Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Matrizielle Panjer-Rekursion für zusammengesetzte Verteilungen

Diplomarbeit

vorgelegt von Puyi Zhao
geb. am 31.07.1982
aus Liaoning, China
Studiengang: Wirtschaftsmathematik
Betreuer: Prof. Dr. Manfred Riedel

Leipzig, Januar 2013

Ich möchte mich ganz herzlich bedanken für die hilfreiche und umfassende Betreuung vom Herrn Professor Manfred Riedel.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Diplomarbeit betrachtet die Verallgemeinerung der Panjer-Rekursion auf den Fall, dass die Schadensanzahlverteilung durch eine Folge von $m \times m$ Matrizen gegeben ist. Diese Methode bezieht sich auf den Artikel [1].
In Kapitel 2 wird das diskrete Risikomodell eingeführt.
In Kapitel 3 wird eine Klasse von Schadensanzahlverteilungen eingeführt, die durch eine Folge von m-dimensionalen Vektoren definiert ist. Es wird untersucht, welche Bedingungen die Folge genügen müssen, dass die resultierende Folge eine diskrete Verteilung auf den natürlichen Zahlen bildet ist. Eine spezielle Klasse dieser Verteilung sind die verallgemeinerten Panjer-Schadensanzahl-Verteilungen, die mit Hilfe einer Folge von Matrizen und einen Vektor definiert sind. Diese Klasse umfasst Verallgemeinerungen einer Reihe von Verteilungen im eindimensionalen Fall. Durch die Tatsache, dass Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ sind, ergibt sich eine große Variablität solcher Verteilungen. Insbesondere wird die Klasse der verallgemeinerten geometrischen Verteilungen und verallgemeinerte Poisson-Verteilungen untersucht. In diesen Fällen können die Einzelwahrscheinlichkeiten der Panjer-Verteilung explizit als Funktionen einer Matrix und eines Vektors dargestellt werden.
In Kapitel 4 werden zusammengesetzte diskrete Verteilungen betrachtet, wobei die

Schadensanzahl eine verallgemeinerte Panjer-Verteilung besitzt. Es wird nachgewiesen, dass die Gesamtschadensverteilung rekursiv bestimmt werden kann.
In Kapitel 5 werden die Resultate aus Kapitel 4 auf den Fall verallgemeinert, dass die Schadensanzahlverteilung eine Phasen-Typ-Verteilung ist. Dann lässt sich ebenfalls die Gesamtschadensverteilung rekursiv bestimmen. Ein Beispiel zeigt die konkrete Umsetzung dieser rekursiven Methode.

Kapitel 2

Risikomodell

Wir betrachten ein diskretes kollektives Risikomodell. Der Schaden in einer Periode wird durch die Zufallsgröße N, der sogenannte Schadensanzahl, und der Folge der Teilrisikos $(X_i)_{i=1,2,\cdots}$, beschrieben. Im weitere sei $\mathbb{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Hierbei gehen wir davon aus, dass alle Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ definiert sind, d.h. die Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wird als Folge von messbaren Abbildungen der Art

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_+), \quad i = 1, 2, \cdots ,$$

aufgefasst, wobei $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ und $\mathscr{B}_+$ die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}_+$ bezeichnet, außerdem ist die Schadensanzahl durch die Abbildung

$$N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0 \tag{2.0.1}$$

beschrieben, wobei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ bezeichnet. Natürlich ist N Borel-messbar, da die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{N}_0$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}_0$ ist. Bekanntlich ist die

Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X_i durch

$$F_{X_i}(x) := P(X_i \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

definiert. Damit ist die Verteilungsfunktion stets rechtsstetig. Die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße N ist durch die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$p_n := P(N = n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

eindeutig bestimmt. Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnen wir als **Verteilung der Zufallsgröße N**. Zur Charakterisierung der Verteilung $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ verwenden wir die **erzeugende Funktion**, die durch

$$\hat{p}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

definiert. Der Definitionsbereich der erzeugenden Funktion $\hat{p}$ enthält das Intervall [-1,1].

Wir stellen folgende Voraussetzungen an das Risikomodell:

1. Das System $(N, (X_i)_{i\in\mathbb{N}})$ ist unabhängig, d.h. für jede endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ sind die Zufallsgröße $\{N, X_i, \ i \in M\}$ unabhängig.

2. Die Verteilungsfunktion der Zufallsgrößen $X_i, \ i \in \mathbb{N}$, ist identisch, d.h. es gilt

$$F_{X_i} =: F, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Wir bezeichnen die Verteilungsfunktion F als Verteilungsfunktion der Teilrisiken. Der Gesamtschaden in einer Periode wird durch die Zufallsgröße S, die gemäß

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i, & \text{wenn } N > 0 \\ 0 \;, & \text{wenn } N = 0 \end{cases}$$

beschrieben wird. In dieser Arbeit untersuchen wir spezielle Verteilungen der Schadensanzahl, die einer rekursiven Beziehung genügen. Solche Verteilungen implizieren ebenfalls eine rekursive Beziehung für die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens.

Kapitel 3

Klassen parametrischer Schadensanzahlverteilungen

3.1 Vektorparametrische Schadensanzahlverteilungen

Es sei eine Folge $(W^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0},\ von\ m \times 1$ Vektoren gegeben, wobei

$$W^{(n)} = \begin{pmatrix} W_1^{(n)} \\ \vdots \\ W_m^{(n)} \end{pmatrix}$$

gesetzt wird. Außerdem sei $\vec{\gamma}^T = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T,\ \ ein\ \ 1 \times n$ Vektor mit

$$\gamma_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, ..., m \tag{3.1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1 \tag{3.1.2}$$

Definition 3.1.1 *Die Verteilung* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*, heißt* $(m,\gamma,W^{(n)})$ *erzeugt, falls*

$$p_n = \vec{\gamma}^T W^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gilt.
Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bezeichnet man auch als* $(m,\gamma,W^{(n)})$*-Verteilung.*

Bemerkung 3.1.2 *Falls für eine Komponente* $i_0, \gamma_{i_0} = 0$*, so spielt die* i_0-*te Komponente* $\gamma_{i_0}^T W_{i_0}^{(n)} = 0$ *keine Rolle für die Verteilung* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*. Deshalb können wir alle diese Komponenten von* γ *unbeachtet lassen und die Dimension des Vektor* γ *gegebenenfalls reduzieren. Deshalb setzen wir weiter voraus*

$$0 < \gamma_i < 1, \qquad i = 1, 2, ..., m. \tag{3.1.3}$$

Außerdem können wir auch $\gamma_i = 1$ *ausschließen, da dann* $p_n = W^{(n)}$ *gilt und* $W^{(n)}$ *eine Verteilung sein muss.*

Es sei m=1. Dann gilt für die $(1,\gamma,W^n)$-erzeugte Verteilung

$$p_n = \gamma_1^T W_1^{(n)} = W_1^{(n)},$$

da $\gamma_1 = 1$ ist. Damit ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genau eine Verteilung, falls $(W^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Verteilung ist.
Es sei m $= 2$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei eine $(2,\gamma,W^{(n)})$-Verteilung. Dann gilt

$$\begin{aligned} p_n &= \vec{\gamma}^T W^{(n)} \\ &= \gamma_1^T W_1^{(n)} + \gamma_2^T W_2^{(n)} \\ &= \gamma_1^T W_1^{(n)} + (1-\gamma_1^T) W_2^{(n)} \\ &= W_2^{(n)} + \gamma_1^T (W_1^{(n)} - W_2^{(n)}). \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.3 *Speziell wählen wir*

$$W_1^{(n)} = Cr^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.1.4}$$

und

$$W_2^{(n)} = Cq^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1.5}$$

wobei

$$0 < |r| < q < 1. \tag{3.1.6}$$

Wir untersuchen, für welche Parameter r, q *und* C *eine* $(2, \gamma, W^{(n)})$*-Verteilung entsteht. Es gilt offenbar*

$$p_0 = C \geq 0,$$

d.h. es muss

$$C \geq 0 \tag{3.1.7}$$

erfüllt sein.
Ist $C = 0$*, so ist offenbar* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Verteilung, d.h. es gilt sogar*

$$C > 0. \tag{3.1.8}$$

Weiter haben wir

$$p_n = C[q^n + \gamma_1^T(r^n - q^n)] \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Die Bedingung $p_n \geq 0$ *ist somit gleichwertig mit*

$$\gamma_1 \leq \frac{q^n}{q^n - r^n} = \frac{1}{1 - (\frac{r}{q})^n}. \tag{3.1.9}$$

Wenn $r > 0$*, dann ist* (3.1.9) *trivial erfüllt, da*

$$1 \leq \frac{1}{1 - (\frac{r}{q})^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

gilt.
Es sei nun $r < 0$.
Wir untersuchen die Folge $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ *mit*

$$a_n = \frac{1}{1 - (\frac{r}{q})^n} = \frac{1}{1 - (-1)^n(\frac{|r|}{q})^n} = \frac{1}{1 - (-1)^n x^n}$$

wobei

$$x := \frac{|r|}{q} < 1$$

gesetzt würde.

Es ist leicht zu sehen, dass

$$\inf\left(a_n : n \in \mathbb{N}\right) = a_1 = \frac{1}{1+x}$$

Damit ist (3.1.9) *gleichwertig mit*

$$\gamma_1 \leq \frac{1}{1+x} = \frac{q}{q+|r|}.$$

Folglich gilt

$$p_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

genau dann, wenn

$$\gamma_1 \leq \frac{1}{1+x} = \frac{q}{q+|r|} \tag{3.1.10}$$

falls $r < 0$.

Außerdem haben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = C\left[\frac{1}{1-q} + \gamma_1^T\left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-q}\right)\right]$$

Damit ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine* $(2, \vec{\gamma}, W^{(n)})$*-Verteilung, falls*

$$\begin{aligned} & C\left[\frac{1}{1-q} + \gamma_1^T\left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-q}\right)\right] \\ &= \frac{C}{1-q}\left[1 + \gamma_1^T\left(\frac{r-q}{1-r}\right)\right] = 1 \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

ist. Damit existiert für alle $C < 0$ ein Parameter γ_1 mit (3.1.11),d.h. es gilt

$$\gamma_1 = \frac{1-r}{q-r}\left[1 - \frac{1-q}{C}\right], \tag{3.1.12}$$

Wegen $0 \leq \gamma_1 \leq 1$ folgt aus (3.1.12) die Ungleichung

$$1 - q \leq C \leq 1 - r \tag{3.1.13}$$

Ist zusätzlich $r < 0$, so gilt (3.1.10), d.h. es ist

$$\gamma_1 = \frac{1+|r|}{q+|r|}\left[1 - \frac{1-q}{C}\right] \leq \frac{q}{q+|r|} \tag{3.1.14}$$

erfüllt.

Diese Ungleichung (3.1.14) ist äquivalent zu

$$1 - \frac{q}{1+|r|} \leq \frac{1-q}{C}$$

bzw.

$$C \leq \frac{(1-q)(1+|r|)}{1-q+|r|}. \tag{3.1.15}$$

Somit ist in diesem Fall $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine $(2, \vec{\gamma}, W^{(n)})$-Verteilung, falls

$$1 - q \leq C \leq \begin{cases} \frac{(1-q)(1+|r|)}{1-q+|r|}, & \textit{wenn } r < 0 \\ 1-r \quad , & \textit{wenn } r \geq 0 \end{cases} \tag{3.1.16}$$

gilt und γ_1 durch (3.1.12) *gegeben ist. Es sei bemerkt, dass γ_1 als Funktion von C alle Werte des Intervalls $\left[0, \frac{q}{q+|r|}\right]$ annimmt, wenn $r < 0$ und alle Werte des Intervalls $[0,1]$, wenn $r > 0$.*

Im Folgenden verallgemeinern wir die Schlussweise von Beispiel 3.1.3. Dazu führen wir folgenden Bezeichnungen ein.

Wir betrachten die Zerlegung von $\mathbb{N}_0$:

$$A_0 := \{n \in \mathbb{N}_0 : W_1^{(n)} = W_2^{(n)}\}$$

$$A_1 := \{n \in \mathbb{N}_0 : W_1^{(n)} < W_2^{(n)}\}$$

$$A_2 := \{n \in \mathbb{N}_0 : W_1^{(n)} > W_2^{(n)}\}$$

Außerdem setzen wir

$$B_1 := \sum_{n=0}^{\infty} W_1^{(n)} \tag{3.1.17}$$

$$B_2 := \sum_{n=0}^{\infty} W_2^{(n)} \tag{3.1.18}$$

Satz 3.1.4 *Die Verteilung $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann eine $(2, \vec{\gamma}, W^{(n)})$-Verteilung, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

$$W_1^{(n)} = W_2^{(n)} \geq 0, \quad n \in \ A_0 \tag{3.1.19}$$

Für $B_1 = B_2$ *gilt*

$$B_1 = B_2 = 1 \tag{3.1.20}$$

und

$$\sup\left(\frac{W_2^{(n)}}{W_1^{(n)} - W_2^{(n)}} : n \in A_2\right) \leq \gamma_1 \leq \inf\left(\frac{W_2^{(n)}}{W_2^{(n)} - W_1^{(n)}} : n \in A_1\right). \tag{3.1.21}$$

Für $B_1 \neq B_2$ *gilt*

$$\gamma_1 = \frac{1 - B_2}{B_1 - B_2}. \tag{3.1.22}$$

Für $B_1 > B_2$ *gilt zusätzlich*

$$B_2 \leq 1 \leq B_1 \tag{3.1.23}$$

und

$$W_2^{(n)}(1 - B_1) \leq W_1^{(n)}(1 - B_2), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.1.24}$$

Für $B_1 < B_2$ *gilt zusätzlich*

$$B_1 \leq 1 \leq B_2 \tag{3.1.25}$$

und

$$W_2^{(n)}(1 - B_1) \geq W_1^{(n)}(1 - B_2), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.1.26}$$

Beweis:

a) Wir zeigen die Notwendigkeit der Bedingungen (3.1.19) bis (3.1.26).
Es sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine $(2, \vec{\gamma}, W^{(n)})$-Verteilung. Die Bedingung $p_n \geq 0$ ist gleichwertig mit

$$p_n = \gamma_1^T W_1^{(n)} + (1 - \gamma_1^T) W_2^{(n)} = W_2^{(n)} + \gamma_1^T (W_1^{(n)} - W_2^{(n)}) \geq 0 \tag{3.1.27}$$

Für $n \in A_0$ ist (3.1.27) äquivalent zu

$$W_2^{(n)} \geq 0,$$

d.h. (3.1.19) ist erfüllt.

Für $n \in A_1$ ist (3.1.27) gleichwertig mit

$$\gamma_1 \leq \frac{W_2^{(n)}}{W_2^{(n)} - W_1^{(n)}}. \tag{3.1.28}$$

Für $n \in A_2$ ist (3.1.27) äquivalent zu

$$\gamma_1 \geq \frac{W_2^{(n)}}{W_2^{(n)} - W_1^{(n)}}. \tag{3.1.29}$$

Weiter gilt mit den Bezeichnungen (3.1.17) und (31..18)

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = B_2 + \gamma_1^T (B_1 - B_2),$$

d.h. es folgt

$$\gamma_1^T (B_1 - B_2) = 1 - B_2.$$

Damit folgt für $B_1 = B_2$ die Beziehung

$$B_1 = B_2 = 1,$$

d.h. es gilt (3.1.20).

Aus (3.1.28) und (3.1.29) folgt die Bedingung (3.1.21).

Für $B_1 \neq B_2$ folgt

$$\gamma_1 = \frac{1 - B_2}{B_1 - B_2}. \tag{3.1.30}$$

Es sei nun (i) $B_1 > B_2$.

Wegen $\gamma_1 \geq 0$ ergibt sich aus (3.1.30) $B_2 \leq 1$. Wegen $\gamma_1 \leq 1$ folgt analog

$$B_1 \geq 1.$$

Also folgen in diesem Fall die Ungleichungen

$$B_2 \leq 1 \leq B_1.$$

Somit ist (3.1.23) gezeigt.

Außerdem gilt wegen (3.1.28) und (3.1.30) für $n \in A_1$

$$\frac{1 - B_2}{B_1 - B_2} \leq \frac{W_2^{(n)}}{W_2^{(n)} - W_1^{(n)}}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$W_2^{(n)}\left(1 - B_1\right) \leq W_1^{(n)}\left(1 - B_2\right), \qquad n \in A_1. \tag{3.1.31}$$

Analog gilt wegen (3.1.29) und (3.1.30) für $n \in A_2$

$$\frac{1 - B_2}{B_1 - B_2} \geq \frac{W_2^{(n)}}{W_2^{(n)} - W_1^{(n)}}.$$

Dies ist gleichwertig mit

$$W_2^{(n)}(1 - B_1) \leq W_1^{(n)}(1 - B_2), \qquad n \in A_2. \tag{3.1.32}$$

Da diese Ungleichung für $n \in A_0$ trivial erfüllt, folgt aus (3.1.31) und (3.1.32)

$$W_2^{(n)}(1 - B_1) \leq W_1^{(n)}(1 - B_2), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. (3.1.24) ist erfüllt.

Es sei nun (ii) $B_1 < B_2$.

Dann folgen analog zum vorigen Fall die Ungleichungen

$$B_1 \leq 1 \leq B_2,$$

d.h. es gilt (3.1.25).

Außerdem gilt wegen (3.1.26) und (3.1.28) für $n \in A_1$

$$\frac{1 - B_2}{B_1 - B_2} \leq \frac{W_2^{(n)}}{W_2^{(n)} - W_1^{(n)}}.$$

Wir schließen analog zum Fall (i) und erhalten

$$W_2^{(n)}\left(1 - B_1\right) \geq W_1^{(n)}\left(1 - B_2\right), \qquad n \in A_1.$$

Ähnlich folgt wegen (3.1.29) und (3.1.28) für $n \in A_2$

$$\frac{1-B_2}{B_1-B_2} \geq \frac{W_2^{(n)}}{W_2^{(n)}-W_1^{(n)}}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$W_2^{(n)}\left(1-B_1\right) \geq W_1^{(n)}\left(1-B_2\right), \qquad n \in A_1.$$

Damit erhalten wir im Fall (ii) die Bedingung

$$W_2^{(n)}\left(1-B_1\right) \geq W_1^{(n)}\left(1-B_2\right), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. (3.1.26) ist erfüllt.

b) Wir zeigen die Hinlänglichkeit der Bedingungen (3.1.19) bis (3.1.26) für die Fälle (i) $B_1 = B_2$ (ii) $B_1 > B_2$ und (iii) $B_1 < B_2$.

Fall (i): Aus der Bedingung (3.1.19) und (3.1.21) folgt mit ähnlicher Schlussweise wie in a)

$$p_n \geq 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Außerdem ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

in diesem Fall trivial erfüllt.

Fall (ii): Wegen (3.1.20) und (3.1.24) gilt die Ungleichung

$$\gamma_1 = \frac{1-B_2}{B_1-B_2} \leq \frac{W_2^{(n)}}{W_2^{(n)}-W_1^{(n)}}, \qquad n \in A_1.$$

Dies ist gleichwertig mit

$$p_n \geq 0, \qquad n \in A_1.$$

Für $n \in A_2$ schließen wir analog. Aus (3.1.22) und (3.1.26) folgt dann nämlich

$$\gamma_1 = \frac{1-B_2}{B_1-B_2} \geq \frac{W_2^{(n)}}{W_2^{(n)}-W_1^{(n)}}.$$

Daraus ergibt sich

$$p_n \geq 0, \qquad n \in A_2$$

Für $n \in A_0$ ist die Bedingung

$$p_n \geq 0, \qquad n \in A_0$$

wegen (3.1.19) trivial erfüllt.
Außerdem folgt wegen (3.1.22) und (3.1.27)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = B_2 + \gamma_1(B_2 - B_1) = 1.$$

Der Fall (iii) wird analog behandelt.
Somit haben wir die Hinlänglichkeit der Bedingungen (3.1.19) bis (3.1.26) nachgewiesen. **q.e.d.**

Folgerung 3.1.5 *Die Verteilung* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *sind* $(2, \vec{\gamma}, W^{(n)})$ *erzeugt für alle* $\gamma_1 \in [0,1]$, *falls*

$$(W_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \textit{und} \quad (W_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0} \tag{3.1.33}$$

Verteilungen sind.

Beweis: Wegen (3.1.32) folgt

$$B_1 = B_2 = 1$$

Außerdem sind die Ungleichungen (3.1.21) gleichwertig mit

$$\inf\left(\frac{W_2^{(n)}}{W_2^{(n)} - W_1^{(n)}} : n \in A_1\right) \geq 1$$

und

$$\sup\left(\frac{W_2^{(n)}}{W_1^{(n)} - W_2^{(n)}} : n \in A_2\right) \leq 0.$$

Diese Ungleichung sind wiederum gleichwertig mit

$$W_1^{(n)} \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

und

$$W_2^{(n)} \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

was nach Voraussetzung erfüllt.
Also ist Nach Satz 3.1.4 (p_n) eine $(2, \vec{\gamma}, W^{(n)})$-Verteilung. **q.e.d.**

Beispiel 3.1.6 *Wir kehren zum Beispiel 3.1.3 zurück und leiten die Bedingungen dafür, dass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$p_n = \gamma_1^T W_1^n + (1-\gamma_1^T) W_2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

eine $(2, \vec{\gamma}, W^{(n)})$-Verteilung ist aus Satz 3.1.4 her.
a) Es gelte die Bedingung (3.1.6).
Offenbar gilt

$$W_1^n = W_2^n$$

nur falls $n = 0$, d.h. $A_0 = \{0\}$. In diesem Fall muss also wegen (3.1.19)

$$C \geq 0$$

gelten, d.h. es gilt (3.1.7).
Damit (p_n) eine Verteilung ist, gilt natürlich $C > 0$.
In diesem Beispiel gilt

$$B_1 = C\frac{1}{1-r}$$

und

$$B_2 = C\frac{1}{1-q}.$$

Also folgt $B_1 \neq B_2$. Wegen (3.1.6) gilt sogar

$$B_1 < B_2.$$

Damit müssen wegen (3.1.25) die Ungleichungen

$$C\frac{1}{1-r} \leq 1 \leq C\frac{1}{1-q}$$

gelten. Diese sind gleichwertig mit

$$1-q \leq C \leq 1-r. \tag{3.1.34}$$

Außerdem ist (3.1.26) äquivalent zu

$$Cq^n\left(1-C\frac{1}{1-r}\right) \geq Cr^n\left(1-C\frac{1}{1-q}\right)$$

bzw.

$$q^n(1-r-C)(1-q) \geq r^n(1-q-C)(1-r). \tag{3.1.35}$$

Für $r \geq 0$ *ist (3.1.35) erfüllt, da (3.1.34) gilt.*
Es sei also $r < 0$*. Dann ist (3.1.35) äquivalent zu*

$$q^n(1-r-C)(1-q) \geq |r|^n(-1)^{n+1}(C-(1-q)(1-r) \tag{3.1.36}$$

Ist n *gerade, so ist (3.1.36) erfüllt.*
Es sei nun n *ungerade. Ist*

$$1-q = C,$$

so ist (3.1.36) erfüllt und $(p)_n$ *ist nach Satz 3.1.4 eine Verteilung.*
Gilt

$$1-r = C,$$

so muss $1-q = C$ *gelten, d.h. es folgt* $q = r$*, Widerspruch zur Wahl zu (3.1.6).*
Damit gilt

$$1-q \leq C < 1-r \tag{3.1.37}$$

Wir brauchen nur den Fall

$$1-q < C < 1-r \tag{3.1.38}$$

weiter zu erörtern.

Dann ist (3.1.36) gleichwertig mit

$$\left(\frac{|r|}{q}\right)^n \leq \frac{(1-r-C)(1-q)}{(C-(1-q))(1-r)}.$$

Wegen (3.1.6) ist dies äquivalent zu

$$\frac{|r|}{q} \leq \frac{(1+|r|-C)(1-q)}{(C-(1-q))(1+|r|)}$$

bzw.

$$(C-(1-q))(1+|r|)|r| \leq (1+|r|-C)(1-q)q$$

$$C[(1+|r|)|r| + (1-q)q] \leq (1+|r|)(1-q)q + |r|(1-q))(1+|r|)$$

$$C[(1+|r|)|r| + (1-q)q] \leq (1+|r|)(1-q)(q+|r|)$$

$$C \leq \frac{q+|r|}{(1+|r|)|r| + (1-q)q}(1+|r|)(1-q).$$

Wegen

$$\begin{aligned}(1+|r|)|r| + (1-q)q &= q - r + r^2 - q^2 \\ &= (q-r)(1-r+q) \\ &= (q+|r|)(1+|r|-q)\end{aligned}$$

folgt also für C die Bedingung

$$C \leq \frac{(1+|r|)(1-q)}{1-q+|r|}. \tag{3.1.39}$$

b) Wir analysieren nun den Fall, dass

$$|r| = q < 1 \tag{3.1.40}$$

und $W_i^{(n)}, i = 1, 2$ *durch (3.1.4) bzw. (3.1.5) gegeben sind.*

Im Fall $r \geq 0$ *genügt es dann die Bedingung (3.1.7), d.h.*

$$C > 0 \tag{3.1.41}$$

zu fordern.
Es sein nun $r < 0$. Dann gilt $A_0 = \{0, 2, 4, \ldots\}$ und (3.1.19) ist trivial erfüllt.
Es gilt weiter

$$B_1 = C\frac{1}{1-r} = C\frac{1}{1+|r|} = \frac{C}{1+q}$$

und

$$B_2 = C\frac{1}{1-q}.$$

Also folgt $B_1 \neq B_2$, und zwar

$$B_1 < B_2.$$

Wir können nun die Schlussweise von Teil a) anwenden und erhalten die Bedingung (3.1.39). Diese Bedingung ist in unserem Fall gleichwertig mit

$$1 - q \leq C \leq \begin{cases} 1 - q^2, & \text{wenn } r < 0 \\ 1 + q \quad , & \text{wenn } r \geq 0. \end{cases}$$

Damit haben wir mit Hilfe von Satz 3.1.4 die Bedingungen (3.1.15) und (3.1.16) hergeleitet.

Abschließend bemerken wir, dass die Charakterisierung in Satz 3.1.4 nicht einfach auf den Fall $m > 2$ fortgesetzt werden kann. Eine Variante diese Resultat für $m > 2$ zu benutzen besteht darin, dass eine $(m, \vec{\gamma}, W^{(n)})$-Verteilung $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als eine $(2, \widetilde{\vec{\gamma}}, \widetilde{W^{(n)}})$-Verteilung $(\widetilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aufgefasst werden kann. Dafür gibt es viele Möglichkeiten, z.B. erhalten wir für

$$\widetilde{\gamma_1} = \gamma_1$$

$$\widetilde{W}_1^{(n)} = W_1^n$$

$$\widetilde{W}_2^{(n)} = \sum_{j=2}^{m} \frac{\gamma_j}{1-\gamma_1}^T W_j^{(n)}$$

$$\widetilde{p_n} = p_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Es sei bemerkt, dass wir vorausgesetzt haben, dass

$$0 < \gamma_i < 1, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m$$

gilt.

Satz 3.1.7 *Die Folge $(p_n(\vec{\gamma}))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist für alle $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}_n$ eine $(m, \vec{\gamma}, W^{(n)})$-Verteilung mit $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$, und $0 < \gamma_j < 1$, $\quad j = 0, 1, 2, \ldots, m$, genau dann, wenn $(W_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine m-dimensionale Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ für alle $j = 1, 2, \ldots, m$. ist.*

Beweis:

a) Es sei $(p_n(\vec{\gamma}))_{n\in\mathbb{N}_0}$ für alle $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}_n$ eine $(m, \vec{\gamma}, W^{(n)})$-Verteilung mit $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$, und $0 < \gamma_j < 1$, $\quad j = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Es gelte

$$p_n(\vec{\gamma}) = \vec{\gamma}^T W^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^T W_j^{(n)} \geq 0.$$

Wir wählen $j_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und $\vec{\gamma}^{(\varepsilon)}$ so aus, dass

$$(\gamma^{(\varepsilon)})_j = \begin{cases} 1 - \varepsilon, & j = j_0 \\ \frac{\varepsilon}{m} \ , & j \neq j_0 \end{cases}$$

erfüllt ist.

Somit erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} p_n(\vec{\gamma}^{(\varepsilon)}) = W_{j_0}^{(n)}.$$

Also folgt

$$W_{j_0}^{(n)} \geq 0.$$

Da j_0 beliebig gewählt wurde, folgt

$$W_j^{(n)} \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Analog folgt für jede natürliche Zahl M

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{n=0}^{M} p_n(\vec{\gamma}^{(\varepsilon)}) = \sum_{n=0}^{M} W_{j_0}^{(n)}.$$

Damit ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{M} W_{j_0}^{(n)} \leq 1$$

und schließlich

$$\sum_{n=0}^{M} W_{j}^{(n)} \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.1.42}$$

Wegen

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\vec{\gamma}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^T W_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^T \sum_{n=0}^{\infty} W_j^{(n)}$$

erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i^T (1 - \sum_{n=0}^{\infty} W_j^{(n)}) = 0$$

und damit folgt aus (3.42)

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_j^{(n)} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

b) Es seien nun $(W_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\quad j = 1, 2, \ldots, m$, Verteilungen auf $\mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$p_n(\vec{\gamma}) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^T W_j^{(n)} \geq 0$$

für Vektoren $\vec{\gamma}$ mit $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$ und $\gamma_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$
Weiter erhalten wir

$$\sum_{j\in\mathbb{N}_0, n=0}^{\infty} p_n(\vec{\gamma}) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^T \sum_{n=0}^{\infty} W_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1,$$

d.h.$(p_n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine $(m, \vec{\gamma}, W^{(n)})$-Verteilung.

q.e.d.

3.2 Verallgemeinerte Panjer-Schadensanzahl Verteilungen

In diesem Abschnitt betrachten wir spezielle $(m, \gamma, W^{(n)})$-Verteilungen. Die Folge $(W^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}^m$ wird wie folgt gewählt:

$$W^{(n)} = P_n \vec{1}, \tag{3.2.1}$$

wobei $\vec{1}$ ein m-dimensionaler Vektor mit dem Komponenten 1 ist, d.h.

$$\vec{1}^T = (1, \dots, 1)$$

und P_n eine $m \times m$ Matrix.
Wir können Satz 3.1.4 auf dieser Klasse von $(2, \gamma, W^{(n)})$-Verteilungen anwenden. Jedoch ergeben sich mit (3.2.1) keine einfacheren Bedingungen. Satz 3.1.7 zieht den Fall (3.2.1) nach sich, dass $((P_n \vec{1})_j)_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad j = 1, 2, \dots, m$, Verteilungen auf $\mathbb{N}_0$ sind.
Nun führen wir die verallgemeinerte Panjer-Verteilung ein.

Definition 3.2.1 *Die Verteilung $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei eine $(m, \gamma, W^{(n)})$-Verteilung mit*

$$W^{(n)} = P_n \vec{1}.$$

Hierbei ist P_n eine $m \times m$ Matrix und erfülle die rekursive Beziehung

$$P_n = P_{n-1} \left(A + \frac{B}{n} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3.2.2}$$

wobei A und B gewisse $m \times m$ Matrizen sind. Dann heißt $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (m, γ, A, B)-Panjer-Verteilung.

Zunächst untersuchen wir, welche Folgen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von $m \times m$ Matrizen die Bedingung (3.2.2) erfüllen.
Wie üblich bezeichnen wir mit I_m die $m \times m$ Einheitsmatrix.

Wir bezeichnen mit $A_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$, die j-te Spalte der $m \times m$ Matrix A. Weiter sei

$$\mathscr{A} := lin(A_j, \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

der lineare Teilraum von $\mathbb{R}^m$, der durch die Spalten von A aufgespannt wird. Analog bezeichnen wir $B_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$, die Spalten der $m \times m$ Matrix B.

Satz 3.2.2

a) Die Spalten der $m \times m$ Matrix B liegen in dem linearen Teilraum $\mathscr{A}$ der $m \times m$ Matrix A genau dann, wenn eine $m \times m$ Matrix C existiert, dass

$$A(C - I_m) = B \tag{3.2.3}$$

gilt.

b) Es seien A und C $m \times m$ Matrizen und es gelte

$$AC = CA. \tag{3.2.4}$$

Weiter sei B durch (3.2.3) definiert. Erfüllt die Folge $(P_n)_{n=0,1,\dots}$ von $m \times m$ Matrizen die Beziehung (3.2.2), so gilt

$$P_n = P_0 \frac{A^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (C + jI_m), \quad n = 1, 2, \dots. \tag{3.2.5}$$

Beweis:

a) Wir setzen voraus, dass die Spalten von B in $\mathscr{A}$ liegen.

1. Nach Voraussetzung existieren Koeffizienten $d_i^{(j)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m$, derart, dass

$$\sum_{i=1}^{m} A_i d_i^{(j)} = B_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \tag{3.2.6}$$

Weiter sei

$$d_j = (d_1^{(j)}, \dots, d_m^{(j)})^T.$$

Dann ist (3.2.6) gleichwertig mit

$$Ad_j = B_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.2.7}$$

Weiter führen wir die $m \times m$ Matrix D gemäß

$$D = (d_1, \ldots, d_m)$$

ein.
Dann ist (3.2.7) gleichwertig mit

$$AD = B. \tag{3.2.8}$$

Führen wir schließlich die $m \times m$ Matrix C durch

$$C = D + I_m$$

ein, so ist (3.2.8) gleichwertig mit (3.2.3).
2. Es gelte nun (3.2.3). Dann setzen wir

$$D = C - I_m$$

und sehen, dass (3.2.8) erfüllt ist. So wie im ersten Teil folgt daraus, dass die Spalten von B in dem linearen Teilraum $\mathscr{A}$ liegen.
b) Die Folge $(P_n)_{n=1,2,\ldots}$ von $n \times m$ Matrizen erfülle die Beziehung (3.2.2). Außerdem existiert nach a) eine $m \times m$ Matrix C mit (3.2.3). Dann lässt sich (3.2.2) in der Form

$$P_n = P_{n-1}\frac{A}{n}(C + (n-1)I_m), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.2.9}$$

schreiben, da

$$\begin{aligned} A + \frac{B}{n} &= A + \frac{A(C - I_m)}{n} \\ &= \frac{A}{n}(nI_m + C - I_m) \\ &= \frac{A}{n}(C + (n-1)I_m) \end{aligned}$$

ist.
Wir zeigen nun mit vollständige Induktion, dass (3.2.5) gilt.
Für n = 1 folgt aus (3.2.9)

$$P_1 = P_0 AC$$

und (3.47) ist damit gezeigt.
Es gelte (3.2.5) für $k = n$. Wegen (3.2.2) bzw. (3.2.9) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k \frac{A}{k}(C + kI_m) \\ &= \frac{A^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (C + jI_m) \frac{A}{k}(C + kI_m) \\ &= \frac{A^k}{(k+1)!} \prod_{j=0}^{k-1} (C + jI_m) A (C + kI_m). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Weiter zeigen wir, dass

$$(C + aI_m)A = A(C + aI_m) \tag{3.2.11}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Die Identität (3.2.11) ist gleichwertig mit (3.2.4).
Also ist (3.2.11) bewiesen. Demnach vereinfacht sich (3.2.3) zu

$$P_{k+1} = \frac{A^{k+1}}{(k+1)!} \prod_{j=0}^{k} (C + jI_m),$$

d.h. die Induktionsbehauptung ist gezeigt. **q.e.d.**

Bemerkung 3.2.3 *Das Produkt in (3.2.5) hängt nicht von der Reihenfolge der Faktoren ab. Dies ergibt sich daraus, dass für alle reelle Zahlen a und b*

$$(C + aI_m)(C + bI_m) = (C + bI_m)(C + aI_m)$$

gilt. Letztere Identität ist erfüllt, da

$$(C + aI_m)(C + bI_m) = C^2 + (a + b)C_n + abI_m$$

gilt und die Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ kommutativ sind.

Wir zeigen, dass unter der Voraussetzungen (3.2.3) und (3.2.4) die Matrizen A und B kommutieren.

Lemma 3.2.4
a) Es gelte (3.2.3) und (3.2.4). Dann haben wir

$$AB = BA. \tag{3.2.12}$$

b) Es gelte (3.2.3). Dann ist (3.2.12) gleichwertig mit

$$A(AC - CA) = 0. \tag{3.2.13}$$

c) Es gelte (3.2.3) und A sei regulär. Dann ist (3.2.12) zu (3.2.4) äquivalent.

Beweis:
a) Wegen (3.2.3) ist (3.2.12) gleichwertig mit

$$AA(C - I_m) = A(C - I_m)A$$

bzw.

$$A^2C - A^2 = ACA - A^2,$$

d.h.

$$A^2C = ACA.$$

Wegen (3.2.4) ist die letzte Identität wahr, d.h. (3.2.12) gilt.
b) Es gelte (3.2.3) und (3.2.12). Dann haben wir

$$AB = AA(C - I_m) = A(C - I_m)A = BA.$$

Dies ist gleichwertig mit (3.2.13).
Es gelte (3.2.3) und (3.2.13). Dann erhalten wir

$$AB = A^2C - A^2 = ACA - A^2$$

bzw. mit (3.2.3)

$$A^2(C - I_m) = A(C - I_m)A = BA.$$

Es folgt also (3.2.12).

c) In diese Fall ist (3.2.13) äquivalent zu (3.2.4). Dies folgt aus (3.2.13), falls wir von Links mit A^{-1} multiplizieren. **q.e.d.**

Folgerung 3.2.5 *Die $m \times m$ Matrix A sei regulär. Weiter sei B eine beliebige $m \times m$ Matrix und es gelte*

$$AB = BA.$$

Erfüllt die Folge $(P_n)_{n=0,1,\ldots,}$ die Beziehung (3.2.2), so gilt

$$P_n = P_0 \frac{A^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (C + jI_m), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

wobei

$$C = A^{-1}B + I_m. \tag{3.2.14}$$

Beweis: Wegen (3.2.14) haben wir

$$B = A(C - I_m),$$

d.h. die Bedingung (3.2.3) ist erfüllt.

Außerdem gilt

$$AC = B + A$$

und

$$CA = A^{-1}BA + A.$$

Damit ist (3.2.4) äquivalent zu

$$A^{-1}BA = B,$$

d.h.

$$BA = AB,$$

was laut Voraussetzung gilt. Somit ist die Bedingung (3.2.4) erfüllt. Nach Satz 3.2.2 gilt also die Behauptung. **q.e.d.**

Beispiel 3.2.6 *Es sei T eine $m \times m$ orthogonale Matrix. Weiter seien*

$$D_1 = diag(d_1^{(1)}, \dots, d_m^{(1)}).$$

und

$$D_2 = diag(d_1^{(2)}, \dots, d_m^{(2)}).$$

zwei diagonale Matrizen, wobei die m-dimensionalen Vektoren

$$d_i = (d_1^{(i)}, \dots, d_n^{(i)})^T, \quad i = 1, 2$$

ungleich sind.
Außerdem gelte $d_j^{(1)} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$
Wir definieren die Matrizen A und B durch

$$A = TD_1T^T \tag{3.2.15}$$

$$B = TD_2T^T. \tag{3.2.16}$$

Dann gilt

$$AB = TD_1D_2T^T = BA = TD_2D_1T^T,$$

da bekanntlich Diagonalmatrizen kommutieren. Weiter gilt

$$\begin{aligned} C &= A^{-1}B + I_m \\ &= TD^{-1}T^TTD_2T^T + I_m \\ &= TD^{-1}D_2T^T + I_m \\ &= T(D_1^{-1}D_2 + I_m)T^T. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir

$$D_1^{-1}D_2 + I_m = diag\left(\frac{d_1^2}{d_1^1} + 1, \frac{d_2^2}{d_2^1} + 1, \dots, \frac{d_m^2}{d_m^1} + 1\right).$$

Nach Folgerung 3.2.5 erhalten wir, dass für die Folge $(P_n)_{n=1,2,\ldots}$ *mit der Beziehung (3.2.2) mit Matrizen* A *und* B *die Darstellung*

$$P_n = \frac{P_0}{n!} TDT^T, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.2.17}$$

gilt.
Hierbei ist D *eine* m*-reihige Diagonalmatrix, d.h. es gilt*

$$D_n = diag(d_{1,n}, \ldots, d_{m,n}). \tag{3.2.18}$$

mit

$$d_{i,n} = (d_i^{(1)})^n \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d_i^{(2)}}{d_i^{(1)}} + j \right) \right). \tag{3.2.19}$$

Außerdem setzen wir

$$D_0 = I_m$$

Es gilt

$$P_n = P_0 \frac{A^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (C + jI_m).$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{P_0}{n!} TD_1^n T^T \prod_{j=0}^{n-1} T(D_1^{-1} D_2 + (j+1) I_m) T^T \\ &= \frac{P_0}{n!} TD_1^n T^T T \prod_{j=0}^{n-1} (D_1^{-1} D_2 + (j+1) I_m) T^T \\ &= \frac{P_0}{n!} TD_1^n \prod_{j=1}^{n} (D_1^{-1} D_2 + jI_m) T^T. \end{aligned}$$

Auf Grund der Definition der Diagonalmatrix D *gilt also*

$$P_n = P_0 T D_n T^T, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{3.2.20}$$

Wir untersuchen nun, ob $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *mit*

$$W^{(n)} = P_n \vec{1}$$

eine $(m, \vec{\gamma}, W^{(n)})$*-Verteilung ist, d.h. ob* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine* $(m, \gamma, A, B)-$*Panjerverteilung ist, wobei A und B durch (3.2.15) und (3.2.16) gegeben sind.*
Es gilt wegen (3.2.20)

$$P_n\vec{1} = P_0 T D_n T T \vec{1}$$

Es erscheint schwierig zu seien, zu entscheiden, unter welchen Bedingungen an P_0*, T, A und B die Folge* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Verteilung ist.*
Deshalb betrachten wir den Spezialfall $m = 2$ *und*

$$P_0 = I_2\beta \quad mit \quad 0 < \beta \leq 1.$$

Weiter seien die Diagonalelemente von D_1 *und* D_2 *nicht negativ.*
Für $m = 2$ *ist*

$$T = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3.2.21}$$

mit $\alpha \in [0, 2\pi)$ *eine orthogonale Matrix.*
Da

$$T^T 1 = \begin{pmatrix} cos\alpha + sin\alpha \\ cos\alpha - sin\alpha \end{pmatrix},$$

hat der Vektor $T^T 1$ *für* $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$ *nicht negative Komponenten.*
Außerdem gilt

$$\gamma^T T = \begin{pmatrix} \gamma_1 cos\alpha + \gamma_2 sin\alpha \\ -\gamma_1 sin\alpha + \gamma_2 cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat nicht negative Komponenten, falls

$$\gamma_i \geq 0, \quad i = 1, 2$$

und

$$\gamma_2 \geq \gamma_1 tan\alpha$$

gilt. Wegen $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$ *ist die letzte Ungleichung erfüllt, falls*

$$\gamma_2 \geq \gamma_1$$

ist, d.h. wegen $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$ ist die letzte Ungleichung gleichwertig mit

$$\gamma_1 \geq \frac{1}{2}. \tag{3.2.22}$$

Falls

$$d_i^{(1)} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.2.23}$$

und

$$d_i^{(2)} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.2.24}$$

so kann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \tag{3.2.25}$$

nicht konvergieren, da für das i-te Diagonalelement der Matrix D_n, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d_{i,n} &:= \sum_{n=1}^{\infty} (d_i^{(1)})^n \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d_i^{(2)}}{d_i^{(1)}} + j \right) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} (d_i^{(1)})^n n! \end{aligned}$$

gilt.

Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe der unteren Schranken. Für

$$a_n = (d_i^{(1)})^n n!$$

gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = d_i^{(1)}(n+1)$$

Damit gilt für ein gewisses n_0, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

für $n \geq n_0$ und bekanntlich divergiert die Reihe, d.h. die Reihe (3.2.25) kann nicht konvergieren, falls (3.2.23) und (3.2.24) erfüllt sind.

Deshalb suchen wir Lösungen für negative Diagonalelemente. Wir setzen voraus, dass

$$\frac{d_i^{(2)}}{d_i^{(1)}} = -k_i, \quad i = 1, 2 \tag{3.2.26}$$

gilt, wobei $k_i \in \mathbb{N}$.

Dann haben wir (vgl. 3.2.19)

$$d_{i,n} = \begin{cases} (-d_i^{(1)})^n \prod_{j=1}^{n}(k_i - j), & n \ < \ k_i \\ \quad 0 \ , & n \ \geq \ k_i \quad . \end{cases} \tag{3.2.27}$$

Also folgt für

$$d_i^{(1)} < 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.2.28}$$

die Bedingung

$$d_{i,n} \geq 0$$

somit erhalten wir für $\gamma = (\gamma_1, 1 - \gamma_1)$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ *und (3.2.26)*

$$p_n = \gamma^T P_n \vec{1} \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Weiter folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \beta + \beta\gamma^T + \sum_{n=0}^{\infty} D_n T^T \vec{1}.$$

Mit (3.2.27) haben wir also

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_{i,n} = \sum_{n=0}^{k_i - 1} (-d_i^{(1)})^n \prod_{j=1}^{n} (k_i - j) =: K_i, \quad i = 1, 2.$$

Also ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \beta(1 + \gamma^T T diag(K_1, K_2) T^T 1).$$

Damit können wir β *aus* $(0, 1]$ *wählen, dass* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *eine Verteilung ist. Unser Ergebnis können wir folgendermaßen zusammenfassen:*

Es gelte

$$\frac{d_i^{(2)}}{d_i^{(1)}} = -k_i, \quad i = 1, 2$$

mit $k_i \in \mathbb{N}$. *Außerdem sei*

$$d_i^{(1)} < 0, \quad i = 1, 2.$$

Weiter sei für $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$ *und die orthogonale Matrix* T *durch (3.2.21) definiert. Schließlich sei*

$$\gamma_1 \leq \frac{1}{2}.$$

Dann existiert ein $\beta, \quad 0 < \beta \leq 1$, *dass* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *mit*

$$p_n = \gamma^T P_n 1$$

ein $(2, \gamma, A, B)$*-Panjerverteilung ist.*
Hierbei ist P_n *durch (3.2.17) und* P_0 *durch*

$$P_0 = I_2 \beta$$

definiert und die Matrizen A *und* B *sind durch (3.2.15) und (3.2.16) gegeben.*

3.3 Verallgemeinerte geometrische Verteilungen

In diesem Abschnitt geben wir eine Panjer-Verteilung an, die mit Hilfe einer substochastischen Matrix definiert ist.
Zunächst definieren wir substochastische Matrizen.

Definition 3.3.1 *Eine* $m \times m$ *Matrix* $Q = (q_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,m}$, *heißt substochastisch, falls*
(1) $q_{i,j} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$
(2) $\sum_{j=1}^{m} q_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

Definition 3.3.2 *Es sei gegeben zwei* $n \times m$ *Matrizen* A *und* B. *Dann ist*

$$A \leq B$$

durch die Bedingung

$$a_{ij} \leq b_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m$$

definiert.

Die Eigenschaft (1) notieren wir demnach matriziell als

$$Q \geq 0 \tag{1'}$$

und die Eigenschaft (2) als

$$Q1 \leq 1. \tag{2'}$$

Lemma 3.3.3
a) Es gelte für die $m \times m$ Matrix $C \geq 0$.
Weiter gelte für die $m \times m$ Matrizen A und B

$$A \leq B$$

Dann folgt

$$CA \leq CB \tag{3.3.1}$$

b) Es seien Q_1und Q_2 substochastische Matrizen. Dann ist ebenfalls Q_1Q_2 substochastisch.

Beweis:
a) Die Bedingung (3.3.1) ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}a_{jk} \leq \sum_{j=1}^{m} c_{ij}b_{jk}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, m$$

bzw. zu

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}(a_{jk} - b_{jk}) \leq 0.$$

Da nach Voraussetzung $a_{jk} \leq b_{jk}$ und $c_{ij} \geq 0$ ist die letzte Ungleichung erfüllt und die Behauptung ist gezeigt.
b) Da $Q_1 \geq 0$ und $Q_2 \leq 0$ folgt aus a) $Q_1 Q_2 \geq 0$.
Weiter erhalten wir mit $Q_1 \geq 0$ und $Q_2 \vec{1} \leq \vec{1}$, dass

$$Q_1 Q_2 \vec{1} \leq Q_1 \vec{1}$$

und da Q_1 substochastisch folgt

$$Q_1 Q_2 \vec{1} \leq Q_1 \vec{1} \leq 1,$$

d.h. $Q_1 Q_2$ ist substochastisch. **q.e.d.**

Wir geben ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} Q^n$ an, wobei Q eine $m \times m$ substochastische Matrix ist.

Lemma 3.3.4
a) Es sei $Q = (q_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,m}$, *eine substochastische* $m \times m$ *Matrix und es gelte*

$$\max_{i=1,2,\ldots,m} \sum_{j=1}^{m} q_{i,j} =: q < 1 \tag{3.3.2}$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q^n. \tag{3.3.3}$$

b) Falls die Reihe (3.3.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q^n$$

konvergiert, so existiert die Inverse der $m \times m$ *Matrix* $I_m - Q$ *und es gilt*

$$(I_m - Q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n.$$

Beweis:

a) Es sei $Q^{(n)} = (q_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,2,\ldots,m}$.

Offenbar gilt $Q^{(n)} \geq 0$. Wir zeigen mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$\max_{i=1,2,\ldots,m} \sum_{j=1}^{m} q_{i,j}^{(n)} \leq q^n. \tag{3.3.4}$$

Für n = 1 ist (3.3.4) nach Voraussetzung (3.3.2) erfüllt.

Es gelte (3.3.4) für n = k. Wir haben

$$q_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{s=1}^{m} q_{i,s}^{(k)} q_{s,j}, \quad i,j = 1,\ldots,m.$$

Damit folgt

$$\sum_{j=1}^{m} q_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{s=1}^{m} q_{i,s}^{(k)} q_{i,s}^{(k)} \left(\sum_{j=1}^{m} q_{s,j} \right).$$

Wegen (3.3.2) und der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{j=1}^{m} q_{i,j}^{(k+1)} \leq q \sum_{s=1}^{m} q_{i,s}^{(k)} \leq q q^k = q^{k+1}$$

und die Induktionsbehauptung folgt daraus unmittelbar.

Es genügt zu zeigen, dass für alle $i,j = 1,\ldots,m$ die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{i,j}^{(n)}$$

konvergieren. Wegen (3.3.4) haben wir

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} q_{i,j}^{(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n)} \leq \frac{q}{1-q} < \infty,$$

d.h. die Reihe (3.3.3) konvergiert.

b) Falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} Q^n$ konvergiert, so gilt

$$(I_m - Q) \sum_{n=0}^{\infty} Q^n = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n - \sum_{n=1}^{\infty} Q^n = Q^0 = I_m,$$

d.h. die Inverse von $I_m - Q$ existiert und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q^n = (I_m - Q)^{-1}.$$

q.e.d.

Mit Hilfe dieses Resultates können wir folgendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe (3.3.3) ableiten.

Beispiel 3.3.5 *Wir geben eine 2×2 substochastische Matrix an, dass (3.3.3) konvergiert, aber die Voraussetzung (3.3.2) nicht erfüllt ist.*
Es sei

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dann folgt $q = 1$ und (3.3.2) ist nicht erfüllt.
Es ist leicht zu sehen, dass

$$Q^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

gilt. Damit ist die Reihe (3.3.3) konvergent.

Satz 3.3.6 *Die $m \times m$ Matrix Q sei substochastisch. Die Reihe (3.3.3) konvergiert genau dann, wenn*

$$\det(I_m - Q) \neq 0 \tag{3.3.5}$$

gilt.

Beweis:

a) Es gelte(3.3.5). Dann betrachten wir die $m \times m$ Matrix Q^n. Es sei

$$Q^n := (q_{ij}^{(n)})_{i,j=1,2,\ldots,m}. \tag{3.3.6}$$

Da Q eine $m \times m$ substochastische Matrix ist, ist auch Q^n substochastisch nach Lemma 3.3.3 b) substochastisch.
Für z mit $0 \leq z < 1$ führen wir die Matrixfunktion

$$\underline{Q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (Qz)^n \tag{3.3.7}$$

ein. Da in diesem Fall Qz eine substochastische $m \times m$ Matrix ist, für die Bedingung (3.3.2) mit $q = z$ erfüllt ist, können wir Lemma 3.3.4 anwenden und sehen, dass $\underline{Q}(z)$ für $0 \leq z < 1$ wohl konvergiert.
Weiter folgt aus Lemma 3.3.4 b)

$$\underline{Q}(z) = (I_m - zQ)^{-1}.$$

Offenbar gilt

$$I_m - zQ = (\delta_{ij} - zq_{ij}^{(n)})_{i,j=1,2,\ldots,m},$$

wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \;, & \text{wenn } i = j \\ 0 \;, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Wir erhalten daraus

$$(I_m - zQ)^{-1} = \frac{1}{P(z)} (P_{ij}(z))_{i,j=1,2,\ldots,m}, \tag{3.3.8}$$

wobei $P_{ij}(z)$ gewisse Polynome sind, die höchstens den Grad $m-1$ haben.
Weiter ist

$$P(z) = \det(I_m - zQ)$$

und damit ist $P(z)$ ein Polynom, das höchstens den Grad m hat. Außerdem gilt wegen Voraussetzung (3.3.5)

$$P(1) \neq 0 \tag{3.3.9}$$

Wegen (3.3.6) und (3.3.7) folgt also

$$\frac{P_{ij}(z)}{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)} z^n, \quad 0 \leq z < 1$$

und, da $Q^n \geq 0$ erhalten wir für $k = 1, 2, \ldots$ die Ungleichung

$$\frac{P_{ij}(z)}{P(z)} = \sum_{n=0}^{k} q_{ij}^{(n)} z^n.$$

Nach Grenzübergang $z \nearrow 1$, folgt somit

$$\frac{P_{ij}(1)}{P(1)} = \sum_{n=0}^{k} q_{ij}^{(n)} \geq 0.$$

Wegen (3.3.9) ist die links Seite endlich.
Da k beliebig gewählt werden kann, folgt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)}; \quad i, j = 1, \ldots,$$

d.h. es konvergiert die Reihe (3.3.3)
b) Es konvergiere die Reihe (3.3.3).
Dann existiert nach Lemma 3.3.4 b) die Inverse der Matrix $I_m - Q$ und damit gilt

$$\det(I_m - Q) \neq 0,$$

d.h. (3.3.5) ist erfüllt. **q.e.d.**

Bemerkung 3.3.7 *Mit Hilfe von Resultaten über den Spektralradius einer substochastischen Matrix und über Eigenschaften von Matrixnormen erhält man ebenfalls Satz 3.3.6 (Vgl.[2])*

Satz 3.3.8 *Es sei Q eine $m \times m$ substochastische Matrix und es gelte*

$$\det(I_m - Q) \neq 0 \tag{3.3.10}$$

Dann ist $(p_n)_{n=0,1,\ldots}$ mit $\gamma_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$, wobei

$$p_n = \gamma^T Q^n (I_m - Q) 1, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.3.11}$$

eine $(m, \gamma, Q, 0)$-Panjerverteilung.

Beweis: Es sei Q eine substochastische $m \times m$ Matrix.
Wir definieren die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch (3.2.2), wobei $A = Q$ und $B = 0$ gesetzt wird. Dann gilt

$$P_n = P_{n-1}Q.$$

Für $C = I_m$ gilt

$$B = A(C - I_m) = 0,$$

Außerdem haben wir

$$AC = A = CA.$$

Deswegen können wir Satz 3.2.2 anwenden.
Damit gilt

$$P_n = P_0 \frac{Q^n}{n!} n! I_m = P_0 Q^n.$$

Weiter erhalten wir

$$p_n = \gamma^T P_n 1 = \gamma^T P_0 Q^n 1.$$

Außerdem sei

$$P_0 := I_m - Q.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} p_n &= \gamma^T (I_m - Q) Q^n 1 \\ &= \gamma^T (Q^n - Q^{n+1}) 1 \\ &= \gamma^T Q^n (I_m - Q) 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$(I_m - Q)1 = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{j=1}^m q_{i,j} \\ \vdots \\ 1 - \sum_{j=1}^m q_{m,j} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Da $Q^n \geq 0$ gilt, folgt

$$p_n \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

falls die Komponenten von γ nicht negativ sind.
Außerdem haben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \gamma^T \sum_{n=0}^{\infty} Q^n (I_m - Q)1.$$

Mit Lemma 3.3.4 folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_n &= \gamma^T (I_m - Q)^{-1}(I_m - Q)1 \\ &= \gamma^T 1 \\ &= 1,\end{aligned}$$

d.h. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Panjer-Verteilung. **q.e.d.**

Bemerkung 3.3.9 *Es sei $m = 1$. Wir wenden Satz 3.3.5 an. Dann ist $Q = (q_{11})$ substochastisch, falls $0 \leq q_{11} \leq 1$. Dann ergibt sich nach (3.3.11)*

$$p_n = q_{11}^n (1 - q),$$

d.h wir können (3.3.11) als Verallgemeinerung der geometrischen Verteilung auffassen.

3.4 Verallgemeinerte Poisson-Verteilung

Wir betrachten die Folge $(P_n)_{n=1,2,\dots}$ von $m \times m$ Matrizen, die durch (3.2.2) definiert sind, wobei $A = 0$ und $B = \Lambda$ gesetzt wird, und Λ eine $m \times m$ Matrix ist. Dann gilt

$$P_n = \frac{P_{n-1}\Lambda}{n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Induktiv schließen wir, dass

$$P_n = \frac{P_0 \Lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{3.4.1}$$

gilt.

Damit folgt

$$p_n = \vec{\gamma}^T \frac{P_0 \Lambda^n}{n!} 1 \tag{3.4.2}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \vec{\gamma}^T P_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n}{n!} \right) 1, \quad \Lambda \geq 0. \tag{3.4.3}$$

Wir untersuchen die unendliche Reihe in (3.4.3)

Lemma 3.4.1

a) Es sei A eine beliebige $m \times m$ Matrix. Dann existiert die Reihe

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n}{n!}. \tag{3.4.4}$$

b) Die Matrix e^A hat die Inverse e^{-A}.

Beweis:

a) Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$. Weiter definieren wir

$$a := \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \tag{3.4.5}$$

Wir setzen $A^n = (a_{ij}^n)_{i,j=1,\ldots,m}, \quad n = 0, 1, \ldots$. Dann beweisen wir mit vollständige Induktion

$$\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}^n| \leq a^n, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.4.6}$$

Für n=0 und n=1 ist dies erfüllt.

Es gelte (3.4.6) für k=n. Wir zeigen, dass (3.4.6) für k+1 erfüllt ist. Es gilt

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{m} a_{il}^{(k)} a_{kj},$$

und wegen der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|a_{ij}^{(k+1)}| \leq \sum_{l=1}^{m} |a_{il}^{(k)}||a_{kj}|.$$

Wegen (3.4.5) folgt

$$a_{ij}^{(k+1)} \leq \sum_{l=1}^{m} |a_{il}^{(k)}|a.$$

Nun benutzen wir die Induktionsvoraussetzung und erhalten

$$a_{ij}^{(k+1)} \leq a^k a = a^{k+1}$$

und die Induktionsbehauptung ist gezeigt.
Die Reihe (3.4.4) konvergiert, falls die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_{ij}^{(n)}|}{n!}, \quad i, j = 1, \ldots, m$$

konvergieren. Wegen (3.4.6) erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_{ij}^{(n)}|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a < \infty$$

und somit konvergiert die Reihe (3.4.4)
b) Offenbar existiert e^{-A}. Wir betrachten das Produkt

$$C_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!} \Lambda^n \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \Lambda^n$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} C_k &= I_m + \sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{s=0}^{l} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{1}{(l-s)!} \right) \Lambda^l \\ &= I_m + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \sum_{s=0}^{l} (-1)^s \binom{l}{s} \Lambda^l \\ &= I_m. \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{\Lambda^n}{n!}=e^{-A}$$

und

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{\Lambda^n}{n!}=e^{A}$$

und das Produkt von Matrizen bezüglich der punktweisen Konvergenz stetig ist, folgt

$$\lim_{k\to\infty}C_k=e^{A}e^{-A}=I_m,$$

d.h. e^{-A} ist die Inverse von e^{A}. **q.e.d.**

Satz 3.4.2 *Es sei Λ eine nichtnegative $m\times m$ Matrix. Weiter gelte*

$$e^{-\Lambda}\vec{1}\geq 0. \tag{3.4.7}$$

Dann ist $(p_n)_{n=0,1,\ldots}$, wobei

$$p_n=\vec{\gamma}^T\frac{\Lambda^n e^{-\Lambda}}{n!}1,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{3.4.8}$$

eine $(m,\gamma,0,\Lambda)$-Panjer-Verteilung.

Beweis: Wegen (3.4.1) erhalten wir für $P_0=e^{-\Lambda}$

$$P_n=\frac{e^{-\Lambda}\Lambda^n}{n!},\quad n=0,1,\ldots.$$

Wegen Lemma 3.4.1 a) gilt

$$e^{-\Lambda}\Lambda^n=\Lambda^n e^{-\Lambda}.$$

Somit erhalten

$$P_n=\frac{\Lambda^n e^{-\Lambda}}{n!}$$

und es folgt

$$p_n=\frac{\vec{\gamma}^T\Lambda^n(e^{-\Lambda}\vec{1})}{n!}.$$

Wegen der Voraussetzungen $e^{-\Lambda}\vec{1} \geq 0$ und $\Lambda \geq 0$ folgt aus Lemma 3.3.3 a)

$$\Lambda^n(e^{-\Lambda}\vec{1}) \geq 0,$$

d.h. es gilt

$$p_n \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Außerdem folgt wegen (3.4.3) und Lemma 3.4.1

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} p_n &= \vec{\gamma}^T e^{-\Lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n}{n!}\vec{1} \\
&= \vec{\gamma}^T e^{-\Lambda} e^{\Lambda}\vec{1} \\
&= \vec{\gamma}^T\vec{1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Folgerung 3.4.3 *Es sei Λ eine nichtnegative $m \times m$ Matrix. Dann ist $(p_n)_{n=0,1,\ldots}$, wobei*

$$p_n = \vec{\gamma}^T \frac{\Lambda^n e^{-\Lambda}}{n!} 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.4.9}$$

eine $(m, \gamma, 0, \Lambda)$-Panjer-Verteilung, für alle $\vec{\gamma} \geq 0$ genau dann, wenn

$$e^{-\Lambda}\vec{1} \geq 0. \tag{3.4.10}$$

Beweis:

a) Falls (3.4.10) gilt folgt aus Satz 3.4.2 die Behauptung

b) Es sei eine Folge $(p_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ gegeben, wobei (3.4.8) gilt, eine $(m, \gamma, 0, \Lambda)$-Panjer-Verteilung. Dann gilt insbesondere $p_0 \geq 0$, d.h.

$$\vec{\gamma}^T e^{-\Lambda}\vec{1} \geq 0.$$

Wählen wir $m \times 1$ Vektoren

$$(\vec{\gamma}^{(n)})^T = \left(1 - \frac{m-1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}\right)^T, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

so folgt

$$(\vec{\gamma}^{(n)})^T(e^{-\Lambda}\vec{1}) \geq 0.$$

Nach Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich

$$(e^{-\Lambda}\vec{1})_1 \geq 0$$

Analog schließen wir, dass die übrigen Komponenten von $e^{-\Lambda}\vec{1}$ nicht negativ sind. Also gilt (3.4.7). **q.e.d.**

Um Satz 3.4.2 anzuwenden ist vor allem die Voraussetzung (3.4.7) zu überprüfen. Wir zeigen dies an Hand einiger Beispiele.

Beispiel 3.4.4

Die $m \times m$ Matrix $\Lambda \geq 0$ sei diagonal, d.h. es gelte

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

wobei $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

Da bekanntlich

$$\Lambda^n = diag(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_m^n)$$

ist, folgt

$$\begin{aligned} e^{-\Lambda} &= diag\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_1^n}{n!}, \ldots, \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_m^n}{n!}\right) \\ &= diag\left(e^{-\lambda_1}, e^{-\lambda_2}, \ldots, e^{-\lambda_m}\right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$e^{-\lambda}\vec{1} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1} \\ \vdots \\ e^{-\lambda_m} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Damit können wir Satz 3.4.2 und Folgerung 3.4.3 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\vec{\gamma}^T \Lambda^n e^{-\Lambda} \vec{1}}{n!} \\ &= \frac{\vec{\gamma}^T}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n e^{-\lambda_1} \\ \vdots \\ \lambda_m^n e^{-\lambda_m} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{m} \vec{\gamma}_i \lambda_i^n e^{-\lambda_i}. \end{aligned}$$

Damit ist $(p_n)_{n=0,1,\ldots}$ für alle $\vec{\gamma} \geq 0$, eine Mischung von Poissonverteilungen für alle $\vec{\gamma} \geq 0$.
Für $m = 1$, ist $(p_n)_{n=0,1,\ldots}$ die Poissonverteilung mit dem Parameter λ_1.

Satz 3.4.5
Es sei H eine $m \times m$ reguläre Matrix und es seien $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m$.
Wir setzen

$$\Lambda := H diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) H^{-1}.$$

Dann gilt

$$p_n = \gamma^T \Lambda^n e^{-\Lambda} \vec{1} = \gamma^T H \frac{diag\left(\lambda_1^n e^{-\lambda_1}, \ldots, \lambda_m^n e^{-\lambda_m}\right)}{n!} H^{-1} \vec{1}. \tag{3.4.11}$$

Die Folge $(p_n)_{n=0,1,\ldots}$ ist genau dann eine $(m, 0, \gamma, \Lambda)$-Panjerverteilung, falls $p_n \geq 0, \quad n = 0, 1, \ldots$.

Beweis:
a) In diesem Fall gilt

$$\Lambda^n = H diag(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_m^n) H^{-1}. \tag{3.4.12}$$

Es gilt wegen (3.4.12)

$$
\begin{aligned}
e^{-\Lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\Lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{H diag(\lambda_1^n, \dots, \lambda_m^n) H^{-1}}{n!} \\
&= H \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{diag(\lambda_1^n, \dots, \lambda_m^n)}{n!} H^{-1}.
\end{aligned}
$$

Wegen Beispiel 3.4.4 erhalten wir weiter

$$e^{-\Lambda} = H diag(e^{-\lambda_1}, \dots, e^{-\lambda_m}) H^{-1}.$$

Damit folgt wegen (3.4.12)

$$\Lambda^n e^{-\Lambda} = H diag(\lambda_1^n e^{-\lambda_1}, \dots, \lambda_m^n e^{-\lambda_m}) H^{-1}.$$

Schließlich erhalten wir

$$p_n = \gamma^T \Lambda^n e^{-\lambda} \vec{1} = \gamma^T H \frac{diag\left(\lambda_1^n e^{-\lambda_1}, \dots, \lambda_m^n e^{-\lambda_m}\right)}{n!} H^{-1} \vec{1} \tag{3.4.13}$$

und die Behauptung (3.4.11) ist gezeigt.

b) Wenn

$$p_n \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{3.4.14}$$

Dann folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \gamma^T H I_m H^{-1} \vec{1} = \gamma^T \vec{1} = 1,$$

d.h. (p_n) ist eine Verteilung.

Ist $(p_n)_{n=0,1,\dots}$ eine Verteilung, wobei p_n durch (3.4.13) definiert, so folgt unmittelbar (3.4.14) **q.e.d.**

Im Allgemeinen ist die Überprüfung der Ungleichungen

$$\gamma^T \left(H \frac{diag\left(\lambda_1^n e^{-\lambda_1}, \dots, \lambda_m^n e^{-\lambda_m}\right)}{n!} H^{-1} \vec{1} \right) \geq 0 \tag{3.4.15}$$

recht schwierig.

Beispiel 3.4.6

Wir geben eine Klasse von $m \times m$ Matrizen H an.

Es sei $a > 0$ und $b \leq 0$ gegeben. Wir definieren die Matrix $H^{-1} = (h_{ij}^{-1})_{i,j=1,\ldots,m}$ durch

$$h_{ij}^{-1} = \begin{cases} a, & \text{wenn } i = j \\ b, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}.$$

Damit gilt für die Elemente der Matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$(vgl.[3])

$$h_{ij} = \begin{cases} \frac{a+(m-2)b}{[a+(m-1)b](a-b)}, & \text{wenn } i = j \\ \frac{-b}{(a+(m-1)b)(a-b)}, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}.$$

Dann erhalten wir

$$H^{-1}\vec{1} = (a + (m-1)b)\vec{1} \tag{3.4.16}$$

Damit folgt

$$diag(\lambda_1^n e^{-\lambda_1}, \ldots, \lambda_m^n e^{-\lambda_m})H^{-1}\vec{1} = [a + (m-1)b] \begin{pmatrix} \lambda_1^n e^{-\lambda_1} \\ \vdots \\ \lambda_m^n e^{-\lambda_m} \end{pmatrix}.$$

Schließlich ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} &H diag(\lambda_1^n e^{-\lambda_1}, \ldots, \lambda_m^n e^{-\lambda_m})H^{-1}\vec{1} \\ &= \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} (a+(m-2)b)[\lambda_1^n e^{-\lambda_1} - b\sum_{i=1,j\neq 1}^n \lambda_i^n e^{-\lambda_i}] \\ \vdots \\ (a+(m-2)b)[\lambda_m^n e^{-\lambda_m} - b\sum_{i=1,j\neq m}^n \lambda_i^n e^{-\lambda_i}] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} &\lambda^T H diag(\lambda_1^n e^{-\lambda_1}, \ldots, \lambda_m^n e^{-\lambda_m})H^{-1}\vec{1} \\ &= \frac{1}{a-b}\sum_{j=1}^m \gamma_j[(a+(m-2)b][\lambda_j^n e^{-\lambda_j} - b\sum_{i=1,i\neq j}^m \lambda_i^n e^{-\lambda_i}]. \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Für $b \leq 0$, gilt dann

$$[a + (m-2)b][\lambda_j^n e^{-\lambda_j} - b \sum_{i=1, i\neq j}^{m} \lambda_i^n e^{-\lambda_i}] \geq 0, \quad j = 1, 2 \ldots, m, \tag{3.4.18}$$

genau dann, wenn $a + (m-2)b \geq 0$. Dies ist für b mit

$$\frac{-a}{m-2} \leq b \leq 0$$

erfüllt.

3.5 Eine Klasse verallgemeinerter Poisson-Verteilungen

Nach Satz 3.4.5 ist zur Konstruktion einer verallgemeinerten Poissonverteilung, es nötig eine $m \times m$ Matrix H zu konstruieren, so dass $p_n \geq 0, n = 0, 1, \ldots,$ wobei p_n durch (3.4.11) beschrieben wird. Wir betrachten in diesem Abschnitt eine Matrix H, die gewisse Eigenwerte besitzt und wollen H so konstruieren, dass obige Eigenschaften gelten.

Satz 3.5.1
Die Matrix H habe den Eigenvektor $\vec{1}$, d.h. es gelte

$$H\vec{1} = c_1 1 \tag{3.5.1}$$

und die Matrix H^T habe den Eigenwert $\vec{\gamma}$, d.h. es gelte

$$H^T\vec{\gamma} = c_\gamma \vec{\gamma}. \tag{3.5.2}$$

Weiter gelte

$$c_1 c_\gamma > 0. \tag{3.5.3}$$

a) Damit

$$c_1 = c_\gamma = c \tag{3.5.4}$$

und (3.5.3) ist für $c \neq 0$ erfüllt.
b) Die Folge $(p_n)_{n=1,\ldots}$ aus (3.4.13) ist eine $(m, 0, \gamma, \Lambda)$-Panjerverteilung.

Beweis:

a) Es gelte (3.5.1) und (3.5.2) für eine $m \times m$ Matrix H.

Wir haben mit (3.5.1) und (3.5.2)

$$\overrightarrow{\gamma}^T H \vec{1} = c_1 \overrightarrow{\gamma}^T 1 = c_\gamma$$

und

$$1^T H^T \overrightarrow{\gamma} = c_\gamma 1^T \overrightarrow{\gamma} = c_\gamma.$$

Da

$$(\overrightarrow{\gamma}^T H \vec{1})^T = 1^T H^T \overrightarrow{\gamma},$$

folgt (3.5.4).

b) Wir erinnern an folgenden Eigenschaft:

Wenn die reguläre $m \times m$ Matrix H eine Eigenvektor $\vec{x} \neq 0$ mit den Eigenwert λ_x hat, so hat die Inverse H^{-1} ebenfalls den Eigenvektor $\vec{x}$ aber mit dem Eigenwert $\frac{1}{\lambda_x}$.

Um dies zu zeigen, gehen wir von

$$H\vec{x} = \lambda_x \vec{x}$$

aus.

Wir erhalten daraus

$$H^{-1} H \vec{x} = x = \lambda_x H^{-1} \vec{x}, \tag{3.5.5}$$

d.h. es gilt

$$H^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda_x}\vec{x}.$$

Der Fall $\lambda_x = 0$ kann nicht auftreten, da sonst $x = 0$ aus (3.4.13) folgen würde. Wir betrachten nun die Folge $(p_n)_{n=0,1\ldots}$, die durch (3.4.13) gegeben ist, falls die Matrix

H die Bedingungen (3.5.1) und (3.5.2) erfüllt. Hiermit folgt für (3.4.13)

$$\begin{aligned}
p_n &= (H^T\vec{\gamma})^T \frac{diag\left(\lambda_1^n e^{-\lambda_1}, \ldots, \lambda_m^n e^{-\lambda_m}\right)}{n!} H^{-1}\vec{1} \\
&= c_\gamma \vec{\gamma}^T \frac{diag\left(\lambda_1^n e^{-\lambda_1}, \ldots, \lambda_m^n e^{-\lambda_m}\right)}{n!} \frac{1}{c_1}\vec{1} \\
&= \frac{c_\gamma}{c_1}\gamma^T \frac{diag\left(\lambda_1^n e^{-\lambda_1}, \ldots, \lambda_m^n e^{-\lambda_m}\right)}{n!} \vec{1} \\
&= \frac{c_\gamma}{c_1} \sum_{i=1}^m \lambda_i^n e^{-\lambda_i}\gamma_i.
\end{aligned}$$

Wegen (3.5.3) ist (3.4.14) erfüllt und somit ist die Folge $(p_n)_{n=0,1,\ldots}$ eine $(m, \gamma, 0, \Lambda)$-Panjerverteilung. **q.e.d.**

Beispiel 3.5.2

Wir untersuchen, ob das Beispiel 3.4.6 durch Satz 3.5.1 beschrieben wird. Wegen der Bedingungen (3.4.16) und (3.5.4) ist (3.5.1) erfüllt mit

$$c = [a + (m-1)b].$$

Die Bedingung (3.5.2) ist in diesem Fall gleichwertig mit

$$b\sum_{j=1}^m \gamma_j + [(a-b) - c]\gamma_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

bzw.

$$b + [(a-b) - c]\gamma_k = 0,$$

d.h.

$$c = \frac{b}{\gamma_k} + (a-b), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Damit ist Beispiel 3.4.6 ein speziell Fall von Satz 3.5.1, falls $b = 0$ oder $\vec{\gamma} = \frac{1}{m}\vec{1}_m$.

Wir betrachten die Menge $\mathscr{H}(\vec{\gamma}_m)$ der $m \times m$ regulären Matrizen, die die Bedingungen (3.5.1) mit einem $m \times 1$ Vektor $\vec{\gamma}_m$ mit $\gamma_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, und $\sum_{j=1}^m \gamma_j = 1$

erfüllen. Weiter sei $\mathscr{H}_{c,m}(\vec{\gamma}_m)$ die Menge der $m \times m$ Matrizen von $\mathscr{H}$, die die Bedingungen (3.5.1) und (3.5.2) mit eine vorgegebenen c erfüllen. Wir werden zeigen, dass dann jede Matrix H Lösung eines linearen Gleichungssystems ist. Dies betrachten wir zunächst anhand eines Beispiels.

Beispiel 3.5.3 *Es sei $m = 3$. Wenn $H \in \mathscr{H}_{c,3}(\vec{\gamma}_3)$, dann gilt folgendes linearen Gleichungssystem*

$$A\vec{h} = \vec{c}, \tag{3.5.6}$$

wobei die 6×9 Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Außerdem führen wir die $m \times 1$ Vektoren $\vec{h_j}$ durch

$$H = \begin{pmatrix} \vec{h}_1^T \\ \vec{h}_2^T \\ \vec{h}_3^T \end{pmatrix}$$

ein. Dann setzen wir

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vec{h}_3 \end{pmatrix}.$$

Schließlich sei

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ c\gamma_1 \\ c\gamma_2 \\ c\gamma_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{1} \\ \vec{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Zunächst untersuchen wir den Rang der Matrix A, d.h. Rang(A). Wir betrachten die Darstellung von A

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1}^T \\ \dots \\ \overrightarrow{a_6}^T \end{pmatrix}.$$

Offenbar gilt

$$\gamma_1\vec{a}_1 + \gamma_2\vec{a}_2 + \gamma_3\vec{a}_3 = \vec{a}_4 + \vec{a}_5 + \vec{a}_6$$

und somit ist der $Rang(A) \leq 5$.

Ziehen wir die erste Spalte von der zweite und dritte Spalte von A ab, ziehen wir die vierte Spalte von der fünfte und sechste ab, und ziehen wir die siebte Spalte von der achte und neunte Spalte ab, so erhalten wir eine Matrix mit gleichem Rang wie A. Da die Reihenfolge der Spalten einer Matrix keinen Einfluss auf die Rang der Matrix hat, ist der Rang der Matrix A gleich der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -\gamma_1 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Die sechste und achte Spalten sind Vielfache der vierte Spalte. Die siebte und neunte Spalte sind Vielfache der fünfte Spalte. Somit ist der Rang von A gleich dem Rang *der Matrix*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -\gamma_1 & -\gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten dieser Matrix seien $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_5$. *Aus der Beziehung*

$$\sum_{j=1}^{5} d_j \vec{y}_j = 0$$

folgt unmittelbar

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0,$$

d.h. es folgt

$$Rang(\widetilde{A}) = Rang(A) = 5.$$

Wir betrachten nun den Rang der erweiterten Koeffizentenmatrix. Wir führen die $m \times 1$ *Vektoren* $\vec{b}_j, j = 1, \ldots, 5$, *durch*

$$\widetilde{A} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_5)$$

ein.

Der Rang von $(A, \underline{c})$ *und* $(\widetilde{A}, \underline{c})$ *ist natürlich gleich.*

Wir zeigen, dass $Rang(\widetilde{A}, \underline{c}) = 5$ *ist. Dazu genügt es nachzuweisen für gewisse* $d_j, j = 1, \ldots, 5$, *dass*

$$\sum_{j=1}^{5} d_j \vec{b}_j = \underline{c}. \tag{3.5.7}$$

erfüllt ist.

Aus der Definition von $\widetilde{A}$ *und (3.5.7) folgt*

$$d_1 = d_2 = d_3 = c$$

$$c(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + d_4(-\gamma_1) + d_5(-\gamma_1) = c\gamma_1 \tag{3.5.8}$$
$$d_4\gamma_1 = c\gamma_2$$
$$d_5\gamma_1 = c\gamma_3,$$

d.h. es gilt insbesondere

$$d_4 = c\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$
$$d_5 = c\frac{\gamma_3}{\gamma_1}.$$

Damit ist (3.5.8) äquivalent mit

$$c(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + c\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(-\gamma_1) + c\frac{\gamma_3}{\gamma_1}(-\gamma_1) = c\gamma_1,$$

was offenbar erfüllt ist. Also ist Rang$(\widetilde{A}, c) = 5$.
Damit haben wir gezeigt, dass unter der Bedingung (3.5.4) die lineare Gleichung (3.5.6) eine Lösung besitzt und damit unendliche viele Lösungen existieren. Es lässt sich nicht unmittelbar nachweisen, dass diese Lösungen invertierbare Matrizen definieren.

Das Ergebnis von Beispiel 3.5.3 lässt sich auf $m > 3$ verallgemeinern.
Wie in Beispiel 3.5.3 können wir jede $m \times m$ Matrix H einen $m \times 1$ Vektor $\vec{h}$ zuordnen.
Hierbei ist

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} \vec{h}_1 \\ \vdots \\ \vec{h}_m \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{h}_j, j = 1, \dots, m$, durch

$$H = \begin{pmatrix} \vec{h}_1^T \\ \vdots \\ \vec{h}_m^T \end{pmatrix}$$

definiert sind. Es ist leicht zu sehen, dass die Abbildung $H \longmapsto \vec{h}$ bijektiv ist.
Analog lassen sich die Bedingungen (3.5.1) und (3.5.2) als lineares Gleichungssystem

formulieren. Dazu führen wir die $2m \times m^2$ Matrix $A = (a_{ij})_{i=1,2,\ldots,2m;j=1,2,\ldots,m^2}$ durch folgende Bedingungen ein. Zur Vereinfachung, sei $M = 1, 2, \ldots, m$.
Für $i = 1, 2, \ldots, m$ gelte

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ , & \text{wenn } j \in (i-1)m + M \\ 0 \ , & \text{wenn } j \notin (i-1)m + M. \end{cases}$$

und

$$a_{m+i,j} = \begin{cases} \gamma_i \ , & \text{wenn } j \in (M-1)m + i \\ 0 \ , & \text{wenn } j \notin (M-1)m + i. \end{cases} .$$

$\vec{1}$ sei ein $m \times 1$ Vektor, dessen Komponenten gleich 1 sind.
Schließlich definieren wir eine $2m \times 1$ Vektor $\overrightarrow{c}$ durch

$$\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \vec{1} \\ \vec{\gamma} \end{pmatrix} c.$$

Satz 3.5.4
a) Es sei $H \in \mathscr{H}_{c,m}$. Dann gilt

$$A\vec{h} = \overrightarrow{c}, \tag{3.5.9}$$

b) Es gilt

$$Rang(A) = Rang(A, c) = 2m - 1. \tag{3.5.10}$$

Bemerkung 3.5.5
Nach (3.5.10) existieren unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems (3.5.9). Jedoch ist unklar, unter welche Bedingungen an dem Vektor $\vec{h}$ die resultierende Matrix H regulär ist.

Beweis:
a) Wie im Beispiel 3.5.3 sieht man, dass der $2m \times 1$ Vektor $\vec{h}$ das Gleichungssystem (3.5.9) erfüllt.

b) Zunächst untersuchen wir den Rang der Matrix A.

Wir führen die Vektoren $\vec{a}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m$, durch

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_{2m}^T \end{pmatrix}$$

ein, d.h. es gilt

$$\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{im^2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2m.$$

Weiter betrachten wir

$$\vec{d} := \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \vec{a}_i.$$

Für die k-te Komponenten erhalten wir

$$d_k = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i a_{ik}$$

Für $k \in \{1, 2, \ldots, m^2\}$ existieren $i \in M$ und $k' \in M - 1$ genau derart, dass

$$k = (i-1)m + k'$$

gilt. Weiterhin sind γ und k' eindeutig durch k bestimmt. Damit ergibt sich $i = \left[\frac{k}{m}\right] + 1$.

Also folgt aufgrund der Definition der Matrix A

$$d_k = \gamma_{\left[\frac{k}{m}\right]+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m^2.$$

Nun betrachten wir die Summe

$$\vec{D} = \sum_{i=m+1}^{2m} \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{2m} \vec{a}_{m+i}.$$

Für die k-te Komponenten folgt

$$\vec{D}_k = \sum_{i=1}^{2m} a_{m+i,k}.$$

Falls $k = (i-1)m + k'$ gilt mit $i \in M$ und $k' \in M - 1$, haben wir $i = \left[\frac{k}{m}\right] + 1$ und somit folgt

$$\vec{D}_k = \gamma_{\left[\frac{k}{m}\right]+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Somit folgt

$$\sum_{i=1}^{2m} \gamma_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{2m} \vec{a}_{m+i}.$$

Damit ist der $Rang(A) \leq 2m - 1$.
Die Darstellung von die $2m \times m^2$ Matrix A ist durch

$$A = \begin{pmatrix}
1 & \ldots & \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \ldots & \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\
\gamma_1 & 0 & \ldots & 0 & \gamma_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \gamma_m & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & \gamma_1 & \ldots & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \gamma_m & \ldots & 0 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \gamma_1 & 0 & \ldots & \ldots & \gamma_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \gamma_m
\end{pmatrix}$$

gegeben.
Ziehen wir die (nm + 1)-te Spalte von der (nm + 2)-te und (n + 1)m-te Spalte ab, wobei $n = 0, 1, \ldots, m$, so erhalten wir eine Matrix mit gleichem Rang wie A.
Da die Reihenfolge der Spalten einer Matrix keinen Einfluss auf die Rang der Matrix

hat, ist der Rang der Matrix A gleich der Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_m & -\gamma_1 & \dots & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \dots & -\gamma_2 & 0 & \dots & -\gamma_m & \dots & -\gamma_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_1 & 0 & \dots & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_m & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & \gamma_m \end{pmatrix}.$$

Streichen wir die Vielfache der (m + 1)-te bis (2m - 1)-te Spalten hieraus, dann erhalten wir die $2m \times (2m-1)$ Matrix $\widetilde{A}$ mit der gleichem Rang von A

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_m & -\gamma_1 & \dots & -\gamma_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_1 \\ . \end{pmatrix}.$$

Die Spalten dieser Matrix seien $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{2m-1}$. Aus der Beziehung

$$\sum_{j=1}^{2m-1} d_j \vec{y}_j = 0$$

folgt unmittelbar

$$d_1 = \dots = d_{2m-1} = 0,$$

d.h. $Rang(\widetilde{A}) = Rang(A) = 2m - 1$.

Wir betrachten nun den Rang der erweiterten Koeffizentmatrix. Wir führen die $m \times 1$

Vektoren $\vec{b}_j, \quad j = 1, \ldots, 2m-1$, durch

$$\widetilde{A} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{2m-1})$$

ein.

Wir betrachten die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{2m-1} d_j \vec{b}_j = \vec{c}. \tag{3.5.11}$$

Der Rang von $(A, \vec{c})$ und $(\widetilde{A}, \vec{c})$ ist natürlich gleich.

Aus der Definition von $\widetilde{A}$ und (3.5.7) folgt

$$\begin{gathered} d_1 = \ldots = d_m = c \\ c(\gamma_1 + \ldots + \gamma_m) + d_{m+1}(-\gamma_1) + \cdots + d_{2m-1}(-\gamma_1) = c\gamma_1 \\ d_{m+1}\gamma_1 = c\gamma_2 \\ \vdots \\ d_{2m-1}\gamma_1 = c\gamma_m, \end{gathered} \tag{3.5.12}$$

d.h. es gilt insbesondere

$$\begin{gathered} d_{m+1} = c\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \\ \vdots \\ d_{2m-1} = c\frac{\gamma_m}{\gamma_1}. \end{gathered}$$

Damit ergibt sich

$$c(\gamma_1 + \ldots + \gamma_m) + c\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(-\gamma_1) + \ldots + c\frac{\gamma_m}{\gamma_1}(-\gamma_1) = c\gamma_1,$$

was offensichtlich erfüllt ist. Damit gilt (3.5.11) und es folgt

$$Rang(\widetilde{A}, \overrightarrow{c}) = Rang(A, \overrightarrow{c}) = 2m - 1.$$

q.e.d.

Beispiel 3.5.6
Es sei

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{3} \tag{3.5.13}$$

und weiter sei

$$c = 1. \tag{3.5.14}$$

Wir multiplizieren die vierte, fünfte, sechste Gleichung des Gleichungssystem (3.5.6) mit 3.
Außerdem folgt die erste Gleichung aus den übrigen Gleichungen, da

$$\vec{a}_1 = -\vec{a}_2 - \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 + \vec{a}_6$$

ist.
Da der Rang(A) = 5 existiert eine 5×5 *Teilmatrix von A mit den Rang 5. Diese erhalten wir, wenn wir die erste, zweite, dritte, vierte und siebte Spalte von A auswählen und die erste Zeile dieser Matrix streichen. Diese Matrix hat folgende Gestalt*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist leicht zu sehen, dass Rang(B) = 5.
Das Gleichungssystem (3.5.9) ist damit äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$B \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \widetilde{B} \begin{pmatrix} h_{22} \\ h_{23} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} =: \overrightarrow{\widetilde{c}}\,, \tag{3.5.15}$$

wobei

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\overrightarrow{\widetilde{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_{22}+h_{23} \\ h_{32}+h_{33} \\ 0 \\ h_{22}+h_{32} \\ h_{23}+h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(h_{22}+h_{23}) \\ 1-(h_{32}+h_{33}) \\ 1 \\ 1-(h_{22}+h_{32}) \\ 1-(h_{23}+h_{33}) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Lösungen von (3.5.15) aus

$$\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{22}+h_{23}+h_{32}+h_{33}-1 \\ 1-(h_{22}+h_{32}) \\ 1-(h_{23}+h_{33}) \\ 1-(h_{22}+h_{23}) \\ 1-(h_{32}+h_{33}) \end{pmatrix}.$$

Wählen wir

$$h_{32} = h_{33} = h_{22} = 0,$$

so ergibt sich die Matrix H_3 als

$$H_3 = \begin{pmatrix} h_{23}-1 & 1 & 1-h_{23} \\ 1-h_{23} & 0 & h_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5.16}$$

Offenbar gilt

$$det(H_3) = h_{23}.$$

Somit ist für $h_{23} \neq 0$ die Matrix H invertierbar, d.h. H ist aus $\mathscr{H}_{1,3}(\vec{\gamma}_3)$.

Mit Hilfe der 3×3 Matrix H lässt sich auch allgemein eine $m \times m$ Matrix $\widetilde{H}$ aus $\mathscr{H}_{1,m}(\vec{\gamma}_m)$ konstruieren, und zwar wird $\widetilde{H}$ durch

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & I_{m-3} \end{pmatrix} \tag{3.5.17}$$

dargestellt. Analog ist die Block-Diagonal Matrix

$$diag(H, \dots, H)$$

aus $\mathscr{H}_{c,3n}(\vec{\gamma}_{3n})$, wobei n = 1,2,. . . .

Satz 3.5.7 *Es sei H eine $m \times m$ Matrix mit der Darstellung*

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{3.5.18}$$

weiterhin

$$\overrightarrow{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\gamma}_{m-1} \\ \gamma_m \end{pmatrix},$$

wobei A von Type $(m-1) \times (m-1)$ mit $\gamma_j > 0, j = 1, \dots, m,$ und $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$. Dann existieren Matrizen B von Typ $(m-1) \times 1$, C von Typ $1 \times (m-1)$ und D von Typ 1×1 derart, dass

$$H\vec{1} = \vec{1} \tag{3.5.19}$$

$$H^T\vec{\gamma} = \vec{\gamma} \tag{3.5.20}$$

erfüllt ist.

Weiterhin sind die Matrizen B, C und D eindeutig durch A und $\vec{\gamma}_m$ bestimmt.

Beweis:

Wegen (3.5.18) ist (3.5.19) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{1}_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{1}_{m-1} + B \\ C\vec{1}_{m-1} + D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{1}_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$A\vec{1}_{m-1} + B = \vec{1}_{m-1} \tag{3.5.21}$$

und

$$C\vec{1}_{m-1} + D = 1. \tag{3.5.22}$$

Wegen (3.5.18) ist (3.5.20) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\gamma}_{m-1} \\ \gamma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T\vec{\gamma}_{m-1} + \gamma_m C^T \\ B^T\vec{\gamma}_{m-1} + \gamma_m D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\gamma}_{m-1} \\ \gamma_m \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A^T\vec{\gamma}_{m-1} + \gamma_m C^T = \vec{\gamma}_{m-1} \tag{3.5.23}$$

und

$$B^T\vec{\gamma}_{m-1} + \gamma_m D = \gamma_m. \tag{3.5.24}$$

Aus (3.5.21) und (3.5.23) erhalten wir

$$B = \vec{1}_{m-1} - A\vec{1}_{m-1} \tag{3.5.25}$$

und

$$C = \frac{\vec{\gamma}_{m-1}^T - \vec{\gamma}_{m-1}^T A}{\gamma_m}. \tag{3.5.26}$$

Außerdem folgt aus (3.5.22) und (3.5.26)

$$D = 1 - C\vec{1}_{m-1} = 1 - \frac{1}{\gamma_m}[(1-\gamma_m) - \vec{\gamma}_{m-1}^T A\vec{1}]. \tag{3.5.27}$$

Weiter ergibt sich aus (3.5.24) und (3.5.25)

$$D = 1 - \frac{1}{\gamma_m} B^T \vec{\gamma}_{m-1} = 1 - \frac{1}{\gamma_m}[1 - \gamma_m - \vec{1}_{m-1}^T A^T \vec{\gamma}_{m-1}].$$

Damit ist D eindeutig definiert, wenn

$$\vec{\gamma}_{m-1}^T A \vec{1} = \vec{1}_{m-1}^T A^T \vec{\gamma}_{m-1},$$

erfüllt ist. **q.e.d.**

Beispiel 3.5.8

Es sei H durch (3.5.16) gegeben. wir definieren eine 4×4 Matrix $\widehat{H}_4$, durch

$$\widehat{H}_4 := \begin{pmatrix} H & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\widehat{H}_4 1 = \widehat{H}_4^T 1 = 1 \tag{3.5.28}$$

genau dann erfüllt, falls $\widehat{H}_4 = \widetilde{H}$, wobei $\widetilde{H}$ durch (3.5.17) gegeben ist.
Auf Grund des Beweis von Satz 3.5.7 gilt (3.5.28) für $\vec{\gamma}_4 = \frac{1}{4}\vec{1}_4$ und $A = H$, falls

$$B = \vec{1}_3 - H\vec{1}_3 = 0.$$

und

$$C = \frac{\frac{1}{4}\vec{1}_3^T - \frac{1}{4}\vec{1}_3^T H}{\frac{1}{4}} = 0.$$

Schließlich ergibt sich damit aus (3.5.27)

$$\begin{aligned} D &= 1 - \frac{1}{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{1}{4} - \vec{1}_3^T H^T \frac{1}{4}\vec{\gamma}_3\right) \\ &= 1 - \left(3 - \vec{1}_3^T \vec{1}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\widehat{H}_4 := \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{H}_4$$

mit $\widetilde{H}_4$ aus (3.5.17). Es sei nun die 5×5 Matrix $\widehat{H}_5$ durch

$$\widehat{H}_5 := \begin{pmatrix} \widehat{H}_4 & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit gewissen Matrizen B, C und D, gegeben, und es gelte

$$\widehat{H}_5 1 = \widehat{H}_5^T 1 = 1. \tag{3.5.29}$$

Dann können wir wie eben schlussfolgern und erhalten

$$B = \vec{1}_4 - \widehat{H}_5 \vec{1}_4 = 0.$$

$$C = \frac{\frac{1}{5}\vec{1}_5^T - \frac{1}{5}\vec{1}_4^T \widehat{H}_4}{\frac{1}{5}} = 0.$$

$$D = 1 - \frac{1}{\frac{1}{5}}\left(1 - \frac{1}{5} - \vec{1}_4^T H^T \frac{1}{5}\vec{\gamma}_4\right) = 1.$$

Damit gilt also

$$\widehat{H}_5 := \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Schlussweise können wir fortsetzen und erhalten, dass die $m \times m$ Matrix

$$\widehat{H}_m := \begin{pmatrix} H_3 & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit H_3 aus (3.5.16). die Bedingungen

$$\widehat{H}_m 1 = \widehat{H}_m^T 1 = 1$$

erfüllt genau dann, wenn

$$\widehat{H}_m = \widetilde{H}_m.$$

Die Schlussweise im Beispiel 3.5.8 lässt sich auch für $\vec{\gamma} \neq \frac{1}{m}\vec{1}_m$ anwenden.

Folgerung 3.5.9

Es sei H_{m-1} eine Matrix von Typ $(m-1)\times(m-1)$. Weiter sei $\vec{\gamma}_m$ ein $m\times 1$ Vektor mit $\gamma_j > 0, j = 1,\ldots,m$, und $\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^{(m-1)} = 1$. Außerdem gelten

$$H_{m-1}\vec{1}_{m-1} = 1_{m-1} \tag{3.5.30}$$

und

$$H_{m-1}^T\vec{\gamma}_{m-1} = \vec{\gamma}_{m-1}, \tag{3.5.31}$$

wobei der $(m-1)\times 1$ Vektor $\vec{\gamma}_{m-1}$ durch

$$\vec{\gamma}_m := \begin{pmatrix} \vec{\gamma}_{m-1} \\ \gamma_m \end{pmatrix}$$

definiert ist.

Dann erfüllt die Matrix

$$\widehat{H}_m := \begin{pmatrix} H_{m-1} & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

für einen Vektor $\vec{\gamma}_m$ mit $\gamma_j^{(m)} > 0$, $j = 1,\ldots,m$, $\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^{(m)} = 1$ genau dann die Bedingungen

$$\widehat{H}_m\vec{1}_m = \vec{1}_m \tag{3.5.32}$$

und

$$\widehat{H}_m^T\vec{\gamma}_m = \vec{\gamma}_m, \tag{3.5.33}$$

falls

$$B = C = 0$$

und

$$D = 1,$$

d.h. es gilt

$$\widehat{H}_m := \begin{pmatrix} H_{m-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis:
Wir wenden Satz 3.5.7 mit $A = H_{m-1}$ und $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_m$ an. Dann folgt wegen (3.5.25) und (3.5.30)

$$B = \vec{1}_{m-1} - A\vec{1}_{m-1} = \vec{1}_{m-1} - H_{m-1}\vec{1}_{m-1} = 0$$

Analog gilt wegen (3.5.26) und (3.5.31)

$$C = \frac{1}{\gamma_m}\left(\vec{\gamma}_{m-1}^T - \vec{\gamma}_{m-1}^T H_{m-1}\right) = 0.$$

Schließlich ergibt sich aus (3.5.27) und (3.5.30)

$$D = 1 - \frac{1}{\gamma_m^{(m)}}[1 - \gamma_m^{(m)} - \vec{1}_{m-1}^T H_{m-1}^T \vec{\gamma}_{m-1}^{(m)}] = 1.$$

q.e.d.

Beispiel 3.5.10 *Wir konstruieren alle Elemente von $\mathscr{H}_{1,m}(\vec{\gamma}_m)$.*
a) $H \in \mathscr{H}_{1,1}(\vec{\gamma}_1)$ genau dann, wenn $H = (1)$, da $\vec{\gamma}_1 = 1$.
b) Es sei $\vec{\gamma}_2$ ein 2×1 Vektor mit $\vec{\gamma}_j > 0, j = 1, 2$, $\sum_{j=1}^2 \vec{\gamma}_j = 1$.
Weiter sei $H \in \mathscr{H}_{1,2}(\vec{\gamma}_2)$ und es gelte $H = (h_{ij})_{i,j=1,2}$. Dann folgt aus

$$H\vec{1}_2 = \vec{1}_2$$

$$h_{12} = 1 - h_{11}$$

und

$$h_{21} = 1 - h_{22}$$

d.h. es gilt

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 1 - h_{11} \\ 1 - h_{22} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt aus der Bedingung

$$H^T\vec{\gamma}_2 = \vec{\gamma}_2$$

$$\gamma_1 h_{11} + \gamma_2(1 - h_{22}) = \gamma_1$$

und

$$\gamma_1(1-h_{11})+\gamma_2 h_{22}=\gamma_2.$$

Dieses Gleichungssystem ist gleichwertig mit

$$\gamma_1 h_{11}-\gamma_2 h_{22}=\gamma_1-\gamma_2,$$

d.h. wir erhalten die Lösungen

$$h_{11}=1-h_{12}=h \tag{3.5.34}$$

$$h_{22}=1-h_{21}=\frac{\gamma_2-\gamma_1+\gamma_1 h}{\gamma_2} \tag{3.5.35}$$

für beliebige $h \in \mathbb{R}$.
Weiter erhalten wir nach elementaren Rechnungen

$$det(H)=\frac{1}{\gamma_2}(h-\gamma_1).$$

Damit ist $H \in \mathscr{H}_{1,2}(\vec{\gamma}_2)$ *genau dann erfüllt, wenn (3.5.34),(3.5.35) und*

$$h \neq \gamma_1$$

gelten.
c) Es sei $H \in \mathscr{H}_{1,3}(\vec{\gamma}_3)$ *und es gelte* $H=(h_{ij})_{i,j=1,2,3}$. *Dann sind die Bedingungen*

$$H\vec{1}_3=\vec{1}_3$$

$$H^T\vec{\gamma}_3=\vec{\gamma}_3$$

gleichwertig mit dem Gleichungssystem (3.5.6). Wir multiplizieren die vierte, fünfte, sechste Gleichung des Gleichungssystem (3.5.6) mit 3.
Außerdem folgt die erste Gleichung aus den übrigen Gleichungen, da

$$\vec{a}_1=\frac{-\vec{a}_2\gamma_2-\vec{a}_3\gamma_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5+\vec{a}_6}{\gamma_1}$$

ist.
Da der Rang(A) = 5 existiert eine 5×5 *Teilmatrix von A mit den Rang 5. Diese erhalten wir, wenn wir die erste, zweite, dritte, vierte und siebte Spalte von A*

auswählen und die erste Zeile dieser Matrix streichen. Diese Matrix hat folgende Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach elementaren Rechnungen erhalten wir det$(B) = \gamma_1^3$, *Deshalb ist Rang*$(B) = 5$*. Das Gleichungssystem (3.5.9) ist damit äquivalent zu dem Gleichungssystem*

$$B \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} - \widetilde{B} \begin{pmatrix} h_{22} \\ h_{23} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} =: \overrightarrow{\widetilde{c}}, \tag{3.5.36}$$

wobei

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\overrightarrow{\widetilde{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_{22} + h_{23} \\ h_{32} + h_{33} \\ 0 \\ h_{22} + h_{32} \\ h_{23} + h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (h_{22} + h_{23}) \\ 1 - (h_{32} + h_{33}) \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 - (h_{22}\gamma_2 + h_{32}\gamma_3) \\ \gamma_3 - (h_{23}\gamma_2 + h_{33}\gamma_3) \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Lösungen von (3.5.36) nach elementaren Rechnungen

$$\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(h_{22}+h_{23})\gamma_2+(h_{32}+h_{33})\gamma_3+\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3}{\gamma_1} \\ \frac{\gamma_2-(h_{22}\gamma_2+h_{32}\gamma 3)}{\gamma_1} \\ \frac{\gamma_3-(h_{23}\gamma_2+h_{33}\gamma 3)}{\gamma_1} \\ 1-(h_{22}+h_{23}) \\ 1-(h_{32}+h_{33}) \end{pmatrix}.$$

Wählen wir

$$h_{32} = h_{33} = h_{22} = 0,$$

so ergibt sich die Matrix H_3 *als*

$$H_3 = \begin{pmatrix} \frac{h_{23}\gamma_2-\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3}{\gamma_1} & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} & \frac{\gamma_3-h_{23}\gamma_2}{\gamma_1} \\ 1-h_{23} & 0 & h_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.37)$$

Offenbar gilt

$$det(H_3) = h_{23}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Somit ist $\mathscr{H}_{1,3}(\vec{\gamma}_3)$ *erfüllt.*

Kapitel 4

Rekursionen für zusammengesetzte Verteilungen

4.1 Differenzialgleichung für Verallgemeinerte Panjer-Verteilungen

Wir betrachten die Verteilung der Schadensanzahl N, die durch (2.0.1) bestimmt ist. Hierbei erfüllt die Folge $(P_n)_{n=0,1,2,\dots}$ von $m \times m$ Matrizen die Bedingung (3.2.2) mit gewissen $m \times m$ Matrizen A und B.
Wir führen die erzeugende Funktion von N ein:

$$e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n.$$

Um die Struktur von $(P_n)_{n=0,1,2,\dots}$ zu benutzen, setzen wir zusätzlich voraus, dass die Potenzreihe

$$\widehat{P}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \tag{4.1.1}$$

absolut konvergiert für $|z| \leq 1$, d.h. es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_{ij}^{(n)}| z^n < \infty, \quad i,j = 1,2,\ldots,m, \quad |z| \leq 1,$$

wobei

$$P_n = (p_{ij}^{(n)})_{i,j=1,\ldots,m}.$$

Es sei

$$\widehat{P}(z) = (\widehat{P}(z)_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}.$$

Damit gilt

$$\widehat{P}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n.$$

Wir erhalten die folgende Gestalt für die erzeugende Funktion von N.

Lemma 4.1.1
Die Potenzreihe $\widehat{P}(z)$ konvergiere absolut für $|z| \leq 1$. Dann gilt

$$\widehat{p}(z) = \vec{\gamma}\widehat{P}(z)\vec{1}^T.$$

Beweis:
Es gilt offenbar wegen

$$p_n = \vec{\gamma} P_n \vec{1}^T, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

$$p_n = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(n)}.$$

Damit folgt mit den Satz von Fubini.

$$\begin{aligned}
e(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \\
&= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(n)} z^n \\
&= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n \\
&= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \sum_{j=1}^{m} (\widehat{P}(z))_{ij} \\
&= \vec{\gamma} \widehat{P}(z) \vec{1}^T.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Innerhalb der Menge $\mathscr{M}_m$ der $m \times m$ Matrizen führen folgende Konvergenz ein. Die Folge $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ konvergiere gegen den Matrix A, falls

$$\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,m.$$

Hierbei sei $A_n = (a_{ij}^{(n)})_{ij=1,2,\ldots,m}$ und $A = (a_{ij})_{ij=1,2,\ldots,m}$.
Diese Konvergenz ist gleichwertig mit der Konvergenz in der Frobeniusche Matrixnorm, die durch

$$\| A \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$$

definiert ist. Da alle Matrixnormen äquivalent sind, ist somit diese Konvergenz gleichwertig mit der Konvergenz einer beliebige Matrixnorm.
Aufgrund der Ungleichung von Cauchy erhalten die Submultiplikativität, d.h. für $A, B \in \mathscr{M}_m$ gilt

$$\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$$

Hieraus ergibt sich, dass die Abblildung $(A,B) \in \mathscr{M}_m \times \mathscr{M}_m \mapsto AB \in \mathscr{M}_m$ stetig ist, falls in $\mathscr{M}_m \times \mathscr{M}_m$ die Norm durch

$$\| (A,B) \| = \| A \| + \| B \|$$

definiert ist.
Wir zeigen, dass die Matrixfunktion $\widehat{P}(z)$ wegen (3.2.2) einer Differentialgleichung genügen.

Satz 4.1.2
Die Folge $(P_n)_{n=0,1,\ldots}$ von $m \times m$ Matrizen erfülle (3.2.2). Die Matrixfunktion $\widehat{P}(z)$ konvergiere für $|z| \leq 1$. Dann gilt

$$\widehat{P}'(z) = z\widehat{P}'(z)A + \widehat{P}(z)(A+B), \quad |z| < 1. \tag{4.1.2}$$

Beweis:
Bekanntlich existiert

$$(P(z))'_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} np_{ij}^{(n)} z^{n-1}$$

für $|z| < 1$. Deshalb existiert auch

$$\begin{aligned}\widehat{P}'(z) &= ((\widehat{P}(z))'_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n z^{n-1}.\end{aligned}$$

Wegen (3.2.2) gilt weiter

$$\begin{aligned}\widehat{P}'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}\left(A + \frac{B}{n}\right) z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}Az^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}Bz^{n-1}.\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit des Produkts zweier Matrizen folgt

$$\begin{aligned}\widehat{P}'(z) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}z^{n-1}\right) A + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(P_{n-1}z^{n-1}\right) B. \\ &= z\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1}z^{n-2}\right) A + \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}z^{n-1}\right) A + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(P_{n-1}z^{n-1}\right) B.\end{aligned}$$

Wir substituieren $k = n - 1$ in allen Reihen und erhalten

$$\begin{aligned}\widehat{P}'(z) &= \left(z\sum_{k=1}^{\infty} kP_k z^{k-1}\right)A + \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k\right)A + \left(\sum_{k=0}^{\infty}(P_k z^k\right)B \\ &= z\widehat{P}'(z)A + \widehat{P}(z)(A+B),\end{aligned}$$

d.h. (4.1.2) ist gezeigt. **q.e.d.**

Beispiel 4.1.3

Wir betrachten die Lösung des Differenzialgleichung (4.1.2) im Fall $A = 0$.
Dann reduziert die Differenzialgleichung (4.1.2) zu

$$\widehat{P}'(z) = P(z)B, \quad |z| < 1. \tag{4.1.3}$$

Unter der Bedingung

$$\widehat{P}(1) = I_m, \tag{4.1.4}$$

ist die Differenzialgleichung (4.1.3) natürlich äquivalent zu

$$P_n = \frac{P_0 B^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Damit folgt

$$\widehat{P}(z) = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} B^n = P_0 e^{zB}.$$

Aus der Bedingung ergibt sich

$$P_0 = e^{-B},$$

d.h.

$$\widehat{P}(z) = e^{(z-1)B}$$

ist die einzige Lösung von (4.1.3) unter der Bedingung (4.1.4).
Da wir die Theorie matrizielle Differenzialgleichung nicht entwickelt haben, können wir die Lösung nur durch Erweiterung der rekursive Beziehung (3.2.2) ableiten.

4.2 Rekursion für zusammengesetzte Verteilungen mit Hilfe verallgemeinerter Panjer-Verteilungen

Wir setzen voraus, dass X zusammengesetzt verteilt ist mit der Schadensanzahl N und der Teilrisikoverteilung G. Es seien $(N, Y_1, \ldots)$ ein System von unabhängigen Zufallsgrößen, wobei $Y_j \sim G$ verteilt ist und N auf $\{0, 1, \ldots\}$ konzentriert ist. Dann heißt die Verteilung von

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} Y_j, & \text{wenn } N > 0 \\ 0 \;, & \text{wenn } N = 0 \end{cases}$$

zusammengesetzt verteilt nach G und F_N, wobei F_N die Verteilungsfunktion von N bezeichnet. Wir symbolisieren dies durch $X \sim Zg(G, F_N)$.
In diesem Abschnitt setzen zusätzlich voraus, dass G auf $\{0, 1, \ldots\}$ konzentriert ist. Dann ist die Verteilungsfunktion G eindeutig durch die Folge $(g_j)_{j=0,1,\ldots}$ bestimmt, wobei

$$g_j = P(Y_1 = j), \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Analog ist die Verteilung von N durch die Folge $(p_n)_{n=0,1,\ldots}$ bestimmt. In diesem Fall ist X auf $\{0, 1, \ldots\}$ konzentriert. Damit ist die Verteilungsfunktion von X durch die Folge $(f_j)_{j=0,1,\ldots}$ bestimmt, wobei

$$f_j = P(X = j), \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Die Verteilungen von N, Y_j und X sind durch ihre erzeugende Funktionen eindeutig bestimmt. Es gelte

$$\widehat{f}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j f(j), \quad |z| \leq 1,$$

$$\widehat{g}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j g(j), \quad |z| \leq 1$$

und

$$\widehat{p}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j s(j), \quad |z| \le 1.$$

Zunächst leiten wir die erzeugende Funktion von X her.

Satz 4.2.1

Es habe N, eine $(m, \gamma, W^{(n)}) - Verteilung$, wobei $W^{(n)} = P_n \vec{1}^T$ für eine gewisse $m \times m$ Matrix P_n erfüllt ist, d.h. es gelte

$$p_n = \vec{\gamma} P_n \vec{1}^T, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{4.2.1}$$

für gewisse $m \times m$ Matrizen P_n. Dann gilt

$$\widehat{f}(z) = \vec{\gamma} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\widehat{g}(z))^n P_n \right) \vec{1}^T = \vec{\gamma} \widehat{P}(\widehat{g}(z)) \vec{1}^T, \quad |z| \le 1, \tag{4.2.2}$$

wobei $\widehat{P}$ durch (4.1.1) gegeben ist.

Beweis:

Bekanntlich gilt

$$f(j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n g^{*n}(j), \quad j = 0, 1, \dots, \tag{4.2.3}$$

wobei $g^{*n}(j)$ rekursiv definiert ist, und zwar durch

$$g^{*0}(j) = \begin{cases} 1 \ , & \text{wenn } j = 0 \\ 0 \ , & \text{wenn } j \neq 0, \end{cases}$$

$$g^{*1}(j) = g_j,$$

$$g^{*n}(j) = \sum_{k=0}^{j} g^{*(n-1)}(k) g(j-k), \quad j = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots.$$

Die Charakteristik $g^{*n}(j)$ wird auch als n-fache Faltung von $g(j)$ bezeichnet. Aufgrund von (4.2.3) und dem Faltungssatz für erzeugende Funktionen folgt, da $|g(z)| \le 1$ für $|z| \le 1$,

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (\widehat{g}(z))^n = \widehat{p}(\widehat{g}(z)).$$

Wegen (4.2.1) ergibt sich

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\gamma} P_n \vec{1}^T (\widehat{g}(z))^n.$$

Wegen der Stetigkeit des Produktes von Matrizen schließen wir

$$\begin{aligned}\widehat{f}(z) &= \vec{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\widehat{g}(z))^n \vec{1}^T \\ &= \vec{\gamma} \widehat{P}(\widehat{g}(z)) \vec{1}^T,\end{aligned}$$

d.h. es gilt (4.2.2). **q.e.d.**

Lemma 4.2.2

a) Die Potenzreihe $\widehat{P}(z)$ konvergiere absolut für $|z| \leq 1$. Außerdem sei $\widehat{g}$ die erzeugende Funktion der Verteilung $(g(j))_{j=0,1,2,\ldots}$. Dann gilt

$$\widehat{P}(\widehat{g}(z)) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j z^j, \quad |z| \leq 1 \tag{4.2.4}$$

wobei die $m \times m$ Matrizen F_j durch

$$F_j = \sum_{n=0}^{\infty} P_n g_j^{*n}$$

definiert sind.

b) Unter der Voraussetzung von a) gilt

$$f_j = \vec{\gamma} F_j 1^T, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{4.2.5}$$

Beweis:

a) Nach dem Faltungssatz für erzeugende Funktion ergibt sich

$$\begin{aligned}\widehat{P}(\widehat{g}(z)) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\widehat{g}(z))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j^{*n} z^j \right).\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass für $|z| \leq 1$ auch $|\widehat{g}(z)| \leq 1$ gilt.
Aufgrund der Zusatzvoraussetzung können wir die Summen vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}\widehat{P}(\widehat{g}(z)) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n g_j^{*n} \right) z^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} F_j z^j,\end{aligned}$$

d.h. es gilt (4.2.4).
b) Nach Satz 4.2.1 gilt (4.2.2). Damit erhalten wir mit (4.2.4)

$$\begin{aligned}\widehat{f}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j \\ &= \vec{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} F_j z^j 1^T \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \vec{\gamma} F_j 1^T z^j, \quad |z| \leq 1.\end{aligned}$$

Wegen des Eindeutigkeitssatzes für Potenzreihen folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Satz 4.2.3
Die Schadensanzahl habe eine verallgemeinerte (m, γ, A, B) Panjer-Verteilung. Weiter sei die Potenzreihe $\widehat{P}(z)$ für $|z| \leq 1$ absolut konvergent. Schließlich existiere die Inverse von $I_m - g(0)A$. Dann gilt

$$F_x = \sum_{j=1}^{x} g(j) F_{x-j} \left(A + \frac{j}{x} B \right) [I_m - g(0)A]^{-1}, \quad x = 1, 2, \ldots, \tag{4.2.6}$$

wobei

$$F_0 = \widehat{P}(g_0). \tag{4.2.7}$$

Beweis:
Für $|z| < 1$ und nach Satz 4.1.2 gilt (4.1.2), d.h. es gilt

$$\widehat{P}'(z) = z\widehat{P}'(z)A + \widehat{P}(z)(A + B). \tag{4.2.8}$$

Wir setzen mit Hilfe von Lemma 4.2.2

$$M(z) := \widehat{P}(\widehat{g}(z)) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j z^j, \quad |z| \leq 1. \tag{4.2.9}$$

Dann ist M in $|z| < 1$ differenzierbar und es gilt

$$M'(z) := \sum_{j=0}^{\infty} jF_j z^{j-1}, \quad |z| \leq 1. \tag{4.2.10}$$

Außerdem haben wir wegen $M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(g(z))^n$ für $g(|z|) < 1$

$$\begin{aligned}
M'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(\widehat{g}(z))^{n-1}\widehat{g}'(z) \\
&= \widehat{g}'(z) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(\widehat{g}(z))^{n-1} \\
&= \widehat{g}'(z)\widehat{P}'(\widehat{g}(z)), \quad |z| < 1,
\end{aligned}$$

da für $|z| < 1$ auch $|\widehat{g}(z)| < 1$ gilt.
Wegen (4.2.8) erhalten wir

$$\begin{aligned}
M'(z) &= \widehat{g}'(z) \left[\widehat{g}(z)\widehat{P}'(\widehat{g}(z))A + \widehat{P}(\widehat{g}(z))(A+B)\right] \\
&= \widehat{g}(z)M'(z)A + \widehat{g}'(z)M(z)(A+B), \quad |(z)| < 1.
\end{aligned}$$

Wegen (4.2.10) gilt also

$$\sum_{x=1}^{\infty} xF_x z^{x-1} = \widehat{g}(z) \sum_{x=1}^{\infty} (xF_x A)\, z^{x-1} + \widehat{g}'(z) \sum_{x=0}^{\infty} F_x(A+B)z^x.$$

Dies lässt sich in der Form

$$\sum_{x=0}^{\infty}(x+1)F_{x+1}z^x = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j \sum_{x=0}^{\infty}(x+1)F_{x+1}Az^x + \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)g_{j+1}z^j \sum_{x=0}^{\infty} F_x(A+B)z^x$$

schreiben.
Benutzen wir die Eigenschaften des Cauchyprodukts von Potenzreihen, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty}(x+1)F_{x+1}z^x &= \sum_{x=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{x} g_j(x+1-j)F_{x+1-j}A\right) z^x \\
&\quad + \sum_{x=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{x}(j+1)g_{j+1}F_{x-j}(A+B)\right) z^x, \quad |z| < 1.
\end{aligned}$$

Wegen des Eindeutigssatzes von Potenzreihe ergibt sich

$$\begin{aligned}(x+1)F_{x+1} &= \sum_{j=0}^{x} g_j(x+1-j)F_{x+1-j}A + \sum_{j=0}^{x}(j+1)g_{j+1}F_{x-j}(A+B) \\ &= \sum_{j=0}^{x} g_j\left((x+1)-j\right)F_{x+1-j}A + \sum_{j=1}^{x+1} jg_jF_{x-(j-1)}(A+B) \\ &= (x+1)\sum_{j=0}^{x} g_jF_{x+1-j}A - \sum_{j=1}^{x} jg_jF_{x+1-j)}A + \sum_{j=1}^{x+1} jg_jF_{x+1-j)}(A+B) \\ &= (x+1)\sum_{j=0}^{x} g_jF_{x+1-j}A + \sum_{j=1}^{x+1} jg_jF_{x+1-j)}B + (x+1)g_{x+1}F_0A \\ &= (x+1)\sum_{j=0}^{x+1} g_jF_{x+1-j}A + \sum_{j=1}^{x+1} jg_jF_{x+1-j)}B.\end{aligned}$$

Dividieren wir durch $(x+1)$, so folgt

$$F_{x+1} = \sum_{j=1}^{x+1} g_jF_{x+1-j}\left(A + \frac{j}{x+1}B\right) + g_0F_{x+1}A.$$

Also ergibt sich

$$F_{x+1}\left(I_m - g_oA\right) = \sum_{j=1}^{x+1} g_jF_{x+1-j}\left(A + \frac{j}{x+1}B\right). \tag{4.2.11}$$

Nach Voraussetzung existiert $(I_m - g_0A)^{-1}$ und damit erhalten wir

$$F_{x+1} = \sum_{j=1}^{x+1} g_jF_{x+1-j}\left(A + \frac{j}{x+1}B\right)\left(I_m - g_0A\right)^{-1}, \quad x = 0, 1, \ldots.$$

Dies ist gleichwertig mit (4.2.6).

Schließlich gilt nach Lemma 4.2.2

$$F_0 = \widehat{P}(\widehat{g}(z)) = \widehat{P}(g_0),$$

d.h. es gilt (4.2.7). **q.e.d.**

Bemerkung 4.2.4
Gilt für eine submultiplikative Matrixnorm $\|\|$

$$g_0 \| A \| < 1,$$

so ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_0^n A^n$$

konvergent und es folgt

$$(I - g_0 A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} g_0^n A^n.$$

Bemerkung 4.2.5 *Ist* $I_m - g_0 A$ *nicht regulär, so erhalten wir wie im Beweis von Satz 4.2.3 die Beziehung (4.2.11), aber* F_{x+1} *ist dann nicht eindeutig bestimmt. Aus der Theorie der verallgemeinerten Inversen folgt dann*

$$\begin{aligned} F_{x+1} = & \sum_{j=1}^{x+1} g_j F_{x+1-j} \left(A + \frac{j}{x+1} B \right) (I_m - g_0 A)^+ \\ & + Y \left(I_m - (I_m - g_0 A)(I_m - g_0 A)^+ \right) \end{aligned}$$

für eine beliebige $m \times m$ *Matrix* Y*. Hierbei bezeichnet* D^+ *die verallgemeinerte Moore-Penrose Inverse von dem Matrix* D*. Diese Darstellung ergibt also unendlich viele Lösungen und es erscheint unklar, welche dieser Lösungen das ursprüngliche Problem löst.*

Wir führen nun die Folge $(\vec{F_j})_{j=0,1,\ldots}$ durch

$$\vec{F_j} = \vec{\gamma} F_j$$

ein. Offenbar ist $\vec{F_j}$ ein $1 \times m$ Vektor.
Für diese Folge ist nach Satz 4.2.3 die rekursive Beziehung

$$\vec{F_x} = \sum_{j=1}^{x} g(j) \vec{F_{x-j}} \left(A + \frac{j}{x} B \right) \left[I_m - g(0) A \right]^{-1} \tag{4.2.12}$$

wobei

$$\vec{F}_0 = \vec{\gamma}\widehat{P}(g_0) \tag{4.2.13}$$

erfüllt.

Kapitel 5

Rekursive Beziehung für Phasen-Typ-Verteilung

5.1 Definition der Phasen-Typ-Verteilung

Definition 5.1.1 *Es sei* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine* $(m, \gamma, Q, 0)-$*Verteilung und* $0 < \alpha_0 < 1$. *Weiter sei* $\vec{\gamma}^T = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T$ *und* $\gamma_j > 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j = 1$. *Dann heißt die Verteilung* $(\widetilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *Phasen-Typ-Verteilung, falls*

$$\widetilde{p}_n = \begin{cases} \alpha_0 \quad , & \text{wenn } n = 0 \\ (1-\alpha_0)p_{n-1}, & \text{wenn } n \geq 1 \end{cases}$$

Weiterhin sei $\vec{\alpha}^T = ((1-\alpha_0)\gamma_1, \dots, (1-\alpha_0)\gamma_m) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.
Dann wird die Verteilung $(\widetilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *als* $(\vec{\alpha}, Q)$*-Phasen-Typ-Verteilung bezeichnet.*

Satz 5.1.2 *Es sei* $(\widetilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine* $(\vec{\alpha}, Q)$*-Phasen-Typ-Verteilung. Dann gilt*

$$\widetilde{p}_0 = 1 - \vec{\alpha}^T \vec{1} \tag{5.1.1}$$

und

$$\widetilde{p}_n = \vec{\alpha}^T Q^{n-1}(I_m - Q)\vec{1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.1.2}$$

Beweis:

Nach Definition gilt

$$\vec{\alpha}^T \vec{1} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \sum_{j=1}^{m} (1 - \alpha_0)\gamma_j := 1 - \alpha_0.$$

Also ist (5.1.1) gezeigt.

Aufgrund von Satz 3.3.8 haben wir

$$p_n = \gamma^T Q^n (I_m - Q)\vec{1}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_n &= (1 - \alpha_0)\gamma^T Q^{n-1}(I_m - Q)\vec{1} \\ &= \vec{\alpha}^T Q^{n-1}(I_m - Q)\vec{1}, \end{aligned}$$

d.h. (5.1.2) ist erfüllt. **q.e.d.**

Wir betrachten weiter die Verteilung des Gesamtschadens S, wobei $Y_j \sim G$ und N eine $(\vec{\alpha}, Q)$-Phasen-Typ-Verteilung besitzt. Nach Satz 3.3.8 wird die $(m, \gamma, Q, 0)$-Verteilung $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch die Matrixfolge $(P_n)_{n=0,1,\ldots}$ erzeugt, die durch

$$P_0^* = \alpha_0 I_m$$

$$P_n^* = Q^{n-1}(I_m - Q) \quad n = 1, 2, \ldots$$

gegeben ist.

Wie bemerkt gilt dann für $(\vec{F}_x)_{x \in \mathbb{N}}$ die Beziehung (4.2.12) und (4.2.13).

Für den Anfangswert F_0 gilt also nach Satz 5.1.2

$$\begin{aligned}
\vec{F}_0 &= \vec{\gamma}\widehat{P}(g_0) \\
&= \vec{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty} P_n g_0^n \\
&= \vec{\gamma}P_0 + \vec{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty} P_n g_0^n \\
&= \alpha_0 I_m + (1-\alpha_0)g_0 \sum_{n=1}^{\infty} g_0^{n-1} Q^{n-1}(I_m - Q) \\
&= \alpha_0 I_m + (1-\alpha_0)g_0(I_m - g_0 Q)^{-1}(I_m - Q).
\end{aligned}$$

5.2 Rekursive Beziehungen

Die Verteilung von X sei $(\widetilde{f_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Wir leiten nun eine rekursive Beziehung für diese Verteilung her.

Satz 5.2.1 *Die Schadensanzahl N sei $(\vec{\alpha}, Q)$-Phasen-Typ-Verteilung, wobei $0 < \alpha_0 < 1$, $\gamma_j > 0$, $\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j = 1$, $\vec{\alpha}^T = ((1-\alpha_0)\gamma_1, \ldots, (1-\alpha_0)\gamma_m) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ und Q sei ein $m \times m$ substochastische Matrix. Weiter sei die Folge $(Y_j)_{j=1,2,\ldots}$ des Teilrisikos unabhängig und identisch nach $(g(j))_{j\in\mathbb{N}_0}$ verteilt. Schließlich gelte*

$$\det(I_m - g(0)Q) \neq 0. \tag{5.2.1}$$

Dann gilt

$$\widetilde{f(0)} = \alpha_0 + g(0)\vec{\alpha}^T(I_m - g(0)Q)^{-1}(I_m - Q)\vec{1} \tag{5.2.2}$$

und

$$\widetilde{f(j)} = \vec{F}_j^{\,*}\vec{1}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{5.2.3}$$

wobei die $1 \times m$ Vektor $(\vec{F}_j^{\,*})_{j=0,1,\ldots}$ durch folgende rekursive Beziehung bestimmt ist:

$$\vec{F}_0^{\,*} = g(0)\vec{\alpha}^T(I_m - g(0)Q)^{-1}(I_m - Q) \tag{5.2.4}$$

und

$$\vec{F}_j^{\,*} = [g(j)\vec{\alpha}^T(I_m - Q) + \sum_{l=1}^{j} g(l)\vec{F}_{j-l}^{\,*} Q](I_m - g(0)Q)^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{5.2.5}$$

Beweis:

Gemäß der Definition der Verteilung von X gilt

$$\widetilde{f(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{p}_n g^{*n}(j). \tag{5.2.6}$$

Dann folgt mit Satz 5.1.2

$$\begin{aligned}
\widetilde{f(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{p}_n g^n(0) \\
&= \widetilde{p}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{p}_n g^n(0) \\
&= \alpha_0 + g(0) \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\alpha}^T \left(g(0)Q\right)^{n-1} (I_m - Q)\vec{1} \\
&= \alpha_0 + g(0)\vec{\alpha}^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(g(0)Q\right)^{n-1} (I_m - Q)\vec{1}.
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Nach Lemma 3.3.4 existiert die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (g(0)Q)^j$$

und es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} (g(0)Q)^j = (I_m - g(0)Q)^{-1}.$$

Damit folgt

$$\widetilde{f(0)} = \alpha_0 + g(0)\vec{\alpha}^T (I_m - g(0)Q)^{-1}(I_m - Q)\vec{1},$$

also (5.2.2)

Weiter erhalten wir für $j = 1, 2, \ldots$

$$\widetilde{f(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{p}_n g^{*n}(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{p}_n g^{*n}(j),$$

da

$$g^{*0}(j) = 0.$$

Weiter haben wir mit Satz 5.1.2, falls

$$P_n^* = Q^{n-1}(I_m - Q), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.2.8}$$

gesetzt wird.
Und nach Satz 5.1.2 gilt

$$\widetilde{f(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\alpha}^T P_n^* \vec{1} g^{*n}(j) = \vec{\alpha}^T \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^* g^{*n}(j) \right) \vec{1}. \tag{5.2.9}$$

Wir führen nun

$$F_j^* = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^* g^{*n}(j), \quad j = 1, 2, \ldots$$

und

$$\vec{F_j^*} = \vec{\alpha}^T F_j^* = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\alpha}^T P_n^* g^{*n}(j)$$

ein. Dann lässt (5.2.8) in der Form

$$\widetilde{f(j)} = \vec{\alpha}^T F_j^* \vec{1} = \vec{F_j}^* \vec{1}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

schreiben.
Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{F_j^*} &= \sum_{n=1}^{\infty} g^{*n}(j) \vec{\alpha}^T P_n^* \\ &= g(j) \vec{\alpha}^T (I_m - Q) + g * \sum_{n=2}^{\infty} g^{*(n-1)}(j) \vec{\alpha}^T P_n^* \\ &= g(j) \vec{\alpha}^T (I_m - Q) + g * \sum_{l=1}^{\infty} g^{*l}(j) \vec{\alpha}^T P_{l+1}^*. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Wegen (5.2.7) haben wir

$$P_{l+1}^* = Q^l (I_m - Q) = Q^{l-1}(I_m - Q) Q = P_l^* Q.$$

Damit lässt sich (5.2.9) in der Form

$$\begin{aligned}
\vec{F_j^*} &= g(j)\vec{\alpha}^T(I_m - Q) + \left(g * \sum_{l=1}^{\infty} g^{*l}(j)\vec{\alpha}^T P_l^*\right) Q \\
&= g(j)\vec{\alpha}^T(I_m - Q) + g * \vec{F_j^*} Q \\
&= g(j)\vec{\alpha}^T(I_m - Q) + \sum_{l=0}^{j} g(l)\vec{F_{j-l}^*} Q \\
&= g(j)\vec{\alpha}^T(I_m - Q) + \sum_{l=1}^{j} g(l)\vec{F_{j-l}^*} Q + g(0)\vec{F_j^*} Q.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\vec{F_j^*}(I_m - g(0)Q) = g(j)\vec{\alpha}^T(I_m - Q) + \sum_{l=1}^{j} g(l)\vec{F_{j-l}^*} Q$$

bzw.

$$\vec{F_j^*} = \left(g(j)\vec{\alpha}^T(I_m - Q) + \sum_{l=1}^{j} g(l)\vec{F_{j-l}^*} Q\right)(I_m - g(0)Q)^{-1}. \qquad (5.2.11)$$

Dies ist ein rekursive Beziehung. Der Anfangswert bestimmt sich aus

$$\vec{F_0}^* = \sum_{n=1}^{\infty} g^n(0)\vec{\alpha}^T P_n^*.$$

Wegen (5.2.7) gilt damit

$$\begin{aligned}
\vec{F_0^*} &= \sum_{n=1}^{\infty} g^n(0)\vec{\alpha}^T Q^{n-1}(I_m - Q) \\
&= g(0)\vec{\alpha}^T(I_m - g(0)Q)^{-1}(I_m - Q).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Beispiel 5.2.2 *Wir gehen davon aus, dass N eine spezielle Phasen-Typ Verteilung besitzt. Und zwar gelte*

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m), \quad m = 10$$

wobei

$$\vec{\alpha} = (0.4, 0.24, 0.144, 0.086, 0.052, 0.031, 0.019, 0.011, 0.007, 0.005, 0.005),$$

und

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei die Teilrisiko-Verteilung $(g(j))_{j=0,1,\dots}$ *negativ binomial verteilt mit Parameter* $r = 5$ *und* $p = 0.25$, *d.h. es gelte*

$$g(j) = \binom{5+j-1}{5-1}(0.25)^5(0.75)^j = \binom{j+4}{4}(0.25)^5(0.75)^j, \quad j = 0, 1, \dots.$$

In diesem Fall gilt mit $g(0) = (0.25)^5$

$$I_m - g(0)Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -g(0) & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -g(0) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -g(0) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -g(0) & 1 \end{pmatrix}.$$

und somit folgt

$$\det(I_m - g(0)Q) = 1.$$

Damit ist die Voraussetzung (5.2.1) von Satz 5.2.1 erfüllt.

Wegen

$$(I_m - g(0)Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g(0) & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g(0) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g(0) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & g(0) & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$(I_m - g(0)Q)^{-1}(I_m - Q)\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ g(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann folgt aus (5.2.2)

$$\widetilde{f(0)} = \alpha_0 + g(0)(\alpha_1 + \alpha_2 g(0)).$$

Zur Bestimmung von $\vec{F_0^*}$ betrachten wir zunächst

$$(I_m - g(0)Q)^{-1}(I_m - Q)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g(0) & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g(0) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g(0) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & g(0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
g(0)-1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
-g(0) & g(0)-1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & -g(0) & g(0)-1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \dots & -g(0) & g(0)-1 & 1
\end{pmatrix}.
$$

$$
= g(0) \begin{pmatrix}
\alpha_1 + \alpha_2(g(0)-1) - \alpha_3 g(0) \\
\alpha_2 + \alpha_3(g(0)-1) - \alpha_4 g(0) \\
\alpha_3 + \alpha_4(g(0)-1) - \alpha_5 g(0) \\
\alpha_4 + \alpha_5(g(0)-1) - \alpha_6 g(0) \\
\alpha_5 + \alpha_6(g(0)-1) - \alpha_7 g(0) \\
\alpha_6 + \alpha_7(g(0)-1) - \alpha_8 g(0) \\
\alpha_7 + \alpha_8(g(0)-1) - \alpha_9 g(0) \\
\alpha_8 + \alpha_9(g(0)-1) - \alpha_{10} g(0) \\
\alpha_9 + \alpha_{10}(g(0)-1) \\
\alpha_{10}
\end{pmatrix}^T .
$$

Nach Satz 5.2.1 gilt somit (5.2.5). Mit obiger Darstellung erhalten wir daraus die Folge $(\vec{F}_j^*)_{j=1,2,\dots}$ *und nach (5.2.3) schließlich die Folge* $(\widetilde{f(j)}_{j=1,2,\dots})$*. Der Algorithmus werde mit Mathematica umgesetzt. Die spezielle Ergebnisse sind im Tabelle 5.1 enthalten. Sie entsprechen die Resultaten aus dem Artikel[1].*

Tabelle 5.1:

j	$\vec{F}_j^*$	$\widetilde{f(j)}$
0	(0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.400235
1	(0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.000880
2	(0.001, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.001981
3	(0.001, 0.001, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.003473
4	(0.002, 0.001, 0.001, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.005222
5	(0.003, 0.002, 0.001, 0.001, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.007073
10	(0.006, 0.003, 0.002, 0.001, 0.001, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.013935
20	(0.005, 0.003, 0.002, 0.001, 0.001, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.012623
30	(0.004, 0.002, 0.001, 0.001, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.008949
40	(0.003, 0.002, 0.001, 0.001, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.006509
50	(0.002, 0.001, 0.001, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.004735
100	(0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000,)	0.000978

Zusammenfassung

Die Panjer-Rekursion wird in der vorliegenden Arbeit verallgemeinert auf den Fall, dass die Verteilung der Schadensanzahl durch eine Folge von Vektoren gegeben ist. Es wird ein diskretes Risikomodell untersucht.
In Kapitel 3 werden als Verallgemeinerung der Schadensanzahlverteilungen aus dem Artikel diskrete Verteilungen vorgeschlagen, die durch eine Folge von m-dimensionalen Vektoren bestimmt sind. Es wird untersucht, welche Bedingungen die Folge der Vektoren erfüllen muss, dass die resultierenden Folgen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den natürlichen Zahlen bildet.
Für den Fall m = 2 enthält Satz 3.1.4 notwendige und hinreichende Bedingungen dafür. Anhand von Beispielen wird dieses Resultat illustriert. Die verallgemeinerte Panjer-Schadensanzahl-Verteilung ist ein Spezialfall der vektorparametrischen Verteilung. Sie hängt von zwei $m \times m$ Matrizen A, B und einem $m \times 1$ Vektor ab. Anhand einer Reihe von Beispielen werden explizite Darstellungen für diese Verteilung angegeben, falls die Produkt der Matrizen A und B kommutativ ist. So wird neue Klasse von verallgemeinerten Schadensanzahl-Verteilungen konstruiert. Im Fall, dass das Produkt der Matrizen A und B kommutative ist, können die verallgemeinerte-Schadensanzahl-Verteilungen explizit angegeben werden(Vgl Satz 3.3.2).
In Abschnitt 3.3 wird eine spezielle Panjer-Schadensanzahl-Verteilung, nämlich die verallgemeinerten geometrischen Verteilungen untersucht. Sie erlauben eine explizite Darstellung(Vgl. Satz 3.3.8). Die Voraussetzung (3.3.10) ist nicht explizit im Artikel [1] erwähnt.
Die verallgemeinerte Poisson-Verteilung wird im Abschnitt 3.4 untersucht. Hier stellt sich heraus, dass die Bedingung (3.4.7) aus Satz 3.4.2 nicht einfach verifizierbar ist. Es wird im Abschnitt 3.5 eine Teilklasse der verallgemeinerten Poisson-Verteilung

konstruiert, in den man die Bedingung (3.4.7) explizit nachweisen kann. Diese Bedingung ist in diesem Fall gleichwertig mit der Lösung eines gewiesen Gleichungssystems. Die Existenz der Löungen dieses Gleichungssystems wird in Satz 3.5.4 nachgewiesen. Es wird gezeigt, dass vorgegebene verallgemeinerte Poisson-Verteilungen um eine Dimenssion erhöht werden kann(Vgl. Satz 3.5.7).

In Kapitel 4 wird eine rekursive Beziehung für die Gesamtschadenverteilung hergeleitet, falls die Schadensanzahl-Verteilung eine verallgemeinerte Panjer-Schadensanzahl-Verteilung ist. Hierbei benötigt man die Voraussetzung der Konvergenz eine matriziellen Potenzreihe (Vgl. Lemma 4.1.1). Die Grundlage der rekursiven Beziehung ist eine Differentialgleichung für diese matrizielle Potenzreihe (Vgl. Satz 4.1.2). Lemma 4.2.2 enthält die rekursiven Beziehung. Sie basiert auf einer rekursive Beziehung von einer Matrixfolge.

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse von Kapitel 4 auf eine Schadensanzahl-Verteilung übertragen, die sich Phasen-Typ-Verteilung nennt. Sie ergibt sich als Mischung der ausgearteten Verteilung in Null und einer um 1 verschobenen verallgemeinerten Panjer-Schadensanzahl-Verteilung. Zunächst wird die Phasen-Typ-Verteilung eingeführt und gezeigt, dass die rekursive Beziehung für eine Gesamtschadenverteilung sich übertragen lässt(Vgl. Satz 5.2.1). In diesem Fall wird die resultierende Verteilung durch die Folge von $1 \times m$ Vektoren bestimmt. Die Umsetzung dieses Algorithmus z.B. mit Hilfe von Mathmatica ist möglich, wie ein Beispiel zeigt.

Literaturverzeichnis

[1] [XueYuan Wu und Shuanming Li, MATRIX-FORM RECURSIONS FOR A FAMILY OF COMPOUND DISTRIBUTIONS]

[2] [Horn. Johnson, Matrix Analysis] (http://books.google.de/books?id=PlYQN0ypTwEC&printsec=frontcover&hl=de-DE&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false)

[3] [Lineare statistische Methoden und ihre Anwendungen]

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der positiven ganzen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	Menge der nicht negativen ganzen Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge aller positiven reellen Zahlen

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

....

Ort	Datum	Unterschrift