Der Algorithmus aus Abschnitt 4.1 erzeugt die konvexe Hülle einer gegebenen Menge von Voxeln.

*Beweis:* Man betrachte die Koordinaten der Voxel oder der Voxelcken als 3-dimensionale Vektoren, die die Menge  $V$  bilden. Im ersten Schritt ermittelt der Algorithmus die lokalen Ecken von  $V$ . Nur diese Vektoren werden als Kandidaten für die Ecken des zu erzeugenden Polyeders benutzt. Somit ist die dritte Bedingung von Lemma CH erfüllt. Um die beiden anderen Bedingungen zu erfüllen, muss gezeigt werden, dass das erzeugte Polyeder konvex ist und alle lokalen Ecken von  $V$  enthält.

Der Algorithmus startet mit einem Polyeder  $K_i$ ,  $i = 0$ , welches ein Tetraeder ist. Es ist konvex. Danach nimmt der Algorithmus die nächste lokale Ecke  $P$ , die noch nicht benutzt wurde und bestimmt die Menge der Flächen, die von  $P$  aus sichtbar sind. Der Rand der Menge der sichtbaren Flächen besteht aus Ecken und Kanten, wobei jede Kante genau eine sichtbare Fläche berandet. Der Algorithmus konstruiert nun jeweils eine neue Fläche für jede Kante des Randes. Diese Flächen verbinden jeweils die Kante des Randes mit dem Punkt  $P$ . Im Anschluss daran werden die sichtbaren Flächen aus  $K_i$  entfernt. Gemäß Lemma BE liegt das Polyeder  $K_i$  vollständig im abgeschlossenen Halbraum, der durch die Ebene bestimmt wird, die zu einer neu erzeugten Fläche  $F$  gehört. Es liegt weiterhin im abgeschlossenen Halbraum, der der Innenseiten jeder nicht aus  $K_i$  entfernten Flächen entspricht. Daher ist das neue Polyeder der Durchschnitt von Halbräumen und ist demnach konvex. Dies ist für jede neu hinzugefügte lokale Ecke  $P$  erfüllt.

Es bleibt nun zu zeigen, dass  $K$  alle lokalen Ecken von  $V$  enthält. Der Algorithmus verarbeitet alle lokalen Ecken von  $V$ . Einige liegen innerhalb des jeweils



aktuellen Polyeders. Diese werden nicht für die Erzeugung von  $K$  benutzt, aber sie sind trotzdem bereits in  $K$  enthalten. Die anderen lokalen Ecken von  $V$  gelangen als Ecken in das Polyeder  $K$  und sind deshalb in  $K$  enthalten. Alle lokalen Ecken, die sich in  $K$  befinden, bleiben in  $K$ , da das modifizierte Polyeder  $K_{i+1}$  das alte Polyeder  $K_i$  vollständig enthält. Daher sind alle lokalen Ecken in  $K$  enthalten. Somit sind alle drei Bedingungen von Lemma CH erfüllt und das Polyeder  $K$  ist die konvexe Hülle von  $V$ .

□



## Anhang C

# Beispiel einer Zellenliste der initialen konvexen Hülle

In Abschnitt 4.1.4 (siehe S.36) wird eine initiale konvexe Hülle aus 4 nicht-koplanaren Kandidatenvektoren aus der Menge  $L$  aufgespannt. Die Speicherung dieses Polyeders erfolgt unter Nutzung der 2-dimensionalen Zellenliste.

Dabei ist es ausreichend, lediglich die Oberfläche eines AG Polyeders zu speichern, denn gemäß Definition AP (siehe S.8) enthält ein abstraktes Polyeder genau eine 3-dimensionale Zelle. Auf welcher Seite des Polyeders sich das Innere und somit die einzelne 3-Zelle befindet, wird durch den Umlaufsinn der Kanten des Polyeders festgelegt.

Die Zellenliste (siehe S.171) eines 2-dimensionalen AC Komplexes besteht aus drei Teillisten, jeweils für die Zellen der Dimension 0, 1 und 2. Die 0-Zellen sind die Ecken, die 1-Zellen sind die Kanten und die 2-Zellen sind die Flächen des Polyeders. Jeder Eintrag in der  $k$ -ten Teilliste entspricht einer  $k$ -Zelle  $c^k$  und enthält Verweise auf alle Zellen, die mit  $c^k$  inzidieren. Die Einträge der 0-Zellen enthalten darüberhinaus ihre Koordinaten.

Für das Beispiel in Abbildung 4.2 sind im Folgenden die drei Teillisten dargestellt, die die Zellen dieses Tetraeders enthalten.

Ecke	Koordinaten	Kanten
1	$(x_1, y_1, z_1)$	-1, 3, -5
2	$(x_2, y_2, z_2)$	1, -2, 4
3	$(x_3, y_3, z_3)$	2, -3, 6
4	$(x_4, y_4, z_4)$	-4, 5, -6

**Tabelle C.1:** Die Ecken des Tetraeders in der Teilliste der 0-Zellen.

Kante	Startpunkt	Endpunkt	linke Fläche	rechte Fläche
1	1	2	1	2
2	2	3	1	3
3	3	1	1	4
4	4	2	2	3
5	1	4	2	4
6	4	3	3	4

**Tabelle C.2:** Die Kanten des Tetraeders in der Teilliste der 1-Zellen.

Fläche	$n$	Paare $(P, L)$
1	3	$(1, 1), (2, 2), (3, 3)$
2	3	$(1, 5), (4, 4), (2, -1)$
3	3	$(2, -4), (4, 6), (3, -2)$
4	3	$(1, -3), (3, -6), (4, -5)$

**Tabelle C.3:** Die Flächen des Tetraeders in der Teilliste der 2-Zellen.

Die Teillisten enthalten im Einzelnen folgende Einträge: Die Liste der 0-Zellen (Tabelle C.1) besitzt in der ersten Spalte die Indices der Ecken, die gleichzeitig die Indices der Kandidatenvektoren in der Liste  $L$  sind. Die zweite Spalte beinhaltet für jede Ecke drei Integer-Werte  $(x_i, y_i, z_i)$ , die den Koordinaten der Ecke entsprechen. Die dritte Spalte enthält für jede 0-Zelle die Indices aller Kanten, die mit der jeweiligen 0-Zelle inzidieren. Dabei gibt das Vorzeichen an, ob eine Kante zur aktuellen Ecke zeigt (Plus) oder von ihr weg (Minus).

Die zweite Teilliste (Tabelle C.2) ist die Liste der Kanten. Die Spalten dieser Teilliste enthalten zunächst den Index jeder Kante und dazu ihren Startpunkt

und Endpunkt (Verweise auf die Einträge in der Teilliste der 0-Zellen) sowie die von dieser Kante berandete linke und rechte Fläche (Verweise auf die Einträge in der Teilliste der 2-Zellen). Dabei wird links und rechts durch die Betrachtung von außen definiert.

Die dritte Teilliste (Tabelle C.3) ist die Liste der Flächen. Zu jeder Fläche wird lediglich ihr Rand gespeichert, denn durch den Rand stehen die inzidierenden Zellen mit der jeweiligen 2-Zelle in topologischer Relation. Bei einem konvexen Polyeder ist der Rand einer 2-Zelle eine 1-Mannigfaltigkeit und somit ein geschlossenes Polygon. Von diesem werden nun Paare von 0- und 1-Zellen gespeichert, die eine geschlossene Sequenz ergeben, die in Form einer verketteten Liste in der dritten Spalte der 2-Zellenliste abgelegt ist. Die zweite Spalte gibt die Anzahl der Paare in der dritten Spalte an, da die Flächen eines Polyeders im Allgemeinen eine unterschiedliche Anzahl von Kanten besitzen.

Die hier beschriebene Version der 2-dimensionalen Zellenliste enthält zu einem Paar inzidierender Zellen  $c^k$  und  $c^m$  jeweils einen Verweis von  $c^k$  zu  $c^m$  und auch von  $c^m$  zu  $c^k$ . Diese Redundanz kostet Speicherplatz, jedoch ist es von Vorteil, beide Verweise während der Berechnung der konvexen Hülle zur Verfügung zu haben, da inzidierende Zellen ohne Suche gefunden werden können. Am Ende der Erzeugung der konvexen Hülle bzw. am Ende der Modifikation eines AG Polyeders kann die Redundanz entfernt werden, um eine sparsame Repräsentation zu erzielen.



# Literaturverzeichnis

- [1] Adams, C.C.: *Das Knotenbuch. Einführung in die mathematische Theorie der Knoten*. Spektrum Akademischer Verlag. 1995.
- [2] Andres, E., Acharya, R., Sibata, C.: *Discrete Analytical Hyperplanes*. In: Graphical Models and Image Processing, Vol.59, No.5, pp. 302-309. 1997.
- [3] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf, O.: *Computational Geometry - Algorithms and Applications*. Springer-Verlag. 2000.
- [4] Brimkov, V.E.: *Discrete Volume Polyhedrization is Strongly NP-Hard*. University of Auckland, CITR-TR-179. 2006.
- [5] Bronstein, I.N. et al.: *Taschenbuch der Mathematik*. 4., überarbeitete und erweiterte Auflage, Verlag Harri Deutsch. 1999.
- [6] Bülow, T., Klette, R.: *Digital Curves in 3D Space and a Linear-Time Length Estimation Algorithm*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.24, No.7, pp. 962-970. 2002.
- [7] Chand, D.R., Kapur, S.S.: *An Algorithm for Convex Polytopes*. Journal of the ACM, Vol.17, Issue 1, pp. 78-86. 1970.
- [8] Chernyaev, E.V.: *Marching Cubes 33: Construction of Topologically Correct Isosurfaces*. Technical Report, CN95-17, CERN, Geneva, Switzerland. 1995.
- [9] *CiteSeer.IST*. CiteSeer – Scientific Literature Digital Library. <http://citeseer.ist.psu.edu>.
- [10] Clarkson, K.L., Mehlhorn, K., Seidel, R.: *Four results on randomized incremental constructions*. In: Finkel, A., Jantzen, M. (Eds.): 9th Annual Sympos-

- sium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 92). Lecture Notes in Computer Science, Vol.577, pp. 463-474. Springer-Verlag. 1992.
- [11] Eckhardt, U., Latecki, L.: *Digital topology*. Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Reihe A, Preprint 89. 1994.
- [12] Françon, J., Papier, L.: *Polyhedrization of the Boundary of a Voxel Object*. In: Bertrand, G., Couprie, M., Perroton, L. (Eds.): *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Lecture Notes in Computer Science, Vol.1568, pp. 425-434. Springer-Verlag. 1999.
- [13] Hurtado, F., Toussaint, G.T., Trias, J.: *On Polyhedra Induced by Point Sets in Space*. In: *Proceedings of the 15th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG'03)*, pp. 107-110. 2003.
- [14] Ihle, T.: *3D Umgebungsrekonstruktion durch Segmentierung im spatiotemporalen Kontinuum*. Dissertation, TU Dresden. 1998.
- [15] Klette, R., Sun, H.J.: *A Global Surface Area Estimation Algorithm for Digital Regular Solids*. University of Auckland, CITR-TR-69. 2000.
- [16] Klette, R.: *Digital Geometry - The Birth of a New Discipline*. University of Auckland, CITR-TR-79. 2001.
- [17] Klette, R., Rosenfeld, A.: *Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. Morgan Kaufmann, San Francisco. 2004.
- [18] Kovalevsky, V.A.: *Finite Topology as Applied to Image Analysis*. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, Vol.45, No.2, pp. 141-161. 1989.
- [19] Kovalevsky, V. A.: *Digital Geometry based on the Topology of Abstract Cell Complexes*. In: *Proceedings of the Third International Colloquium „Discrete Geometry for Computer Imagery“*. University of Strasbourg. pp. 259-284. 1993.
- [20] Kovalevsky, V. A.: *Interlaced Spheres and Multidimensional Tunnels*. *International Workshop „Topology in Computer Science“*, Schloß Dagstuhl, Universität des Saarlandes. 2000.



- [21] Kovalevsky, V. A.: *Algorithms and Data Structures for Computer Topology*. In: Bertrand, G., Imiya, A., Klette, R. (Eds): *Digital and Image Geometry*. Lecture Notes in Computer Science, Vol.2243, pp. 37-58. Springer-Verlag. 2001.
- [22] Kovalevsky, V.A.: *Multidimensional Cell Lists for Investigating 3-Manifolds*. In: *Discrete Applied Mathematics*, Vol.125, Issue 1. pp. 25-43. 2002.
- [23] Kovalevsky, V.A.: *Algorithms in Digital Geometry Based on Cellular Topology*. In: Klette, R., Zunic, J. (Eds.): *Combinatorial Image Analysis*. Lecture Notes in Computer Science, Vol.3322, pp. 366-393. Springer-Verlag. 2004.
- [24] Kovalevsky, V.A., Schulz, H.: *Convex Hulls in a 3-dimensional Space*. In: Klette, R., Zunic, J. (Eds.): *Combinatorial Image Analysis*. Lecture Notes in Computer Science, Vol.3322, pp. 176-196. Springer-Verlag. 2004.
- [25] Kovelevsky, V.A.: *Axiomatic Digital Topology*. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol.26, No. 1-2, pp. 41-58. 2006.
- [26] Kovalevski, V.A.: *mündliche Mitteilungen und E-Mail-Korrespondenz*. 2003-2008.
- [27] Li, F., Klette, R.: *Minimum-Length Polygon of a Simple Cube-Curve in 3D Space*. In: Klette, R., Zunic, J. (Eds.): *Combinatorial Image Analysis*. Lecture Notes in Computer Science, Vol.3322, pp. 502-511. Springer-Verlag. 2004.
- [28] Listing, J.B.: *Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerungen des Euler'schen Satzes von den Polyëdern*. *Abhandlungen der Mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Nr.10, pp. 97-182. 1861 und 1862.
- [29] Lorensen, W.E., Cline, H.E.: *Marching Cubes: A High-Resolution 3D Surface Construction Algorithm*. *Computer Graphics*, Vol. 21, No. 4, pp. 163-169. 1987.
- [30] O'Rourke, J.: *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press. 1994.

- [31] Preparata, F.P., Shamos, M.I.: *Computational Geometry - An Introduction*. Springer-Verlag. 1985.
- [32] Reveillès, J.P.: *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique*. Thèse d'état soutenue à l'Université Louis Pasteur. Strasbourg. 1991.
- [33] Rinow, W.: *Lehrbuch der Topologie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1975.
- [34] Schulz, H.: *Beschreibung von Flächen in digitalen 3D-Daten*. Diplomarbeit, TU Dresden. 2003.
- [35] Schulz, H., Fuchs, S., Kovalevsky, V.A.: *Analysis and Structured Representation of the Theory of Abstract Cell Complexes Applied to Digital Topology and Digital Geometry*. Technischer Bericht, TU Dresden, TUD-FI03-17. 2003.
- [36] Schulz, H.: *Polyhedral Surface Approximation of Non-Convex Voxel Sets through the Modification of Convex Hulls*. In: Brimkov, V.E., Barneva, R.P., Hauptman, H.A. (Eds.): *Combinatorial Image Analysis. Lecture Notes in Computer Science*, Vol.4958, pp. 38-50. Springer-Verlag. 2008.
- [37] Sivignon, I., Dupont, F., Chassery, J.-M.: *Discrete Surfaces Segmentation into Discrete Planes*. In: Klette, R., Zunic, J. (Eds.): *Combinatorial Image Analysis. Lecture Notes in Computer Science*, Vol.3322, pp. 458-473. Springer-Verlag. 2004.
- [38] Sloboda, F., Zatko, B.: *On Approximation of Jordan Surfaces in 3D*. In: Bertrand, G., Imiya, A., Klette, R. (Eds.): *Digital and Image Geometry. Lecture Notes in Computer Science*, Vol.2243, pp. 365-386. Springer-Verlag. 2001.
- [39] Steinitz, E.: *Beiträge zur Analysis situs*. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Nr.7, pp. 29-49. 1908.
- [40] Steinitz, E.: *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluss der Elemente der Topologie*. Aus dem Nachlass herausgegeben und ergänzt von Hans Rademacher. Springer-Verlag, Berlin. 1934.

- [41] Stillwell, J.: *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag. 1995.
- [42] Svensson, S., Arcelli, C., Sanniti di Baja, G.: *Characterising 3D Objects by Shape and Topology*. In: Nyström, I., Sanniti di Baja, G., Svensson, S. (Eds.): *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Lecture Notes in Computer Science, Vol.2886, pp. 124-133. Springer-Verlag. 2003.
- [43] Tucker, A.W.: *An abstract approach to manifolds*. *Annals Mathematics*, No.34, pp. 191-243. 1933.
- [44] Weisstein, E.: *Eric Weisstein's World of Mathematics*. Mathematisches Lexikon im Internet unter <http://mathworld.wolfram.com>.
- [45] *Wikipedia*. Die freie Enzyklopädie. <http://de.wikipedia.org>.

# Index

- $T_i$ -trennbar, 156
- Äußeres, 164
- abgeschlossen, 161
- Abschluss, 162
- abstrakter Zellenkomplex, 163
- abstraktes geometrisches Polyeder, 8
- abstraktes Polyeder, 8
- AC Komplex, 163
- ALF Raum, 159
- Ausschneiden, 70
- Begrenzung, 158
  - dünne, 159
  - dicke, 159
- Berandungsrelation, 161
- Blockkomplex, 170
- Blockzellen, 170
- dichte Region, 164
- digitale Halbebene, 169
- digitale konvexe Teilmenge, 169
- digitale Kreisscheibe, 169
- digitale Kugel, 169
- digitale Strecke, 169
- digitaler Halbraum, 168
- digitales Ebenenstück, 169
- DPP, 169
- DSS, 169
- echte Zelle, 165
- Eindrücken, 60, 76
- einfacher Tunnel, 69
- elementare Unterteilung, 165
- Elemente
  - maximale, 161
  - minimale, 161
- EULER Charakteristik, 55
- Geschlecht, topologisches, 166
- Grad der Nicht-Konvexität, 10
- Hülle, konvexe, 9
- Halbraum, digitaler, 168
- Homöomorphismus, 156
- homogen n-dimensional, 164
- Inneres, 164
- Invariante, topologische, 156
- Inzidenz, 158
- Inzidenzpfad, 158
- Inzidenzstruktur, 171
- Kartesischer Komplex, 167
- kleinste Nachbarschaft, 157
- kleinste offene Umgebung, 162
- kombinatorisch homöomorph, 166

- kombinatorische  $(m - 1)$ -Sphäre, 165
- kombinatorische Mannigfaltigkeit, 166
- konkave 0-Zelle, 13, 14
- konkave 1-Zelle, 13
- Konkavität, 9
- konvexe 0-Zelle, 13
- konvexe 1-Zelle, 13
- konvexe 3-Zelle, 35
- konvexe Hülle, 9
- konvexes Polyeder, 8
- Konvexkombination, 168
- Koordinaten
  - kombinatorische, 167
- Kugel
  - digitale, 169
  - offene kombinatorische, 165
- Kurve
  - topologische, 167
- LF Raum, 157
- Linearkombination, 168
- lokale Ecke, 34
- Mannigfaltigkeit
  - kombinatorische, 166
- Menge
  - abgeschlossene, 161
  - offene, 161
- Modifikation, 59
- Nachbarschaft, 157
  - kleinste, 157
- Nachbarschaftsrelation, 158
- nicht-einfacher Tunnel, 69
- offen, 161
- offene kombinatorische  $m$ -Kugel, 165
- Opponent, 158
- Polyeder
  - abstraktes, 8
  - abstraktes geometrisches, 8
  - konvexes, 8
- Punktnormale
  - einer 0-Zelle, 76
  - einer 3-Zelle, 76
- Rand, 164
  - topologischer, 158
- Raum
  - lokal endlicher, 157
  - topologischer, 155
- Region, 164
  - dichte, 164
- relevante 0-Zelle, 13
- relevante 1-Zelle, 12
- relevante 2-Zelle, 12
- Sattelpunkt, 14
- Seite, 163
- sichtbar, 37
- SON, 162
- Sphäre
  - kombinatorische, 165
- stark zusammenhängend, 164
- Teilkomplex, 163

- topologische Invariante, 156
- topologische Kurve, 167
- topologischer Raum, 155
- topologisches Geschlecht, 166
- Tunnel
  - einfacher, 69
  - nicht-einfacher, 69
- Umgebung
  - kleinste offene, 162
- Unterteilung, elementare, 165
- unverzweigt, 171
- verzweigt, 171
- Weg, n-dimensionaler, 164
- Zelle
  - d-dimensionale, 163
  - echte, 165
- Zellenkomplex, abstrakter, 163
- Zellenliste, 171
- Zielzellen, 60
- ZKH, 51
- ZKH-Hohlraum, 51
- ZKH-Konkavität, 51
- ZKH-Tunnel, 51
- zusammenhängend, 158
- zusammenhängend, stark, 164
- Zusammenhang, 158