

**Universität Leipzig  
Fakultät für Mathematik und Informatik  
Institut für Informatik**

Äquivalenz schwach expandierter  
Argumentationsframeworks in  
ausgewählten Semantiken

**Bachelorarbeit**

Leipzig, März 2012

vorgelegt von

Hermann, Christopher  
Studiengang BSc Informatik

**Betreuender Hochschullehrer: Prof. - Dr. Gerhard Brewka  
[Fakultät für Mathematik und Informatik/ Institut für Informatik]**

# Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	3
2. Vorbedingungen.....	5
2.1 Grundlagen formaler Argumentation.....	5
2.2 Splittings, expansionen und die Splitting-resultate.....	8
3. Äquivalenz von Argumentationsframeworks nach schwacher Expansion bezüglich ausgewählter Semantiken.....	14
4. Auswertung der Ergebnisse.....	22
5. Kurzzusammenfassung.....	25
6. Literaturverzeichnis.....	26
7. Erklärung.....	27

# 1. Einleitung

Dung hat in seinem Paper [1] bereits die statischen Aspekte von Argumentationsframeworks ausgearbeitet. Allerdings muss man sich auch mit den dynamischen Aspekten beschäftigen. Also damit, wie sich ein Framework und seine Extensionen verhalten, wenn das Framework verändert wird, zum Beispiel durch Expansion. Das Konzept insbesondere starker Expansion wurde von Oikarinen und Woltran in [2] vorgestellt und charakterisiert.

In dem Paper [3] von Baumann wurde bereits untersucht wie sich das Konzept von Splittings auf Argumentationsframeworks auswirkt, unter anderem auch wie sich damit Äquivalenz bei schwacher Expansion charakterisieren lässt. Letzteres allerdings nur im Bezug auf stable Semantics.

In dieser Arbeit möchten wir dies nun fortführen, indem wir untersuchen welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen zwei Argumentationsframeworks erfüllen müssen, um, bezüglich der admissible, preferred, complete und grounded Semantics, ebenfalls nach schwacher Expansion äquivalent zu sein.

Um zu veranschaulichen welche Bedeutung schwache Expansion haben kann, wollen wir an dieser Stelle zunächst zwei „Praxisbeispiele“ anbringen.

Als erstes betrachten wir einen Rechtsstreit. Dabei sind die „Argumente“ beider Seiten die ihre jeweilige Aussage unterstützenden Gesetze. Ein Argument würde in diesem Fall ein anderes genau dann angreifen, wenn das Gesetz als treffender oder wichtiger befunden wird. Schwache Expansion ergibt sich dann daraus, dass beispielsweise das Grundgesetz in Deutschland als „wichtigstes“ Gesetzbuch überhaupt gilt. Wenn man sich dieses also als grundlegendes Argumentationsframework vorstellt, dann würde jedes Gesetz aus einem anderen Gesetzbuch ( z.B. Strafgesetzbuch) wie eine schwache Expansion zu behandeln sein, in dem Sinne, dass diese neuen Gesetze vielleicht unterstützt oder zumindest nicht entkräftet werden, aber sie selbst niemals gegen das Grundgesetz verstoßen dürfen.

Das zweite Beispiel hat weniger mit Argumentation zu tun, zeigt aber die gleichen „Verhaltensweisen“. Hierbei handelt es sich um die Planung zum Bau eines mehrstöckigen Gebäudes. Dabei müssen die höheren Etagen immer den Aufbau der unteren berücksichtigen, unter Zuhilfenahme statischer Gesetze, um die Stabilität des Gesamtbaus zu gewährleisten. Somit darf es nie so sein, dass ein neues Stockwerk z.B.

Wände an Stellen gesetzt kriegt, an denen diese nicht genug Stabilität erhalten, da sonst der Einsturz des gesamten Gebäudes riskiert wird.

Der Aufbau dieser Arbeit wird wie folgt vorgenommen:

Im zweiten Kapitel werden Grundlagen zur formalen Argumentation sowie dynamische Aspekte im Zusammenhang mit Expansionen und Splittings vorgestellt.

Kapitel 3 stellt unsere eigene Untersuchung und Charakterisierung der Äquivalenz schwach expandierter Argumentationsframeworks vor.

In Kapitel 4 werden wir unsere Ergebnisse auswerten indem wir sie mit denen von Baumann [3] vergleichen und versuchen festzustellen, inwiefern sie auf starke Expansion anwendbar sind.

Kapitel 5 schließlich soll diese Arbeit noch einmal kurz zusammenfassen.

## 2. Vorbedingungen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit den grundlegenden Definitionen zur Argumentation vertraut machen, sowie die Ergebnisse von [3] kennenlernen, die wir für unsere eigenen Untersuchungen benötigen.

### 2.1 Grundlagen formaler Argumentation

Zunächst wiederholen wir die grundlegendsten Definitionen über Argumentationsframeworks und die Extensions-Semantiken die für uns von Interesse sind.

#### **Definition 1:**

Ein Argumentationsframework  $\mathcal{A}$  ist ein Tupel  $(A, R)$ . Dabei bezeichnet  $A$  eine endliche, nicht-leere Menge von Argumenten und  $R$  eine binäre Relation der Form  $R \subseteq A \times A$ , die man Attacke-Relation nennt.

In streng formaler Betrachtungsweise müssten Argumente natürlich selbst als Tupel der Form  $(\beta, \alpha)$  angesehen werden, wobei  $\alpha$  für die Aussage des Arguments steht und  $\beta$  für die Begründung, warum diese Aussage richtig sei. In dieser Arbeit wollen wir uns der Einfachheit halber darauf beschränken Argumente als einfache Objekte zu betrachten repräsentiert nur als einfache Kleinbuchstaben.

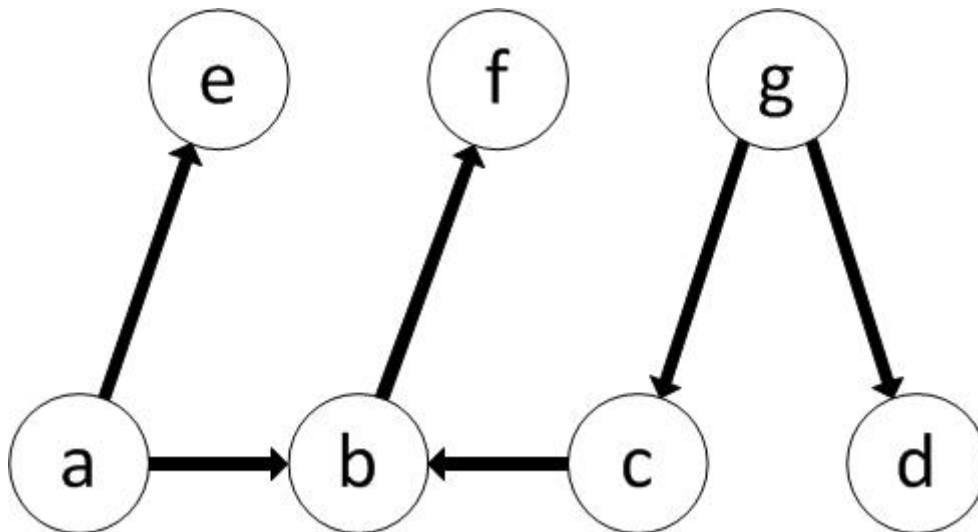
Wie wir der Definition entnehmen können werden auch Attacken als Tupel der Form  $(a, b)$  dargestellt, wobei  $a$  und  $b$  Argumente aus  $A$  sind. Diese Attacken sind immer nur unidirektional, d.h. wenn sich zwei Argument gegenseitig angreifen sollen, müssen beide Richtungen als eigene Attacke in  $R$  aufgenommen werden. Man interpretiert dann also das Tupel  $(a, b)$  als „a attackiert b“ oder „b wird von a attackiert“.

Um solche Argumentationsframeworks besser veranschaulichen zu können ist es üblich, sie als Graphen darzustellen. Dabei übernehmen die Argumente die Rolle der Knoten im Graphen. Die Tupel der Attackrelation werden als gerichtete Kanten dargestellt. Das folgende Beispiel soll aufzeigen, wie ein solches Framework und der zugehörige Graph aussehen können.

### Beispiel 1:

Wir betrachten in diesem Beispiel das Argumentationsframework

$\mathcal{F} = (\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{(a, b), (a, e), (b, f), (c, b), (g, c), (g, d)\})$ . Dafür ergibt sich dann der folgende Graph.



Sehr gut zu erkennen ist hieran nochmal, dass es sich bei Attacken um unidirektionale Verbindungen handelt, was im Graphen dadurch verdeutlicht wird, dass es sich nicht um einfache Verbindungslinien handelt, sondern um gerichtete Pfeile.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir uns oft mit Extensionen befassen. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um spezielle Teilmengen der Argumentenmenge eines Frameworks. In der folgenden Definition wollen wir erst einmal einige allgemeine Eigenschaften solcher Argumentenmengen festhalten.

### Definition 2:

Es sei  $A = (\mathcal{A}, R)$  ein Argumentationsframework. Seien  $B$  und  $B'$  Teilmengen von  $A$  und  $a \in A$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

1.  $(B, B') \in R \Leftrightarrow_{\text{def}} \exists b \exists b': b \in B \wedge b' \in B' \wedge (b, b') \in R$
2.  $a$  wird von  $B$  in  $A$  verteidigt  $\Leftrightarrow_{\text{def}} \forall a': a' \in A \wedge (a', a) \in R \rightarrow (B, \{a'\}) \in R$
3.  $B$  ist konfliktfrei in  $A \Leftrightarrow_{\text{def}} (B, B) \notin R$
4.  $\text{cf}(\mathcal{A}) = \{C \mid C \subseteq A, C \text{ ist konfliktfrei in } \mathcal{A}\}$

Aufbauend auf diesen Eigenschaften können wir nun die folgenden fünf Semantiken für Extensionen betrachten. Diese legen Bedingungen fest, unter denen Argumentenmengen den entsprechenden Begriff der Gültigkeit erfüllen.  $\mathcal{E}_S$  repräsentiert hier die Menge aller Extensionen zu einer Semantik  $S$ .

**Definition 3:**

Es sei  $\mathcal{A} = (A, R)$  ein Argumentationsframework und  $E$  eine Argumentenmenge mit  $E \subseteq A$ .

Dann ist  $E$  eine:

1. stable Extension ( $E \in \mathcal{E}_{st}(\mathcal{A})$ ) gdw.  
 $E \in cf(\mathcal{A})$  und für jedes  $a \in A \setminus E$  gilt  $(E, \{a\}) \in R$
2. admissible Extension ( $E \in \mathcal{E}_{ad}(\mathcal{A})$ ) gdw.  
 $E \in cf(\mathcal{A})$  und jedes  $a \in E$  wird in  $\mathcal{A}$  von  $E$  verteidigt
3. preferred Extension ( $E \in \mathcal{E}_p(\mathcal{A})$ ) gdw.  
 $E \in \mathcal{E}_{ad}(\mathcal{A})$  und für jede Extension  $E' \in \mathcal{E}_{ad}(\mathcal{A})$  gilt  $E \not\subset E'$
4. complete Extension ( $E \in \mathcal{E}_c(\mathcal{A})$ ) gdw.  
 $E \in \mathcal{E}_{ad}(\mathcal{A})$  und für jedes Argument  $a \in A$ , das von  $E$  verteidigt wird, gilt  $a \in E$
5. grounded Extension ( $E \in \mathcal{E}_g(\mathcal{A})$ ) gdw.  
 $E \in \mathcal{E}_c(\mathcal{A})$  und für jede Extension  $E' \in \mathcal{E}_c(\mathcal{A})$  gilt  $E' \not\subset E$

In eigenen Worten formuliert bedeuten diese Semantiken:

Stable Extensionen sind solche, die alle nicht in ihnen enthaltenen Argumente angreifen. Admissible Extensionen verteidigen die enthaltenen Argumente. Preferred Extensionen sind die, bzgl. Mengeninklusion, maximalen admissible Extensionen. Complete Extensionen beinhalten alle Argumente die verteidigt werden. Die grounded Extensionen sind die, bzgl. Mengeninklusion, minimalen complete Extensionen, d.h. jene die auch nur die Argumente enthalten, die verteidigt werden und keine weiteren.

Um zu veranschaulichen, wie solche Extensionen aussehen und den Zusammenhang der verschiedenen Semantiken zu erkennen wollen wir uns folgendes Beispiel ansehen.

### Beispiel 2:

Wir verwenden das gleiche Argumentationsframework  $\mathcal{F}$  wie im obigen Beispiel 1. Unter Verwendung der gerade definierten Semantiken ergeben sich diese Extensionsmengen für  $\mathcal{F}$ :

1.  $E_{st}(\mathcal{F}) = \emptyset$
2.  $E_{ad}(\mathcal{F}) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ g \}, \{ a, g \}, \{ a, f \}, \{ a, f, g \} \}$
3.  $E_p(\mathcal{F}) = \{ \{ a, f, g \} \}$
4.  $E_c(\mathcal{F}) = \{ \{ g \}, \{ a, f \}, \{ a, f, g \} \}$
5.  $E_g(\mathcal{F}) = \{ \{ g \}, \{ a, f \} \}$

Hieran lässt sich sehr gut erkennen, dass zwischen den fünf Semantiken folgende Teilmengenbeziehungen gelten:  $E_g \subseteq E_c \subseteq E_{ad}$  und  $E_{st} \subseteq E_p \subseteq E_c \subseteq E_{ad}$ .

## 2.2 Splittings, expansionen und die Splitting-resultate

Wie bereits weiter oben erwähnt, wollen wir uns in unserer Untersuchung mit schwacher Expansion beschäftigen. Um dies tun zu können wollen wir uns als nächstes erstmal mit den Konzepten von Splittings und Expansionen vertraut machen. Diese sowie auch die weiteren darauf aufbauenden Definitionen und Theoreme wurden bereits von Baumann [3] vorgestellt.

### Definition 4:

Es seien  $\mathcal{A}_1 = (A_1, R_1)$  und  $\mathcal{A}_2 = (A_2, R_2)$  Argumentationsframeworks für die gilt

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . Es sei  $R_3 \subseteq A_1 \times A_2$ .

Dann bezeichnet das Tupel  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, R_3)$  ein Splitting des Argumentationsframeworks  $\mathcal{A} = (A_1 \cup A_2, R_1 \cup R_2 \cup R_3)$ .

Ein Splitting ist also, in anderen Worten, die Aufteilung eines Argumentationsframeworks in zwei kleinere Frameworks. Hierbei ist zu beachten, dass diese Aufteilung ohne Überschneidungen geschieht und die beiden kleineren Frameworks über die Attacken in  $R_3$ , die nur in eine Richtung verlaufen, verbunden sind.



### Definition 5:

Ein Argumentationsframework  $\mathcal{A}^*$  wird als Expansion des Argumentationsframeworks  $\mathcal{A} = (A, R)$  bezeichnet, gdw.  $\mathcal{A}^*$  durch das Tupel  $(A \cup A^*, R \cup R^*)$  repräsentiert werden kann, wobei  $A^*$  eine nicht-leere und von  $A$  disjunkte Argumentenmenge ist und  $R^*$  eine von  $R$  disjunkte, aber möglicherweise leere, Attackerelation.

Eine solche Expansion kann noch konkretisiert werden als:

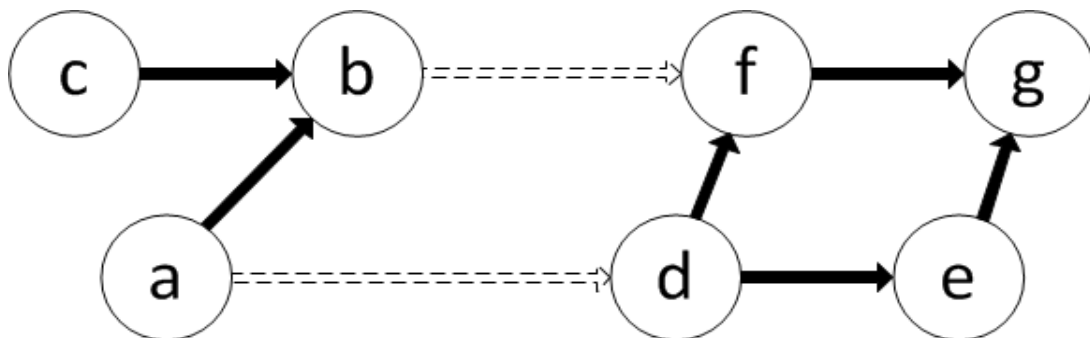
1. normal ( $\mathcal{A} <^N \mathcal{A}^*$ ) gdw.  $\forall a, b: (a, b) \in R^* \rightarrow a \in A^* \vee b \in A^*$
2. stark ( $\mathcal{A} <^N_s \mathcal{A}^*$ ) gdw.  $\mathcal{A} <^N \mathcal{A}^*$  und  $\forall a, b: (a, b) \in R^* \rightarrow \neg(a \in A \wedge b \in A^*)$
3. schwach ( $\mathcal{A} <^N_w \mathcal{A}^*$ ) gdw.  $\mathcal{A} <^N \mathcal{A}^*$  und  $\forall a, b: (a, b) \in R^* \rightarrow \neg(a \in A^* \wedge b \in A)$

Eine schwache Expansion, um welche es uns ja später gehen soll, zeichnet sich also dadurch aus, dass die neuen Attacks nur innerhalb der Argumente von  $A^*$  verlaufen oder von  $A$  nach  $A^*$ , niemals in die umgekehrte Richtung.

Zum verdeutlichen wie eine schwache Expansion aussieht, soll das folgende Beispiel dienen.

### Beispiel 3:

Wir betrachten das Argumentationsframework  $\mathcal{A} = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (c, b)\})$ . Dieses wird expandiert mit  $\mathcal{H} = (\{a, b, d, e, f, g\}, \{(a, d), (b, f), (d, e), (d, f), (e, g), (f, g)\})$  wodurch sich dieser Graph für  $\mathcal{A}^*$  ergibt:



Die gestrichelten Pfeile stellen in diesem Fall die Attacks von  $\mathcal{H}$  dar, die das ursprüngliche Framework  $\mathcal{A}$  mit den Argumenten in  $A \setminus A^*$  verbinden um so das gemeinsame  $\mathcal{A}^*$  zu bilden.

Die folgende Proposition formuliert den eigentlich ohnehin recht offensichtlichen Zusammenhang zwischen schwachen Expansionen und Splittings. Diesen Zusammenhang werden wir später nutzen, um die Splitting-resultate für unsere Untersuchungen schwacher Expansionen zu verwenden.

**Proposition 1:**

Wenn  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, R_3)$  ein Splitting von  $\mathcal{A}$  ist, dann ist  $\mathcal{A}$  eine schwache Expansion von  $\mathcal{A}_1$ . Andersherum gilt, dass wenn  $\mathcal{A} = (A, R)$  eine schwache Expansion von  $\mathcal{A}_1 = (A_1, R_1)$  ist, dann ist das Tupel  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, R_3)$  ein Splitting von  $\mathcal{A}$ , wobei  $\mathcal{A}_2 = (A \setminus A_1, R \cap (A \setminus A_1 \times A \setminus A_1))$  und  $R_3 = R \cap (A_1 \times A \setminus A_1)$ .

Für unser obiges Beispiel ergeben sich dann die Splittingelemente bzgl. des Gesamtframeworks  $\mathcal{A}^*$  derartig, dass das erste Teilframework  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ , das zweite Teilframework  $\mathcal{A}_2 = (\{d, e, f, g\}, \{(d, e), (d, f), (e, g), (f, g)\})$  und die Verbindungsattacken  $R_3 = \{(a, d), (b, f)\}$  sind.

Im späteren Verlauf unserer Untersuchungen werden wir auf die Splitting-Resultate von [3] zurückgreifen. Um diese vollständig verstehen und anwenden zu können, werden zunächst die folgenden Definitionen benötigt.

**Definition 6:**

Es sei  $\mathcal{A} = (A, R)$  ein Argumentationsframework,  $A'$  eine von  $A$  disjunkte Argumentenmenge,  $S \subseteq A'$  und  $L \subseteq A' \times A$ .

Dann ist das  $(S, L)$ -Redukt von  $\mathcal{A}$ , repräsentiert mit  $\mathcal{A}^{S,L}$ , das Argumentationsframework,

$$\mathcal{A}^{S,L} = (A^{S,L}, R^{S,L})$$

für das gilt:

$$A^{S,L} = \{a \in A \mid (S, \{a\}) \notin L\} \text{ und } R^{S,L} = \{(a, b) \in R \mid a, b \in A^{S,L}\}.$$

Das Framework  $\mathcal{A}$  wird also auf jene Argumente eingeschränkt, die von  $A'$  nicht angegriffen werden.

In den Untersuchungen über Extensionen in Expansionen werden wir üblicherweise für  $S$  den Schnitt zwischen der untersuchten Extension und den ursprünglichen Argumenten einsetzen und für  $L$  die Verbindungsattacken  $R_3$ . Das Argumentationsframework  $\mathcal{A}$  wird dann durch das expandierende Framework gestellt.

Allerdings stoßen wir dabei auf das Problem, dass das Redukt nicht darauf achtet, welche Argumente im ursprünglichen Framework nicht in der Extension enthalten sind, weil sie von dieser angegriffen werden und welche ganz einfach nicht enthalten sind auch ohne angegriffen zu werden. Da letztere allerdings durchaus noch einen Einfluss auf die Argumente des expandierenden Frameworks haben können ( z.B. könnte ein scheinbar akzeptierbares Argument besiegt werden da es von eben diesem undefinierten Argument angegriffen und dann nicht verteidigt wird), wird noch eine weitere Modifikation benötigt. Hierfür definieren wir uns zuerst die Menge dieser undefinierten Argumente. Anschließend nehmen wir die Modifikation derart vor, indem alle von undefinierten Argumenten angegriffenen Argumente von  $\mathcal{A}$  mit einer Attacke auf sich selbst versehen werden.

**Definition 7:**

Es sei  $\mathcal{A} = (A, R)$  ein Argumentationsframework und  $E$  eine Extension von  $\mathcal{A}$ .

Dann ist  $U_E$  die Menge der, bezüglich  $E$ , undefinierten Argumente, wobei gilt, dass

$$U_E = \{ a \in A \mid a \notin E, (E, \{a\}) \notin R \}.$$

**Definition 8:**

Es sei  $\mathcal{A} = (A, R)$  ein Argumentationsframework,  $A'$  eine von  $A$  disjunkte Argumentenmenge,  $S \subseteq A'$  und  $L \subseteq A' \times A$ .

Dann ist die  $(S, L)$ -Modifikation von  $\mathcal{A}$ , repräsentiert als  $\text{mod}_{S,L}(\mathcal{A})$ , das Argumentationsframework,

$$\text{mod}_{S,L}(\mathcal{A}) = (A, R \cup \{(b, b) \mid \exists a: a \in S, (a, b) \in L\}).$$

Nachdem diese Konzepte nun geklärt sind, können wir uns den Splitting-Resultaten zuwenden, die für unsere späteren Untersuchungen noch eine entscheidende Rolle spielen werden. Zunächst werden wir hierfür einige Eigenschaften der Redukte und Modifikationen bezüglich der Extensionen in Splittings festhalten.

**Proposition 2:**

Es sei ein Argumentationsframework  $\mathcal{A} = (A, R)$  gegeben, zu dem ein Splitting  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, R_3)$  existiert, so dass  $\mathcal{A}_1 = (A_1, R_1)$  und  $\mathcal{A}_2 = (A_2, R_2)$ , dann gelten die folgenden Aussagen:

1.  $E_1 \in \mathcal{E}_{st}(A_1) \Rightarrow \text{mod}_{UE_1, R_3}(\mathcal{A}_2^{E_1, R_3}) = \mathcal{A}_2^{E_1, R_3}$ ,  
( Neutralität der Modifikation bezüglich des stabilen Redukts)
2.  $E \in \text{cf}(\mathcal{A}) \Rightarrow E \cap A_1 \in \text{cf}(\mathcal{A}_1) \wedge E \cap A_2 \in \text{cf}(\mathcal{A}_2^{E \cap A_1, R_3})$ ,  
( Konfliktfreiheit bleibt im Schnitt erhalten)
3.  $E_1 \in \text{cf}(\mathcal{A}_1) \wedge E_2 \in \text{cf}(\text{mod}_{UE_1, R_3}(\mathcal{A}_2^{E_1, R_3})) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \text{cf}(\mathcal{A})$ ,  
( Konfliktfreiheit bleibt in der Vereinigung erhalten)

Das nächste Theorem beschreibt den grundsätzlichen Zusammenhang zwischen den Extensionen eines Argumentationsframeworks und den Extensionen einer schwachen Expansion von diesem.

**Theorem 1:**

Es sei ein Argumentationsframework  $\mathcal{A} = (A, R)$  gegeben und eine Semantik  $S$ , die die Direktionalität erfüllt.

Dann gelten für alle schwachen Expansionen  $\mathcal{A}^*$  von  $\mathcal{A}$  die folgenden Aussagen:

1.  $|\mathcal{E}_S(\mathcal{A})| \leq |\mathcal{E}_S(\mathcal{A}^*)|$ ,
2.  $\forall E \in \mathcal{E}_S(\mathcal{A}) \exists E^* \in \mathcal{E}_S(\mathcal{A}^*): E \subseteq E^*$  und
3.  $\forall E^* \in \mathcal{E}_S(\mathcal{A}^*) \exists E_i \in \mathcal{E}_S(\mathcal{A}) \exists A_i^* \subseteq A^*: E^* = E_i \cup A_i^*$

Die hier erwähnte Direktionalität beschreibt, dass die Akzeptierbarkeit eines Arguments nur über dessen Angreifer festgestellt wird und nicht über die eigenen Angriffe. Und tatsächlich erfüllen alle von uns untersuchten Semantiken diesen Anspruch. Außerdem liefert uns dieses Theorem hinreichende Bedingungen, unter denen die Expansion eines Argumentationsframeworks die Monotonie einhält, also höchstens neue Argumente zu den Extensionen hinzukommen aber keine wegfallen. Nämlich, dass es sich um schwache Expansion handelt und die Semantik direktional ist.

Nun kommen wir also zu Baumanns [3] eigentlichem Splitting-Resultat, das eine Vorgehensweise beschreibt, um aus den bekannten Extensionen der Splittingelemente die Extensionen des gesamten Frameworks zu ermitteln. Das Vorgehen lässt sich wie folgt zusammenfassen: Als erstes ermittelt man eine Extension  $E_1$  von  $A_1$ , anschließend führt man bezüglich dieser Extension eine Reduktion und Modifikation von  $A_2$  durch. Nun ermittelt man eine Extension  $E_2$  dieses modifizierten Redukts und erhält dann die gesuchte Extension  $E$  als Vereinigung von  $E_1$  und  $E_2$ .

**Theorem 2:**

Es sei  $\mathcal{A} = (A, R)$  ein Argumentationsframework, zu dem ein Splitting  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, R_3)$  mit  $\mathcal{A}_1 = (A_1, R_1)$  und  $\mathcal{A}_2 = (A_2, R_2)$ . Wir wollen uns hierbei auf die Semantiken  $\sigma \in \{st, ad, p, c, g\}$  beschränken.

1. Falls  $E_1$  eine Extension von  $A_1$  ist und  $E_2$  eine Extension der  $(U_{E_1}, R_3)$ -Modifikation von  $\mathcal{A}_2^{E_1, R_3}$ , dann ist  $E = E_1 \cup E_2$  eine Extension von  $\mathcal{A}$ .  

$$(E_1 \in \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{A}_1) \wedge E_2 \in \mathcal{E}_\sigma(\text{mod}_{U_{E_1}, R_3}(\mathcal{A}_2^{E_1, R_3}))) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{A})$$
2. Falls  $E$  eine Extension von  $\mathcal{A}$  ist, dann ist  $E_1 = E \cap A_1$  eine Extension von  $\mathcal{A}_1$  und  $E_2 = E \cap A_2$  ist eine Extension der  $(U_{E_1}, R_3)$ -Modifikation von  $\mathcal{A}_2^{E_1, R_3}$ .  

$$(E \in \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{A}) \Rightarrow E \cap A_1 \in \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{A}_1) \wedge E \cap A_2 \in \mathcal{E}_\sigma(\text{mod}_{U_{E_1}, R_3}(\mathcal{A}_2^{E_1, R_3})))$$

Damit haben wir nun alle Werkzeuge, die wir brauchen um unsere Untersuchungen bezüglich der Äquivalenz schwacher Expansionen durchzuführen. Alles was uns jetzt noch fehlt, ist festzulegen, wann zwei Frameworks als äquivalent bei schwacher Expansion gelten sollen.

**Definition 9:**

Zwei Argumentationsframeworks  $\mathcal{F} = (A_F, R_F)$  und  $\mathcal{G} = (A_G, R_G)$  sind äquivalent bei schwacher Expansion bezüglich einer Semantik  $\sigma$ , repräsentiert als  $\mathcal{F} \equiv_{\langle NW \rangle}^\sigma \mathcal{G}$ , gdw. für jedes Argumentationsframework  $\mathcal{H}$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$  oder  $\mathcal{F} <_{NW}^N \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$  und
- $\mathcal{G} = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$  oder  $\mathcal{G} <_{NW}^N \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ ,

gilt, dass  $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{H}) = \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ .

### 3. Äquivalenz von Argumentationsframeworks nach schwacher Expansion bezüglich ausgewählter Semantiken

Wir untersuchen in diesem Kapitel die Bedingungen für Äquivalenz in den Semantiken der admissible, preferred, complete und grounded Extensionen. Wie wir feststellen sind diese Bedingungen für alle vier Semantiken identisch. Dennoch ist es notwendig, dass wir eine Richtung ( $\Rightarrow$ ) für jede Semantik getrennt angehen, da sich die Beweise jeweils unterscheiden. Hierfür werden wir über die Kontraposition arbeiten, also zeigen, dass  $A_F \neq A_G \vee F \not\equiv^{\text{ad}} G \vee \exists E \in \mathcal{E}_{\text{ad}}(F) \Rightarrow U_E(F) \neq U_E(G)$  impliziert ( $\not\equiv$  repräsentiere die Negation von  $\equiv$ ), dass es ein Argumentationsframework  $\mathcal{H}$  gibt, sodass  $\mathcal{E}_{\text{ad}}(F \cup \mathcal{H}) \neq \mathcal{E}_{\text{ad}}(G \cup \mathcal{H})$ .

Zum Schluss werden wir die andere Richtung ( $\Leftarrow$ ) in einem einzelnen Beweis für alle vier Semantiken gemeinsam untersuchen.

admissible sets:

Für zwei Argumentationsframeworks  $\mathcal{F} = (A_F, R_F)$  und  $\mathcal{G} = (A_G, R_G)$  gilt:  $\mathcal{F} \equiv^{\text{ad}_{\text{NW}}} \mathcal{G}$  gdw.

$$A_F = A_G \wedge \mathcal{F} \equiv^{\text{ad}} \mathcal{G} \wedge \exists E \in \mathcal{E}_{\text{ad}}(\mathcal{F}) \Rightarrow U_E(\mathcal{F}) = U_E(\mathcal{G}).$$

Beweis:

$\Rightarrow$  :

1)  $A_F \neq A_G$

Es sei o.B.d.A.  $a$  ein Argument, sodass  $a \in A_F \setminus A_G$ . Weiterhin gelte offensichtlich  $a \notin E(\mathcal{G})$ , da  $a \notin A_G$ , und wir nehmen o.B.d.A an, dass  $(a, a) \in R_F$  und somit  $a \notin E(\mathcal{F})$ , für alle Extensionen  $E$  von  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{G}$ .

Nun expandieren wir  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  mit  $\mathcal{H} = (\{a\}, \emptyset)$ .

Dann erhält man die expandierten Argumentationsframeworks:  $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$  und  $\mathcal{G} \prec_w^{\text{N}} \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ .

Damit ergibt sich als Situation für  $a$ :  $a \in E(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ ,  $a \notin E(\mathcal{F})$ . Beispielsweise

wäre  $E = \{a\}$  eine admissible Extension von  $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ , aber  $\{a\} \neq E(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , da wir bereits wissen, dass  $a \notin E(\mathcal{F})$  und  $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$ .

Offensichtlich gilt nun also:  $\mathcal{F} \not\equiv^{\text{ad}}_{<\text{NW}} \mathcal{G}$ . Dies steht eindeutig im Widerspruch zur Annahme, dass die Äquivalenz gilt.

2)  $\mathcal{F} \equiv^{\text{ad}} \mathcal{G}$

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass  $A_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{G}}$  gilt, da die Notwendigkeit hierfür bereits bewiesen ist. Es sei  $E$  eine Argumentenmenge, sodass o.B.d.A. gilt:

$$E \in \mathcal{E}_{\text{ad}}(\mathcal{F}) \wedge E \notin \mathcal{E}_{\text{ad}}(\mathcal{G}).$$

Dann expandieren wir  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  mit  $\mathcal{H} = (\{a\}, \emptyset)$ , wobei  $a \notin A_{\mathcal{F}}$ .

Damit ergibt sich als Situation für  $E$ :  $E \cup \{a\} \in \mathcal{E}_{\text{ad}}(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$  und

$E \cup \{a\} \notin \mathcal{E}_{\text{ad}}(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ . Dies folgt aus den Splitting-Resultaten Theorem 2.1.

Folglich müsste gelten, dass  $\mathcal{F} \not\equiv^{\text{ad}}_{<\text{NW}} \mathcal{G}$ . Dies steht allerdings im Widerspruch zu der Annahme, dass die Äquivalenz gilt.

3)  $\exists E \in \mathcal{E}_{\text{ad}}(\mathcal{F}) \Rightarrow U_E(\mathcal{F}) \neq U_E(\mathcal{G})$

Wir nehme o.B.d.A. an, dass  $A_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{G}}$  und  $\mathcal{F} \equiv^{\text{ad}} \mathcal{G}$  gelten, da die Notwendigkeit jeweils bereits bewiesen ist. Es sei  $E$  eine admissible Extension, sodass o.B.d.A. gilt:  $E \in \mathcal{E}_{\text{ad}}(\mathcal{F})$  und  $E \in \mathcal{E}_{\text{ad}}(\mathcal{G})$ . Weiterhin sei  $a$  ein Argument für das gilt, dass  $a \in U_E(\mathcal{F})$ ,  $a \notin U_E(\mathcal{G})$ ,  $(E, a) \in R_{\mathcal{G}}$ ,  $(E, a) \notin R_{\mathcal{F}}$  und es gelte o.B.d.A., dass  $E \cup \{a\}$  keine admissible Extension von  $\mathcal{F}$  ist, da sonst die Bedingung  $\mathcal{F} \equiv^{\text{ad}} \mathcal{G}$  verletzt wäre.

Nun expandieren wir  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  mit  $\mathcal{H} = (\{b\}, \{(a, b)\})$ , wobei  $b \notin A_{\mathcal{F}}$ .

Somit ergibt sich für  $E$  folgende Situation:  $E \cup \{b\} \in \mathcal{E}_{\text{ad}}(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ , da  $b$  in  $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$  von  $E$  verteidigt wird und  $E \cup \{b\} \notin \mathcal{E}_{\text{ad}}(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , da in diesem Fall  $a$  nicht von  $E$  angegriffen wird.

Daraus folgt also, dass  $\mathcal{F} \not\equiv^{\text{ad}}_{<\text{NW}} \mathcal{G}$ , was in klarem Widerspruch zu der Annahme steht, dass die Äquivalenz bereits vorliegt.

preferred semantics:

$$\mathcal{F} \equiv^p_{<NW} \mathcal{G} \Leftrightarrow A_F = A_G \wedge \mathcal{F} \equiv^p \mathcal{G} \wedge E \in \mathcal{E}_p(\mathcal{F}) \Rightarrow U_E(\mathcal{F}) = U_E(\mathcal{G})$$

$\Rightarrow$  :

1)  $A_F \neq A_G$

a sei ein Argument, für das o.B.d.A gilt, dass  $a \in A_F \setminus A_G$ . Daraus folgt offensichtlich, dass  $a \notin E(\mathcal{G})$ , da  $a \notin A_G$  und wir nehmen weiterhin an, dass o.B.d.A gelte:  $a \notin E(\mathcal{F})$ , für alle preferred Extensionen E von  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{G}$ .

Das Argumentationsframework  $\mathcal{H} = (\{a\}, \emptyset)$  werde benutzt um  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  zu expandieren.

Daraus ergeben sich die expandierten Frameworks  $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$  und

$$\mathcal{G} \stackrel{N}{<} \mathcal{G} \cup \mathcal{H}.$$

Somit gilt nun für die preferred Extensionen E von  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{G}$ , dass

$E \cup \{a\} \in \mathcal{E}_p(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ , da a nur als nicht angegriffenes Argument in  $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$  vorkommt, und  $E \cup \{a\} \notin \mathcal{E}_p(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , da a bereits in  $\mathcal{F}$  existierte und nicht Teil der preferred Extension(en) war.

Nun gilt also offensichtlich  $\mathcal{F} \not\equiv^p_{<NW} \mathcal{G}$ , was allerdings im Widerspruch zu der Annahme steht, die Äquivalenz gelte bereits.

2)  $\mathcal{F} \equiv^p \mathcal{G}$

Angenommen  $A_F = A_G$  gelte bereits, schließlich ist die Notwendigkeit hierfür bereits bewiesen. Es gelte dann für eine Argumentenmenge E

$$E \in \mathcal{E}_p(\mathcal{F}) \wedge E \notin \mathcal{E}_p(\mathcal{G}).$$

Nun expandieren wir  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  mit dem Framework  $\mathcal{H} = (\{a\}, \emptyset)$ , wobei gelte, dass  $a \notin A_F \cup A_G$ .

In den expandierten Frameworks gelten dann die folgenden Aussagen:

$E \cup \{a\} \in \mathcal{E}_p(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , dies gilt offensichtlich, da a in  $\mathcal{F} \cup \mathcal{H}$  nicht angegriffen wird und E bereits eine preferred Extension von  $\mathcal{F}$  war, und gleichzeitig

$E \cup \{a\} \notin \mathcal{E}_p(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ , denn obwohl a auch in  $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$  nicht angegriffen wird, war E in  $\mathcal{G}$  bereits keine preferred Extension.

Es folgt daraus, dass  $\mathcal{F} \not\equiv^{ad}_{<NW} \mathcal{G}$ , was ein Widerspruch zur ursprünglichen



Annahme ist, dass die Äquivalenz gegeben ist.

$$3) \exists E \in \mathcal{E}_{ad}(\mathcal{F}) \Rightarrow U_E(\mathcal{F}) \neq U_E(\mathcal{G})$$

Die Argumentenmengen von  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  seien gleich, und  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  seien bereits preferred-äquivalent. Es sei  $E$  eine gegebene preferred Extension und  $a$  ein Argument in dieser Extension. Außerdem sei  $b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow b$  ein freistehender Zyklus in  $\mathcal{F}$ , während in  $\mathcal{G}$  gilt, dass  $b$ ,  $c$  und  $d$  von  $E$  angegriffen werden.

Dann werde mit  $\mathcal{H} = (\{a, b\}, \{(a, b)\})$  expandiert.

Dann wäre  $E \cup \{c\}$  eine preferred Extension von  $\mathcal{F} \cup \mathcal{H}$ , da  $c$  dann von  $E$  verteidigt wird, aber in  $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$  wäre immer noch  $E$  die preferred Extension, da  $b$ ,  $c$  und  $d$  weiterhin von  $E$  angegriffen werden. Somit wäre die Annahme der Äquivalenz verletzt.

complete semantics:

$$\mathcal{F} \equiv_{<NW}^c \mathcal{G} \Leftrightarrow A_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{G}} \wedge \mathcal{F} \equiv^c \mathcal{G} \wedge E \in \mathcal{E}_c(\mathcal{F}) \Rightarrow U_E(\mathcal{F}) = U_E(\mathcal{G})$$

$\Rightarrow$  :

$$1) A_{\mathcal{F}} \neq A_{\mathcal{G}}$$

Angenommen  $a$  ist ein Argument, für das gilt, dass  $a \in A_{\mathcal{F}} \setminus A_{\mathcal{G}}$ ,  $(E, a) \in R_{\mathcal{F}}$ , wobei  $E \in \mathcal{E}_c(\mathcal{F})$ .

Dann expandieren wir  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  mit dem Framework  $\mathcal{H} = (\{a, b\}, \{(a, b)\})$ , wobei gelte, dass  $b \notin A_{\mathcal{F}} \cup A_{\mathcal{G}}$ .

Nun gilt in  $\mathcal{F} \cup \mathcal{H}$  und  $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ :  $E \cup \{b\} \in \mathcal{E}_c(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , da  $a$  von  $E$  angegriffen wird und  $E$  somit  $b$  verteidigt, und  $E \cup \{b\} \notin \mathcal{E}_c(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ , da  $a$  und  $b$  in  $\mathcal{G}$  gar nicht vorkommen und  $b$  somit nicht verteidigt wird.

Daraus folgt dann  $\mathcal{F} \not\equiv_{<NW}^c \mathcal{G}$ , was einen Widerspruch zur Annahme der Äquivalenz darstellt.

$$2) \mathcal{F} \not\equiv^c \mathcal{G}$$

Es sei  $E$  eine Argumentenmenge, sodass gilt  $E \in \mathcal{E}_c(\mathcal{F}) \wedge E \notin \mathcal{E}_c(\mathcal{G})$ , außerdem sei  $c$  ein Argument in  $A_{\mathcal{F}}$ , für das gilt  $(E, c) \in R_{\mathcal{F}}$ ,  $(E, c) \in R_{\mathcal{G}}$ .

Nun werden wir  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  mit dem Framework  $\mathcal{H} = (\{a\}, \{(c, a)\})$  expandieren, wobei  $a$  ein Argument ist, für das gilt  $a \notin A_F$ .

Für die Extension  $E$  von  $\mathcal{F}$  gilt nun in den expandierten Frameworks:

$E \cup \{a\} \in \mathcal{E}_c(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , da  $a$  von  $E$  verteidigt wird, und  $E \cup \{a\} \notin \mathcal{E}_c(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ , da  $a$  zwar ebenfalls von  $E$  verteidigt wird, aber  $E$  keine Extension von  $\mathcal{G}$  war.

Somit würde also gelten, dass  $\mathcal{F} \not\equiv^c_{<NW} \mathcal{G}$ , obwohl diese Äquivalenz bereits angenommen war, steht also im Widerspruch zur ursprünglichen Annahme.

$$3) A_F = A_G \wedge \mathcal{F} \equiv^c \mathcal{G} \wedge E \in \mathcal{E}_c(\mathcal{F}) \Rightarrow U_E(\mathcal{F}) \neq U_E(\mathcal{G})$$

Wir nehme o.B.d.A. an, dass  $E$  eine Argumentenmenge ist, für die gilt:

$E \in \mathcal{E}_c(\mathcal{F})$  und  $E \in \mathcal{E}_c(\mathcal{G})$ . Weiterhin sei  $a$  ein Argument mit den Eigenschaften:

$a \in U_E(\mathcal{F})$ ,  $a \notin U_E(\mathcal{G})$ ,  $(E, a) \in R_G$  und  $(E, a) \notin R_F$  und es gelte o.B.d.A.

$E \cup \{a\} \notin \mathcal{E}_c(\mathcal{F})$ .

Wir expandieren nun  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  mit dem Framework  $\mathcal{H} = (\{b\}, \{(a, b)\})$ , wobei für das Argument  $b$  gelte, dass  $b \notin A_F$ .

Als neue Situation für  $E$  ergibt sich dann, dass  $E \cup \{b\} \in \mathcal{E}_c(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ , da  $b$  von  $E$  in  $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$  verteidigt wird, aber  $E \cup \{b\} \notin \mathcal{E}_c(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , da  $b$  nur mit  $a$  verbunden ist und daher hier nicht von  $E$  verteidigt wird.

Also folgt, dass  $\mathcal{F} \not\equiv^c_{<NW} \mathcal{G}$ , dies steht allerdings im Widerspruch zur Annahme, dass die Äquivalenz bereits erfüllt wird.

grounded semantics:

$$\mathcal{F} \equiv^g_{<NW} \mathcal{G} \Leftrightarrow A_F = A_G \wedge \mathcal{F} \equiv^g \mathcal{G} \wedge E \in \mathcal{E}_c(\mathcal{F}) \Rightarrow U_E(\mathcal{F}) = U_E(\mathcal{G})$$

$\Rightarrow$  :

$$1) A_F \neq A_G$$

Es sei  $a$  ein Argument, sodass o.B.d.A. gilt:  $a \in A_F \setminus A_G$ ,  $(E, a) \in R_F$ , wobei  $E$  eine Argumentenmenge ist, für die  $E \in \mathcal{E}_g(\mathcal{F})$  gilt.

Zum expandieren dieser Frameworks  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  verwenden wir das Framework  $\mathcal{H} = (\{a, b\}, \{(a, b)\})$ , wobei für  $b$  gilt, dass  $b \notin A_F \cup A_G$ .

Daraus folgt, dass  $E \cup \{b\} \in \mathcal{E}_g(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , da  $a$  in  $\mathcal{F}$  von  $E$  angegriffen wird und

E somit b verteidigt, aber  $E \cup \{b\} \notin \mathcal{E}_g(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ , da a in  $\mathcal{G}$  gar nicht vorkommt und somit b nicht verteidigt wird.

Dies würde bedeuten, dass  $\mathcal{F} \equiv_{\text{<NW}}^g \mathcal{G}$ , was ein Widerspruch dazu ist, dass die Äquivalenz bereits angenommen wurde.

2)  $\mathcal{F} \equiv^g \mathcal{G}$

Es sei E eine Argumentemenge, sodass o.B.d.A. gilt:  $E \in \mathcal{E}_g(\mathcal{F}) \wedge E \notin \mathcal{E}_{ad}(\mathcal{G})$ .

Des weiteren sei c ein Argument, für das  $(E, c) \in R_F$  und  $(E, c) \in R_G$  gilt.

Wir expandieren  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  mit dem Framework  $\mathcal{H} = (\{a\}, \{(c, a)\})$ , wobei a ein Argument ist, für das gilt, dass  $a \notin A_F$ .

Nun gilt also, dass  $E \cup \{a\} \in \mathcal{E}_g(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , da a von E verteidigt wird, aber

$E \cup \{a\} \notin \mathcal{E}_g(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ , da a zwar ebenfalls verteidigt wird, aber E bereits keine Extension war.

Also gilt nun  $\mathcal{F} \equiv_{\text{<NW}}^g \mathcal{G}$ , obwohl diese Äquivalenz bereits angenommen war, dies ist eindeutig ein Widerspruch.

3)  $E \in \mathcal{E}_g(\mathcal{F}) \Rightarrow U_E(\mathcal{F}) \neq U_E(\mathcal{G})$

Angenommen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  erfüllen die Eigenschaften  $A_F = A_G \wedge \mathcal{F} \equiv^g \mathcal{G}$ , schließlich sind diese unbedingt notwendig. Dann sei E eine Argumentenmenge, für die o.B.d.A gelte:  $E \in \mathcal{E}_g(\mathcal{F})$  und  $E \in \mathcal{E}_g(\mathcal{G})$ . Außerdem sei a ein Argument aus  $A_F$ , sodass  $a \in U_E(\mathcal{F})$ ,  $a \notin U_E(\mathcal{G})$ ,  $(E, a) \in R_G$ ,  $(E, a) \notin R_F$

Nun werden  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  mit dem Framework  $\mathcal{H} = (\{b\}, \{(a, b)\})$  expandiert, wobei  $b \notin A_F$  gelte.

Für die Extension E gilt dann:  $E \cup \{b\} \in \mathcal{E}_g(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ , da b hier von E verteidigt wird, aber  $E \cup \{b\} \notin \mathcal{E}_g(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , da b hier nicht von E verteidigt wird.

Es folgt daraus, dass  $\mathcal{F} \equiv_{\text{<NW}}^g \mathcal{G}$ , was ganz klar der Tatsache widerspricht, dass diese Äquivalenz bereits als geltend angenommen war.

$\Leftarrow$ : Nehmen wir an, wir haben o.B.d.A. zwei Argumentationsframeworks  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  gegeben, so dass gilt ( in den Semantiken  $\varphi = \{ad, p, c, g\}$ ):

$$\mathcal{F} \equiv_{\text{<NW}}^\varphi \mathcal{G} \Leftrightarrow A_F = A_G \wedge \mathcal{F} \equiv^\varphi \mathcal{G} \wedge E \in \mathcal{E}_\varphi(\mathcal{F}) \Rightarrow U_E(\mathcal{F}) = U_E(\mathcal{G}).$$

Wir verwenden zum Expandieren das Framework  $\mathcal{H}$ , so dass folgende Situation erreicht wird:

$$\mathcal{H} = (A_H, R_H) \Rightarrow \mathcal{F} \prec_w^N (=) \mathcal{F} \cup \mathcal{H} \wedge \mathcal{G} \prec_w^N (=) \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$$

Nun müssen wir zeigen, dass  $E \in \mathcal{E}_\varphi(\mathcal{F} \cup \mathcal{H}) \Rightarrow E \in \mathcal{E}_\varphi(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$  für unsere Frameworks eine gültige Implikation wird. Hierzu ergeben sich zwei Fälle, die wir wie folgt unterscheiden werden:

1. Fall:  $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \mathcal{H}$

Daraus folgt, dass auch  $\mathcal{G} = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ , da  $A_F = A_G$  angenommen wird.

Wir können also folgern, dass die Gleichung  $\mathcal{E}_\varphi(\mathcal{F} \cup \mathcal{H}) = \mathcal{E}_\varphi(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$  erfüllt wird und somit Äquivalenz vorliegt.

2. Fall:  $\mathcal{F} \cup \mathcal{H}$  und  $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$  sind echte schwache Expansionen, d.h. es gelte

o.B.d.A. dass  $R_F \cap R_H = \emptyset$  und  $R_G \cap R_H = \emptyset$ .

Gemäß Proposition 1 gilt dann, dass  $(\mathcal{F}, \mathcal{A}_2, R_3)$  und  $(\mathcal{G}, \mathcal{A}_2, R_3)$

Splittings von  $\mathcal{F} \cup \mathcal{H}$  bzw.  $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$  sind, wobei  $\mathcal{A}_2$  und  $R_3$  folgendermaßen festgelegt seien:

O.B.d.A sei  $\mathcal{A}_2$  eingeschränkt auf die Argumente, die nur in  $H$

vorkommen. Dann ist also  $\mathcal{A}_2 = (A_H, R_H \cap (A_H \times A_H))$  und

$R_3 = R_H \cap (A_F \times A_H \setminus A_F)$ .

Betrachten wir nun eine Argumentenmenge  $E \in \mathcal{E}_\varphi(\mathcal{F} \cup \mathcal{H})$ , dann gilt gemäß Theorem 2.2:

1.  $E \cap A_F \in \mathcal{E}_\varphi(\mathcal{F})$

2.  $E \cap (A_H \setminus A_F) \in \mathcal{E}_\varphi(\text{mod}_{U_E \cap A_F, R_3}(\mathcal{A}_2^{E \cap A_F, R_3}))$

Aus 1. leitet sich, auf Grund der ersten beiden Bedingungen, auch

$E \cap A_G \in \mathcal{E}_\varphi(\mathcal{G})$ , da auf der linken Seite wegen  $A_F = A_G$  die gleiche Menge steht und die Extensionen für beide Frameworks die gleichen sind.

2. lässt sich auf ähnliche Weise mit Hilfe von Ersetzungen umformen.

Zunächst ergibt sich auf der linken Seite wegen  $A_F = A_G$  wieder die

gleiche Menge. Für die rechte Seite gilt, dass sich sowohl die

Modifikation, als auch das Redukt, für  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  gleichsetzen lässt, da

auch hier  $A_F = A_G$  und außerdem auf Grund der dritten Bedingung  $U_E$

ebenfalls immer gleich ist. Das einzige das dann noch verbleibt ist  $R_3$ , also die Attacken von  $F$  bzw.  $G$  nach  $\mathcal{H}$ . Diese sind in  $\mathcal{H}$  festgelegt und somit unabhängig von  $F$  oder  $G$ . Damit ist klar, dass 2. auch gültig ist, wenn  $A_G$  statt  $A_F$  eingesetzt wird.

Unter Verwendung von Theorem 2.1 leitet sich nun ab, dass  $(E \cap A_G) \cup (E \cap (A_H \setminus A_G)) = E \in \mathcal{E}_\varphi(F \cup \mathcal{H})$ . Die umgekehrte Richtung, beginnend bei  $E \in \mathcal{E}_\varphi(G \cup \mathcal{H})$  funktioniert analog.

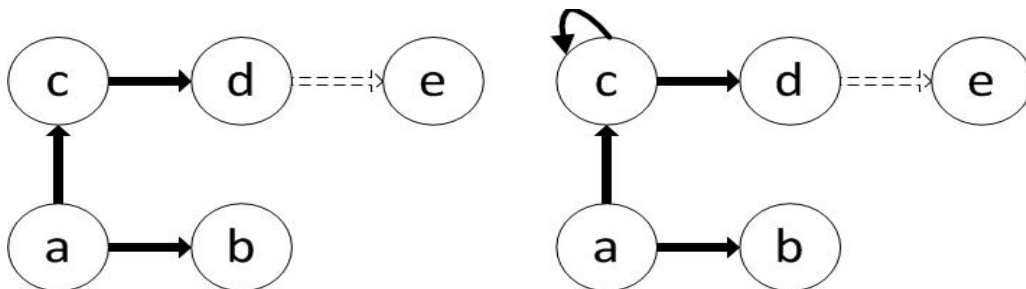
Wir haben damit also nun vollständig charakterisiert, welche Bedingungen gelten müssen um Äquivalenz nach schwacher Expansion zu gewährleisten. Um uns zu veranschaulichen, wie zwei Frameworks, die diese Bedingungen erfüllen, genauer aussehen könnten, wollen wir das folgende Beispiel betrachten.

#### Beispiel 4:

Nehmen wir an, wir haben die Argumentationsframeworks  $F$  und  $G$  wie folgt gegeben.

- $F = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, c), (c, d)\})$
- $G = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, c), (c, c), (c, d)\})$

Diese wollen wir nun mit dem Framework  $\mathcal{H} = (\{d, e\}, \{(d, e)\})$  expandieren.



Die resultierenden Frameworks  $F \cup \mathcal{H}$  und  $G \cup \mathcal{H}$  sind in diesem Graphen dargestellt:

Wenn wir nun unsere vier Semantiken betrachten ergeben sich diese Extensionsmengen:

admissible:  $\mathcal{E}_{ad}(F \cup \mathcal{H}) = \{\emptyset, \{a\}, \{a, d\}\}$        $\mathcal{E}_{ad}(G \cup \mathcal{H}) = \{\emptyset, \{a\}, \{a, d\}\}$

preferred:  $\mathcal{E}_p(F \cup \mathcal{H}) = \{\{a, d\}\}$        $\mathcal{E}_p(G \cup \mathcal{H}) = \{\{a, d\}\}$

complete:  $\mathcal{E}_c(F \cup \mathcal{H}) = \{\{a, d\}\}$        $\mathcal{E}_c(G \cup \mathcal{H}) = \{\{a, d\}\}$

grounded:  $\mathcal{E}_g(F \cup \mathcal{H}) = \{\{a, d\}\}$        $\mathcal{E}_g(G \cup \mathcal{H}) = \{\{a, d\}\}$

Wir erkennen auf einen Blick, dass die Extensionsmengen bei allen vier Semantiken exakt gleich sind.

## 4. Auswertung der Ergebnisse

Nachdem wir nun also für diese Semantiken die Bedingungen charakterisiert haben unter denen zwei Argumentationsframeworks als äquivalent zu betrachten sind, wenn sie schwach expandiert werden, wollen wir uns in diesem Kapitel einem Vergleich mit anderen Aspekten zuwenden. Hierzu ziehen wir als erstes die Semantik der stabilen Extensionen heran. Anschließend wollen wir uns anschauen wie unsere Bedingungen sich bei starker Expansion verhalten.

Kommen wir also zunächst zu den stabilen Extensionen. Für diese hat Baumann in [2] bereits die Charakterisierung der Bedingungen vorgenommen. Die Ergebnisse davon sind in in folgender Proposition dargestellt.

### Proposition 3:

Für alle Argumentationsframeworks  $\mathcal{F} = (A_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{F}})$  und  $\mathcal{G} = (A_{\mathcal{G}}, R_{\mathcal{G}})$  gilt:  $\mathcal{F} \equiv_{\text{st}}^{\text{NW}} \mathcal{G}$  gdw.

- $A_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{G}}$  und  $\mathcal{E}_{\text{st}}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}_{\text{st}}(\mathcal{G})$  oder
- $\mathcal{E}_{\text{st}}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}_{\text{st}}(\mathcal{G}) = \emptyset$ .

Hier haben wir also zwei verschiedene Varianten gegeben, welche Bedingungen erfüllt werden können um die geforderte Äquivalenz zu erreichen.

Die erste Variante enthält die gleichen Bedingungen, wie unsere Untersuchung ergeben hat, und verzichtet lediglich auf die dritte Bedingung bezüglich undefinierter Argumente. Wenn wir uns die Definition von stabilen Extensionen ansehen wird auch relativ schnell klar, warum man das so einfach machen kann. Per Definition ist eine Extension stabil gdw. wenn sie konfliktfrei ist und alle nicht in ihr enthaltenen Argumente angreift. Daraus ergibt sich natürlich direkt, dass für jede solche Extension die Menge der undefinierten Argumente, also jene Argumente, die weder enthalten noch direkt angegriffen werden, grundsätzlich immer leer ist, wodurch die bei unseren Semantiken geforderte Gleichheit auch automatisch erfüllt wird.

In der zweiten Variante besteht die einzige Forderung daraus, dass die Extensionsmengen beider Frameworks leer sein sollen. Diese Forderung ließe sich bei unseren Semantiken gar nicht erfüllen. Für die admissible Sets gilt, dass die leere

Menge immer dazu zählt. Preferred Extensionen sind die maximalen admissible Extensionen, also auch immer mindestens die leere Menge, falls keine anderen existieren sollten. Die Menge der complete Extensionen ist ebenfalls Teilmenge der Menge der admissible Sets. Die zusätzliche, dass alle Argumente, die verteidigt werden auch enthalten sein müssen, führt höchstens dazu, dass einige der kleineren Extensionen entfernt werden, aber da jede dieser „neu entstehenden“ Extensionen ebenfalls admissible ist, wird die Menge der complete Extensionen niemals leer. Und schließlich die grounded Extensionen sind nichts weiter, als die minimalen complete Extensionen, es gibt also auch hier immer mindestens eine, sodass die Menge nie leer ist.

Somit ist gezeigt, dass die zweite Variante für unsere Semantiken nicht anwendbar ist und die erste Variante lediglich eine durch die Definition der stabilen Extensionen verkürzte Alternative zu unserer Charakterisierung ist.

Nun wollen wir uns den starken Expansionen zuwenden. Der Unterschied zwischen schwachen und starken Expansionen liegt, wie oben bereits beschrieben, darin, dass bei schwachen Expansionen das Framework  $\mathcal{H}$  mit dem expandiert wird nur solche Attacken enthält, die innerhalb des Frameworks arbeiten oder die vom ursprünglichen Framework  $\mathcal{F}$  ausgehend nach  $\mathcal{H}$  verlaufen. Dem entgegen enthält  $\mathcal{H}$  bei starker Expansion zwar ebenfalls die Attacken innerhalb von  $\mathcal{H}$ , aber ansonsten nur solche, die von  $\mathcal{H}$  ausgehen und  $\mathcal{F}$  als Ziel haben.

Es lässt sich nun leicht feststellen, dass die von uns festgelegten Bedingungen nicht ausreichend sind, wenn anstelle von schwacher starke Expansion vorliegt. Hierzu wollen wir uns das folgende Beispiel betrachten.

### **Beispiel 5:**

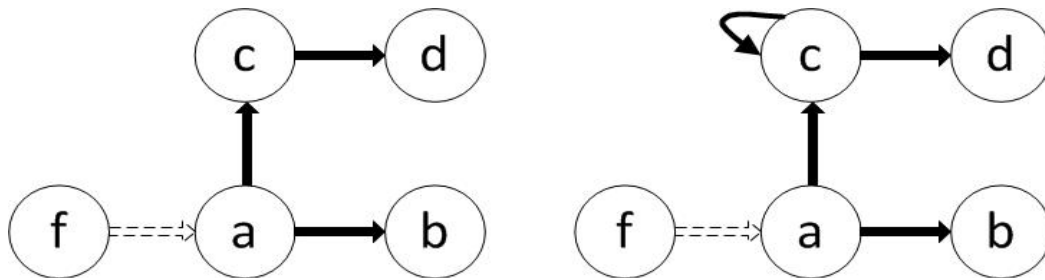
Wir verwenden die gleichen Frameworks  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  wie in Beispiel 3. Also

$\mathcal{F} = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, c), (c, d)\})$  und

$\mathcal{G} = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, c), (c, d), (c, c)\})$ .

Allerdings expandieren wir diesmal mit dem Framework  $\mathcal{H} = (\{a, f\}, \{(f, a)\})$ .

Daraus ergeben sich die folgenden beiden Graphen:



Schauen wir uns jetzt einmal an, welche Extensionsmengen sich dann für unsere Semantiken ergeben.

admissible:  $E_{ad}(F \cup H') = \{ \emptyset, \{ f \}, \{ b, f \}, \{ c, f \}, \{ b, c, f \} \}$

$E_{ad}(G \cup H') = \{ \emptyset, \{ f \}, \{ b, f \} \}$

preferred:  $E_p(F \cup H') = \{ b, c, f \}$

$E_p(G \cup H') = \{ b, f \}$

complete:  $E_c(F \cup H') = \{ b, c, f \}$

$E_c(G \cup H') = \{ b, f \}$

grounded:  $E_g(F \cup H') = \{ b, c, f \}$

$E_g(G \cup H') = \{ b, f \}$

Es ist recht deutlich zu sehen, dass sich die Extensionsmengen für alle vier Semantiken unterscheiden, obwohl die beiden Frameworks noch immer unsere Bedingungen erfüllen.

Also lässt sich daraus ableiten, dass für starke Expansion zumindest noch andere Bedingungen benötigt werden, die in zukünftigen Arbeiten untersucht werden müssten.



## 5. Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir uns mit der Äquivalenz schwach expandierter Argumentationsframeworks beschäftigt.

Zunächst haben wir nochmal die Grundlagen der formalen Argumentation und der Semantiken der Akzeptierbarkeit wiederholt. Anschließend betrachteten wir die Konzepte der Expansionen und Splittings und konnten einen direkten Zusammenhang zwischen diesen feststellen.

Daraufhin wandten wir uns den Splitting-Resultaten von Baumann [3] zu. Wir haben Redukte und Modifikationen kennengelernt und gesehen wie man diese zur Berechnung neuer Extensionen verwenden kann, nachdem ein Argumentationframework expandiert wurde. Dies geschieht durch das Berechnen einer Extension des ursprünglichen Frameworks, das Ermitteln der Modifikation des Redukts der Erweiterung und deren Extension und anschließende Vereinigung der beiden Extensionen zu einer neuen Extension des Gesamtframeworks.

In unserer eigentlichen Untersuchung haben wir die Bedingungen festgelegt und bewiesen die für eine Äquivalenz nach schwacher Expansion notwendig und hinreichend sind. Hierbei haben wir uns auf die vier Semantiken der admissible, preferred, complete und grounded Extensionen beschränkt. Wir konnten dabei feststellen, dass diese Bedingungen für alle vier Semantiken gleich sind. Diese Bedingungen sind, kurz gesagt, dass die Argumentenmengen der Frameworks identisch sein müssen, sie müssen bereits ohne Expansion in der jeweiligen Semantik äquivalent sein und für jede einzelne Extension müssen in beiden Frameworks die undefinierten Argumente übereinstimmen.

Zum Schluss haben wir noch einen Vergleich unserer Ergebnisse mit denen aus [3] zu stable Semantiken durchgeführt und festgestellt, dass wir zwar eine bedingung mehr ermittelt haben, diese aber für stable Semantiken auch gar nicht nochmal extra notwendig ist. Außerdem haben wir uns angesehen inwiefern unsere Bedingungen auch noch für Äquivalenz bei starker Expansion ausreichend sind und sind zu dem ergebnis gekommen, dass hierfür noch zusätzlich Bedingungen nötig sind, die in zukünftigen Arbeiten noch untersucht werden müssen.

## 6. Literaturverzeichnis

1. P.M.Dung, „On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n–person games“, *Artificial Intelligence* 77 (1995), S. 321-357
2. E. Oikarinen and S. Woltran. „Characterizing Strong Equivalence for Argumentation Frameworks“, in *Proc. KR 2010*, AAAI Press, 2010, S. 123-133
3. R. Baumann, „Splitting an Argumentation Framework“, In *Proc. LPNMR-11*, 2011, S. 40-53

## 7. Erklärung

"Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann".

Ort

Datum

Unterschrift