Universität Leipzig

Fakultät für Mathematik und Informatik

Mathematisches Institut

Über logische und mengentheoretische Aspekte von Mochizukis Beweis der abc-Vermutung

DIPLOMARBEIT

Leipzig, Oktober 2015

vorgelegt von
Schulze, Richard Christoph
Studiengang Diplom Mathematik

Betreuender Hochschullehrer: **Dr. Claus Diem**
Fakultät für Mathematik und Informatik, Mathematisches Institut

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

„Sie ist eine der interessantesten zahlentheoretischen Vermutungen der neueren Zeit“ [Lan, S.95], so schreibt Lang in einem Artikel über die *abc*-Vermutung. Nicht zu Unrecht steht diese Vermutung im Mittelpunkt des Interesses von Zahlentheoretikern. Sie macht eine starke Aussage über die Primfaktoren zweier großer Zahlen und ihrer Summe und impliziert insbesondere, dass der große Satz von Fermat ab einem hinreichend großen Exponenten gültig ist [Lan][S.95]. Wir nennen eine genaue Formulierung aus [Lan, S.95]:

„**Die *abc*-Vermutung.** (Masser, Oesterlé, 1986) Zu $\epsilon > 0$ existiert eine Konstante $K(\epsilon)$, so dass für alle von Null verschiedenen, teilerfremden ganzen Zahlen a, b, c mit $a + b = c$ die Ungleichung

$$max(|a|, |b|, |c|) \leq K(\epsilon) \cdot N_0(abc)^{1+\epsilon}$$

erfüllt ist.“ Dabei ist $N_0(n)$ für eine ganze Zahl $n \neq 0$ das Produkt ihrer verschiedenen Primfaktoren.

Folglich ist es umso interessanter, wenn ein namhafter Mathematiker behauptet, einen Beweis für diese Vermutung gefunden zu haben. Shinichi Mochizuki veröffentlichte 2012 vier Paper [Mot1, Mot2, Mot3, Mot4] zum Thema „Inter-Universal Teichmuller Theory“, die einen Beweis der abc-Vermutung enthalten sollen. Bis heute wird der Beweis geprüft und ist noch nicht allgemein anerkannt.
In [Mot4][S.54-71] befindet sich ein Abschnitt über Speziestheorie. Zu Beginn des Abschnitts schreibt Mochizuki dazu: „In some sense, this language may be thought of as an explicit description of certain tasks typically executed at an implicit, intuitive level by mathematicians [i.e., mathematicians who are not equipped with a detailed knowledge of the theory of foundations!][. . .] In the context of the theory developed in the present series of papers, however, it is useful to describe these intuitive operations explicitly.“ [Mot4, S.53].
Das Ziel der Diplomarbeit soll es sein, sich mit der Speziestheorie von Mochizuki zu beschäftigen, diese zu verstehen, im Hinblick auf die mathematischen Grundlagen aufzuarbeiten und sich dazu stellende Fragen zu bearbeiten. Außerdem sollen Beispiele ausgearbeitet und im Kontext der Arbeit erläutert werden.
Im ersten Kapitel werden wir dafür die logischen und mengentheoretischen Grundlagen aufarbeiten. Zunächst werden die grundlegenden Definitionen und Axiome eingeführt, es wird die Arbeitsweise mit Formeln in der Mathematik betrachtet und schließlich eine Einführung in die Mengentheorie und die Grothendieck-Universen gegeben. Das Beziehen eines gewissen Standpunkts und die damit zusammenhängende Einführung neuer Begriffe soll bereits auf die Speziestheorie vorbereiten.
Diese wird nun im zweiten Kapitel dargestellt. Zunächst werden wir uns jedoch damit beschäftigen wie die Kategorientheorie in der Mathematik formalisiert werden kann und einige Begriffe aus der Kategorientheorie aufarbeiten. Die Definitionen der Speziestheorie werden aufgeführt und mit der Kategorientheorie verglichen. An einigen Beispielen werden die Definitionen der Speziestheorie konkret erläutert.
Bei der Verwendung der Speziestheorie stellt sich die Frage, wie gewisse Objekte ohne Auswahlen konstruiert werden können. Im dritten Kapitel wollen wir für einige Fälle eine Antwort auf diese Frage geben. Dazu verallgemeinern wir ein konkretes Beispiel und arbeiten die dafür notwendige Theorie aus, die sich mit „Familien identifizierter Objekte“ beschäftigt. Im konkreten Beispiel benötigen wir den Strukturtransport, der ebenfalls auf eine mengentheoretische Grundlage gestellt wird. Eine Betrachtung der Anafunktoren, die auch zur Vermeidung von Auswahlen definiert wurden, schließt dieses Kapitel ab.
Im vierten Kapitel werden wir uns mit der Theorie algebraischer Kurven und Riemannscher Flächen beschäftigen. Diese Betrachtungen befinden sich in thematischer Nähe zur Arbeit Mochizukis und wir können untersuchen, welche Aspekte in den konkreten Beispielen für die Umsetzung in der Sprache der Speziestheorie relevant sind.

1 Mengenlehre, Kardinalzahlen und Universen

Wir widmen das erste Kapitel dieser Arbeit einer näheren Betrachtung der logischen und mengentheoretischen Grundlagen. Der erste Abschnitt führt die Axiome der Mengenlehre nach Zermelo und Fränkel mit Auswahlaxiom (*ZFC-Mengenlehre*) auf der Grundlage der Prädikatenlogik erster Stufe ein, diskutiert den Klassenbegriff und stellt einen eigenen Standpunkt vor, der Formeln betont. Wir führen zwei neue Begriffe ein, welche mit dem Standpunkt zusammenhängen, erläutern diese an Beispielen und beantworten eine Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt. Im zweiten Abschnitt wird nun anhand von Beispielen skizziert, wie man aus den ZFC-Axiomen in der Logik erster Stufe die grundlegenden Objekte der Mathematik definieren kann und es werden, im Kontext des Standpunktes, Konstruktionen mit Auswahlen beleuchtet. Es folgt eine kurze Einführung in die Ordinal- und Kardinalzahlen, in der wir den Begriff der Von-Neumann-Hierarchie verallgemeinern. Diese Einführung bildet auch die Grundlage für den letzten Abschnitt zu den Grothendieck-Universen. In diesem werden Grothendieck-Universen definiert und charakteristische Verbindungen zu den ZFC-Axiomen und unerreichbaren Kardinalzahlen hergestellt. Ein Axiom über die Existenz von Grothendieck-Universen wird den Axiomen der ZFC-Mengenlehre hinzugefügt und es werden die Auswirkungen dieses Axioms diskutiert.

1.1 Logik und Mengenlehre

Wir gehen davon aus, dass der Leser mit der Prädikatenlogik erster Stufe vertraut ist. Trotzdem wollen wir uns einige Grundlagen und Sätze in Erinnerung rufen (siehe z.B. [Ivo]):

Zusammenfassung/Wiederholung 1.1. Die Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit nutzt die Symbole $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall, =, (,)$, sowie eine unendliche Menge von Variablensymbolen, eine Menge von Konstantensymbolen, eine Menge von Funktionssymbolen und eine Menge von Relationssymbolen. Aus diesen können nach bekannten rekursiven Regeln *Terme* und *Formeln* der Sprache gebildet werden. Formeln ohne freie Variablen heißen *Sätze*. Eine Menge von Sätzen, die wir als wahr betrachten wollen, bezeichnen wir als *Axiome*. Es gibt verschiedene *Kalküle* (z.B. Methode der Tableaux), um aus Axiomen mittels natürlicher vorgefertigter Regeln weitere Formeln zu folgern.
Besteht $\mathfrak{A}$ aus einer Menge A und Zuordnungen der Konstantensymbole, Funktionensymbole und Relationssymbole zu Elementen aus A, Funktionen von $A^n \rightarrow A$ und Teilmengen von A^n (mit jeweils entsprechendem vom Symbol abhängigen n), so nennt man $\mathfrak{A}$ eine *Struktur* der Sprache. Ein Paar $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, f)$ bestehend aus einer Struktur und einer Abbildung von der Variablenmenge nach A heißt eine *Interpretation*. Nach rekursiven Regeln kann man nun die *Gültigkeit* einer Formel (oder einer Menge von Formeln) bezüglich einer Interpretation oder eines Satzes bezüglich einer Struktur prüfen. Erfüllt eine Interpretation eine Menge von Axiomen, so nennt man sie ein *Modell* dieser Axiome.
Wir möchten darauf hinweisen, dass die Begriffe Menge, Funktion,... in dieser Beschreibung intuitiv zu verstehen sind. Weiter stellen wir uns auf den *Standpunkt*, dass mathematische Beweise so zu führen sind, dass sie in einem geeignetem Kalkül aufgeschrieben werden können und damit der Satz in jedem Modell gilt (siehe 1.2).
Gödel bewies mit seinem Vollständigkeitssatz, dass jedes konsistente axiomatische System erster Stufe ein Modell besitzt. Weiter gilt, dass es ein Kalkül gibt, in welchem jede Formel bewiesen werden kann, die in jedem Modell des Axiomensystems wahr ist - das Kalkül also vollständig ist. In seinem ersten Unvollständigkeitssatz beweist er, dass es in konsistenten axiomatischen Theorien, die rekursiv aufzählbar sind und welche „hinreichend Arithmetik beinhalten", stets Sätze gibt, welche weder bewiesen noch widerlegt werden können - die Theorie also unvollständig ist. Der zweite Unvollständigkeitssatz besagt, dass in solchen Theorien nicht die eigene Konsistenz gezeigt werden kann.

Bemerkung 1.2. Nach dieser grundlegenden Wiederholung wollen wir darauf aufmerksam machen, dass für Kalküle der Begriff eines Modells nicht notwendig ist. Demzufolge muss auch für

einen Beweis dieser Begriff nicht eingeführt werden. Wenn wir uns in dieser Arbeit nun mit mathematischen Konstruktionen und Beweisen beschäftigen, so kann man dies als Metasprache verstehen, die in ein Kalkül übersetzbar ist und dort einen Beweis der gewünschten Aussage liefert. Diese Übersetzung kann und wird in dieser Arbeit nicht geleistet werden. Nichtsdestotrotz versuchen wir anzudeuten, wie man zumindest mathematische Konstruktionen und Definitionen in die Sprache der Formeln übertragen kann.
Führt man diesen Gedanken weiter, so stellt man fest, dass sämtliche mathematische Objekte ohne den Begriff eines Modells nicht existieren. Wir haben lediglich *formale Beschreibungen* von mathematischen Konstruktionen, die man sich in einem Modell vorstellt. Die Formulierung, dass man sagt, dass eine gewisse Formel wahr ist oder eindeutig eine Menge beschrieben wird, bedeutet dann, dass dies in allen Modellen gilt oder äquivalent dazu, dass diese Aussage in einem vollständigen Kalkül beweisbar ist.
Die Sichtweise, sich auf die hinter den mathematischen Objekten stehenden Formeln zu beziehen, wird Grundlage für die Speziestheorie sein. Die eben genannten Überlegungen, die den Standpunkt genauer erläutern, wurden nicht ausgeführt, um zu sagen, dass die Mathematik so ausgeübt wird oder ausgeübt werden soll, vielmehr sind sie nützlich, um sich mit Logik und Speziestheorie zu beschäftigen und diese besser zu verstehen.

Bevor wir ein zwei Begriffe einführen, die im Zusammenhang zu dieser Sichtweise stehen, wollen wir jedoch zunächst die Axiome der Mengenlehre nach Zermelo und Fränkel mit Auswahlaxiom aufführen, die heutzutage als grundlegende Axiome der Mathematik weit verbreitet sind. Sie sind in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe (siehe 1.1) mit Gleichheitszeichen und einem zweistelligem Prädikat $\in$ definiert. Wir entnehmen die Axiome aus [Drk, S.8-12] und nutzen gängige Abkürzungen (bei Quantoren und bei der Klammersetzung) sowie teilweise eckige Klammern statt runden Klammern zur besseren Lesbarkeit.

Definition 1.3. Die *Axiome der ZFC-Mengenlehre* lauten:

($S1$) (*Extensionalitätsaxiom*) Stimmen die Elemente zweier Mengen überein, so sind die Mengen gleich.
$$\forall x, y\,([\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)] \rightarrow x = y)$$

($S2$) (*Fundierungsaxiom*) Ist eine Menge nicht leer, so enthält sie stets eine Menge als Element, welche disjunkt zur ursprünglichen Menge ist.
$$\forall x\,((\exists y\,(y \in x)) \rightarrow \exists y\,(y \in x \wedge \forall z\,\neg(z \in x \wedge z \in y)))$$

($S3$) (*Aussonderungsaxiom*) Es gibt stets eine Menge, welche genau die Elemente einer gegebenen Menge enthält, die eine gegebene Formel erfüllen.
Ist ϕ eine Formel mit einer freien Variablen x, in der y nicht auftritt, so gilt:
$$\forall a\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \phi(x))$$

($S4$) (*Leermengenaxiom*) Es gibt eine Menge, die keine Elemente besitzt.
$$\exists y\,\forall x\,(x \notin y)$$
Dabei steht $x \notin y$ abkürzend für $\neg(x \in y)$.

($S5$) (*Paarmengenaxiom*) Für je zwei gegebene Mengen gibt es eine Menge, welche genau diese beiden Mengen als Elemente enthält.
$$\forall a, b\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x = a \vee x = b)$$

($S6$) (*Potenzmengenaxiom*) Es gibt stets eine Menge, die genau die Teilmengen einer gegebenen Menge als Elemente enthält.
$$\forall a\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in a))$$

($S7$) (*Vereinigungsaxiom*) Es gibt stets eine Menge, welche die Mengen, die Elemente einer gegebenen Menge sind, vereinigt.

$$\forall a \, \exists y \, \forall x \, (x \in y \leftrightarrow \exists z \, (x \in z \wedge z \in a))$$

($S8$) (*Unendlichkeitsaxiom*) Es gibt eine Menge, welche die leere Menge als Element besitzt und mit jedem Element x, auch die Menge $x \cup \{x\}$ als Element enthält.

$$\exists w \, (\emptyset \in w \wedge \forall x \, (x \in w \rightarrow \exists z \, [z \in w \wedge \forall u \, (u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u = x)]))$$

Dabei steht $\emptyset$ für die leere Menge, die nach ($S4$) existiert und durch Voranstellen von „$\forall \emptyset ((\forall x \, (x \notin \emptyset)) \rightarrow \dots)$" formalisiert wird.

($S9$) (*Ersetzungsaxiom*) Man kann in jeder Menge jedes Element entfernen oder durch eine Menge ersetzen und erhält wieder eine Menge, wenn man diese Vorschrift durch eine entsprechende Formel darstellen kann.
Ist $\psi(x, y)$ eine Formel mit zwei freien Variablen x, y, in der b nicht auftritt, so gilt:

$$\forall a \, ([\forall x, y, z \, (\psi(x, y) = \psi(x, z) \rightarrow y = z)] \rightarrow \exists b \, \forall y \, [y \in b \leftrightarrow \exists x \, (x \in a \wedge \psi(x, y))])$$

($S10$) (*Auswahlaxiom*) Enthält eine Menge paarweise disjunkte, nicht-leere Mengen als Elemente, so gibt es stets eine Menge, die aus jeder Menge, die Element der gegebenen Menge ist, genau ein Element enthält.

$$\forall z \, ([\forall x \, (x \in z \rightarrow x \neq \emptyset \wedge \forall y \, (y \in z \rightarrow x \cap y = \emptyset \vee x = y))] \rightarrow \exists u \, \forall x \, \exists v \, [x \in z \rightarrow u \cap x = \{v\}]),$$

Dabei steht $x \cap y = z$ für $\forall t \, (t \in x \wedge t \in y \leftrightarrow t \in z)$, $\{v\}$ ist genau die Menge w mit $x \in w \leftrightarrow x = v$, welche nach ($S5$) existiert und $x \neq y$ steht abkürzend für $\neg(x = y)$.

Eine *Mengenlehre* ist ein Modell, welches diese Axiome erfüllt. Eine *Menge* ist ein Element eines Modells einer Mengenlehre. Die Aussage, dass die Elemente einer Menge C ein Axiom von oben erfüllen, notieren wir mit $(Sn)_C$, wobei n die Nummer des Axioms sei.

Wir wollen nun noch eine Bemerkung zu dem Begriff „Klasse" anfügen. (siehe z.B. [Ivo][S.213-257])

Bemerkung 1.4. (Klassen, NBG) Es gibt Zusammenfassungen von Mengen, wie zum Beispiel „alle Mengen" oder „alle Monoide", welche keine Menge bilden können, weil dies sonst zu Widersprüchen mit den Axiomen führen würde (z.B. Russell-Paradoxon). Um trotzdem von diesen Zusammenfassungen reden zu können, wird häufig der Begriff *Klasse* eingeführt.
Eine axiomatische Grundlage für Klassen bildet die Mengenlehre nach Neumann, Bernays und Gödel (*NBG-Mengenlehre*), deren Axiome ähnlich zu den Axiomen der ZFC-Mengenlehre sind. Die Variablen dieses Axiomensystems stehen für Klassen. Klassen, welche kein Element einer anderen Klasse sind, heißen *echte Klassen*. Alle anderen Klassen werden auch als *Mengen* bezeichnet. Die Modelle der Axiomensysteme von ZFC und NBG lassen sich auf kanonische Weise (mit Hilfe der Interpretation von gewissen Äquivalenzklassen von Formeln als Klasse) ineinander überführen, sodass unter dieser Entsprechung eine Aussage in einem Axiomensystem genau dann gilt, wenn sie in dem anderen Axiomensystem gilt.
Ivorra [Ivo][S.240] motiviert dies sogar dazu, dass er eine Formel mit einer ausgezeichneten freien Variablen in ZFC als Klasse bezeichnet. Diese Formel beschreibt dann alle Mengen, die Elemente dieser Klasse sein sollen. Diese Begriffsbildung ist sinnvoll, da man bei der Übertragung von Beweisen von NBG nach ZFC versuchen würde, die vorkommenden Klassen durch die entsprechenden Formeln zu ersetzen und mit diesen zu arbeiten.
Eine weitere Möglichkeit das Problem, dass es Zusammenfassungen von Mengen gibt, die keine Mengen sind, zu lösen, ist am Ende des Abschnitts über Grothendieck-Universen zu finden.

Wir wenden uns nun der näheren Betrachtung des in 1.2 erläuterten Standpunktes in seiner Umsetzung zu. Dazu werden wir zwei neue Begriffe einführen.
Bei mathematischen Begriffen kann man zwischen Objekten und Eigenschaften unterscheiden. Wenn wir nun formale Beschreibungen haben wollen, so bedeutet dies, dass wir bei der Definition von Objekten eine Formel suchen, die für genau eine Menge, die unserer Vorstellung entspricht, erfüllt ist und bei der Definition einer Eigenschaft, eine Formel suchen, die beim Einsetzen einer Menge genau dann wahr ist, wenn die Menge unserer Vorstellung entspricht.

Definition 1.5. Eine Formel ϕ mit ausgezeichneter freier Variable x zusammen mit einer Menge $\{y_1, \ldots, y_n\}$ von Variablen, welche die weiteren freien Variablen von ϕ enthält, und gegebenenfalls einer Formel ψ für den Definitionsbereich, welche höchstens $y_1, \ldots, y_n$ als freie Variablen besitzt, heißt *formale Beschreibung einer mathematischen Eigenschaft* oder kurz eine *formalisierte Eigenschaft*.
Wir nennen eine formalisierte Eigenschaft ϕ (zusammen mit $\{y_1, \ldots, y_n\}$ und ggf. ψ) eine *formale Beschreibung eines mathematischen Objekts* oder kurz ein *formalisiertes Objekt*, wenn die folgende Formel in ZFC beweisbar ist

$$\forall y_1, \ldots, y_n \, (\psi(y_1, \ldots, y_n)) \to \exists! x \, \phi(x, y_1, \ldots, y_n)),$$

also für alle Elemente des Definitionsbereichs genau eine Menge x existiert, welche die Formel ϕ erfüllt. Dabei ist $\exists! x \, \rho(x)$ eine abkürzende Schreibweise für $\exists x \, \rho(x) \wedge \forall x, y \, ((\rho(x) \wedge \rho(y)) \to x = y)$. Wir sagen auch, dass ϕ eine formalisierte Eigenschaft oder ein formalisiertes Objekt *in Abhängigkeit von* $y_1, \ldots, y_n$ ist.

Bemerkung 1.6. Es macht hier keinen wesentlichen Unterschied, ob man x als eine freie Variable wählt oder m freie Variablen $x_1, \ldots, x_n$ anstelle von x nutzt, beziehungsweise statt n Variablen $y_1, \ldots, y_n$ nur eine Variable y zulässt, da man mittels Korrespondenzen $x = (x_1, \ldots, x_m)$ und $(y_1, \ldots, y_n) = y$ die entsprechende mathematische Idee formulieren kann. In 1.8 (h) wird dies in einem konkreten Fall erklärt.
Dies ist jedoch nicht so einfach möglich, wenn man mit Klassen arbeitet, da man von echten Klassen keine Tupel bilden kann.

Bemerkung 1.7. Man kann bei den Variablen $y_1, \ldots, y_n$ die gedankliche Unterscheidung treffen, ob man sie als Parameter oder als Variable zur Definition des Objekts ansehen möchte. Arbeitet man zum Beispiel stets mit Vektorräumen über einem beliebigen Körper k, so kann man k als Parameter ansehen. Bildet man nun die direkte Summe von zwei Vektorräumen, so haben wir zwei Variablen für die Vektorräume zur Definition des Objekts und den Parameter des Körpers.

Wir wollen nun ein paar Beispiele zur Illustration geben. Dabei sollen die Beispiele so verstanden werden, dass in der zugehörigen Formel immer eine freie Variable auftaucht (z.B. x in $\forall y \, (y \notin x)$ für das formalisierte Objekt der leeren Menge), welche für die beschriebene Eigenschaft oder das beschriebene Objekt steht. Wir werden uns später damit beschäftigen, wie derartige Beispiele tatsächlich in Formeln aussehen.

Beispiel 1.8. (a) Wir können eine Formel für die natürlichen Zahlen (z.B. $x = \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}$ aus 1.28) als formalisiertes Objekt ohne weitere freie Variable auffassen. Entsprechendes gilt für die ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen. (siehe 1.18 und 1.28)

(b) Eine Formel für die Funktion $f_{lin} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto ay + b$ ist ein formalisiertes Objekt in Abhängigkeit von zwei Variablen, wobei die Formel des Definitionsbereichs der Aussage $a, b \in \mathbb{R}$ entspricht.

(c) Eine Formel für den Funktionswert $f_{lin}(y)$ ist ein formalisiertes Objekt in Abhängigkeit von drei Variablen. Hier entspricht die Formel des Definitionsbereiches der Aussage $a, b, y \in \mathbb{R}$.

(d) Eine Formel für die Eigenschaft $y \in \mathbb{Z} \wedge 2|y$ ist eine formalisierte Eigenschaft ohne weitere freie Variable.

(e) Eine Formel für die Menge $\{n \in \mathbb{Z} \mid 2|n\}$ ist ein formalisiertes Objekt ohne weitere freie Variable.

(f) Eine Formel für die direkte Summe von zwei Gruppen $A \oplus B$ ist ein formalisiertes Objekt mit zwei freien Variablen A, B. Der Definitionsbereich wird durch eine Formel beschrieben, die aussagt, dass A und B Gruppen sind.

(g) Die Formel, die besagt, dass x eine Menge ist, die eine Menge y genau dann enthält, wenn $y = (A, B, A \oplus B)$ mit Gruppen A, B und ihrer direkten Summe $A \oplus B$, ist kein formalisiertes Objekt, da keine solche Menge x existiert.

(h) Eine Formel dafür, dass eine Menge $x\,(= (V, +_V, \cdot_V))$ ein K-Vektorraum ist, ist eine formalisierte Eigenschaft mit einer freien Variablen $K\,(= (k, +_k, \cdot_k))$. Der Definitionsbereich wird durch eine Formel beschrieben, die aussagt, dass K ein Körper ist.
Um die Korrespondenz aus 1.6 zu erklären, können wir die mathematische Ideee auch folgendermaßen formulieren. Eine Formel dafür, dass drei Mengen V, $+_V$ und $\cdot_V$ einen Vektorraum über einer Menge k mit einer Menge für die Addition $+_k$ und einer Menge für die Multiplikation $\cdot_k$ bilden, entspricht einer formalisierten Eigenschaft (mit drei freien Variablen k, $+_k$, $\cdot_k$), wenn man für x in 1.5 auch mehrere Variablen zulassen würde. Der Definitionsbereich wird nun durch eine Formel gegeben, die beschreibt, dass k mit $+_k$ und $\cdot_k$ einen Körper bilden.

Bemerkung 1.9. Wenn man in der NBG-Mengenlehre arbeitet, kann man im Beispiel 1.8 (g) eine Formel hinschreiben, die genau eine Klasse beschreibt.

Bemerkung 1.10. In der Mathematik verwendet man häufig Formulierungen wie „Sei x ein … (z.B. Monoid). Dann gilt …“ oder „Sei x die … (z.B. direkte Summe von A und B). Dann gilt …“.
Ist nun ϕ die formalisierte Eigenschaft, die den Monoid beschreibt und $\tilde{\phi}$ (zusammen mit einer Formel $\tilde{\psi}$ für den Definitionsbereich) das formalisierte Objekt, welches die direkte Summe von A und B beschreibt und ρ die jeweilige Behauptung, so kann man bei der Übersetzung in Formeln Konstruktionen der Form $\forall x\,(\phi(x) \to \rho(x))$ beziehungsweise $\forall A, B\,(\tilde{\psi}(A, B) \to \forall x\,(\tilde{\phi}(x, A, B) \to \rho(x, A, B)))$ oder $\forall A, B\,(\tilde{\psi}(A, B) \to \exists x\,(\tilde{\phi}(x, A, B) \wedge \rho(x, A, B)))$ verwenden.

Das Existensionalitätsaxiom sichert die Existenz von Elementen einer Menge, wenn die Menge nicht die leere Menge ist. Nun stellt sich die Frage, ob dies auch für formalisierte Eigenschaften und formalisierte Objekte gilt.

Frage 1.11. Gibt es zu jeder formalisierten Eigenschaft, die nicht die leere Menge beschreibt, ein formalisiertes Objekt derart, dass es diese Eigenschaft besitzt?

Schreibt man dies mit Formeln auf, so bedeutet dies: Sei ϕ eine Formel mit freier Variable x und eventuell weiteren freien Variablen aus $\{y_1, \ldots, y_n\}$ und ψ eine Formel, mit freien Variablen aus $\{y_1, \ldots, y_n\}$, wobei die folgende Formel in ZFC beweisbar sei:

$$\forall y_1, \ldots, y_n\,(\psi(y_1, \ldots, y_n) \to \exists x\,\phi(x, y_1, \ldots, y_n)).$$

Gibt es stets eine Formel $\tilde{\phi}$ mit freier Variable x und eventuell weiteren freien Variablen aus $\{y_1, \ldots, y_n\}$ derart, dass

$$\forall y_1, \ldots, y_n\,(\psi(y_1, \ldots, y_n) \to [(\exists! x\,\tilde{\phi}(x, y_1, \ldots, y_n)) \wedge \forall\,x(\tilde{\phi}(x, y_1, \ldots, y_n) \to \phi(x, y_1, \ldots, y_n))])$$

in ZFC beweisbar ist?

Wir wollen die Fragestellung noch für den Spezialfall aufschreiben, wenn keine weiteren freien Variablen auftauchen und ϕ eine Menge beschreibt.

Frage 1.12. Sei ϕ eine Formel mit freier Variablen x derart, dass folgende Formel gilt:

$$\exists y\,(\forall x\,(\phi(x) \leftrightarrow x \in y) \wedge y \neq \emptyset).$$

Gibt es stets eine Formel $\tilde{\phi}(x)$ derart, dass

$$(\exists! x\, \tilde{\phi}(x)) \wedge \forall x\,(\tilde{\phi}(x) \to \phi(x))$$

in ZFC beweisbar ist?

Bereits die letzte Fragestellung muss negativ beantwortet werden. Eine ähnliche Fragestellung wird in der Modelltheorie unter dem Begriff „definierbar" behandelt.

Definition 1.13. Eine Menge $M \in \mathfrak{A}$ eines Modells $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, f)$ heißt *definierbar*, wenn es eine Formel $\phi(x)$ derart gibt, dass $\phi(x)^{\mathfrak{I}}$ genau dann wahr ist, wenn M eingesetzt wird.

Antwort zu 1.12 (und 1.11). Nach [Mos][S.250] gibt es ein Modell $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, f)$ von ZFC derart, dass keine Wohlordnung der Potenzmenge der natürlichen Zahlen $P(\mathbb{N})$ definierbar ist. Nach dem Wohlordnungssatz gibt es eine Wohlordnung von $P(\mathbb{N})$, das heißt man kann die Formel $\exists x\,(\phi(x))$ beweisen, wobei $\phi(x)$ eine Formel dafür ist, dass x eine Wohlordnung von $P(\mathbb{N})$ ist. Gäbe es nun jedoch eine Formel $\tilde{\phi}(x)$, welche genau eine Wohlordnung von $P(\mathbb{N})$ beschreibt, dann würde $\tilde{\phi}$ auch genau eine Menge in $\mathfrak{A}$ beschreiben, welche eine Wohlordnung von $P(\mathbb{N})$ ist. Dann hätten wir jedoch eine definierbare Wohlordnung von $P(\mathbb{N})$ in $\mathfrak{I}$ gefunden. Wir erhalten einen Widerspruch. Demnach müssen 1.12 und 1.11 negativ beantwortet werden. □

Es wird ein zentraler Punkt dieser Arbeit sein, die Frage für einige Beispiele positiv beantworten zu können. Wir beschäftigen uns damit in Kapitel 3.

1.2 Aufbau der Mathematik und Auswahlen

In diesem Abschnitt wollen wir andeuten wie man aus den Axiomen der Mengenlehre die Mathematik aufbauen kann. Außerdem werden wir darauf eingehen, wie sich eine Auswahl bei der Konstruktion eines formalisierten Objekts oder einer formalisierten Eigenschaft auswirkt. Die Definitionen zu Beginn für den Aufbau der Mathematik entnehmen wir aus [Drk][S.21-74].
Wir stellen uns auf den Standpunkt, dass Definitionen nur abkürzende Schreibweisen längerer Formeln sind, in welcher gegebenenfalls Platzhalter für weitere Formeln vorkommen, also keine neuen Symbole der ursprünglichen Sprache hinzugefügt werden und damit die ursprüngliche Sprache nicht verändert wird. Wir nutzen das Zeichen $\equiv$ für die Gleichheit von Formeln und teilweise (unter Missbrauch der Notation) auch das Zeichen $=$, wenn wir nicht betonen wollen, dass es eine Gleichheit von Formeln ist oder informale Schreibweisen nutzen.
Eine elegante Art und Weise eine spezielle Menge zu definieren, ist die beschreibende Symbolik $\{x|\rho(x)\}$. Im Buch von Drake [Drk][S.3-7] und dem Skript [Ivo][S.24, 67-69] wird dazu bereits in der Sprache der Logik diese Symbolik eingeführt, auch wenn darauf verwiesen wird, dass dies nur einen kleinen Unterschied macht. Die Schreibweise führt zu dem Problem, dass es keine Menge y geben muss, für die $\forall x(x \in y \leftrightarrow \rho(x))$ gilt, welches dadurch gelöst wird, dass man dann „$\{x|\rho(x)\} := \emptyset$" setzt.
Wir wollen diese Schreibweise nur verwenden, wenn es sich tatsächlich um eine Menge handelt und nutzen die Schreibweisen:

$$\begin{aligned} y \in \{x|\rho(x)\} &\text{ für } \exists z\,(\forall x\,(x \in z \leftrightarrow \rho(x)) \wedge y \in z) \\ \{x|\rho(x)\} \in y &\text{ für } \exists z\,(\forall x\,(x \in z \leftrightarrow \rho(x)) \wedge z \in y) \\ y = \{x|\rho(x)\} &\text{ für } \exists z(\forall x\,(x \in z \leftrightarrow \rho(x)) \wedge y = z) \\ \text{und } \{x|\rho(x)\} = y &\text{ für } \exists z(\forall x\,(x \in z \leftrightarrow \rho(x)) \wedge z = y). \end{aligned}$$

Es sei dazu bemerkt, dass das Aussonderungsaxiom $(S3)$ die „Existenz von $\{x|\phi(x)\}$" liefert, wenn es Untermenge einer anderen Menge ist.
Wir beginnen nun mit einer Auflistung grundlegender mathematischer Konstruktionen.

Beispiel/Definition 1.14. (Mengen) Sind x und y zwei Mengen, so definieren wir

$$x \cup y :\equiv \{z | z \in x \vee z \in y\}.$$

Der Ausdruck der rechten Seite bildet eine Menge, da nach dem Paarmengenaxiom ($S5$) „$\{x, y\}$" existiert und nach dem Vereinigungsaxiom ($S7$) folglich auch die Menge $x \cup y$ wie gewünscht existiert.
Auch das Definieren einer Menge durch das Aufzählen ihrer Elemente ist wegen wiederholtem Anwenden vom Paarmengenaxiom ($S5$) und Vereinigung der Mengen möglich und wir schreiben

$$\{x_1, \ldots, x_n\} :\equiv \{z | z = x_1 \vee \cdots \vee z = x_n\}.$$

Wir definieren das *geordnete Paar* (*Kuratowski-Paar*)

$$(x, y) :\equiv \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

und induktiv *Tupel* durch

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) :\equiv ((x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}).$$

In ausführlicheren Formeln ist das geordnete Paar:

$$\{z | (\exists z_1 ((\forall x_1 (x_1 \in z_1 \leftrightarrow x_1 = x)) \wedge z_1 = z)) \vee (\exists z_2 ((\forall x_2 (x_2 \in z_2 \leftrightarrow x_2 = x \vee x_2 = y)) \wedge z_2 = z))\}$$

Das Potenzmengenaxiom ($S6$) ermöglicht es zu jeder Menge x seine *Potenzmenge* $P(x)$ zu definieren. Das Vereinigungsaxiom ($S7$) ermöglicht auch das Vereinigen von unendlich vielen Mengen, wenn diese genau die Elemente einer Menge sind und wir schreiben

$$\bigcup x :\equiv \{z | \exists y (z \in y \wedge y \in x)\}.$$

Das Produkt von Mengen

$$x \times y :\equiv \{z | \exists u, v (u \in x \wedge v \in y \wedge z = (u, v))\}$$

ist wohldefiniert, denn es ist Untermenge von $P(P(x \cup y))$. Wir nutzen die Abkürzungen $\forall x \in y\,(...)$ und $\exists x \in y\,(...)$ für $\forall x\,(x \in y \rightarrow (...))$ und $\exists x\,(x \in y \wedge (...))$.

Aufbauend auf diesen Grundlagen kommen wir zu dem Begriff der Funktion.

Beispiel/Definition 1.15. (Funktionen) Eine (zweistellige) *Relation* ist eine Menge r, für welche

$$Rel(r) :\equiv \forall x \in r\, \exists y, z\, (x = (y, z))$$

gilt und wir schreiben yrz wenn $(y, z) \in r$.
Eine *Funktion* ist eine Relation f mit

$$Fkt(f) :\equiv Rel(f) \wedge \forall x (\forall y_1, y_2 ((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2)).$$

Zu einer Funktion lassen sich *Definitions-* und *Wertebereich* definieren, welche wir mit $Def(f)$ und $Wb(f)$ bezeichnen. Wir schreiben

$$f : x \rightarrow y :\equiv Fkt(f) \wedge Def(f) = x \wedge Wb(f) \subseteq y$$

und im Fall $Wb(f) = y$ ist $f : x \rightarrow y$ eine *Surjektion* ($f : x \twoheadrightarrow y :\equiv f : x \rightarrow y \wedge Wb(f) = y$). Ist f eine Funktion mit Definitionsbereich x, so schreiben wir f auch als *Familie* $(a_i)_{i \in x}$.

Bemerkung 1.16. Man möchte auch gerne von Relationen sprechen, die keine Mengen bilden, wie zum Beispiel bei der Elementrelation $\in$. Arbeiten wir mit der NBG-Mengenlehre, so können wir die Klasse aller Paare von Mengen (x, y) mit $x \in y$ bilden. Insofern können wir dieses Problem erneut lösen.
Verwenden wir den Klassenbegriff, den Ivorra für die ZFC-Mengenlehre nutzt (siehe 1.4), so ist eine Relation eine Formel mit zwei ausgezeichneten freien Variablen, wobei nach Einsetzen die Gültigkeit der Formel der Gültigkeit der Relation entspricht. Wir werden diese Sichtweise in 1.27 und 1.29 verwenden.

Wir werden in den folgenden beiden Beispielen die natürlichen Zahlen nutzen, die wir erst im nächsten Abschnitt einführen. Für den Rest des Abschnitts greifen wir nicht mehr auf [Drk] zurück. Die verwendeten mathematischen Objekte sind allgemein bekannt.

Beispiel/Definition 1.17. (Monoide) Eine *(zweistellige) Operation* auf einer Menge M ist eine Funktion

$$Op_M(f) :\equiv f : M \times M \to M.$$

Für Ausdrücke der Form $f(a, b) = x$ und $f(f(a, b), c) = x$ haben wir die Ausdrücke $(a, b)fx$ und $\exists y\, ((a, b)fy \wedge (y, c)fx)$, welche entsprechend für kompliziertere Ausdrücke veralgemeinert werden. Eine Operation f auf M heißt *assoziativ*, wenn

$$Ass_M(f) :\equiv \forall a, b, c \in M((f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))))$$

gilt und f heißt *kommutativ*, wenn

$$Komm_M(f) :\equiv \forall a, b \in M(f(a, b) = f(b, a))$$

gilt.
e heißt *neutrales Element* der Operation f, wenn

$$Neutr_{M,f}(e) :\equiv e \in M \wedge \forall x \in M(f(x, e) = x \wedge f(e, x) = x).$$

Ein Paar $(M, \circ)$ heißt *Monoid*, wenn $\circ$ eine assoziative Operation auf M mit neutralem Element ist. In Formeln bedeutet dies:

$$Mon(x) :\equiv \exists M, \circ\, (x = (M, \circ) \wedge \circ : M \times M \to M \wedge Ass_M(\circ) \wedge \exists e(Neutr_{M,\circ}(e))).$$

Monoide besitzen ein eindeutiges neutrales Element. Wir definieren nun induktiv eine Abbildung $f : \mathbb{N} \times M \to M$, wobei wir hier bereits auf die natürlichen Zahlen vorgreifen. Es sei $f(0, m) := e$ und $f(n + 1, m) := f(n, m) \circ m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in M$. Nun heißt $\circ$ *torsionsfrei*, wenn gilt

$$Torsfr_M(\circ) :\equiv \forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in M\, \forall e\, (Neutr_{M,\circ}(e) \to (f(n, m) = e \to (n = 0 \vee m = e))).$$

Die Gleichung $f(n, m) = e$ ist dabei mittels einer Konstruktion aus 1.10 zu interpretieren, um die Definition von f hier „einzubinden“. Im konkreten Fall wäre zum Beispiel die Formel $\forall f\, (\phi(f) \to (n, m)fe)$, wobei ϕ die Funktion f eindeutig beschreibt, möglich.

Das nächste Beispiel soll illustrieren, dass die ganzen und rationalen Zahlen als konkrete Mengen aufgefasst werden können. Wir werden nun weniger auf die Umsetzung in Formeln eingehen.

Beispiel/Definition 1.18. (Ganze und rationale Zahlen) Wir betrachten Paare natürlicher Zahlen (n, m) und die Äquivalenzrelation $(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \leftrightarrow n_1 + m_2 = m_1 + n_2$ und bezeichnen

$$\mathbb{Z} \equiv {}^{\{(n,m)|n,m\in\mathbb{N}\}}/_{\sim} :\equiv \{x | \exists y\, (y \in x \wedge y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \sim y))\}$$

als *Menge der ganzen Zahlen*. Wir definieren eine Addition auf $\mathbb{Z}$ durch

$$[(n_1, m_1)] + [(n_2, m_2)] := [(n_1 + n_2, m_1 + m_2)]$$

und eine Multiplikation durch

$$[(n_1, m_1)] \cdot [(n_2, m_2)] := [(n_1 n_2 + m_1 m_2, n_1 m_2 + n_2 m_1)].$$

Dies ist wohldefiniert. Wir schreiben auch $-n := [(0, n)]$, wenn $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Wir betrachten nun Paare ganzer Zahlen (a, b), wobei b von der Form $[(n, 0)]$ mit $n \neq 0$ sei. Wir definieren auf der Menge solcher Paare eine Äquivalenzrelation $\sim$ über $(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow ad = bc$ und bezeichnen die Menge

$$\mathbb{Q} :\equiv {}^{\{(a,b)|a,b\in\mathbb{Z}\wedge\exists n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}(b=(n,0))\}}\!/_{\sim}$$

als *Menge der rationalen Zahlen*. Wir definieren wieder eine Addition und eine Multiplikation durch

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + cb, cd)]$$

und

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ab, cd)] \,.$$

Wir führen nun einen neuen Begriff ein, der hilfreich ist, um über Auswahlen bei Konstruktionen reden zu können. Man stelle sich dazu die Menge $\{y_1, \ldots, y_n\} \setminus V$ als Menge von Variablen vor, die ungewünschten Auswahlen entsprechen. Wir werden die Definition an Beispielen erläutern.

Definition 1.19. Wir nennen eine formalisierte Eigenschaft, beschrieben durch ϕ mit ausgezeichneter freier Variable x zusammen mit $\{y_1, \ldots, y_n\}$ und gegebenenfalls einer Formel ψ für den Definitionsbereich, *speziestheoretisch bezüglich einer Teilmenge* $V \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}$, falls $V = \{y_1, \ldots, y_n\}$ gilt. Wir sagen auch, dass die formalisierte Eigenschaft speziestheoretisch *in Abhängigkeit von* $y_1, \ldots, y_n$ ist. Falls die freien Variablen der Konstruktion aus dem Kontext zu erkennen sind, so nennen wir ϕ auch einfach *speziestheoretisch*.

Bemerkung 1.20. Bei formalisierten Eigenschaften kommt man recht einfach von einer nicht-speziestheoretischen Beschreibungen zu einer speziestheoretischen Beschreibung. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V = \{y_1, \ldots, y_m\}$ mit $m < n$. Setzen wir nun

$$\tilde{\psi} :\equiv \exists y_{m+1}, \ldots, y_n \, \psi \text{ und } \tilde{\phi} :\equiv \exists y_{m+1}, \ldots, y_n \, (\psi \wedge \phi),$$

so haben wir eine speziestheoretische Beschreibung mit $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\psi}$. Dies ist so zu verstehen, dass dieser Übergang im konkreten Beispiel Sinn ergibt. Will man nämlich eine Eigenschaft einer Menge überprüfen und hat dabei unnötige Auswahlen getroffen, so sollte die Eigenschaft gültig sein, wenn eine geeignete Auswahl existiert, für welche die Eigenschaft der Menge erfüllt ist. Bei dem Übergang gehen jedoch formalisierte Objekte möglicherweise in formalisierte Eigenschaften über, welche keine formalisierten Objekte sind.
Andererseits kommt man einfach von einer formalisierten Eigenschaft zu einem formalisierten Objekt, wenn man nicht voraussetzt, dass das Objekt speziestheoretisch in Abhängigkeit von den gleichen Variablen ist - man also Variablen hinzufügen darf. Sei dazu eine formalisierte Eigenschaft mit ϕ und Beschreibung des Definitionsbereichs ψ gegeben. Definiere nun

$$\tilde{\psi} :\equiv \psi \wedge \phi(\tilde{x}, y_1, \ldots, y_n) \text{ und } \tilde{\phi} :\equiv (x = \tilde{x}).$$

Nun bilden $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\psi}$ ein formalisiertes Objekt mit der gegebenen formalisierten Eigenschaft bezüglich der Variable x und der Variablenmenge $V = \{y_1, \ldots, y_n, \tilde{x}\}$, da das Objekt hier schon im Definitionsbereich ausgewählt wird. In dieser Hinsicht war es wesentlich bei den Fragen 1.11 und 1.12 als Variablenmenge wieder die gleiche Menge zu nehmen und den Definitionsbereich nicht zu ändern.

Wir wollen nun konkrete Beispiele betrachten. Dabei ist stets eine formalisierte Eigenschaft implizit gegeben (z.B. durch eine universelle Eigenschaft) und man sucht wie in 1.11 ein formalisiertes Objekt, welches speziestheoretisch in den gleichen Variablen wie die formalisierte Eigenschaft ist.

Beispiel/Definition 1.21. (Tensorprodukt) Sei k ein Körper und seien V und W zwei k-Vektorräume der endlichen Dimensionen n und m. Wir wählen Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ von V und $B_W = (w_1, \ldots, w_m)$ von W und erhalten Vektorräume mit Basen (V, B_V) und (W, B_W). Das Tensorprodukt $(V, B_V) \otimes (W, B_W)$ sei definiert als die Menge der formalen Summen

$$\sum_{i,j} a_{ij}(v_i \otimes w_j)$$

mit $a_{ij} \in k$ zusammen mit komponentenweiser Addition und skalaren Multiplikation und Basis

$$(v_i \otimes w_j)_{i\in\{1,\ldots,n\}, j\in\{1,\ldots,m\}}.$$

Wir haben die bilineare Abbildung

$$(V, B_V) \times (W, B_W) \to (V, B_V) \otimes (W, B_W),$$

die von $(v_i, w_j) \mapsto v_i \otimes w_j$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ induziert wird. Diese Definition hängt von der Wahl der Basen ab und man erhält damit kein formalisiertes Objekt, welches nur von V und W abhängt. Es ist also nicht speziestheoretisch in Abhängigkeit von k, V und W.
Alternativ betrachten wir den freien Vektorraum über dem kartesischen Produkt $V \times W$ mit der Äquivalenzrelation $\sim$, welche von den Relationen

$$(v_1+v_2, w) \sim (v_1, w)+(v_2, w), (v, w_1+w_2) \sim (v, w_1)+(v, w_2), a(v, w) \sim (av, w) \text{ und } a(v, w) \sim (v, aw)$$

mit $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ und $a \in k$ induziert wird. Wir definieren $V \otimes W$ als Vektorraum, der durch Rausteilen des von $\sim$ induzierten Unterraums $[0]_\sim$ entsteht und wir haben die bilineare Abbildung

$$V \times W \to V \otimes W, (v, w) \mapsto [(v, w)]_\sim.$$

Der entstehende Vektorraum ist isomorph zum oben definierten Vektorraum und hängt nicht von einer Auswahl ab. Man erhält ein formalisiertes Objekt in Abhängigkeit von Vektorräumen V und W. Die Konstruktion ist demnach speziestheoretisch (in Abhängigkeit von k, V und W).

Bemerkung 1.22. Überlegt man sich, wie man die Konstruktion mit der Wahl von Basen in Formeln aufschreiben würde, so führt man freie Variablen für die Basen ein. Wir übersetzen also „Wir wählen Basen B_V von V und B_W von W, …“ mit $Basis(V, B_V) \wedge Basis(W, B_W) \wedge \phi$, wobei $Basis(V, x)$ eine Formel dafür ist, dass x eine Basis von V ist und ϕ (mit freien Variablen für V, B_V, W, B_W, k und das Tensorprodukt mit Basis sowie die bilineare Abbildung) die weitere Konstruktion des Tensorprodukts beschreibt. Die Frage ist nun, wie über B_V und B_W quantifiziert werden sollte, um auf ein formalisiertes Objekt ohne freie Variablen B_V und B_W zu kommen.

- Angenommen wir wählen den Allquantor im Sinne von „Für alle Basen B_V und B_W gilt …“. Damit diese Anwendung des Allquantors Sinn ergibt, muss die Quantifikation alle späteren Verwendungen des Tensorprodukts beinhalten. Es ergibt nämlich keinen Sinn, wenn man

  $$(\forall B_V, B_W\ (Basis(V, B_V) \wedge Basis(W, B_W) \wedge \phi)) \to \psi$$

  schreibt und die freie Variable des Tensorprodukts in ψ verwendet. Die Anwendung des Allquantors muss somit von der Konstruktion des Tensorprodukts getrennt werden, wenn man das Tensorprodukt verwenden will.

- Bei der Verwendung des Existenzquantors im Sinne von „Es existieren Basen B_V und B_W derart, dass … gilt“ gibt es dies Problem nicht, denn die Formel

  $$(\exists B_V, B_W\ (Basis(V, B_V) \wedge Basis(W, B_W) \wedge \phi)) \to \psi$$

  ergibt in dem Kontext Sinn. Allerdings kommen wir dann in der Beschreibung auf eine formalisierte Eigenschaft.

Wir erhalten also bei beiden Quantoren kein formalisiertes Objekt, welches nicht von B_V und B_W abhängt.
Lang spricht in [Lan2][S.601-604] bei seiner Definition von „einem" und von „dem" Tensorprodukt (im allgemeineren Fall vom Tensorprodukt von Moduln über Ringen). Dabei steht „das Tensorprodukt" dafür, das Konstrukt der speziellen Konstruktion, welche nicht von Auswahlen abhängt, zu sein und „ein Tensorprodukt" dafür, die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts zu erfüllen, also isomorph zu „dem Tensorprodukt" zu sein. Diese Eigenschaft ist die hier implizit gegebene formalisierte Eigenschaft, zu welcher das formalisierte Objekt gesucht wird.

Beispiel/Definition 1.23. (Produkt von Schemata) Seien A, B, R (kommutative) Ringe (mit 1), wobei A und B zwei R-Algebren seien, und $X := Spec\, A$, $Y := Spec\, B$ und $S := Spec\, R$ ihre affinen Schemata. Dann erfüllt $Spec\,(A \otimes_R B)$ zusammen mit den von $A \to A \otimes_R B$ und $B \to A \otimes_R B$ induzierten Morphismen die universelle Eigenschaft des Faserprodukts der Schemata X, Y über S [Har][S.87-88]. Sind nun X und Y zwei beliebige Schemata über einem Schema S. Dann konstruiert Hartshorne [Har][S.87-88] das Faserprodukt $X \times_S Y$ mittels affiner Überdeckungen der Schemata, der Anwendung der Faserproduktkonstruktion für affine Schemata und Verkleben dieser Schemata, um ein Schema zu erhalten, welches die Faserprodukteigenschaft erfüllt. Diese Konstruktion hängt von der Wahl der Überdeckungen ab und bildet kein formalisiertes Objekt, welches nur von X und Y abhängt. Wählt man als Überdeckungen stets die feinste Überdeckung, so erhält man eine Konstruktion, welche nicht von Wahlen abhängt und damit ein formalisiertes Objekt bildet, welches speziestheoretisch (in X, Y und S) ist.

Der algebraische Abschluss eines Körpers ist nicht durch eine universelle Eigenschaft beschrieben. Allerdings kann man eine Formel aufschreiben, welche prüft, ob eine Körpererweiterung ein algebraischer Abschluss ist.

Beispiel/Definition 1.24. (Algebraischer Abschluss eines Körpers) Wir können ähnlich wie die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen, auch die reellen und komplexen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen beziehungsweise als Paare reeller Zahlen definieren. Dann sind die komplexen Zahlen ein algebraischer Abschluss der reellen Zahlen, der speziestheoretisch (bezüglich der leeren Menge) ist.
Sei nun k ein beliebiger Körper. Wir können zu jedem Polynom $f \in k[x]$ mit $deg(f) > 0$ eine Variable $X_f := f$ zuordnen und erhalten durch Adjunktion aller dieser Variablen einen Ring $k[X_f]_{deg(f)>1}$. Nun haben wir das Ideal $\mathfrak{I}$, welches von $\{f(X_f)|deg(f) > 1\}$ erzeugt wird. Man kann zeigen, dass dies nicht das Einheitsideal ist und jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{I}$ mittels

$$k[X_f]_{deg(f)>1}/\mathfrak{m}$$

und der natürlichen Inklusion einen algebraischen Abschluss von k ergibt. Nun ist diese Konstruktion nicht speziestheoretisch in k, da die Konstruktion auch von der Wahl von $\mathfrak{m}$ abhängt.

Bemerkung 1.25. Bei den Beispielen sind zum Nachweis dafür, dass die Konstruktion mit freien Variablen funktioniert, zweimal das Auswahlaxiom notwendig (zur Existenz der Basis und des maximalen Ideals) und in dem anderen Fall der Schemata ist es axiomatisch vorausgesetzt, dass die Überdeckung existiert, welches im speziellen Fall meist durch eine konkrete Überdeckung gelöst werden kann. Es ergibt sich die Frage, ob bei Konstruktionen, die nicht speziestheoretisch gefasst werden können und bei denen die Existenz nicht nur postuliert wird, immer das Auswahlaxiom verwendet wird.
Betrachtet man die ZFC-Axiome näher, so stellt man fest, dass auch beim Fundierungsaxiom die Existenz einer Menge postuliert wird, welche nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt sein muss. (Eigentlich müsste hier auch das Unendlichkeitsaxiom aufgeführt werden, aber aus diesem können wir die Existenz der natürlichen Zahlen folgern, welche dann eine eindeutig bestimmte Menge ist, welche das Unendlichkeitsaxiom erfüllt.)
Die alleinige Verwendung des Auswahlaxioms beim Nachweis ein formalisiertes Objekt zu sein, führt jedoch nicht zwangsläufig zu einem Objekt, welches weitere freie Variablen beinhalten muss, wie das triviale Beispiel $\psi \to (x = 0)$, wobei ψ die Formel für das Auswahlaxiom ist, zeigt.

1.3 Ordinalzahlen und Kardinalzahlen

Wir führen nun Ordinal- und Kardinalzahlen ein und nutzen dafür das Buch von Drake [Drk][S.21-74], aus welchem, soweit nicht anders erwähnt, sowohl die Definitionen stammen, als auch die hier genannten Aussagen.

Definition 1.26. Eine Menge x heißt

- *transitiv*, wenn die Elemente der Mengen, die Elemente von x sind, auch Elemente von x sind.
$$Trans(x) :\equiv \forall y, z\,(y \in z \wedge z \in x \rightarrow y \in x)$$
- *zusammenhängend*, wenn bei zwei verschiedenen Elementen von x eines der beiden ein Element des Anderen ist.
$$Zus(x) :\equiv \forall y, z\,(y \in x \wedge z \in x \rightarrow y \in z \vee y = z \vee z \in y)$$
- *Ordinalzahl*, wenn sie transitiv und zusammenhängend ist.
$$Ord(x) :\equiv Trans(x) \wedge Zus(x)$$

Es ergibt sich, dass $\emptyset$ eine Ordinalzahl ist und mit jeder Ordinalzahl x auch $x \cup \{x\}$ eine Ordinalzahl ist. Weiterhin gilt für zwei Ordinalzahlen x und y stets entweder $x \in y$, $y \in x$ oder $x = y$.

Definition 1.27. Die Elementrelation induziert damit offensichtlich Ordnungsrelationen $<$ und $\leq$ auf den Ordinalzahlen und bei Verwendung mit anderen Mengen liefern die Relationen per Definiton eine falsche Aussage.

$$x < y :\equiv Ord(x) \wedge Ord(y) \wedge x \in y, \quad x \leq y :\equiv Ord(x) \wedge Ord(y) \wedge (x \in y \vee x = y)$$

Wir definieren die *Null* durch $0 :\equiv \emptyset$ und die *Nachfolgerzahl* einer Ordinalzahl n durch

$$n + 1 :\equiv n \cup \{n\}$$

und führen die Abkürzungen $1 :\equiv \{\emptyset\} \equiv \{0\}$, $2 :\equiv \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \equiv \{0, 1\}$, $3 :\equiv \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \equiv \{0, 1, 2\}$, ..., $n :\equiv \{0, 1, \ldots, (n-1)\} \ldots$ ein.
Wir schreiben $Suc(x)$, wenn x eine Nachfolgerzahl ist oder $x = 0$ gilt. Ist x eine Ordinalzahl und gilt nicht $Suc(x)$, so nennen wir x *Limeszahl* und schreiben $Lim(x)$. Gilt $Suc(x)$ und gilt für alle $y < x$ ebenfalls $Suc(y)$, so schreiben wir $Int(x)$ und nennen x eine *natürliche Zahl.*

$$Suc(x) :\equiv x = 0 \vee \exists n\,(Ord(n) \wedge x = n + 1)$$
$$Lim(x) :\equiv Ord(x) \wedge \neg Suc(x)$$
$$Int(x) :\equiv Suc(x) \wedge \forall y\,(y < x \rightarrow Suc(y))$$

Aus den Axiomen der Mengenlehre lässt sich ableiten, dass eine Menge existiert, welche genau die natürlichen Zahlen enthält und dass für diese Menge das Prinzip der vollständigen Induktion gilt.

Definition 1.28. Wir schreiben für die *Menge der natürlichen Zahlen.*

$$\mathbb{N} :\equiv \{x \mid Int(x)\}$$

Definition 1.29. Eine Relation R (im Sinne einer Formel $\phi(x, y)$ für xRy) heißt *wohlfundiert*, wenn jede nicht-leere Menge x ein minimales Element x_0 bezüglich R besitzt (d.h. $\forall y\,(y \in x \wedge y \neq x_0 \rightarrow x_0 Ry))$ und jede Menge x zu einer Menge $x_{abg} \supseteq x$ erweitert werden kann, welche R-abgeschlossen ist, also für jede Menge y mit yRx_{abg} stets $y \in x_{abg}$ gilt.

$$\forall x\, \exists x_{abg}\, \forall y\,(yRx_{abg} \rightarrow y \in x_{abg})$$

Über wohlfundierte Relationen kann man transfinite Induktion zum Beweisen von Aussagen verwenden. Das *Prinzip der transfiniten Induktion* besagt dann, dass eine Aussage $\psi(x)$ für alle x gilt, wenn man die Aussage

$$\forall x\,(\forall y\,(yRx \to \psi(y)) \to \psi(x))$$

zeigt. In ähnlicher Weise ermöglicht dies die Definition neuer Begriffe. Die Relationen $\in$ und $<$ sind wohlfundiert. Wir können demnach transfinite Induktion bei Ordinalzahlen anwenden, indem wir die Aussage (bzw. Definition) für 0, jede Nachfolgerzahl und jede Limeszahl nachweisen (bzw. hinschreiben). Wir können so auf den Ordinalzahlen eine Addition durch

$$\alpha + 0 := \alpha,\ \alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1 \text{ und } \alpha + \lambda := \bigcup \{\alpha + \delta \,|\, \delta < \lambda\}$$

für Ordinalzahlen α, β, δ und Limeszahlen λ definieren. Wir erhalten per transifiniter Induktion über $\in$ auch die Definition des Ranges einer Menge.

Definition 1.30. Der *Rang einer Menge* x wird definiert durch $\rho(x) := \bigcup \{\rho(y) + 1 \,|\, y \in x\}$.

Weiterhin definieren wir nun die Von-Neumann-Hierarchie, welche Mengen nach ihrem Rang zusammenfasst und später von Bedeutung sein wird.

Definition 1.31. Die *Von-Neumann-Hierarchie* ordnet mit transfiniter Induktion jeder Ordinalzahl eine Menge in folgender Weise zu:

$$\psi(\beta) := \bigcup \{P(\psi(\gamma)) \,|\, \gamma < \beta\}\,.$$

Wir wollen an dieser Stelle (abweichend von [Drk]) noch eine Verallgemeinerung der Von-Neumann-Hierarchie einführen, da wir diese später benötigen werden. Die Verallgemeinerung soll nicht nur eine „Hierarchie von Mengen“ aus der leeren Menge aufbauen, sondern auch beliebige Mengen als Grundmengen besitzen können. (Man will also eine Art Von-Neumann-Universum mit mehreren „Urelementen“ in ZFC erzeugen.) Dabei tritt das Problem auf, dass zum Beispiel für die Grundmenge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ die Menge $\{\emptyset\}$ zwei Bedeutungen hat, da sie sowohl als Urelement als auch als Menge, die das Urelement $\emptyset$ enthält, aufgefasst werden kann. Deswegen muss man in der Konstruktion dafür sorgen, dass man in den einzelnen Hierarchiestufen disjunkte Vereinigungen erhält.

Definition 1.32. Die *Von-Neumann-Hierarchie* bezüglich einer Menge A ordnet mit transfiniter Induktion jeder Ordinalzahl eine Menge in folgender Weise zu:

$$\psi_A(0) := A \times \{0\}\,,$$

$$\psi_A(\beta + 1) := \psi_A(\beta) \cup \{x | x \subseteq \psi_A(\beta) \wedge \forall\, \alpha < \beta\, \exists \gamma > \alpha\, \exists y, z\,(y \in x \wedge y = (z, \gamma))\} \times \{\beta + 1\}\,,$$

$$\psi_A(\gamma) := \bigcup \{\psi_A(\gamma) | \gamma < \beta\}\,, \text{ falls } \gamma \text{ Limeszahl ist.}$$

Ist $f : A \to B$, so können wir ebenso eine Abbildung $f_\beta : \psi_A(\beta) \to \psi_B(\beta)$ mittels

$$f_0 := f \times \{0\}\,, f_{\beta+1}|_{\psi_A(\beta)} := f_\beta,$$

$$f_{\beta+1}(x) := \{y | \exists z \in x\, \exists u, v\,(z = (u, \beta + 1) \wedge v \in u \wedge f_\beta(v) = y)\} \times \{\beta + 1\}\,, \text{ falls } x \notin \psi_A(\beta),$$

$$f_\gamma(x) := f_\beta(x) \text{ falls } \gamma \text{ Limeszahl ist, } \beta < \gamma \text{ und } x \in \psi_A(\beta)$$

definieren.

Bemerkung 1.33. Man stelle sich die Definition nun im Hintergrund folgender Korrespondenzen vor. Wir nutzen dafür die Grundmenge $A = \{a, b, c\}$ mit drei Mengen a, b, c.

- $(a, 0)$ entspricht der Menge a
- $(\{(a, 0)\}, 1)$ entspricht der Menge $\{a\}$

- $(\{(a,0),(b,0)\},1)$ entspricht der Menge $\{a,b\}$
- $(\{(a,0),(c,0),(\{(a,0),(b,0)\},1)\},2)$ entspricht der Menge $\{a,c,\{a,b\}\}$

Man lässt bei der Entsprechung also alle Ordnungszahlen und Paarbildungen einfach weg.

Beispiel 1.34. Ist wieder $A=\{a,b,c\}$ mit drei Mengen a,b,c, so ergibt sich

$$\psi_A(0)=\{(a,0),(b,0),(c,0)\},$$

$\psi_A(1)$ enthält zum Beispiel die Mengen

$$(a,0),\ (\{(a,0)\},1),\ (\{(a,0),(b,0)\},1) \text{ und } (\{(a,0),(b,0),(c,0)\},1)$$

und $\psi_A(2)$ unter anderem die Mengen von $\psi_A(1)$ und

$$(\{(a,0),(c,0),(\{(a,0),(b,0)\},1)\},2).$$

Jedoch enthält $\psi_A(1)$ nicht die Menge $(\{(b,0),(c,0)\},2)$, da die Menge der linken Seite des Paares keine Menge aus $\psi_A(1)$ enthält. Im Hinblick auf die vorherige Bemerkung ist dies in der Definition so realisiert wurden, da die zugehörige Menge von $(\{(b,0),(c,0)\},1)$ dargestellt wird.
Ist B die Menge $\{x,y\}$ für zwei Mengen x, y und $f:A\to B$ die Abbildung, die durch $a\mapsto x, b\mapsto y, c\mapsto x$ definiert ist, so wird mittels f_2

$$(\{(a,0),(c,0),(\{(a,0),(b,0)\},1)\},2) \text{ auf } (\{(x,0),(\{(x,0),(y,0)\},1)\},2)$$

abgebildet.

Die Abbildungen, die mit den verallgemeinerten Von-Neumann-Hierarchien definiert wurden, können nun als Verallgemeinerung von bekannten Abbildungen aufgefasst werden.

Beispiel 1.35. Seien A, B, C und D Mengen, wobei A und B und C und D disjunkt seien, sowie $\phi:A\to C$ und $\psi:B\to D$ Abbildungen. Wir haben nun die Abbildung $\phi\times\psi:A\times B\to C\times D$. Dies kann auch mit Hierarchien formuliert werden imdem wir $A\times B$ mittels

$$\{(\{(\{(a,0)\},1),(\{(a,0),(b,0)\},1)\},2)\,|\,a\in A, b\in B\}$$

als Teilmenge von $\psi_{A\cup B}(2)$ auffassen. Die Abbildung $(\phi\cup\psi)_2$ ($\phi\cup\psi$ ist eine Abbildung der Grundmengen) bildet nun

$$(\{(\{(a,0)\},1),(\{(a,0),(b,0)\},1)\},2)$$

$$\text{auf } (\{(\{(\phi(a),0)\},1),(\{(\phi(a),0),(\psi(b),0)\},1)\},2) \text{ ab.}$$

Diese Menge entspricht dem Element $(\phi(a),\psi(b))$. Die Disjunktheit in der Voraussetzung kann durch $\tilde{A}:=A\times\{0\}$, $\tilde{B}:=B\times\{1\}$, $\tilde{C}:=C\times\{0\}$ und $\tilde{D}:=D\times\{1\}$ erzwungen werden und man kann das Ergebnis wieder zurückübersetzen.

Beispiel 1.36. Seien A und B Mengen mit $\emptyset\notin A,B$ und $\phi:A\to B$ eine Abbildung. Dann haben wir auch eine Abbildung auf den Potenzmengen $P(\phi):P(A)\to P(B)$, welche durch

$$x\mapsto\{y\in B\,|\,\exists a\in x\,(\phi(a)=y)\}$$

bestimmt ist.
Verwenden wir nun $A\cup\{\emptyset\}$ und $B\cup\{\emptyset\}$ als Grundmengen für Von-Neumann-Hierarchien, so können wir die Teilmengen von A als Elemente von $\psi_{A\cup\{\emptyset\}}(1)$ auffassen. Die Abbildung $(\phi\cup id_{\{\emptyset\}})_2$ bildet nun ein Element x von $P(A)$, aufgefasst als $(\emptyset,0)$, falls $x=\emptyset$, beziehungsweise $(\{(y,0)|y\in x\},1)$ sonst, auf die Menge $(\emptyset,0)$ beziehungsweise $(\{(\phi(y),0)|y\in x\},1)$ ab. Diese Menge entspricht nun dem Bild von x unter $P(\phi)$. Die Eigenschaft $\emptyset\notin A,B$ kann auch erzwungen werden.

Während Ordinalzahlen die Ordnung der Zahlen verallgemeinert, wird bei Kardinalzahlen der Begriff der Anzahl verallgemeinert.

Definition 1.37. Zwei Mengen x und y heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Funktion von x nach y gibt. Eine Ordinalzahl x heißt *Anfangszahl*, wenn es keine bezüglich $<$ kleinere Ordinalzahl gibt, welche gleichmächtig zu x ist.

Die Eigenschaft zweier Mengen gleichmächtig zu sein, ist eine Äquivalenzrelation (im Sinne von 1.16). Jede Menge x ist zu einer eindeutig bestimmten Anfangszahl gleichmächtig, welche auch als *Kardinalität der Menge* $|x|$ bezeichnet wird. Wir nennen, aufgrund dieses Kontextes, Anfangszahlen auch *Kardinalzahlen*. Die folgende Definition stammt aus [Kru].

Definition 1.38. Eine Kardinalzahl α heißt *(stark) unerreichbar*, wenn für jede Kardinalzahl $\beta < \alpha$ die Relation

$$2^\beta < \alpha \tag{1.1}$$

mit $2^\beta := |P(\beta)|$ gilt und für jede Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Mengen x_i mit $|x_i| < \alpha$ für alle $i \in I$ und I mit $|I| < \alpha$, stets

$$\left|\bigcup \{x_i | i \in I\}\right| < \alpha \tag{1.2}$$

gilt.

Für unerreichbare Kardinalzahlen α und eine Kardinalzahl β gelten ([Ivo][S.386]):

$$\beta < \alpha \to |\psi(\beta)| < \alpha \tag{1.3}$$

$$\text{sowie } x \in \psi(\alpha) \leftrightarrow x \subseteq \psi(\alpha) \wedge |x| < \alpha. \tag{1.4}$$

Unerreichbare Kardinalzahlen sind Kardinalzahlen, welche mit üblichen mengentheoretischen Konstruktionen nicht erreicht werden können. Im folgenden Kapitel werden wir dies mit dem Begriff des Grothendieck-Universums untermauern.

1.4 Grothendieck-Universen

Definition 1.39. Ein Grothendieck-Universum nach MacLane [McL] ist eine Menge U, welche die folgenden Aussagen erfüllt:

(G_M1) U ist transitiv.

$$Trans(U) \equiv \forall y, z\,(y \in z \wedge z \in U \to y \in U)$$

(G_M2) U enhält die natürlichen Zahlen als Element.

$$\mathbb{N} \in U$$

(G_M3) Ist eine Menge Element von U, so gehört auch ihre Potenzmenge zu U.

$$\forall x\,(x \in U \to P(x) \in U)$$

(G_M4) Ist x ein Element von U, so enthält U die Vereinigung der Mengen, die Elemente von x sind.

$$\forall x\,(x \in U \to \bigcup x \in U)$$

(G_M5) Ist x ein Element und y eine Teilmenge von U, sowie $f : x \to y$ eine Surjektion, so ist y Element von U.

$$\forall x, y, f\,((x \in U \wedge y \subseteq U \wedge f : x \twoheadrightarrow y) \to y \in U)$$

Ein Grothendieck-Universum nach Williams [Wil] ist eine Menge U, welche die folgenden Aussagen erfüllt:

($G_W 1$) Ist eine Menge Element von U, so ist sie auch Teilmenge von U.

$$\forall x\,(x \in U \to x \subseteq U)$$

($G_W 2$) Ist eine Menge Element von U, so gehört auch ihre Potenzmenge zu U.

$$\forall x\,(x \in U \to P(x) \in U)$$

($G_W 3$) Wenn $x \in U$, so ist $\{x\} \in U$.

$$\forall x\,(x \in U \to \{x\} \in U)$$

($G_W 4$) Für jede Familie $(x_i)_{i \in I}$ mit $I \in U$, für welche $x_i \in U$ für alle $i \in I$ gilt, gilt auch

$$\bigcup \{x_i | i \in I\} \in U$$

($G_W 5$) U ist nicht leer.

$$U \neq \emptyset$$

Wenn wir den Begriff Grothendieck-Universum ohne nähere Beschreibung verwenden, so beziehen wir uns auf den Begriff nach MacLane.

Satz 1.40. *Jedes Grothendieck-Universum nach MacLane ist ein Grothendieck-Universum nach Williams. Außerdem ist jedes Grothendieck-Universum nach Williams, welches das Unendlichkeitsaxiom erfüllt, ein Grothendieck-Universum nach MacLane.*

Beweis. Sei zunächst U ein Grothendieck-Universum nach Williams, welches das Unendlichkeitsaxiom erfüllt. Dann gilt:

($G_M 1$): Dies ist ($G_W 1$).

($G_M 2$): Wegen dem Fundierungsaxiom und wiederholter Anwendung von ($G_W 1$) (transfinite Induktion über den Rang) gilt $0 = \emptyset \in U$. Mit ($G_W 3$) folgt $1 = \{\emptyset\} \in U$ und mit ($G_W 2$) folgt $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = P(1) \in U$.
Wir zeigen die Aussage für die restlichen natürlichen Zahlen mit vollständiger Induktion. Nach Induktionsanfang und ($G_W 3$) gelten $n \in U$ und $\{n\} \in U$. Wählen wir diese beiden Mengen in ($G_W 4$) als Elemente einer Familie mit Indexmenge $I = 2$, erhalten wir, dass $n + 1 = n \cup \{n\} \in U$ und mit vollständiger Induktion gilt $n \in U$ für $n \in \mathbb{N}$.
Wegen dem Unendlichkeitsaxiom ($S8$) hat U eine Menge J als Element, welche (mit vollständiger Induktion) die natürlichen Zahlen enthält. Nun können wir von J nach $\mathbb{N}$ eine surjektive Funktion definieren (z.B. $x \mapsto x$, wenn $x \in \mathbb{N}$, $x \mapsto 0$ sonst), welche eine entsprechende Familie induziert. Aus ($G_W 4$) folgt dann die Behauptung.

($G_M 3$): Dies ist ($G_W 2$).

($G_M 4$): Sei $x \in U$. Wir wählen in ($G_W 4$) die Familie, welche durch die Identität $id : x \to x$ induziert wird (die Elemente von x sind Elemente von U wegen ($G_W 1$)) und erhalten dass die Vereinigung der Elemente von x ein Element von U ist.

($G_M 5$): Sei $x \in U$ und $y \subseteq U$ sowie $f : x \to y$ surjektiv. Fassen wir f als Familie $(f(z))_{z \in x}$ auf, so folgt mit ($G_W 4$), dass $y = \bigcup \{f(z) | z \in x\} \in U$.

Sei nun U ein Grothendieck-Universum nach MacLane. Dann gilt:

($G_W 1$): Dies ist ($G_M 1$).

($G_W 2$): Dies ist ($G_M 3$).

(G_W3): Sei $x \in U$. Wir haben die Surjektion $f : 1 \to \{x\}, \emptyset \mapsto x$. Da $1 \in U$ und $\{x\} \subseteq U$ folgt mit (G_M5), dass $\{x\} \in U$.

(G_W4): Sei eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ mit $I \in U$ und $x_i \in U$ für alle $i \in I$ gegeben. Dann ist $\{x_i | i \in I\} \subseteq U$ und die Abbildung $f : I \to \{x_i | i \in I\}, i \mapsto x_i$ surjektiv, sodass wegen (G_M5): $\{x_i | i \in I\} \in U$. Aus (G_M4) folgt nun $\bigcup \{x_i | i \in I\} \in U$.

(G_W5): Dies folgt direkt aus (G_M2).

□

Wir beweisen im Folgenden zwei Sätze, welche Grothendieck-Universen näher beschreiben. Vorher benötigen wir jedoch noch eine Definition aus [Kru].

Definition 1.41. Eine Menge M, deren Elemente mit der ursprünglichen Elementrelation alle Axiome bis eventuell das Unendlichkeitsaxiom erfüllen, heißt ein fast super-vollständiges Modell. Eine Menge, deren Elemente alle Axiome der Mengenlehre erfüllen, heißt ein super-vollständiges Modell.

Der erste Satz stammt mit Beweis ebenfalls aus [Kru].

Satz 1.42. *Für jede Menge U sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) U ist ein Grothendieck-Universum nach Williams

b) Es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl α derart, dass für jede Menge x gilt: $x \in U$ genau dann, wenn $x \subseteq U$ und $|x| < \alpha$

c) U ist ein fast super-vollständiges Modell

Es gilt eine entsprechende Äquivalenz, wenn man „Grothendieck-Universum nach Williams“ durch „Grothendieck-Universum nach MacLane“ ersetzt, man bei der unerreichbaren Kardinalzahl vorraussetzt, dass sie größer als $\omega := |\mathbb{N}|$ ist und man „fast super-vollständiges Modell“ durch „super-vollständiges Modell“ ersetzt.

Beweis. Es gelte a). Sei α die kleinste Kardinalzahl γ für welche $|x| < \gamma$ für jedes $x \in U$ gilt, welche existiert, da die Kardinalzahlen wohlgeordnet sind. Sei nun $\beta < \alpha$ eine Kardinalzahl. Demnach existiert eine Menge $x \in U$ mit $\beta < |x|$. Wegen $(G_W2)_U$ gilt $P(x) \in U$ und damit $2^\beta < 2^{|x|} < \alpha$, welches die Beziehung (1.1) ist. Analog folgt aus $(G_W4)_U$, dass α die zweite Eigenschaft (1.2) für unerreichbare Kardinalzahlen erfüllt und damit tatsächlich unerreichbar ist. Ist $x \in U$, so gilt wegen $(G_W1)_U$ auch $x \subseteq U$ und nach Definition von α gilt $|x| < \alpha$. Ist $\emptyset \neq x \subseteq U$ und $|x| < \alpha$, so existiert eine Menge $I \in U$ mit $|x| \leq |I|$ und damit eine Surjektion $f : I \to x$. Wegen $(G_M5)_U$ gilt $x \in U$. Weiter gilt $\emptyset = 0 \in U$. Also folgt b).
Es gelte nun b). Da aus $x \in U$ direkt $x \subseteq U$ folgt, geht die Eigenschaft (einer Menge) Element einer Menge zu sein von der Mengenlehre M auf die Menge U über. Das Extensionalitätsaxiom $(S1)_U$ und das Fundierungsaxiom $(S2)_U$ folgen dann direkt. Zum Nachweis der anderen Eigenschaften für U nutzen wir stets die entsprechende Eigenschaft von M und müssen nun nur zeigen, dass die Menge wieder in U liegt. Wir nutzen dafür die Voraussetzung b) in der Form $x \subseteq U \wedge |x| < \alpha \to x \in U$ und müssen nur beachten, dass die Kardinalität von dem betrachteten x nicht überschritten wird, da $x \subseteq U$ für die betrachteten x stets klar ist. Das Aussonderungsaxiom $(S3)_U$ folgt aus der Eigenschaft, dass durch Aussonderung die Kardinalität nur sinken kann. Das Leermengenaxiom $(S4)_U$ folgt aus $|\emptyset| < \alpha$ für jede unerreichbare Kardinalzahl α und $\emptyset \subseteq U$. Das Paarmengenaxiom $(S5)_U$ ergibt sich, da $2 < \alpha$ für unerreichbare α. Das Potenzmengenaxiom $(S6)_U$ folgt aus $2^\beta < \alpha$ für $\beta < \alpha$, wenn α unerreichbar. Das Vereinigungsaxiom $(S7)_U$ ist Konsequenz der zweiten Eigenschaft unerreichbarer Kardinalzahlen (1.2). Ersetzungsaxiom $(S9)_U$ und Auswahlaxiom $(S10)_U$ erhöhen die Kardinalität nicht (beim Auswahlaxiom habe ohne Beschränkung der Allgemeinheit die ausgewählte Menge keine „überflüssigen Elemente“). Also folgt c)
Es gelte c). Wir weisen die Axiome nach Williams nach. $(G_W1)_U$ folgt daraus, dass Elemente

von Mengen wieder Mengen sein müssen. $(G_W 2)_U$ ergibt sich direkt aus dem Potenzmengenaxiom $(S6)_U$. $(G_W 3)_U$ ergibt sich für die leere Menge durch Potenzmengenbildung und für andere Mengen durch das Paarmengenaxiom $(S5)_U$ zusammen mit der leeren Menge und Aussonderungsaxiom $(S3)_U$ (Aussondern der leeren Menge). $(G_W 4)_U$ folgt wie gezeigt aus $(G_M 4)_U$ und $(G_M 5)_U$. $(G_M 4)_U$ ist Konsequenz von dem Vereinigungsaxiom $(S7)_U$. $(G_M 5)_U$ ergibt sich aus dem Ersetzungsaxiom $(S9)_U$, da man eine Formel hinschreiben kann, welche die als Menge gegebene Funktion, als Relation zwischen zwei Variablen darstellt, die man in $(S9)_U$ verwendet. $(G_W 5)_U$ folgt aus dem Leermengenaxiom $(S4)_U$. Es folgt a).
Der zweite Teil des Satzes ergibt sich daraus, dass bei jeder Aussage das Unendlichkeitsaxiom hinzugefügt wird. □

Den zweiten Satz entnehmen wir aus [Wil].

Satz 1.43. *Ist U ein Grothendieck-Universum nach Williams und α die zugehörige Kardinalzahl, so gilt $U = \psi(\alpha)$ mit der Von-Neumann-Hierarchie $\psi(\alpha)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst $\psi(\alpha) \subseteq U$ mittels transfiniter Induktion über die Aussage

$$A(\beta) :\equiv \beta \leq \alpha \rightarrow \psi(\beta) \subseteq U.$$

Offensichtlich gilt $A(0)$, da $\emptyset \subseteq U$. Gelte nun $A(\beta)$ und sei $\beta + 1 \leq \alpha$, also $\beta \leq \alpha$ und damit $\psi(\beta) \subseteq U$. Wegen $\beta < \alpha$ gilt $|\psi(\beta)| < \alpha$ wegen (1.3) und demnach folgt mit der Charakterisierung b) von 1.42 für alle $V \subseteq \psi(\beta)$, dass $V \in U$. Folglich gilt $\psi(\beta + 1) = P(\psi(\beta)) \subseteq U$. Sei nun λ eine Limesordinalzahl mit $\lambda \leq \alpha$ und gelte $A(\beta)$ für $\beta < \lambda$. Wegen $\beta < \alpha$ bedeutet dies $\psi(\beta) \subseteq U$ für $\beta < \lambda$ und damit $\psi(\lambda) = \bigcup \{\psi(\beta) | \beta < \lambda\} \subseteq U$.
Angenommen $U \backslash \psi(\alpha) \neq \emptyset$. Nach dem Fundierungsaxiom gibt es eine Menge $x \in U \backslash \psi(\alpha)$ mit $(U \backslash \psi(\alpha)) \cap x = \emptyset$. Wegen Charakterisierung b) von 1.42 folgt aus $x \in U$, dass $x \subseteq U$ und $|x| < \alpha$. Aus $x \subseteq U$ und $(U \backslash \psi(\alpha)) \cap x = \emptyset$ ergibt sich $x \subseteq \psi(\alpha)$. Mit $|x| < \alpha$ und (1.4) folgt $x \in \psi(\alpha)$. Dies steht im Widerspruch zu $x \in U \backslash \psi(\alpha)$. Es folgt $U = \psi(\alpha)$. □

Diese Sätze zeigen eine fundamentale Korrespondenz zwischen Grothendieck-Universen und unerreichbaren Kardinalzahlen. Mochizuki setzt in seiner Arbeit [Mot4][S.54] nicht nur die Axiome der ZFC-Mengenlehre voraus, sondern fügt noch das folgende Universen-Existenzaxiom hinzu, welches auf Grothendieck zurückgeht und durch die Korrespondenz auf zwei Weisen formuliert werden kann.

Definition 1.44. Das Universen-Existenzaxiom (SG) lautet:

- Für alle Mengen x existiert ein Grothendieck-Universum V mit $x \in V$.
- Für alle Mengen x existiert eine unerreichbare Kardinalzahl $\alpha > x$.

Das Universen-Existenzaxiom impliziert eine vermeintlich stärkere Version, welche wir mit Beweis aus [Mot4][S.54-55] entnehmen.

Aussage 1.45. Es gelte neben den ZFC-Axiomen auch das Axiom (SG). Sei nun I eine Menge und $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von Grothendieck-Universen. Dann existiert ein Grothendieck-Universum V mit $V_i \in V$ für alle $i \in I$.

Beweis. Da $(V_i)_{i \in I}$ eine andere Schreibweise für eine Funktion ist und Funktionen Mengen sind, ist $(V_i)_{i \in I}$ eine Menge, welche wegen (SG) in einem Grothendieck-Universum V enthalten ist. V ist transitiv und man erhält mit den Definitionen von Funktionen und geordnetem Paar, dass $V_i \in V$ für alle $i \in I$. □

Das Universen-Existenzaxiom kann nicht aus den ZFC-Axiomen gezeigt werden, wenn ZFC konsistent ist, da dieses die Existenz von ZFC-Modellen zeigen würde und dies nach dem zweiten Unvollständigkeitssatz von Gödel nicht möglich ist. Es ist also ein zusätzliches Axiom, welches wir für den Rest der Arbeit zusätzlich zu den ZFC-Axiomen voraussetzen wollen. Wir wollen nun noch bemerken wie dieser Begriff mit Klassen zusammenhängt.

Bemerkung 1.46. (Klassen und Grothendieck-Universen) Der Begriff der Klasse war notwendig, da wir von Zusammenfassungen von Mengen reden wollten, die keine Menge bilden (siehe 1.4). Mit dem Universen-Existenzaxiom für Grothendieck-Universen können wir nun zunächst ein Grothendieck-Universum U fixieren, welches wir uns als Mengenlehre vorstellen, in der wir arbeiten. Benötigen wir nun eine Zusammenfassung von Elementen von U, die nicht als Element im Grothendieck-Universum U liegt, so ist das kein Problem, da dies eine Menge ist. Wollen wir nun weitere Konstruktionen auf solchen größeren Mengen ausführen, so können wir, wenn notwendig, ein größeres Grothendieck-Universum $\tilde{U} \supseteq U$ fixieren, um auch dort die Operationen ausführen zu können. Man erkennt, dass dadurch das Problem zu großer Zusammenfassungen praktisch gelöst wird. Die Einführung von Klassen löste dieses Problem nicht vollständig, da man keine Konstruktionen über echten Klassen ausführen konnte, da diese kein Element einer anderen Klasse sind.
Die Einführung vom Universen-Existenzaxiom führt andererseits zu einer Veränderung der Philosophie. Wir betrachten nun Aussagen bereits als wahr, wenn diese in ihrer entsprechenden Form bereits für ein beliebiges Grothendieck-Universum U mit dem zusätzlichen Axiom gezeigt werden können. Die Mengen die Elemente des Grothendieck-Universums sind, werden *klein* genannt.

Entsprechend dieser Philosophie beziehen sich nun die mathematischen Konstruktionen auf die Elemente eines Universums. Dies hat zur Folge, dass in allen Formeln der Definitionsbereich auf das Universum eingeschränkt werden muss. Nun stellt sich die Frage, ob die mathematischen Konstruktionen von dem Universum abhängen oder auf die gleichen Mengen führen. Wir entnehmen notwendigen Definitionen dafür aus [Ebb][S.154-158]. In [Shp] werden solche Fragestellungen untersucht.

Definition 1.47. Sei P eine Formel mit einer ausgezeichneten freien Variable. Wir definieren die *Relativierung* $[\phi]^P$ von einer Formel ϕ bezüglich P, wobei ϕ und P keine gemeinsamen freien Variablen haben, mittels den rekursiven Vorschriften

- $[t_1 \square t_2]^P := t_1 \square t_2$ für Terme t_1, t_2 und $\square \in \{\in, =\}$
- $[\neg\phi]^P := \neg[\phi]^P$
- $[\phi_1 \square \phi_2]^P := [\phi_1]^P \square [\phi_2]^P$ für Formeln ϕ_1, ϕ_2, $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $[\forall x\, \phi]^P := \forall x\, (P(x) \rightarrow [\phi]^P)$
- $[\exists x\, \phi]^P := \exists x\, (P(x) \wedge [\phi]^P)$.

Bemerkung 1.48. Da wir Definitionen nur als abkürzende Schreibweisen auffassen, wird diese Rekursion auf die ausgeschriebene Formel angewandt.

Definition 1.49. Eine Formel ϕ mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ heißt nun *absolut* bezüglich der Formel P mit ausgezeichneter freien Variablen x und weiteren freien Variablen $y_1, \ldots, y_m$ mit Definitionsbereich beschrieben durch $\psi(y_1, \ldots, y_m)$, wenn

$$\forall y_1, \ldots, y_m\, (\psi \rightarrow (\forall x_1, \ldots, x_n\, (P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n) \rightarrow (\phi \leftrightarrow [\phi]^P))))$$

gilt.

Die Frage der Absolutheit stellt sich im Kontext der Grothendieck-Universen nun für die Formel $P \equiv x \in U$, wobei U das Grothendieck-Universum beschreibt. Diese Frage ist auch für die Arbeiten Mochizukis relevant. Wir werden uns in dieser Arbeit jedoch auf Konstruktionen konzentrieren, welche ungewünschte Auswahlen vermeiden, und wir versuchen keine Konstruktionen durchzuführen, welche nicht absolut sind.

2 Kategorien- und Speziestheorie

Die Sprache der Kategorientheorie ermöglicht es verschiedensten Konstruktionen und Aussagen der Mathematik einen gemeinsamen abstrakten Rahmen zu geben und ist damit zur Grundlage neuer Theorien (z.B. Homologische Algebra) geworden. Die Speziestheorie bildet einen neuen theoretischen Rahmen, der nach Mochizuki relevant für seinen Beweis der abc-Vermutung ist. Es wird sich herausstellen, dass man sie als Variante der Kategorientheorie mit formalen, speziestheoretischen Beschreibungen auffassen kann. Das Kapitel unterteilt sich in einen Abschnitt zur Kategorientheorie, einen Abschnitt mit den Definitionen der Speziestheorie und zuletzt einen Abschnitt mit zwei Beispielen für die Speziestheorie.

2.1 Kategorientheorie

In diesem Abschnitt wollen wir gewisse Grundlagen der Kategorientheorie einführen. Es wird dazu zunächst eine mengentheoretische Grundlage gelegt, welche auf Grothendieck-Universen aufbaut. Dann definieren und erklären wir universelle Morphismen und universelle Elemente und arbeiten Zusammenhänge zwischen diesen heraus. Zwei Fragen, die sich in dem Zusammenhang stellen, können beantwortet werden und führen einerseits auf den Begriff des Universalitätsfunktors und andererseits auf eine Konstruktion, welche den Übergang von einer Familie von Funktoren mit universellen Elementen zu einem Funktor mit universellen Morphismen erlaubt. Zuletzt beschäftigen wir uns mit Äquivalenzen von Kategorien. Wir unterscheiden zwischen schwachen und starken Äquivalenzen und weisen detailliert nach, dass universelle Morphismen unter Äquivalenzen von Kategorien erhalten bleiben. Auf diesen Ergebnissen werden wir im dritten Kapitel aufbauen. Kenntnisse grundlegender Kategorientheorie werden beim Leser vorausgesetzt. Wir folgen dem Buch [McL2][S.1-78].
Wir führen zunächst den Begriff der Meta-Kategorie ein, welcher informal und unabhängig von der Mengenlehre existieren soll.

Definition 2.1. Ein *Meta-Graph* besteht aus einer Zusammenfassung von Objekten und einer Zusammenfassung von Morphismen. Dabei kann man jedem Morphismus f genau ein Quellobjekt $dom\, f$ und genau ein Zielobjekt $cod\, f$ zuordnen.
Eine *Meta-Kategorie* ist ein Metagraph zusammen mit zwei Operationen: Die Operation Identität ordnet jedem Objekt A einen Morphismus id_A mit Quell- und Zielobjekt A zu. Die Operation Hintereinanderausführung ordnet jedem geordnetem Paar von verkettbaren Morphismen, also (g, f) mit $dom\, g = cod\, f$, einen Morphismus $g \circ f$ mit Quellobjekt $dom\, f$ und Zielobjekt $cod\, g$ zu. Dabei sollen folgende Axiome erfüllt sein: Die Hintereinanderausführung verkettbarer Morphismen ist assoziativ, also $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, falls $cod\, f = dom\, g$ und $cod\, g = dom\, h$ und die Identität ist neutral, also $f \circ id_A = f$ und $id_B \circ f = f$ für Morphismen f mit $A := dom\, f$ und $B := cod\, f$.

In [Lan2][S.53] werden Meta-Kategorien als Kategorien bezeichnet. Bei MacLane [McL2][S.22-24] hingegen betrachtet man Kategorien stets in einer Mengenlehre. Wir wollen nun eine konkrete Ausformulierung von [McL2][S.22-24] angeben, um eine Basis für spätere Definitionen und Aussagen zu haben.

Definition 2.2. Sei U ein Grothendieck-Universum. Eine *Kategorie* $\mathcal{C} = (Ob(\mathcal{C}), Mor(\mathcal{C}), \circ_{\mathcal{C}}, id(\mathcal{C}))$ ist ein Quadrupel bestehend aus:

- einer Menge $Ob(\mathcal{C}) \subseteq U$,
- einer Menge $Mor(\mathcal{C})$, die Tripel (X, A, B) mit $X \in U,\ A, B \in Ob(\mathcal{C})$ als Elemente hat,
- einer Menge $\circ_{\mathcal{C}}$, die aus Tripeln aus $Mor(\mathcal{C})^3$ derart besteht, dass es für

$$(X_2, A_2, B_2), (X_1, A_1, B_1) \in Mor(\mathcal{C})$$

genau dann ein Element $(X_3, A_3, B_3) \in Mor(\mathcal{C})$ mit

$$((X_2, A_2, B_2), (X_1, A_1, B_1), (X_3, A_3, B_3)) \in \circ_{\mathcal{C}}$$

gibt, wenn $B_1 = A_2$ gilt und in diesem Fall ist (X_3, A_3, B_3) eindeutig bestimmt und es gelten $A_1 = A_3$ und $B_2 = B_3$,

- sowie einer Menge $id(\mathcal{C})$, welche aus Paaren $(A, X) \in Ob(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C})$ derart besteht, dass es für jedes $A \in Ob(\mathcal{C})$ genau ein $X \in Mor(\mathcal{C})$ mit $(A, X) \in id(\mathcal{C})$ gibt. In diesem Fall ist X von der Form (Y, A, A).

Wir schreiben dabei auch $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ für die Menge $\{(X, A, B)|(X, A, B) \in Mor(\mathcal{C})\}$ zu gegebenen $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ und id_A für das eindeutige X mit $(A, X) \in id(\mathcal{C})$ zu gegebenem $A \in Ob(\mathcal{C})$. Weiter gelte für $\circ_{\mathcal{C}}$ das Assoziativgesetz und $id(\mathcal{C})$ sei neutral bezüglich $\circ_{\mathcal{C}}$, welche wie bei Meta-Kategorien definiert werden.

Wir werden das Grothendieck-Universum nicht immer extra erwähnen. Außerdem wollen wir zur Vereinfachung bei allen Kategorien davon ausgehen, dass die Morphismenmengen $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ stets klein für alle $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ seien. (Dies ist nur relevant, um die Existenz von Funktoren der Form $Mor_{\mathcal{C}}(A, F(\_))$ in die Kategorie der Mengen zu sichern.)

Bemerkung 2.3. Alternativ führt MacLane [McL2][S.23] die Möglichkeit an, dass man die NBG-Mengenlehre als Grundlage nimmt. In diesem Fall ersetzt man in der Definition U durch die Klasse aller Mengen. Nun wird die Kategorie $\mathcal{C}$ durch vier Klassen $Ob(\mathcal{C})$, $Mor(\mathcal{C})$, $\circ_{\mathcal{C}}$ und $id(\mathcal{C})$ (siehe 1.6), welche wie oben gebildet werden, beschrieben. Jede Kategorie bezüglich eines Universums U führt nun zu einer Kategorie in einem Modell der NBG-Mengenlehre, welches die Teilmengen von U als Klassen besitzt und die Elemente von U als Mengen.

Die folgenden drei Beispiele/Definitionen sind allgemein bekannt.

Beispiel/Definition 2.4. Sei U ein Grothendieck-Universum. Die Kategorie Set hat nun als Objekte die Mengen x mit $x \in U$. Die Morphismen sind nun Tripel (f, x, y) mit einer Abbildung $f : x \to y$ $(x, y \in U)$. Die Hintereinanderausführung von zwei Morphismen (g, y, z) und (f, x, y) ist $(g \circ f, x, z)$ $(x, y, z \in U)$. Der Identitätsmorphismus zu $x \in U$ ist durch (id_x, x, x) gegeben.

Beispiel/Definition 2.5. Sei U ein Grothendieck-Universum und $k \in U$ ein Körper. Nun gibt es die Kategorie der Vektorräume Vek_k über k. Die Objekte sind alle Vektorräume, die Elemente von U sind. Die Morphismen sind Vektorraumhomomorphismen ϕ, also Tripel (ϕ, V, W), wobei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung ist. Die Verknüpfung der Morphismen erhält man mittels Verknüpfung der Abbildungen und der Identitätsmorphismus stammt von der Identitätsabbildung. Wir haben auch die Kategorie der Vektorräume mit Basis $Vek_{k,B}$. Hier sind die Objekte Paare (V, B_V) aus einem Vektorraum V und einer Basis B_V von V, die Elemente von U sind. Die Morphismen, die Hintereinanderausführung und die Identität sind entsprechend der Kategorie der Vektorräume definiert (die Basis wird ignoriert).

Beispiel/Definition 2.6. Sind $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien bezüglich eines Grothendieck-Universums U, so können wir die Produktkategorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ definieren. Die Objekte dieser Kategorie sind Paare

$$(A, C) \text{ mit } A \in Ob(\mathcal{C}), C \in Ob(\mathcal{D}),$$

die Morphismen sind die Mengen

$$((\phi, \psi), (A, C), (B, D)) \text{ mit } A, B \in Ob(\mathcal{C}), C, D \in Ob(\mathcal{D}), \phi \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B), \psi \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D),$$

die Hintereinanderausführung erfolgt komponentenweise und die Identität bezüglich (A, C) ist durch $((id_A, id_C), (A, C), (A, C))$ gegeben.

Bemerkung 2.7. Wir können einen Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ als Paar zweier Funktionen (von $Ob(\mathcal{C})$ nach $Ob(\mathcal{D})$ und von $Mor(\mathcal{C})$ nach $Mor(\mathcal{D})$) mit gewissen Eigenschaften (und damit als Menge) auffassen. Eine natürliche Transformation von $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nach $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist eine Funktion von $Ob(\mathcal{C})$ nach $Mor(\mathcal{D})$ mit gewissen Eigenschaften.
Arbeiten wir mit Klassen, so besteht ein Funktor aus zwei Funktionen (das Paar kann nicht gebildet werden, siehe 1.6) und die natürliche Transformation ist eine Funktion.

In der Kategorientheorie spielen universelle Morphismen und ihre universellen Eigenschaften eine wichtige Rolle. Die folgende Definition ist in [McL2][S.55,S.58] zu finden.

Definition 2.8. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Funktor und A ein Objekt von $\mathcal{C}$. Ein *universeller Morphismus von A nach F* ist ein Paar (U_A, u_A) bestehend aus einem Objekt U_A von $\mathcal{D}$ und einem Morphismus $u_A : A \to F(U_A)$ derart, dass für alle Objekte Z von $\mathcal{D}$ und alle Morphismen $f : A \to F(Z)$ genau ein Morphismus $g : U_A \to Z$ mit $F(g) \circ u_A = f$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
F(Z) & & & Z \\
F(U_A) \arrow[u, dashed, "F(g)"] & A \arrow[l, "u_A"] \arrow[ul, bend right, "f"'] & & U_A \arrow[u, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

Wir nennen U_A auch *universelles Objekt*, u_A ebenfalls *universellen Morphismus* und die Eigenschaft des obigen kommutativen Diagramms *universelle Eigenschaft*.
Es gibt auch die folgende duale Notation. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Funktor und A ein Objekt von $\mathcal{C}$. Ein *universeller Morphismus von F nach A* ist ein Paar (U_A, u_A) bestehend aus einem Objekt U_A von $\mathcal{D}$ und einem Morphismus $u_A : F(U_A) \to A$ derart, dass für alle Objekte Z von $\mathcal{D}$ und alle Morphismen $f : F(Z) \to A$ genau ein Morphismus $g : Z \to U_A$ mit $u_A \circ F(g) = f$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
F(Z) \arrow[d, dashed, "F(g)"'] \arrow[dr, bend left, "f"] & & & Z \arrow[d, dashed, "g"] \\
F(U_A) \arrow[r, "u_A"'] & A & & U_A
\end{tikzcd}$$

Wir werden in dieser Arbeit die Sätze meist nur für die erste Version zeigen, aber in Beispielen teils auch die duale Version nutzen. Das folgende Beispiel stammt aus [McL2][S.58].

Beispiel/Definition 2.9. (Produkt) Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie. Sei $\mathcal{C}$ die Produktkategorie $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ und $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ der Diagonalfunktor, welcher Objekte Z von $\mathcal{D}$ auf (Z, Z) und Morphismen f auf (f, f) abbildet.
Nun ist ein Produkt in $\mathcal{D}$ ein universeller Morphismus von F zu einem Objekt $A = (A_1, A_2) \in \mathcal{C}$. Dies bedeutet, dass U ein Objekt in $\mathcal{D}$ ist und $u = (u_1, u_2)$ aus Morphismen $u_1 : U \to A_1$ und $u_2 : U \to A_2$ derart besteht, dass für jedes Paar von Morphismen $f_1 : Z \to A_1$ und $f_2 : Z \to A_2$ genau ein Morphismus $g : Z \to U$ derart existiert, dass $u_1 \circ g = f_1$ und $u_2 \circ g = f_2$ gelten.

$$\begin{tikzcd}
(Z,Z) \arrow[d, dashed, "(g,g)"'] \arrow[dr, bend left, "(f_1,f_2)"] & & & Z \arrow[d, dashed, "g"] \\
(U,U) \arrow[r, "(u_1,u_2)"'] & (A_1,A_2) & & U
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.10. Sei nun $\mathcal{D}$ eine Kategorie in der zu jedem Paar von Objekten ein Produkt existiert. Nun weiß man nicht, ob es in $\mathcal{D}$ eine speziestheoretische Konstruktion der Produkte gibt. Will man nun einen Funktor F hinschreiben, der einem Paar $A = (A_1, A_2)$ sein Produkt zuordnet, so benötigt man nun das Auswahlaxiom. Man wählt dazu eine Funktion, die jedem Paar $A = (A_1, A_2)$ ein universelles Objekt U_A zusammen mit einem universellen Morphismus $u_A = (u_{A,1}, u_{A,2})$ zuordnet. Nun ordne F dem Paar (A_1, A_2) das Objekt U der gewählten Funktion und einem Morphismus $(f_1, f_2) : (A_1, A_2) \to (B_1, B_2)$ den eindeutigen Morphismus $g : U_A \to U_B$ zu, welcher $f_1 \circ u_{A,1} = u_{B,1} \circ g$ und $f_2 \circ u_{A,2} = u_{B,2} \circ g$ kommutieren lässt.

$$\begin{tikzcd}
(U_A,U_A) \arrow[r, "(u_{A,1},u_{A,2})"] \arrow[d, dashed, "(g,g)"'] & (A_1,A_2) \arrow[d, "(f_1,f_2)"] & U_A \arrow[d, dashed, "g"] \\
(U_B,U_B) \arrow[r, "(u_{B,1},u_{B,2})"'] & (B_1,B_2) & U_B
\end{tikzcd}$$

Hier ist die gleichzeitige Auswahl der Bildobjekte notwendig, um die Funktion auf den Objekten hinschreiben zu können. Die Zuordnung von g in Abhängigkeit von (f_1, f_2) ist zwar eindeutig, aber nur nach Wahl von $(u_{A,1}, u_{A,2})$ und $(u_{B,1}, u_{B,2})$. Deswegen müssen auch die universellen Morphismen gleichzeitig gewählt werden.
Der Funktor selbst enthält nicht mehr die Information des universellen Morphismus u_A zu einem Objekt $A = (A_1, A_2)$. Demnach kann man aus diesem Funktor nicht mehr die Bijektion $Mor_{\mathcal{C}}((Z,Z),(A_1,A_2)) \cong Mor_{\mathcal{D}}(Z,U)$, $(f_1, f_2) \mapsto g$ herauslesen. Damit ist jedoch die universelle Eigenschaft nicht mehr anwendbar.

Frage 2.11. Wie kann man einen Funktor definieren, der die Informationen des universellen Morphismus enthält?

Antwort zu 2.11. Wollen wir die Zuordnung A zu einem universellen Morphismus als Funktor aufschreiben, der alle Informationen über den universellen Morphismus enthält, so bietet es sich an folgende Kategorie $Univ_{\mathcal{C},\mathcal{D},F}$ zu definieren, die wir hier einführen wollen. Die Objekte von $Univ_{\mathcal{C},\mathcal{D},F}$ sind Tripel

$$(A, Z, f) \text{ mit } A \in \mathcal{C}, Z \in \mathcal{D}, f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, F(Z)).$$

Die Morphismen von $X = (A_1, Z_1, f_1)$ nach $Y = (A_2, Z_2, f_2)$ sind nun definiert durch Paare von Morphismen (f, g) - es sind genauer Mengen

$$((f,g), X, Y) \text{ mit } f \in Mor_{\mathcal{C}}(A_1, A_2), g \in Mor_{\mathcal{D}}(Z_1, Z_2) \text{ mit } f_2 \circ f = F(g) \circ f_1.$$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ F(Z_1) \arrow[r, "F(g)"'] & F(Z_2) \end{tikzcd}$$

Die Hintereinanderausführung erfolgt komponentenweise und der neutrale Morphismus zu X ist durch $((id_{A_1}, id_{Z_1}), X, X)$ gegeben. Die Wohldefiniertheit der Hintereinanderausführung mit $((\tilde{f}, \tilde{g}), Y, Z)$, wobei $Z = (A_3, Z_3, f_3)$, $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)$, $g \in Mor_{\mathcal{D}}(Z_1, Z_2)$, ergibt sich durch die Funktorialität von F aus dem folgenden Diagramm.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\ F(Z_1) \arrow[r, "F(g)"'] & F(Z_2) \arrow[r, "F(\tilde{g})"'] & F(Z_3) \end{tikzcd}$$

Wir haben Projektionsfunktoren

$$P_{\mathcal{C}} : Univ_{\mathcal{C},\mathcal{D},F} \to \mathcal{C}, (A, Z, f) \mapsto A, ((f,g), X, Y) \mapsto f,$$

$$P_{\mathcal{D}} : Univ_{\mathcal{C},\mathcal{D},F} \to \mathcal{D}, (A, Z, f) \mapsto Z, ((f,g), X, Y) \mapsto g$$

und eine Projektionsabbildung $P_{Mor} : Univ_{\mathcal{C},\mathcal{D},F} \to Mor_{\mathcal{C}}$ mit $(A, Z, f) \mapsto f$.
Ordnen wir nun jedem Objekt A von $\mathcal{C}$ ein Objekt $X = (A, U_A, u_A)$ zu, wobei (U_A, u_A) ein universeller Morphismus von A nach F ist, und jedem Morphismus $f : A \to B$ (wobei B das Bild $Y = (B, U_B, u_B)$ habe) den Morphismus $X \to Y$, der durch das Paar (f, g) gegeben ist, wobei g mittels universeller Eigenschaft von (U_A, u_A) eindeutig durch $u_B \circ f = F(g) \circ u_A$ bestimmt ist, so erhalten wir einen Funktor $G : \mathcal{C} \to Univ_{\mathcal{C},\mathcal{D},F}$.

$$\begin{tikzcd} F(U_B) & B \arrow[l, "u_B"'] \\ F(U_A) \arrow[u, "F(g)"] & A \arrow[l, "u_A"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Für $A = B$ wird die Identität id_A auf id_{U_A} abgebildet. Die Funktorialitätseigenschaft der Hintereinanderausführung lässt sich aus dem folgenden Diagramm unter Kenntnis der Funktorialität von F ablesen ($C \in Ob(\mathcal{C})$, $\tilde{f} : B \to C$ mit zugehörigem $\tilde{g} : U_B \to U_C$).

$$\begin{tikzcd}
F(U_C) & C \arrow[l, "u_C"'] \\
F(U_B) \arrow[u, "F(\tilde{g})"] & B \arrow[l, "u_B"'] \arrow[u, "\tilde{f}"'] \\
F(U_A) \arrow[u, "F(g)"] & A \arrow[l, "u_A"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Der Funktor G enthält also die Informationen des universellen Morphismus. Verkettung mit $P_{\mathcal{D}}$ gibt auch den in der letzten Bemerkung für das Produkt beschriebenen Funktor zurück.
Außerdem geht die universelle Eigenschaft von (U_A, u_A) in die Eigenschaft über, dass es zu $X := (A, U_A, u_A)$, zu gegebenem $Y = (\tilde{A}, \tilde{Z}, \tilde{f})$ und zu gegebenem $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, \tilde{A})$ stets genau einen Morphismus $\alpha = (f, g) : X \to Y$ mit $P_{\mathcal{C}}(\alpha) = f$ (also $\alpha = (f, g)$) gibt.

$$\begin{tikzcd}
F(\tilde{Z}) & \tilde{A} \arrow[l, "\tilde{f}"'] \\
F(U_A) \arrow[u, "F(g)"] & A \arrow[l, "u_A"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

Definition 2.12. Wir nennen einen Funktor $G : \mathcal{C} \to Univ_{\mathcal{C},\mathcal{D},F}$, der die Eigenschaft besitzt, dass zu $X = (A, Z, f)$, $Y = (\tilde{A}, \tilde{Z}, \tilde{f})$ und $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, \tilde{A})$ stets genau einen Morphismus $\alpha : X \to Y$ mit $P_{\mathcal{C}}(\alpha) = f$ existiert, einen *Universalitätsfunktor*.

Wir haben auch das sehr ähnliche Konzept des universellen Elements (siehe [McL2][S.57]).

Definition 2.13. Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie und $F : \mathcal{D} \to Set$ ein Funktor. Ein *universelles Element* von F ist ein Paar (U, u) bestehend aus einem Objekt U von $\mathcal{D}$ und einem Element $u \in F(U)$ derart, dass für alle Objekte Z von $\mathcal{D}$ und alle Elemente $z \in F(Z)$ genau ein Morphismus $g : U \to Z$ mit $F(g)(u) = z$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
z & F(Z) & Z \\
u \arrow[u, mapsto] & F(U) \arrow[u, dashed, "F(g)"] & U \arrow[u, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

Es gibt wieder die entsprechende duale Notation.

Das folgende Beispiel stammt aus [McL][S.58].

Beispiel 2.14. Sei $\mathcal{D} := Vek_k^2$. Sei $V \times W$ ein Paar von Vektorräumen. Dann haben wir den Funktor der bilinearen Funktionen $Bil(V \times W, -) : Vek_k \to Set$. Dieser Funktor besitzt das universelle Element bestehend aus $V \otimes W$ zusammen mit der bilinearen Abbildung $\otimes : V \times W \to V \otimes W$.

Es bestehen folgende Beziehungen zwischen dem Begriff des universellen Morphismus und dem Begriff des universellen Elements (siehe [McL2][S.58]).
Ist $\mathcal{D}$ eine Kategorie, $F : \mathcal{D} \to Set$ ein Funktor und (U, u) ein universelles Element von F, so ist für die einelementige Menge $1 = \{0\}$ ein universeller Morphismus nach F durch $(U, 0 \mapsto u)$ gegeben, denn das kommutative Diagramm für ein f, welches mit $1 \to F(Z), 0 \mapsto z$ gegeben ist, entspricht

genau $F(g)(u) = z$.

$$
\begin{tikzcd} z \\ u \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} F(Z) \\ F(U) \arrow[u, "F(g)"'] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} Z \\ U \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} F(Z) & \\ F(U) \arrow[u, dashed, "F(g)"'] & 1 \arrow[l, "u \mapsfrom 0"] \arrow[ul, bend right, "z \mapsfrom 0"'] \end{tikzcd}
$$

Sind $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Funktor, A ein Objekt von $\mathcal{C}$ und (U_A, u_A) ein universeller Morphismus von A nach F, so ist das Paar (U_A, u_A) ein universelles Element des Funktors $Mor_{\mathcal{C}}(A, F(-)) : \mathcal{D} \to Set$, denn die Eigenschaft, dass u_A durch $F(g)$ auf ein $f : A \to F(Z)$ abgebildet wird, entspricht genau dem kommutativen Diagramm des universellen Morphismus.

$$
\begin{tikzcd} F(Z) & \\ F(U_A) \arrow[u, dashed, "F(g)"] & A \arrow[l, "u_A"] \arrow[ul, bend right, "f"'] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} Z \\ U_A \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} f \\ u_A \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} Mor_{\mathcal{C}}(A, F(Z)) \\ Mor_{\mathcal{C}}(A, F(U)) \arrow[u, dashed, "F(g)_*"'] \end{tikzcd}
$$

Diese Entsprechungen wurden nun lediglich für ein universelles Element und einen universellen Morphismus zu einem bestimmten Objekt aufgestellt. Nun ist beim Tensorprodukt zu jedem Paar von Vektorräumen ein universelles Element gegeben. Dies führt auf folgende Frage.

Frage 2.15. Wie kann man von der Existenz universeller Elemente zu einer Familie von Funktoren zur Existenz universeller Morphismen eines Funktors kommen? Wie funktioniert dies im Fall des Tensorproduktes?

Antwort zu 2.15. Wir wollen die schon genannte Korrespondenz etwas anders formulieren. Sei also eine Kategorie $\mathcal{D}$ und ein Funktor $F : \mathcal{D} \to Set$ gegeben. Wir konstruieren eine neue Kategorie $\mathcal{C}$ indem wir $\mathcal{D}$ ein Objekt, nennen wir es 1, hinzufügen. Bei den Morphismen fügen wir, abgesehen von dem Identitätsmorphismus in $Mor_{\mathcal{C}}(1,1)$, für jedes $Z \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ die Menge

$$Mor_{\mathcal{C}}(1, Z) = F(Z) \times \{1\} \times \{Z\} = \{(x, 1, Z) \mid x \in F(Z)\}$$

hinzu. Dabei sei die Hintereinanderausführung $g \circ (z, 1, Z_1)$ von $(z, 1, Z_1) \in Mor_{\mathcal{C}}(1, Z_1)$ und $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Z_1, Z_2)$ für $Z_1, Z_2 \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ durch $(F(g)(z), 1, Z_2)$ gegeben. Ist nun $h \in Mor_{\mathcal{C}}(Z_2, Z_3)$, so folgt

$$
\begin{aligned}
(h \circ g) \circ (z, 1, Z_1) &= (F(h \circ g)(z), 1, Z_3) = ((F(h) \circ F(g))(z), 1, Z_3) = (F(h)(F(g)(z)), 1, Z_3) \\
&= h \circ (F(g)(z), 1, Z_2) = h \circ (g \circ (z, 1, Z_2))
\end{aligned}
$$

und damit die Assoziativität. $\mathcal{C}$ ist also tatsächlich eine Kategorie.
Sei nun $\iota : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ die Inklusion. Wenn nun (U, u) ein universelles Element zu F ist, so ist U zusammen mit $(u, 1, U)$ ein universeller Morphismus von 1 nach ι. Denn für alle Objekte $Z \in \mathcal{D}$ und alle Morphismen $(z, 1, Z)$ müsste es genau einen Morphismus $g : U \to Z$ derart geben, dass $g \circ (u, 1, U) = (z, 1, Z)$ (oder nach Definition äquivalent $F(g)(u) = z$) gilt und dies folgt daraus, dass (U, u) ein universelles Element zu F ist.

$$
\begin{tikzcd} z \\ u \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} F(Z) \\ F(U) \arrow[u, dashed, "F(g)"] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} Z \\ U \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} Z & \\ U \arrow[u, dashed, "g"'] & 1 \arrow[l, "{(u,1,U)}"] \arrow[ul, bend right, "{(z,1,Z)}"'] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} Z \\ U \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}
$$

Andererseits ist zu jedem Objekt $A \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ das Paar aus A und id_A ein universeller Morphismus nach ι, da nur Objekte von $\mathcal{D}$ im Bild von ι liegen. Demnach existieren zu jedem Objekt von $\mathcal{C}$ universelle Morphismen.

$$
\begin{tikzcd} Z & \\ A \arrow[u, dashed, "g=f"] & A \arrow[l, "id_A"] \arrow[ul, bend right, "f"'] \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} Z \\ A \arrow[u, dashed, "g=f"'] \end{tikzcd}
$$

Ist nun eine Familie von Funktoren $F_i : \mathcal{D} \to Set$ mit $i \in I$ mit universellen Elementen gegeben, so kann man für jeden Funktor in der gleichen Weise jeweils ein Objekt hinzufügen und erhält erneut eine Kategorie, in der zu jedem Objekt universelle Morphismen existieren.
Gegebenenfalls kann man in der Kategorie $\mathcal{C}$ auch Morphismen zwischen den zu $\mathcal{D}$ hinzugefügten Objekten oder von den Objekten von $\mathcal{D}$ zu den hinzugefügten Objekten anfügen, sodass man eine schönere Kategorie $\mathcal{C}$ mit universellen Morphismen erhält, wie wir in den folgenden Beispielen sehen werden. □

Beispiel 2.16. (Tensorprodukt) Wir wenden die Konstruktion nun auf das Tensorprodukt an. Sei $\mathcal{C} := Vek_k^{1+2}$ die Kategorie deren Objekte Vektorräume oder Paare von Vektorräume sind (disjunkte Vereinigung). Nach der Antwort von Frage 2.15 müssen wir nur Vektorraumhomomorphismen und bilineare Abbildungen als Morphismen zulassen, aber wir wählen hier größere Morphismenmengen. Die Morphismen von A nach B mit $A, B \in Vek_k^{1+2}$ seien dabei (ohne Vertauschung der Faktoren des Quell- oder Zielobjekts) durch Produkte multilinearer Abbildungen in ein Teilprodukt von B gegeben, also:

- Vektorraumhomomorphismen, wenn $A, B \in Ob(Vek_k)$
- bilineare Abbildungen, wenn $A \in Ob(Vek_k^2)$, $B \in Ob(Vek_k)$
- einen Vektorraumhomomorphismus $A \to X \times \{0\} \subseteq B$ oder $A \to \{0\} \times Y \subseteq B$, wenn $A \in Ob(Vek_k)$, $B = X \times Y \in Ob(Vek_k^2)$
- und falls $A, B \in Ob(Vek_k^2)$, sagen wir $A = V \times W$, $B = X \times Y$, dann ist ein Morphismus gegeben durch

  das Produkt von zwei Vektorraumhomomorphismen $\phi : V \to X$ und $\psi : W \to Y$
  eine bilineare Abbildung $A \to X \times \{0\} \subseteq B$
  oder eine bilineare Abbildung $A \to \{0\} \times Y \subseteq B$

(Man kann hier auch Vertauschung der Faktoren zulassen und man hätte dementsprechend im letzten Unterpunkt dann auch die Möglichkeit „das Produkt von zwei Vektorraumhomomorphismen $\phi : V \to Y$ und $\psi : W \to X$". Wir wollen jedoch eine Kategorie beschreiben, zu der eine Identifizierungsprojektion (siehe Kapitel 3) existiert und in dem Fall sind diese Morphismen hinderlich, da sie zusätzliche Isomorphismen erzeugen, wenn die Dimensionen der Faktoren gleich sind.)
Die Hintereinanderausführung ist dabei wie bei Funktionen und man prüft leicht nach, dass man in der Kategorie bleibt (siehe unten). Nun erhält man von $V \times W$ zu dem Inklusionsfunktor $\hat{F} : Vek_k \to \mathcal{C}$ das Tensorprodukt $(V \otimes W, \otimes)$ als universellen Morphismus.
Man kann für $\mathcal{C}$ auch beliebige Produkte von Vektorräumen verwenden und wieder Produkte multilinearer Abbildungen in einen Faktor des Bildprodukts als Morphismen. Dann erhält man das Tensorprodukt mit beliebig vielen Vektorräumen als universellen Morphismus.
[Nachweis für die Abgeschlossenheit der Hintereinanderausführung: Seien zwei solche Produkte multilinearer Abbildungen $\phi : \prod_{i \in I} U_i \to \prod_{j \in J} V_j$ und $\psi : \prod_{j \in J} V_j \to \prod_{k \in K} W_k$ gegeben.
Es reicht für den Fall $K = \{k\}$ zu zeigen, dass $\psi \circ \phi$ multilinear ist, da der allgemeine Fall durch Produktbildung über $k \in K$ folgt (man betrachte nur U_i und V_j die nach W_k abbilden).
Seien dazu $i_0 \in I$, $u_i = \tilde{u}_i = \hat{u}_i \in U_i$ für $i \neq i_0$, $i \in I$, $u_{i_0}, \tilde{u}_{i_0} \in U_{i_0}$ und $\hat{u}_{i_0} := u_{i_0} + \tilde{u}_{i_0}$. Sei $j_0 \in J$ derart, dass V_{j_0} das Bild von der multilinearen Abbildung ϕ_0 des Produkts ϕ sei, für welche U_{i_0} ein Faktor des Definitionsraums ist. Dann unterscheiden sich $\phi((u_i)_{i \in I})$, $\phi((\tilde{u}_i)_{i \in I})$ und $\phi((\hat{u}_i)_{i \in I})$ nur für den Index j_0 und es gilt $\phi((u_i)_{i \in I})_{j_0} + \phi((\tilde{u}_i)_{i \in I})_{j_0} = \phi((\hat{u}_i)_{i \in I})_{j_0}$ wegen der Multilinearität von ϕ_0. Die Multilinearität von ψ zeigt nun, dass die additive Bedingung der Multilinearität von $\psi \circ \phi$ gilt. Die Bedingung für die Multiplikation mit Skalaren funktioniert analog.]

Beispiel 2.17. Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie zu der Produkte existieren. Wir definieren eine Kategorie $\mathcal{C}$, welche als Objekte die Objekte von $\mathcal{D}$ und die Objekte von $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ besitzt. Dabei seien die Morphismen nun Tupel von Morphismen aus $\mathcal{D}$ von Faktoren des Quellobjekts zu Faktoren des

Zielobjekts, wobei jeder Faktor des Zielobjekts genau einmal getroffen wird. Genauer sind die Morphismen bestimmt durch (Nach der Antwort von Frage 2.15 müssten wir nur die Morphismen aus den ersten beiden Unterpunkten zulassen. Man kann auch weniger Morphismen als aufgeführt zulassen, um zum Beispiel die Unterkategorie $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ zu haben.):

- einen Morphismus $A \to B$, wenn $A, B \in Ob(\mathcal{D})$
- ein Paar von Morphismen $A \to X$, $A \to Y$, wenn $A \in Ob(\mathcal{D})$, $B = X \times Y \in Ob(\mathcal{D}^2)$
- einen Morphismus $X \to B$ oder $Y \to B$, wenn $A = X \times Y \in Ob(\mathcal{D}^2)$, $B \in Ob(\mathcal{D})$
- und falls $A, B \in Ob(\mathcal{D}^2)$, sagen wir $A = V \times W$, $B = X \times Y$, dann ist ein Morphismus gegeben durch

  ein Paar von Morphismen $V \to X$, $V \to Y$

  ein Paar von Morphismen $V \to X$, $W \to Y$

  ein Paar von Morphismen $V \to Y$, $W \to X$

  oder ein Paar von Morphismen $W \to X$, $W \to Y$

Nun erhalten wir wieder universelle Morphismen zu dem Inklusionsfunktor und damit eine alternative Beschreibung des Produkts. Die Vorgehensweise lässt sich in analoger Weise auf beliebig viele Faktoren verallgemeinern.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der Begriff der Äquivalenz von Kategorien.

Bemerkung/Definition 2.18. Eine Äquivalenz von Kategorien kann sowohl als ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ aufgefasst werden, zu dem ein Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und zwei natürliche Isomorphismen $\tau_\mathcal{C} : GF \to id_\mathcal{C}, \tau_\mathcal{D} : FG \to id_\mathcal{D}$ existieren, als auch als Quadrupel $(F, G, \tau_\mathcal{C}, \tau_\mathcal{D})$. Wir wollen im ersten Fall von einer *schwachen Äquivalenz* und im zweiten Fall von einer *starken Äquivalenz* reden. Natürlich macht dies nur dann einen wesentlichen Unterschied, wenn wir von speziestheoretischen formalisierten Objekten sprechen.

Die schwachen Äquivalenzen von Kategorien können folgendermaßen charakterisiert werden (es gilt auch die Umkehrung des folgenden Satzes). Die weiteren Aussagen dieses Abschnitts sind elementare Aussagen der Kategorientheorie und werden selbstständig bewiesen.

Satz 2.19. *Sind $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, welcher volltreu und wesentlich surjektiv ist, dann ist F eine schwache Äquivalenz von Kategorien.*

Beweis. Sei A ein Objekt von $\mathcal{D}$. Dann existiert, da F wesentlich surjektiv ist, ein $\tilde{A} \in Ob(\mathcal{C})$ mit $F(\tilde{A}) \cong A$. Seien nun $A, B \in Ob(\mathcal{D})$ und $\tilde{A}, \tilde{B} \in Ob(\mathcal{C})$ mit Isomorphismen $\phi_A : F(\tilde{A}) \to A$ und $\phi_B : F(\tilde{B}) \to B$ sowie einem Morphismus $\alpha : A \to B$ gegeben. Da F volltreu ist, gibt es genau ein $\tilde{\alpha} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ mit $F(\tilde{\alpha}) = \phi_B^{-1} \alpha \phi_A$.
Zur Definition eines Funktors $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ wähle man mit dem Auswahlaxiom eine Funktion, welche zu jedem Objekt A von $\mathcal{D}$ ein Objekt $\tilde{A} \in Ob(\mathcal{C})$ zusammen mit einem Isomorphismus $\phi_A : F(\tilde{A}) \to A$ zuordnet. Nun ordne G auf den Objekten dem A das $\tilde{A}$ zu und auf den Morphismen jedem $\alpha : A \to B$ das wie oben definierte $\tilde{\alpha}$. Aus der Eindeutigkeit der Zuordnung und der Funktorialität von F folgt die Funktorialität von G.

$$\begin{tikzcd} F(\tilde{A}) \arrow[r, "F(\tilde{\alpha})"] \arrow[d, "\phi_A"] & F(\tilde{B}) \arrow[r, "F(\tilde{\beta})"] \arrow[d, "\phi_B"] & F(\tilde{C}) \arrow[d, "\phi_C"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \end{tikzcd}$$

Der natürliche Isomorphismus $FG \to id_\mathcal{D}$ ergibt sich aus den Isomorphismen ϕ_A und der natürliche Isomorphismus $GF \to id_\mathcal{C}$ aus den eindeutigen Isomorphismen $\psi_D : GF(D) \to D$ mit $F(\psi_D) = \phi_{F(D)}$ für $D \in Ob(\mathcal{C})$. Man betrachte dazu die folgenden Diagramme, wobei das dritte aus dem zweiten Diagramm durch Anwendung von F entsteht. Da F volltreu ist, folgt aus der Kommutativität des dritten Diagramms die Kommutativität des zweiten Diagramms.

$$\begin{tikzcd} F(G(A)) \arrow[r, "F(\tilde{\alpha})"] \arrow[d, "\phi_A"] & F(G(B)) \arrow[d, "\phi_B"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GF(D) \arrow[r, "GF(\beta)"] \arrow[d, "\psi_D"] & GF(E) \arrow[d, "\psi_E"] \\ D \arrow[r, "\beta"] & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGF(D) \arrow[r, "FGF(\beta)"] \arrow[d, "\phi_{F(D)}"] & FGF(E) \arrow[d, "\phi_{F(E)}"] \\ F(D) \arrow[r, "F(\beta)"] & F(E) \end{tikzcd}$$

□

Bemerkung 2.20. In dem Beweis ist die gleichzeitige Auswahl der Bildobjekte notwendig, um die Funktion auf den Objekten hinschreiben zu können. Die Zuordnung des β in Abhängigkeit von α ist zwar eindeutig, aber nur nach Wahl von ϕ und ψ. Deswegen müssen auch die universellen Morphismen gleichzeitig gewählt werden. Das Auswahlaxiom ist demnach notwendig.

Wir wollen nun zeigen, dass die Existenz universeller Morphismen unter Äquivalenzen von Kategorien erhalten bleibt. Dafür wollen wir zunächst einen Begriff definieren, welcher natürliche Isomorphismen in einem Spezialfall beschreibt.

Definition 2.21. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ Kategorien, $X \in Ob(\mathcal{C}), Y \in Ob(\mathcal{D})$ und $F_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$, $F_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Sei für jedes $Z \in \mathcal{E}$ eine Bijektion $\phi_Z : Mor_{\mathcal{C}}(X, F_1(Z)) \cong Mor_{\mathcal{D}}(Y, F_2(Z))$ gegeben. Wir nennen die Bijektionen ***natürlich***, wenn diese Bijektionen einen natürlichen Isomorphismus der Funktoren $Mor_{\mathcal{C}}(X, F_1(\_))$ und $Mor_{\mathcal{D}}(Y, F_2(\_))$ definieren.
Dies bedeutet, dass für alle Morphismen $f_1 : X \to F_1(Z_1)$ und alle Morphismen $g : Z_1 \to Z_2$ $(Z_1, Z_2 \in \mathcal{E})$ die Beziehung $F_2(g) \circ \phi_{Z_1}(f_1) = \phi_{Z_2}(f_2)$ mit $f_2 := F_1(g) \circ f_1$ gilt.

$$\begin{tikzcd} Mor_{\mathcal{C}}(X, F_1(Z_1)) \arrow[r, "F_1(g)_*"] \arrow[d, "\phi_{Z_1}"] & Mor_{\mathcal{C}}(X, F_1(Z_2)) \arrow[d, "\phi_{Z_2}"] \\ Mor_{\mathcal{D}}(Y, F_2(Z_2)) \arrow[r, "F_2(g)_*"] & Mor_{\mathcal{D}}(Y, F_2(Z_2)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F_1(Z_1) \arrow[r, "F_1(g)"] & F_1(Z_2) \\ X \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, bend right, "f_2 := F_1(g) \circ f_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F_2(Z_1) \arrow[r, "F_2(g)"] & F_2(Z_2) \\ Y \arrow[u, "\phi_{Z_1}(f_1)"] \arrow[ur, bend right, "\phi_{Z_2}(f_2)"'] & \end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.22. Seien die Voraussetzungen wie in der Definition. Ist $F : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ ein Funktor, so definieren die Bijektionen $\phi_{F(\tilde{Z})} : Mor_{\mathcal{C}}(X, F_1(F(\tilde{Z}))) \cong Mor_{\mathcal{D}}(Y, F_2(F(\tilde{Z})))$ für $\tilde{Z} \in Ob(\tilde{\mathcal{E}})$ natürliche Bijektionen zu F_1F und F_2F. Man betrachte dazu $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2 \in Ob(\tilde{\mathcal{E}})$ und $g : \tilde{Z}_1 \to \tilde{Z}_2$ und setze $g := F(\tilde{g})$, $Z_1 := F(\tilde{Z}_1)$ und $Z_2 := F(\tilde{Z}_2)$.

$$\begin{tikzcd} F_1(F(\tilde{Z}_1)) \arrow[r, "F_1(F(\tilde{g}))"] & F_1(F(\tilde{Z}_2)) \\ X \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, bend right, "f_2 := F_1(F(\tilde{g})) \circ f_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F_2(F(\tilde{Z}_1)) \arrow[r, "F_2(F(\tilde{g}))"] & F_2(F(\tilde{Z}_2)) \\ Y \arrow[u, "\phi_{F(\tilde{Z}_1)}(f_1)"] \arrow[ur, bend right, "\phi_{F(\tilde{Z}_2)}(f_2)"'] & \end{tikzcd}$$

Wir weisen nun eine enge Beziehung zwischen natürlichen Bijektionen und universellen Morphismen nach. In [McL][S.60] wird dies unter dem Begriff der repräsentierbaren Funktoren für universelle Elemente nachgewiesen.

Aussage 2.23. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien und $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Sind nun für $A \in Ob(\mathcal{C})$, $U \in Ob(\mathcal{C})$ natürliche Bijektionen $\phi_Z : Mor_{\mathcal{D}}(U, Z) \to Mor_{\mathcal{C}}(A, F(Z))$ für $Z \in Ob(\mathcal{C})$ gegeben, so ist $(U, \phi_U(id_U))$ ein universeller Morphismus von A nach F.
Ist (U, u) ein universeller Morphismus von A nach F, so sind $\psi_Z : Mor_{\mathcal{D}}(U, Z) \to Mor_{\mathcal{C}}(A, F(Z))$ mit $g \mapsto F(g) \circ u$ für $Z \in Ob(\mathcal{C})$ natürliche Bijektionen.

Beweis. Seien zunächst die natürlichen Bijektionen ϕ_Z gegeben. Sei $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, F(Z))$. Dann gilt wegen der Natürlichkeit $F(g) \circ \phi_U(id_U) = f$ genau dann, wenn $\phi_Z^{-1}(f) = g$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] & Z \\ U \arrow[u, "id_U"] \arrow[ur, bend right, "\phi_Z^{-1}(f)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \\ A \arrow[u, "\phi_U(id_U)"] \arrow[ur, bend right, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Also gibt es genau ein g, welches $F(g) \circ \phi_U(id_U) = f$ erfüllt und damit ist $(U, \phi_U(id_U))$ ein universeller Morphismus.
Sei nun (U, u) ein universeller Morphismus von A nach F. Nach der Definition von universellen Morphismen sind ψ_Z Bijektionen. Die Natürlichkeit besagt nun, dass das zweite Diagramm kommutieren muss.

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "g"] & Z_2 \\ U \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, bend right, "f_2:=g\circ f_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(Z_1) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z_2) \\ A \arrow[u, "F(f_1)\circ u"] \arrow[ur, bend right, "F(f_2)\circ u"'] & \end{tikzcd}$$

Dies folgt aus der Funktorialität von f: $F(g) \circ F(f_1) \circ u = F(g \circ f_1) \circ u = F(f_2) \circ u$ □

Um nachweisen zu können, dass universelle Morphismen unter Äquivalenzen von Kategorien erhalten bleiben, benötigen wir einige Lemmata.

Lemma 2.24. *Seien $\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}$ zwei Kategorien und $F_\mathcal{C} : \mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}$ eine Äquivalenz von Kategorien mittels $F_{\tilde{\mathcal{C}}} : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ und den natürlichen Isomorphismen $\tau_\mathcal{C} : F_{\tilde{\mathcal{C}}} F_\mathcal{C} \to Id_\mathcal{C}$ und $\tau_{\tilde{\mathcal{C}}} : F_\mathcal{C} F_{\tilde{\mathcal{C}}} \to Id_{\tilde{\mathcal{C}}}$. Sind A, B Objekte von $\mathcal{C}$, so haben wir eine Bijektion*

$$Mor_\mathcal{C}(A, B) \cong Mor_{\tilde{\mathcal{C}}}(F_\mathcal{C}(A), F_\mathcal{C}(B)),$$

welche natürlich in B ist. Entsprechende Bijektionen existieren dann entsprechend für Objekte von $\tilde{\mathcal{C}}$ und den Funktor $F_{\tilde{\mathcal{C}}}$.

Beweis. Mittels Vor- und Nachschalten der Isomorphismen $\tau_\mathcal{C}(A)$ und $\tau_\mathcal{C}(B)$ sehen wir, dass die Hintereinanderausführung

$$Mor_\mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{F_\mathcal{C}} Mor_{\tilde{\mathcal{C}}}(F_\mathcal{C}(A), F_\mathcal{C}(B)) \xrightarrow{F_{\tilde{\mathcal{C}}}} Mor_\mathcal{C}(F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(A), F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(B))$$

eine Bijektion ist. Demnach ist die Abbildung

$$Mor_\mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{F_\mathcal{C}} Mor_{\tilde{\mathcal{C}}}(F_\mathcal{C}(A), F_\mathcal{C}(B))$$

injektiv.
Entsprechend ist auch die Hintereinanderausführung

$$Mor_{\tilde{\mathcal{C}}}(F_\mathcal{C}(A), F_\mathcal{C}(B)) \xrightarrow{F_{\tilde{\mathcal{C}}}} Mor_\mathcal{C}(F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(A), F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(B)) \xrightarrow{F_\mathcal{C}} Mor_\mathcal{C}(F_\mathcal{C} \circ F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(A), F_\mathcal{C} \circ F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(B))$$

da $\tau_{\tilde{\mathcal{C}}}(F_\mathcal{C}(A))$ und $\tau_{\tilde{\mathcal{C}}}(F_\mathcal{C}(B))$ Isomorphismen sind eine Bijektion. Wir erhalten die Surjektivität von

$$Mor_\mathcal{C}(F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(A), F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(B)) \xrightarrow{F_\mathcal{C}} Mor_\mathcal{C}(F_\mathcal{C} \circ F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(A), F_\mathcal{C} \circ F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(B)).$$

Schalten wir die Bijektion

$$Mor_\mathcal{C}(A, B) \cong Mor_\mathcal{C}(F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(A), F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(B))$$

vor und die Bijektion

$$Mor_\mathcal{C}(F_\mathcal{C} \circ F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(A), F_\mathcal{C} \circ F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_\mathcal{C}(B)) \cong Mor_{\tilde{\mathcal{C}}}(F_\mathcal{C}(A), F_\mathcal{C}(B))$$

nach, so erhalten wir die Surjektivität von

$$Mor_\mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{F_\mathcal{C}} Mor_{\tilde{\mathcal{C}}}(F_\mathcal{C}(A), F_\mathcal{C}(B))$$

und damit die Bijektivität.
Die Natürlichkeit entspricht der Kommutativität des folgenden Diagramms für beliebige Morphismen $f : B_1 \to B_2$.

$$\begin{tikzcd} Mor_{\mathcal{C}}(A, B_1) \arrow[r, "\alpha\mapsto f\circ\alpha"] \arrow[d, "\alpha\mapsto F_{\mathcal{C}}(\alpha)"'] & Mor_{\mathcal{C}}(A, B_2) \arrow[d, "\alpha\mapsto F_{\mathcal{C}}(\alpha)"] \\ Mor_{\mathcal{C}}(F_{\mathcal{C}}(A), F_{\mathcal{C}}(B_1)) \arrow[r, "\alpha\mapsto F_{\mathcal{C}}(f)\circ\alpha"] & Mor_{\mathcal{C}}(F_{\mathcal{C}}(A), F_{\mathcal{C}}(B_2)) \end{tikzcd}$$

Dies folgt aus der Funktorialität von $F_{\mathcal{C}}$: $F_{\mathcal{C}}(f) \circ F_{\mathcal{C}}(\alpha) = F_{\mathcal{C}}(f \circ \alpha)$ für $\alpha \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B_1)$. □

Lemma 2.25. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ Kategorien, $X \in Ob(\mathcal{C})$ und $F_1 : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, $F_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, $F : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ Funktoren sowie $\tau : F_1 \to F_2$ ein natürlicher Isomorphismus, dann ist*

$$F(\tau(Z))_* : Mor_{\mathcal{C}}(X, F \circ F_1(Z)) \to Mor_{\mathcal{C}}(X, F \circ F_2(Z)), \alpha \mapsto F(\tau(Z)) \circ \alpha$$

eine natürliche Bijektion.

Beweis. Die Abbildung ist eine Bijektion, da $F(\tau(Z))$ ein Isomorphismus ist. Die Natürlichkeit entspricht der Aussage, dass für jeden Morphismus $f : Z \to \tilde{Z}$ für $Z, \tilde{Z} \in \mathcal{D}$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} Mor_{\mathcal{C}}(X, F \circ F_1(Z)) \arrow[r, "\alpha\mapsto F(F_1(f))\circ\alpha"] \arrow[d, "\alpha\mapsto F(\tau(Z))\circ\alpha"'] & Mor_{\mathcal{C}}(X, F \circ F_1(\tilde{Z})) \arrow[d, "\alpha\mapsto F(\tau(\tilde{Z}))\circ\alpha"] \\ Mor_{\mathcal{C}}(X, F \circ F_2(Z)) \arrow[r, "\alpha\mapsto F(F_2(f))\circ\alpha"] & Mor_{\mathcal{C}}(X, F \circ F_2(\tilde{Z})) \end{tikzcd}$$

Dies bedeutet, dass $F(\tau(\tilde{Z})) \circ F(F_1(f)) = F(F_2(f)) \circ F(\tau(Z))$ gelten muss. Dies ist F angewandt auf die Natürlichkeit von τ. □

Lemma 2.26. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein Isomorphismus und $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Dann ist*

$$g^* : Mor_{\mathcal{C}}(X, F(Z)) \to Mor_{\mathcal{C}}(Y, F(Z)), \alpha \mapsto \alpha \circ g$$

eine natürliche Bijektion.

Beweis. Die Abbildung ist eine Bijektion, da g ein Isomorphismus ist. Die Natürlichkeit entspricht der Aussage, dass für jeden Morphismus $f : Z \to \tilde{Z}$ für $Z, \tilde{Z} \in \mathcal{D}$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} Mor_{\mathcal{C}}(X, F(Z)) \arrow[r, "\alpha\mapsto F(f)\circ\alpha"] \arrow[d, "\alpha\mapsto\alpha\circ g"'] & Mor_{\mathcal{C}}(X, F(\tilde{Z})) \arrow[d, "\alpha\mapsto\alpha\circ g"] \\ Mor_{\mathcal{C}}(Y, F(Z)) \arrow[r, "\alpha\mapsto F(f)\circ\alpha"] & Mor_{\mathcal{C}}(Y, F(\tilde{Z})) \end{tikzcd}$$

Dies folgt aus der Assoziativität: $F(f) \circ (\alpha \circ g) = (F(f) \circ \alpha) \circ g$. □

Wir können nun den Satz beweisen.

Satz 2.27. *Seien $\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{D}, \tilde{\mathcal{D}}$ Kategorien und $F_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}$, $F_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \tilde{\mathcal{D}}$ Äquivalenzen von Kategorien mittels $F_{\tilde{\mathcal{C}}} : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$, $F_{\tilde{\mathcal{D}}} : \tilde{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$ und den natürlichen Isomorphismen $\tau_{\mathcal{C}} : F_{\tilde{\mathcal{C}}} F_{\mathcal{C}} \to Id_{\mathcal{C}}$ und $\tau_{\tilde{\mathcal{C}}} : F_{\mathcal{C}} F_{\tilde{\mathcal{C}}} \to Id_{\tilde{\mathcal{C}}}$, $\tau_{\mathcal{D}} : F_{\tilde{\mathcal{D}}} F_{\mathcal{D}} \to Id_{\mathcal{D}}$ und $\tau_{\tilde{\mathcal{D}}} : F_{\mathcal{D}} F_{\tilde{\mathcal{D}}} \to Id_{\tilde{\mathcal{D}}}$. Weiter seien Funktoren $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $\tilde{F} : \tilde{\mathcal{D}} \to \tilde{\mathcal{C}}$ und ein natürlicher Isomorphismus $\tau : F \circ F_{\tilde{\mathcal{D}}} \to F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ \tilde{F}$ gegeben. Dann gilt: Existieren* *zu den Objekten in $\tilde{\mathcal{C}}$ universelle Morphismen bezüglich $\tilde{F}$, so existieren zu den Objekten in $\mathcal{C}$ universelle Morphismen bezüglich F.*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{D}} \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, bend left, "F_{\tilde{\mathcal{D}}}"] & \tilde{\mathcal{C}} \arrow[d, bend left, "F_{\tilde{\mathcal{C}}}"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "F"] \arrow[u, bend left, "F_{\mathcal{D}}"] & \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F_{\mathcal{C}}"]
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $A \in Ob(\mathcal{C})$ und $Z \in Ob(\mathcal{D})$, sowie $(\tilde{U}_{F_{\mathcal{C}}(A)}, \tilde{u}_{F_{\mathcal{C}}(A)})$ ein universeller Morphismus von $F_{\mathcal{C}}(A)$ nach $\tilde{F}$. Wir haben nun Bijektionen

$$\begin{array}{ll}
Mor_{\mathcal{D}}(F_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{U}_{F_{\mathcal{C}}(A)}), Z) & \text{(1) mittels } \left(\tau_{\mathcal{D}}(Z)^{-1}\right)_* \\
\cong Mor_{\mathcal{D}}(F_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{U}_{F_{\mathcal{C}}(A)}), F_{\tilde{\mathcal{D}}} \circ F_{\mathcal{D}}(Z)) & \text{(2) mittels } F_{\mathcal{D}} \text{ (siehe 2.24 und 2.22)} \\
\cong Mor_{\tilde{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{D}} \circ F_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{U}_{F_{\mathcal{C}}(A)}), F_{\mathcal{D}} \circ F_{\tilde{\mathcal{D}}} \circ F_{\mathcal{D}}(Z)) & \text{(3) mittels } \tau_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{U}_{F_{\mathcal{C}}(A)})^* \text{ und } \tau_{\tilde{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{D}}(Z))_* \\
\cong Mor_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde{U}_{F_{\mathcal{C}}(A)}, F_{\mathcal{D}}(Z)) & \text{(4) mittels universeller Eigenschaft (siehe 2.23)} \\
\cong Mor_{\tilde{\mathcal{C}}}(F_{\mathcal{C}}(A), \tilde{F} \circ F_{\mathcal{D}}(Z)) & \text{(5) mittels } F_{\tilde{\mathcal{C}}} \text{ (siehe 2.24 und 2.22)} \\
\cong Mor_{\mathcal{C}}(F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ F_{\mathcal{C}}(A), F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ \tilde{F} \circ F_{\mathcal{D}}(Z)) & \text{(6) mittels } \tau_{\mathcal{C}}(A)^* \\
\cong Mor_{\mathcal{C}}(A, F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ \tilde{F} \circ F_{\mathcal{D}}(Z)) & \text{(7) mittels } \left(\tau(F_{\mathcal{D}}(Z))^{-1}\right)_* \\
\cong Mor_{\mathcal{C}}(A, F \circ F_{\tilde{\mathcal{D}}} \circ F_{\mathcal{D}}(Z)) & \text{(8) mittels } F(\tau_{\mathcal{D}}(Z))_* \\
\cong Mor_{\mathcal{C}}(A, F(Z)) &
\end{array}$$

Diese sind natürlich in Z:

(1) da $\tau_{\mathcal{D}}$ ein natürlicher Isomorphismus ist (nach 2.25)
(2) da $F_{\mathcal{D}}$ ein Funktor einer natürlichen Äquivalenz ist (nach 2.24, 2.22)
(3) da $\tau_{\tilde{\mathcal{D}}}$ ein natürlicher Isomorphismus ist (nach 2.26, 2.25)
(4) da die Bijektion von einem universellen Morphismus kommt (nach 2.23)
(5) da $F_{\tilde{\mathcal{C}}}$ ein Funktor einer natürlichen Äquivalenz ist (nach 2.24, 2.22)
(6) da lediglich ein Isomorphismus vorgeschaltet wird (nach 2.26)
(7) da τ ein natürlicher Isomorphismus ist (nach 2.25, 2.22)
(8) da $\tau_{\mathcal{D}}$ ein natürlicher Isomorphismus (nach 2.25)

Die Behauptung folgt nun mit 2.23. □

Bemerkung 2.28. Die Voraussetzungen dieses Satzes sind symmetrisch unter Vertauschung von $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und $\tilde{\mathcal{C}}$, $\tilde{\mathcal{D}}$. Tatsächlich haben wir zu jedem natürlichen Isomorphismus $\tau : F \circ F_{\tilde{\mathcal{D}}} \to F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ \tilde{F}$ einen natürlichen Isomorphismus $\tilde{\tau} : F_{\mathcal{C}} \circ F \to \tilde{F} \circ F_{\mathcal{D}}$. Ist $A \in Ob(\mathcal{D})$, so definieren wir $\tilde{\tau}(A)$ mittels der Hintereinanderausführung:

$$F_{\mathcal{C}} \circ F(A) \xrightarrow{F_{\mathcal{C}} \circ F(\tau_{\mathcal{D}}(A)^{-1})} F_{\mathcal{C}} \circ F \circ F_{\tilde{\mathcal{D}}} \circ F_{\mathcal{D}}(A) \xrightarrow{F_{\mathcal{C}}(\tau(F_{\mathcal{D}}(A)))} F_{\mathcal{C}} \circ F_{\tilde{\mathcal{C}}} \circ \tilde{F} \circ F_{\mathcal{D}}(A) \xrightarrow{\tau_{\tilde{\mathcal{C}}}(\tilde{F} \circ F_{\mathcal{D}}(A))} \tilde{F} \circ F_{\mathcal{D}}(A)$$

Bemerkung 2.29. Ist ein Universalitätsfunktor G zu $\tilde{F}$ gegeben, so erhalten wir mit dem Beweis auch einen Universalitätsfunktor zu F. Die Konstruktion hängt dabei von keiner Auswahl ab.

2.2 Speziestheorie

Wir wollen nun in die Speziestheorie nach Mochizuki einleiten und nutzen dazu im ganzen Abschnitt [Mot4][S.54-71].
Zunächst wollen wir ein paar Zitate anführen, um den Kontext, in welchem die Speziestheorie stattfindet, zu erläutern.

- „The various ZFC-models that we work with may be thought of as [but are not restricted to be!] the ZFC-models determined by various universes that are sets relative to some ambient ZFC-model which, in addition to the standard axioms of ZFC set theory, satisfies the [...] existence axiom" [Mot4, S.53]

- „In the following discussion, it should be understood that every set-theoretic formula that appears is 'absolute' [...]" [Mot4, S.54]

- „[...] it is important to check that they are well-defined and do not depend upon the use of arbitrary choices [...]“ [Mot4, S.57]
- „[...] the data involved in a species is given by abstract set-theoretic formulas, the mathematical notion constitued by the species is immune to, i.e., unaffected by, extensions of the universe [...] This is the sense in which we apply the term ‘inter-universal’ “ [Mot4, S.57-58]

Man erkennt an diesen Zitaten, dass Mochizuki formale Beschreibungen (formalisierte Eigenschaften) nutzen will, die absolut und speziestheoretisch (im Sinne von 1.19) sind. Im Hinblick auf unseren Standpunkt, dass Beweise in einem Kalkül aufgeschrieben werden können (siehe 1.1), gehen wir davon aus, dass Mochizuki in ZFC mit Universen-Existenzaxiom arbeitet, wie er es selbst in [Mot4][S.54-55] aufbaut. (In dieser Hinsicht ergibt die Ergänzung „[but are not restricted to be!]“ keinen Sinn oder kann nur so interpretiert werden, dass die in einem beliebigen Modell von ZFC (mit Universen-Existenzaxiom) gilt.)
In den folgenden Definitionen werden wir sehen, dass er die Kategorientheorie in dem formalen Kontext aufschreibt. Dies gestaltet er so, dass er sich nicht auf Objekte außerhalb des ZFC-Modells, also keine Mengen außerhalb des Grothendieck-Universums (und keine Klassen), bezieht. Dazu werden Zusammenfassungen, wie die Objekte oder Morphismen einer Kategorie, mittels formalisierten Eigenschaften (vergleiche mit dem alternativen Klassenbegriff aus 1.4) und Funktionen, wie die Hintereinanderausführung von Morphismen oder Funktoren, mittels formalisierten Objekten (vergleiche mit 1.8 (f), (g)) beschrieben. Außerdem nutzt er Tupel von Variablen zur Beschreibung von Objekten und Morphismen, während wir in vergleichbaren Situationen eine einzelne Variable verwendet haben, die für ein Tupel steht (siehe 1.6).
Wir bezeichnen Variablen mit großen Frakturbuchstaben und Mengen mit lateinischen Großbuchstaben. Die Aussage, die durch Ersetzen der Variablen durch konkrete Mengen entsteht, wird durch das Ersetzen der Frakturbuchstaben durch lateinische Buchstaben dargestellt. Die formalen Definitionen sind nun, gefolgt von einer Gegenüberstellung zu den Begriffen der Kategorientheorie und einer Analyse der Formeln unter dem speziestheoretischen Aspekt, aufgeführt:

Definition 2.30. (i) Eine 0-*Spezies* $\mathfrak{S}_0$ ist eine (mengentheoretische) Formel

$$\Phi_0(\mathfrak{E}),$$

wobei die freien Variablen in $\Phi_0(\mathfrak{E})$ einer geordnete Menge (einem Tupel) von Variablen $\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_{n_0})$ mit $n_0 \geq 1$ entstammen. Ein n_0-Tupel von Mengen $E := (E_0, \ldots, E_{n_0})$ eines spezifischen ZFC-Modells, für welches $\Phi_0(E)$ gilt, heißt ein 0-*Exemplar* der 0-Spezies $\mathfrak{S}_0$ und wir schreiben (unter Missbrauch der Notation) $E \in \mathfrak{S}_0$.

(ii) Sei nun $\mathfrak{S}_0$ eine 0-Spezies. Eine 1-*Spezies* $\mathfrak{S}_1$, die auf $\mathfrak{S}_0$ wirkt, sind zwei mengentheoretische Formeln

$$\Phi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{F}) \text{ und } \Phi_{1\circ 1}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \mathfrak{F}''),$$

welche die unten genannten Eigenschaften erfüllen, wobei $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}''$ n_0-Tupel und $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \mathfrak{F}''$ n_1-Tupel ($n_1 \geq 1$) von Variablen seien.
Wir nutzen die Notationen $\mathfrak{F} : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}' \circ \mathfrak{F}$ für $\Phi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{F})$ beziehungsweise $\Phi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{F}) \wedge \Phi_1(\mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{F}') \wedge \Phi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'', \mathfrak{F}'') \wedge \Phi_{1\circ 1}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \mathfrak{F}'')$, wobei bei der zweiten Notation die unterdrückten Variablen aus dem Kontext zu erschließen sind und die Notation missbraucht wird (dieser Missbrauch löst sich mit der folgenden Bedingung zumindest nach der Interpretation in einem ZFC-Modell auf).

- Eindeutigkeit der Hintereinanderausführung: Gelten in einem ZFC-Modell für $E, E', E'' \in \mathfrak{S}_0$ und zwei n_1-Tupel F, F' die Aussagen $F : E \to E'$ und $F' : E' \to E''$, so gibt es genau ein n_1-Tupel F'' des ZFC-Modells derart, dass $F'' : E \to E''$ und $\Phi_{1\circ 1}(E, E', E'', F, F', F'')$ gelten und damit $F'' = F' \circ F$ gilt. Wir schreiben auch $F' \circ F$ für F''.

- Assoziativität: Gelten in einem ZFC-Modell für $E, E', E'', E''' \in \mathfrak{S}_0$ und für sieben n_1-Tupel $F^0, F^1, F^2, F^{01}, F^{12}, F^{(01)2}, F^{0(12)}$ mit $F^0 : E \to E'$, $F^1 : E' \to E''$ und $F^2 : E'' \to E'''$ die Aussagen $F^{01} = F^1 \circ F^0$, $F^{12} = F^2 \circ F^1$, $F^{(01)2} = F^2 \circ F^{(01)}$ und $F^{0(12)} = F^{12} \circ F^0$, so folgt $F^{(01)2} = F^{0(12)}$.
- Identität: Zu jedem $E \in \mathfrak{S}_0$, gibt es ein n_1-Tupel F im gleichen ZFC-Modell mit $F : E \to E$ derart, dass in dem ZFC-Modell für n_0-Tupel $E', E'' \in \mathfrak{S}_0$ und n_1-Tupel F, F' mit $F' : E' \to E$ und $F'' : E \to E''$ stets $F' = F \circ F'$ und $F'' = F'' \circ F$ gelten. F ist dadurch eindeutig bestimmt und wir schreiben $id_E := F$.

Ein 1-*Exemplar* ist ein Tupel (E, E', F) eines ZFC-Modells, für welches $F : E \to E'$ gilt, und wir schreiben $(E, E', F) \in \mathfrak{S}_1$ oder $F : E \to E' \in \mathfrak{S}_1$.

(iii) Eine *Spezies* $\mathfrak{S}$ ist ein Paar

$$(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1),$$

wobei $\mathfrak{S}_0$ eine 0-Spezies ist und $\mathfrak{S}_1$ als 1-Spezies auf $\mathfrak{S}_0$ wirkt (also ein Tripel von Formeln). (Ab sofort verzichten wir zur besseren Lesbarkeit auf die genaue Beschreibung der Längen $(n_0, n_1, \underline{n_0}, \dots)$ vorkommender Variablen- oder Mengentupel und gehen davon aus, dass die Eigenschaften in jedem ZFC-Modell gelten sollen, also $E, E', F, \underline{E}, \dots$ einem ZFC-Modell entstammen.)

(iv) Seien zwei Spezies $\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1)$ und $\underline{\mathfrak{S}} = (\underline{\mathfrak{S}_0}, \underline{\mathfrak{S}_1})$ gegeben. Eine *Mutation* $\mathfrak{M} : \mathfrak{S} \rightsquigarrow \underline{\mathfrak{S}}$ sind zwei Formeln

$$\Psi_0(\mathfrak{E}, \underline{\mathfrak{E}}) \text{ und } \Psi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{F}, \underline{\mathfrak{F}}),$$

welche die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Objektabbildung: Ist $E \in \mathfrak{S}_0$, so existiert genau ein $\underline{E} \in \underline{\mathfrak{S}_0}$ derart, dass $\Psi_0(E, \underline{E})$ gilt. Wir schreiben $\mathfrak{M}(E) := \underline{E}'$.
- Morphismenabbildung: Sind $E, E' \in \mathfrak{S}_0$ und $F \in \mathfrak{S}_1$ mit $F : E \to E'$, so existiert genau ein $\underline{F}$ mit $\underline{F} : \mathfrak{M}(E) \to \mathfrak{M}(E') \in \underline{\mathfrak{S}_1}$ derart, dass $\Psi_1(E, E', F, \underline{F})$ gilt. Wir schreiben $\mathfrak{M}(F) := \underline{F}$.
- Identität und Verkettung: Es gilt für $E \in \mathfrak{S}_0$ stets $\mathfrak{M}(id_E) = id_{\mathfrak{M}(E)}$. Gilt $E, E', E'' \in \mathfrak{S}_0$, $F : E \to E', F' : E' \to E'' \in \mathfrak{S}_1$, so folgt $\mathfrak{M}(F') \circ \mathfrak{M}(F) = \mathfrak{M}(F' \circ F)$.

(v) Seien nun zwei Spezies $\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1)$ und $\underline{\mathfrak{S}} = (\underline{\mathfrak{S}_0}, \underline{\mathfrak{S}_1})$ und zwei Mutationen $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' : \mathfrak{S} \rightsquigarrow \underline{\mathfrak{S}}$ gegeben. Ein *Morphismus von Mutationen* $\mathfrak{Z} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ ist eine Formel

$$\Xi(\mathfrak{E}, \underline{\mathfrak{F}}),$$

welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Morphismenzuordnung: Ist $E \in \mathfrak{S}_0$ so existiert genau ein $\underline{F}$ mit $\underline{F} : \mathfrak{M}(E) \to \mathfrak{M}'(E)$, welches $\Xi(E, \underline{F})$ erfüllt. Wir schreiben $\mathfrak{Z}(E) := \underline{F}$.
- Kommutatives Diagramm: Sind $E, E' \in \mathfrak{S}_0$ und $F : E \to E' \in \mathfrak{S}_1$, so gilt $\mathfrak{M}'(F) \circ \mathfrak{Z}(E) = \mathfrak{Z}(E') \circ \mathfrak{M}(F) : \mathfrak{M}(E) \to \mathfrak{M}'(E')$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}(E_1) \arrow[r, "\mathfrak{M}(F)"] \arrow[d, "\mathfrak{Z}(E_1)"'] & \mathfrak{M}(E_2) \arrow[d, "\mathfrak{Z}(E_2)"] \\
\mathfrak{M}'(E_1) \arrow[r, "\mathfrak{M}'(F)"] & \mathfrak{M}'(E_2)
\end{tikzcd}$$

(vi) Wir nennen einen Morphismus von Mutationen $\mathfrak{Z}$ einen *Isomorphismus von Mutationen*, wenn in jedem ZFC-Modell die Bilder $\mathfrak{Z}(E)$ stets Isomorphismen sind. Ist $\mathfrak{M} : \mathfrak{S} \to \underline{\mathfrak{S}}$ eine Mutation, dann nennen wir $\mathfrak{M}$ eine *Mutationsäquivalenz*, wenn eine Mutation $\mathfrak{M}' : \underline{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$ zusammen mit Isomorphismen von Mutationen zwischen den Hintereinanderausführungen $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}' \circ \mathfrak{M}$ und den jeweiligen Identitätsmutationen existiert.

Wir erhalten die Gegenüberstellung:

Speziestheorie	Entsprechung in ZFC-Modell/Kategorientheorie
0-Spezies	Objekte einer Kategorie
1-Spezies	Morphismen einer Kategorie
Spezies	Kategorie
Mutation	Funktor
Morphismus von Mutationen	natürliche Transformation
Isomorphismus von Mutationen	natürlicher Isomorphismus
Mutationsäquivalenz	Äquivalenz von Kategorien

Sieht man sich die Definitionen an, so beziehen sich in der Speziestheorie die aufgeführten Begriffe auf die Formeln und nicht auf die Objekte, sodass wir bei der Entsprechung diese Abstraktion wegfallen lassen. Mochizuki führt jedoch zu einer konkreten Realisierung einer i-Spezies ($i \in \{0,1\}$) in einem ZFC-Modell zusätzlich die Begriffe i-Exemplar ein, welche eigentlich einem Objekt bzw. einem Morphismus entsprechen.
In der folgenden Tabelle wird bei formalisierten Eigenschaften, die normalerweise keine formalisierten Objekte sind, nicht angegeben, ob diese speziestheoretisch sind, da dies nach 1.20 nicht relevant ist.

Formel	Bedeutung	Art	speziestheoretisch
Φ_0	Objekte der Kategorie	formalisierte Eigenschaft	-
Φ_1	Morphismen der Kategorie	formalisierte Eigenschaft	-
$\Phi_{1\circ 1}$	Hintereinanderausführung	formalisiertes Objekt	in $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$
Ψ_0	Funktor auf Objekten	formalisiertes Objekt	in $\mathfrak{E}$
Ψ_1	Funktor auf Morphismen	formalisiertes Objekt	in $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{F}$
Ξ	Natürliche Transformation	formalisiertes Objekt	in $\mathfrak{E}$

Wir wollen noch weitere Definitionen aus [Mot4][S.61] angeben. Wir werden sehen, dass diese im Sinne unseres Standpunkts aus 1.1 problematisch sind.

Definition 2.31. Eine *Mutations-Geschichte* ist ein Tripel

$$\mathfrak{H} = (\vec{\Gamma}, \mathfrak{S}^*, \mathfrak{M}^*)$$

bestehend aus einem orientierten Graphen $\vec{\Gamma}$, einer Funktion $\mathfrak{S}^*$, welche jeder Ecke v des Graphens eine Spezies $\mathfrak{S}^v$ zuordnet und einer Funktion $\mathfrak{M}^*$, welche jeder Kante $e = (v_1, v_2)$ des Graphens, eine Mutation $\mathfrak{M}^e : \mathfrak{S}^{v_1} \rightsquigarrow \mathfrak{S}^{v_2}$ zuordnet.
Sei nun $\mathfrak{H} = (\vec{\Gamma}, \mathfrak{S}^*, \mathfrak{M}^*)$ eine Mutations-Geschichte und $\underline{\mathfrak{S}}$ eine Spezies. Eine *$\underline{\mathfrak{S}}$-wertige kovariante (kontravariante) Observable* der Mutations-Geschichte $\mathfrak{H}$ ist ein Quadrupel

$$\mathfrak{V} = (\mathfrak{H}, \underline{\mathfrak{S}}, \mathfrak{V}^*_\odot, \mathfrak{V}^*_\to),$$

wobei $\mathfrak{V}^*_\odot$ eine Funktion ist, welche jeder Ecke v von $\vec{\Gamma}$ eine *Observationsmutation*

$$\mathfrak{V}^v_\odot : \mathfrak{S}^v \rightsquigarrow \underline{\mathfrak{S}}$$

zuordnet und $\mathfrak{V}^*_\to$ eine Funktion ist, welche jeder Kante $e = (v_1, v_2)$ einen *Observationsmutationsmorphismus*

$$\mathfrak{V}^e_\to : \mathfrak{V}^{v_1}_\odot \to \mathfrak{V}^{v_2}_\odot \circ \mathfrak{M}^e \quad (\mathfrak{V}^e_\to : \mathfrak{V}^{v_2}_\odot \circ \mathfrak{M}^e \to \mathfrak{V}^{v_1}_\odot)$$

zuordnet.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & \mathfrak{S}^{v_1} \arrow[rr, rightsquigarrow, "\mathfrak{M}^e"] \arrow[d, rightsquigarrow, "\mathfrak{V}^{v_1}_\odot"'] \arrow[drr, rightsquigarrow, "\mathfrak{V}^{v_2}_\odot \circ \mathfrak{M}^e"] \arrow[dr, phantom, "\xrightarrow{\mathfrak{V}^e_\to}"] & & \mathfrak{S}^{v_2} \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, rightsquigarrow, "\mathfrak{V}^{v_2}_\odot"] & \cdots \\
& \underline{\mathfrak{S}} & & \underline{\mathfrak{S}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\left(
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, rightsquigarrow] & \mathfrak{S}^{v_1} \arrow[rr, rightsquigarrow, "\mathfrak{M}^e"] \arrow[d, rightsquigarrow, "\mathfrak{V}^{v_1}_\odot"'] \arrow[drr, rightsquigarrow, "\mathfrak{V}^{v_2}_\odot \circ \mathfrak{M}^e"] \arrow[dr, phantom, "\xleftarrow{\mathfrak{V}^e_\to}"] & & \mathfrak{S}^{v_2} \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, rightsquigarrow, "\mathfrak{V}^{v_2}_\odot"] & \cdots \\
& \underline{\mathfrak{S}} & & \underline{\mathfrak{S}} &
\end{tikzcd}
\right)$$

Sind bei einer kovarianten Observable $\mathfrak{V}$ die Mutationsmorphismen $\mathfrak{V}^{e}_{\rightarrow}$ stets Isomorphismen, so nennen wir die Obervable $\mathfrak{V}$ einen *Kern* oder *kernartig*.

Bemerkung 2.32. Die Begriffe „formalisierte Eigenschaft“ und „formalisiertes Objekt“ stellen ebenso wie die in 2.30 definierten Begriffe Beschreibungen von Formeln dar. In 2.31 werden nun jedoch mathematische Objekte (Graphen) über solchen Formeln beschrieben. Hier stellt sich die Frage wie dies im Sinne des in 1.1 bezogenen Standpunkts interpretiert werden kann. Wir wollen ein paar spekulative Ansätze aufschreiben.
Die vielleicht naheliegendste Möglichkeit ist, dass diese Graphen eine Methode codieren wie man einen Beweis aufschreiben kann. Dazu sollten diese Graphen endlich sein, da Formeln stets endliche Länge haben. Dies müsste jedoch an dem tatsächlichen Beweisversuch überprüft werden.
Im Artikel [Yam] wird erwähnt, dass vermutlich die Wahl eines hinreichend großen Universums ausreichen würde, um den Beweis Mochizukis durchzuführen. In diesem Fall ist es vielleicht möglich, die Spezies wieder durch Mengen (Kategorien) in diesem Universum zu ersetzen und die informalen Konstruktionen über diesen Mengen auszuführen.
Es besteht aber auch die Möglichkeit, dass der Beweis nicht in ZFC mit Universen-Existenzaxiom aufzuschreiben ist. Vielleicht ist es möglich ein Axiomensystem anzugeben, in welchem die Formeln von ZFC sowie Graphen von Formeln Objekte darstellen. Dann könnte man versuchen zu zeigen, dass man mit dem darüberliegenden Axiomensystem die Existenz eines Beweises nachweisen kann.

Bemerkung 2.33. Das Beispiel der Kategorie der k-Vektorräume, bei dem k ein fester, aber beliebiger Körper ist, lässt die Frage aufkommen, ob man hier bei Spezies auch solche Parameter zulassen kann, oder nur speziestheoretisch (in Abhängigkeit von $\emptyset$) definierte Körper eingesetzt werden können. Grundsätzlich kann man die Begriffe aus 2.30 auch mit einer vorher festgelegten Menge von (freien) Variablen für Parameter definieren und zwar derart, dass für jedes Einsetzen eines Parameters die Axiome der Speziestheorie erfüllt sind. Die Frage ist dann, wie sich dies unter Erweiterung von Grothendieck-Universen verhält. Man kann alternativ auch mit der Spezies der k-Vektorräume, in der für jeden Körper die Vektorräume Objekte sind, arbeiten. Wir werden im nächsten Abschnitt ein Beispiel mit dem Parameter einer Primzahl im Fall von Mutationen angeben.

Bemerkung 2.34. Mochizuki verwendet auch Objekte, welche nicht speziestheoretisch sind. Er behauptet, dass man sogar messen kann wie weit diese davon abweichen: „[...] the theory of species allows one, in effect, to compute the extent of deviation of various ‘non-canonical objects’ [i.e., whose construction depends upon the invocation of the axiom of choice!] from a sort of ‘canonical norm’.“ [Mot4, S.57]

2.3 Beispiele

Wir entnehmen die Beispiele wieder aus [Mot4][S.64,67].

Beispiel/Definition 2.35. Wir wollen nun eine *Spezies* $\mathfrak{S}^{top}$ *der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen* definieren. Sei $\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_X, \mathfrak{E}_T)$ ein Variablenpaar. Nun besteht die zur Spezies $\mathfrak{S}^{top}$ zugehörige Formel der 0-Spezies $\Phi_0(\mathfrak{E})$ aus einer Konjunktion von Formeln, welche folgenden Bedeutungen (Definition topologischer Raum) entsprechen:

- E_T ist eine Teilmenge von der Potenzmenge von E_X
- $\emptyset$ und E_X sind Elemente von E_T
- ist S eine Teilmenge von E_T, dann ist $\bigcup S$ ein Element von E_T
- und sind A und B Elemente von E_T, so ist auch $A \cap B$ ein Element von E_T.

Zur Definition der 1-Spezies nutzen wir eine Variable $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_{\rightarrow})$. $\Phi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{F})$ ist die Konjunktion der Formeln mit folgenden Bedeutungen (Definition stetige Abbildung):

- $F_{\rightarrow}$ ist eine Abbildung von E_X nach $E^{'}_X$

- und für alle Mengen $A \in E_T^{'}$ gilt $f^{-1}(A) \in E_T$.

Die Formel $\Phi_{1\circ 1}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \mathfrak{F}'')$ besagt, dass $F''_{\rightarrow}$ die Hintereinanderausführung von $F_{\rightarrow}$ und $F'_{\rightarrow}$ ist.
Weiter definieren wir nun eine *Spezies* $\mathfrak{S}^{u-top}$ *der topologischen Räume mit universeller Überlagerung.* Dazu sei $\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_X, \mathfrak{E}_T, \mathfrak{E}_{\tilde{X}}, \mathfrak{E}_{\tilde{T}}, \mathfrak{E}_{\ddot{u}b})$ ein Variablenquintupel. Die 0-Spezies $\Phi_0(\mathfrak{E})$ besteht nun aus der Konjunktion von Formeln mit folgenden Bedeutungen (Definition universelle Überlagerung):

- E_X ist ein topologischer Raum mit Topologie E_T
- $E_{\tilde{X}}$ ist ein topologischer Raum mit Topologie $E_{\tilde{T}}$
- $E_{\tilde{X}}$ ist mit der Topologie $E_{\tilde{T}}$ einfach zusammenhängend
- $E_{\ddot{u}b}$ ist eine stetige, surjektive Abbildung von $E_{\tilde{X}}$ nach E_X mit den Topologien $E_{\tilde{T}}$ und E_T
- für jedes $p \in E_X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq E_X$ derart, dass das Urbild $E_{\ddot{u}b}^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen ist, welche mittels $E_{\ddot{u}b}$ homöomorph zu U sind.

Zur Definition der 1-Spezies benötigen wir ein Paar $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_{\rightarrow}, \mathfrak{F}_{\dashrightarrow})$ von Variablen. Nun ist $\Phi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{F})$ eine Konjunktion von Formeln mit folgenden Bedeutungen:

- $F_{\rightarrow}$ ist eine stetige Abbildung von E_X nach E'_X
- und $F_{\dashrightarrow}$ ist eine nicht-leere Menge stetiger Abbildungen f von $E_{\tilde{X}}$ nach $E'_{\tilde{X}}$ mit $E'_{\ddot{u}b} \circ f = F_{\rightarrow} \circ E_{\ddot{u}b}$ derart, dass diese Abbildungen eine Äquivalenzklasse bezüglich der Hintereinanderausführung mit einer Decktransformation bilden.

Die Formel $\Phi_{1\circ 1}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \mathfrak{F}'')$ besagt, dass $F''_{\rightarrow}$ die Hintereinanderausführung von $F_{\rightarrow}$ und $F'_{\rightarrow}$ ist und $F''_{\dashrightarrow}$ die Äquivalenzklasse der Hintereinanderausführung eines Elements von $F_{\dashrightarrow}$ und eines Elements von $F'_{\dashrightarrow}$ ist.
Wir haben ebenso eine *Spezies der Gruppen mit äußeren Homomorphismen* $\mathfrak{S}^{gp}$. Sei $\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_G, \mathfrak{E}_\circ)$ ein Variablenpaar. Die Formel $\Phi_0(\mathfrak{E})$ besage, dass E_G mit der Operation $E_\circ : E_G \times E_G \rightarrow E_G$ eine Gruppe sei. Sei nun $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_{\rightarrow})$. Die Formel $\Phi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{F})$ bedeute nun, dass $F_{\rightarrow}$ eine Äquivalenzklasse von Gruppenhomomorphismen von E_G mit Gruppenstruktur $E_\circ$ nach E'_G mit Gruppenstruktur $E'_\circ$ seien, wobei zwei Gruppenhomomorphismen äquivalent seien, wenn sie sich um einen inneren Homomorphismus von E'_G mit Gruppenstruktur $E'_\circ$ unterscheiden. $\Phi_{1\circ 1}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \mathfrak{F}'')$ besagt nun, dass $F''_{\rightarrow}$ die Äquivalenzklasse der Hintereinanderausführung eines Element von $F'_{\rightarrow}$ und eines Elements von $F_{\rightarrow}$ sei. Man prüft leicht nach, dass dies wohldefiniert ist.
Wir wollen nun die Abbildung, welche einer universellen Überlagerung ihre Decktransformationsgruppe zuordnet, als Mutation von $\mathfrak{S}^{u-top} \rightsquigarrow \mathfrak{S}^{gp}$ auffassen. Sei dazu $\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_X, \mathfrak{E}_T, \mathfrak{E}_{\tilde{X}}, \mathfrak{E}_{\tilde{T}}, \mathfrak{E}_{\ddot{u}b})$, $\mathfrak{E}' = (\mathfrak{E}'_X, \mathfrak{E}'_T, \mathfrak{E}'_{\tilde{X}}, \mathfrak{E}'_{\tilde{T}}, \mathfrak{E}'_{\ddot{u}b})$, $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_{\rightarrow}, \mathfrak{F}_{\dashrightarrow})$, $\underline{\mathfrak{E}} = (\underline{\mathfrak{E}}_G, \underline{\mathfrak{E}}_\circ)$ und $\underline{\mathfrak{F}} = (\underline{\mathfrak{F}}_{\rightarrow})$. Die Formel $\Psi_0(\mathfrak{E}, \underline{\mathfrak{E}})$ besagt dann, dass einem topologischen Raum mit universeller Überlagerung E die Decktransformationsgruppe $\underline{E}$ zugeordnet wird. Die Formel $\Psi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{F}, \underline{\mathfrak{F}})$ werden wir hier nicht genauer erklären, da dazu genauere Kenntnisse der algebraischen Topologie notwendig sind.

Beispiel/Definition 2.36. Dieses Beispiel behandelt die *Spezies* $\mathfrak{S}^{mon}$ *der torsionsfreien abelschen Monoide mit Monoidhomomorphismen.* Aus den Betrachtungen im Abschnitt über den Aufbau der Mathematik ergibt sich direkt eine Definition für die Spezies der Monoide:
Sei $\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_M, \mathfrak{E}_\circ)$ ein Variablenpaar. Dann besteht die zur Spezies $\mathfrak{S}^{mon}$ zugehörige Formel der 0-Spezies $\Phi_0(\mathfrak{E})$ aus einer Konjunktion von Formeln, welche folgenden Bedeutungen entsprechen:

- $E_\circ$ ist eine Operation auf E_M
- $E_\circ$ ist assoziativ
- $E_\circ$ hat ein neutrales Element

- $E_\circ$ ist abelsch
- und $E_\circ$ ist torsionsfrei.

Also gilt

$\Phi_0(\mathfrak{E}) := (\mathfrak{E}_\circ : \mathfrak{E}_M \times \mathfrak{E}_M \to \mathfrak{E}_M) \wedge Ass_{\mathfrak{E}_M}(\mathfrak{E}_\circ) \wedge \exists e\,(Neutr_{\mathfrak{E}_M,\mathfrak{E}_\circ}(e)) \wedge Komm_{\mathfrak{E}_M}(\mathfrak{E}_\circ) \wedge Torsfr_{\mathfrak{E}_M}(\mathfrak{E}_\circ)$.

Sei nun $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_\to)$ ein 1-Tupel von Variablen. Entsprechend erhalten wir Formeln für die 1-Spezies. $\Phi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{F})$ ist wieder eine Konjunktion von Formeln mit folgenden Bedeutungen:

- $F_\to$ ist eine Abbildung von E_M nach $E_M^{'}$
- $F_\to$ erfüllt die Homomorphismeneigenschaft
- und $F_\to$ bildet das neutrale Element von E_M auf das neutrale Element von $E_M^{'}$ ab.

Die Formel $\Phi_{1\circ 1}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \mathfrak{F}, \mathfrak{F}', \mathfrak{F}'')$ besagt, dass $F''_\to$ die Hintereinanderausführung von $F_\to$ und $F'_\to$ ist.
Wir wollen nun eine *Monoid-Frobeniusmutation*

$$\mathfrak{F}^{mon} := \mathfrak{F}_p^{mon} : \mathfrak{S}^{mon} \rightsquigarrow \mathfrak{S}^{mon}$$

definieren, welche für eine Primzahl p ein Monoid M auf $M^{(p)} := pM \subseteq M$ abbildet. Seien dazu auch Variablentupel $\underline{\mathfrak{E}} = (\underline{\mathfrak{E}}_M, \underline{\mathfrak{E}}_\circ)$ und $\underline{\mathfrak{F}} = (\underline{\mathfrak{F}}_\to)$ gegeben. Wir definieren $\mathfrak{F}^{mon}$ über

- die Formel $\Psi_0(\mathfrak{E}, \underline{\mathfrak{E}})$, welche besagt, dass $\underline{E}_M$ das Bild der Abbildung der Multiplikation mit p von E_M nach E_M ist und $\underline{E}_\circ$ die Einschränkung von $E_\circ$ ist
- und die Formel $\Psi_1(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{F}, \underline{\mathfrak{F}})$, welche besagt, dass $\underline{F}$ die Einschränkung von F auf $\underline{E}_M$ ist.

Wir erhalten eine *Monoid-Frobenius-Mutationsgeschichte* auf dem Graphen, welcher als Ecken die ganzen Zahlen hat und deren Kanten durch $(n, n+1)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ gegeben sind:

$$\ldots \overset{\mathfrak{F}^{mon}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{S}^{mon} \overset{\mathfrak{F}^{mon}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{S}^{mon} \overset{\mathfrak{F}^{mon}}{\rightsquigarrow} \ldots\,.$$

Diese besitzt eine nicht kernartige kontravariante Observable $\mathfrak{V}$. Die Observationsmutationen $\mathfrak{V}_\odot^v$ sind die Identität und die Mutationsmorphismen von $\mathfrak{F}^{mon} = \mathfrak{V}_\odot^{v_2} \circ \mathfrak{F}^{mon}$ nach $id = \mathfrak{V}_\odot^{v_1}$ sind durch die Formel Ξ bestimmt, welche besagt, dass M der Homomorphismus $\mathfrak{V}_\to^e(M) := M^{(p)} \hookrightarrow M$ zugeordnet wird.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, rightsquigarrow] & \mathfrak{S}^{mon} \arrow[rr, rightsquigarrow, "\mathfrak{F}^{mon}"] \arrow[d, rightsquigarrow, "\mathfrak{V}_\odot^{v_1}=id"'] \arrow[rrd, rightsquigarrow, "\mathfrak{F}^{mon}"] \arrow[d, phantom, shift left=6, "\overset{\mathfrak{V}_\to^e}{\Leftarrow}"] & & \mathfrak{S}^{mon} \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, rightsquigarrow, "\mathfrak{V}_\odot^{v_2}=id"] & \ldots \\
& \mathfrak{S}^{mon} & & \mathfrak{S}^{mon} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, mapsto] & M \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & M^{(p)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \ldots & \ldots \arrow[r, mapsto] & (M_1 \to M_2) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (M_1^{(p)} \to M_2^{(p)}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \ldots \\
& M & M^{(p)} & & & (M_1 \to M_2) & (M_1^{(p)} \to M_2^{(p)}) &
\end{tikzcd}$$

Die Formel Ξ ist tatsächlich ein Mutationsmorphismus, denn wir erhalten für einen Homomorphismus $F : M_1 \to M_2$ ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
M_1^{(p)} \arrow[r, "F|_{M_1^{(p)}}=\mathfrak{F}^{mon}(F)"] \arrow[d, hook, "\mathfrak{V}_\to^e(M_1)"'] & M_2^{(p)} \arrow[d, hook, "\mathfrak{V}_\to^e(M_2)"] \\
M_1 \arrow[r, "F=\mathfrak{V}_\odot^{v_1}(F)"'] & M_2
\end{tikzcd}$$

Man erhält ebenso eine *Monoid-p-Vervollkommnungsmutation*

$$\mathfrak{F}^{pf} : \mathfrak{S}^{mon} \rightsquigarrow \mathfrak{S}^{mon}$$

durch den induktiven Limes M^{pf} des Systems $M \overset{\cdot p}{\hookrightarrow} M \overset{\cdot p}{\hookrightarrow} \ldots$ bei dem die Homomorphismen die Multiplikationen mit p sind. Die Abbildung auf Objekten ist also durch $M \mapsto M^{pf}$ gegeben und die Morphismen $F : M_1 \to M_2$ werden gemäß der universellen Eigenschaft des induktiven Limes M_1^{pf} abgebildet.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "F"] & M_1 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "F"] & M_1 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "F"] & \ldots & M_1^{pf} \arrow[d, dashed, "\exists!\, \mathfrak{F}^{pf}(F)"] \\
M_2 \arrow[r, hook, "\cdot p"] & M_2 \arrow[r, hook, "\cdot p"] & M_2 \arrow[r, hook, "\cdot p"] & \ldots \arrow[r] & M_2^{pf}
\end{tikzcd}$$

An den folgenden beiden Diagrammen erkennt man daran, dass als Morphismus die Identität gewählt werden kann, dass die Morphismen $M \xrightarrow{\cdot p} M^{(p)}$ und $M^{(p)} \hookrightarrow M$ für einen Modul M einen Isomorphismus $M^{pf} \to \left(M^{(p)}\right)^{pf}$ induzieren.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[dr, "\cdot p"] & M \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[dr, "\cdot p"] & M \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[dr, "\cdot p"] & \ldots \arrow[r] & M^{pf} \arrow[d] \arrow[dd, dashed, bend left, "\exists!"] \\
M^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, hook] & M^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, hook] & M^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, hook] & \ldots \arrow[r] & \left(M^{(p)}\right)^{pf} \arrow[d] \\
M \arrow[r, hook, "\cdot p"] & M \arrow[r, hook, "\cdot p"] & M \arrow[r, hook, "\cdot p"] & \ldots \arrow[r] & M^{pf}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, hook] & M^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, hook] & M^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, hook] & \ldots \arrow[r] & \left(M^{(p)}\right)^{pf} \arrow[d] \arrow[dd, dashed, bend left, "\exists!"] \\
M \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[dr, "\cdot p"] & M \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[dr, "\cdot p"] & M \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[dr, "\cdot p"] & \ldots \arrow[r] & M^{pf} \arrow[d] \\
M^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] & M^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] & M^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] & \ldots \arrow[r] & \left(M^{(p)}\right)^{pf}
\end{tikzcd}$$

Wählt man die Mutation $\mathfrak{F}^{pf}$ als Observationsmutation $\tilde{\mathfrak{V}}^{v}_{\odot}$ und die induzierten Isomorphismen $M^{pf} \to \left(M^{(p)}\right)^{pf}$ als Mutationsmorphismen $\tilde{\mathfrak{V}}^{e}_{\to}(M)$, so erhält man einen (kovarianten) Kern $\tilde{\mathfrak{V}}$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, squiggly] & \mathfrak{S}^{mon} \arrow[r, squiggly, "\mathfrak{F}^{mon}"] \arrow[d, squiggly, "\mathfrak{F}^{pf}"'] \arrow[dr, squiggly, "\mathfrak{F}^{pf} \circ \mathfrak{F}^{mon}"] & \mathfrak{S}^{mon} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly, "\mathfrak{F}^{pf}"] & \ldots \\
& \mathfrak{S}^{mon} \arrow[ur, phantom, "\tilde{\mathfrak{V}}_{\to}"] & \mathfrak{S}^{mon} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, mapsto] & M \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & M^{(p)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \ldots \\
& M^{pf} & \left(M^{(p)}\right)^{pf} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, mapsto] & (M_1 \to M_2) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (M_1^{(p)} \to M_2^{(p)}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \ldots \\
& (M_1^{pf} \to M_2^{pf}) & \left(\left(M_1^{(p)}\right)^{pf} \to \left(M_2^{(p)}\right)^{pf}\right) &
\end{tikzcd}$$

In diesem Fall sieht das kommutative Diagramm des Mutationsmorphismus folgendermaßen aus:

$$\begin{tikzcd}
M_1^{pf} \arrow[r, "\mathfrak{F}^{pf}(F)"] \arrow[d, "\tilde{\mathfrak{V}}^e_{\to}(M_1)"'] & M_2^{pf} \arrow[d, "\tilde{\mathfrak{V}}^e_{\to}(M_2)"] \\
\left(M_1^{(p)}\right)^{pf} \arrow[r, "\mathfrak{F}^{pf} \circ \mathfrak{F}^{mon}(F)"'] & \left(M_2^{(p)}\right)^{pf}
\end{tikzcd}$$

Die Kommutativität des Diagramms ergibt sich aus der Kommutativität der folgenden kommutativen Diagrammen und der Gleichheit der Morphismen der zugehörigen Spalten.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "F"] & M_1 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "F"] & M_1 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "F"] & \dots \arrow[r] & M_1^{pf} \arrow[d, "\mathfrak{F}^{pf}(F)"] \\
M_2 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "\cdot p"] & M_2 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "\cdot p"] & M_2 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "\cdot p"] & \dots \arrow[r] & M_2^{pf} \arrow[d, "\mathfrak{V}^e_{\to}(M_2)"] \\
M_2^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] & M_2^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] & M_2^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] & \dots \arrow[r] & \left(M_2^{(p)}\right)^{pf}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "\cdot p"] & M_1 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "\cdot p"] & M_1 \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "\cdot p"] & \dots \arrow[r] & M_1^{pf} \arrow[d, "\mathfrak{V}^e_{\to}(M_1)"] \\
M_1^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "F|_{M_1^{(p)}}"] & M_1^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "F|_{M_1^{(p)}}"] & M_1^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] \arrow[d, "F|_{M_1^{(p)}}"] & \dots \arrow[r] & \left(M_1^{(p)}\right)^{pf} \arrow[d, "\mathfrak{F}^{pf} \circ \mathfrak{F}^{mon}(F)"] \\
M_2^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] & M_2^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] & M_2^{(p)} \arrow[r, hook, "\cdot p"] & \dots \arrow[r] & \left(M_2^{(p)}\right)^{pf}
\end{tikzcd}$$

Mittels der natürlichen Inklusion $M \hookrightarrow M^{pf}$ erhalten wir auch einen Morphismus von Mutationen $id_{\mathfrak{S}^{mon}} \to \mathfrak{F}^{pf}$, denn es kommutiert nach Definition für einen Homomorphismus $F : M_1 \to M_2$:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & M_2 \arrow[d, hook] \\
M_1^{pf} \arrow[r, "\mathfrak{F}^{pf}(F)"'] & M_2^{pf}
\end{tikzcd}$$

Man kann diesen Morphismus von Mutationen als Beziehung zwischen der nicht-kernartigen Observable $\mathfrak{V}$ und der kernartigen Observable $\tilde{\mathfrak{V}}$ auffassen (beachte $id_{\mathfrak{S}^{mon}} = \mathfrak{V}^v_{\odot}$ und $\mathfrak{F}^{pf} = \tilde{\mathfrak{V}}^v_{\odot}$). Dabei kommutiert auch das Diagramm mit den Observationsmutationsmorphismen:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook] & M^{pf} \arrow[d, "\tilde{\mathfrak{V}}^e_{\to}(M)"] \\
M^{(p)} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook, "\mathfrak{V}^e_{\to}(M)"] & \left(M^{(p)}\right)^{pf}
\end{tikzcd}$$

3 Konstruktion speziestheoretischer Objekte

Wir haben in den ersten beiden Kapiteln gesehen, dass es mathematische Konstruktionen gibt, welche nicht speziestheoretisch sind, für welche jedoch auch speziestheoretische Konstruktionen existieren. Nun stellt sich die Frage, ob man die nicht-speziestheoretischen Konstruktionen so abwandeln kann, dass man eine speziestheoretische Konstruktion erhält. Wir werden im ersten Abschnitt dies an einem Beispiel erklären und danach zu diesem Beispiel eine allgemeine Theorie aufstellen, welche das Beispiel verallgemeinert. Die dazu benötigten Identifizierungsprojektionen und der Strukturtransport werden im dritten Abschnitt gesondert behandelt. Im vierten Abschnitt werden wir auf den Begriff des Anafunktors eingehen, der statt der Einführung einer geeigeneten Kategorie den Begriff des Funktors verallgemeinert.

3.1 Ein motivierendes Beispiel

In 1.21 haben wir das Tensorprodukt definiert (siehe auch 1.22). Dabei gab es eine speziestheoretische Konstruktion und eine Konstruktion, welche zusätzlich von der Wahl der Basen abhing. Außerdem kann man ein Tensorprodukt auch als ein Objekt ansehen, welches die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts besitzt.
Angenommen, man weiß, dass Tensorprodukte existieren, aber es wäre keine Konstruktion bekannt. Dann kann man sich die Frage stellen, wie es möglich ist, eine speziestheoretische Konstruktion zu finden. Dabei fällt auf, dass die Zusammenfassung aller Tensorprodukte von keiner Auswahl abhängt. Allerdings bildet diese Zusammenfassung keine Menge und betrachtet man alles bezüglich eines Grothendieck-Universums, so hängt alles von dem Universum ab und die Zusammenfassung ist nicht klein.
Kennt man nun jedoch die nicht-speziestheoretische Konstruktion mit der Wahl der Basen, so ist die Zusammenfassung der Tensorprodukte, die durch Wahlen von Basen entstehen, eine kleine Menge, welche speziestheoretisch ist. Nun stellt man fest, dass zwischen diesen so erzeugten Tensorprodukten aufgrund der universellen Eigenschaft auch noch eindeutige Isomorphismen bestehen. Diese kann man nun dazu nutzen, um diese Tensorprodukte miteinander zu „identifizieren“ und so ein Tensorprodukt zu definieren, welches nicht von Basen abhängt und damit speziestheoretisch ist.
Wir wollen in dem folgenden Beispiel diese Idee formal aufschreiben. Die Konstruktion der Identifizierung wird jedoch erst in den beiden darauffolgenden Abschnitten erläutert.

Beispiel 3.1. (Tensorprodukt) Sei U ein Grothendieck-Universum und $k \in U$ ein Körper. Sei Vek_k die Kategorie der Vektorräume über k und $Vek_{k,B}$ die Kategorie der Vektorräume über k mit Basis (jeweils bezüglich U). Wir haben den Vergissfunktor $F : Vek_{k,B} \to Vek_k$.
In der Kategorie $Vek_{k,B}$ kennen wir die nicht-speziestheoretische Konstruktion eines Tensorprodukts, welche in 1.21 beschrieben wird. Wir betrachten nun zu einem Vektorraum V das Urbild unter F und erhalten eine Menge $\{(V, B_i)\}_{i\in I}$ von Vektorräumen mit Basis. Diese Menge ist klein bezüglich U. Zwischen je zwei solchen Vektorräumen mit Basis gibt es nun den Isomorphismus $s_{ij} = id_V$ $(i, j \in I)$. Diese Isomorphismen kommutieren untereinander, denn $s_{ik} = id_V = id_V \circ id_V = s_{ij} \circ s_{jk}$.
Sind nun Vektorräume $V, \tilde{V}$ gegeben, so haben wir zwei Mengen $\{(V, B_i)\}_{i\in I}$ und $\{(\tilde{V}, \tilde{B}_j)\}_{j\in J}$. Wir können für $i \in I$ und $j \in J$ das Tensorprodukt in $Vek_{k,B}$ bilden und erhalten so Vektorräume mit Basen

$$\{((V, B_i) \otimes (\tilde{V}, \tilde{B}_j), B_{i,j})\}_{i\in I, j\in J}$$

zusammen mit bilinearen Abbildungen

$$\phi_{i,j} : (V, B_i) \times (\tilde{V}, \tilde{B}_j) \to (V, B_i) \otimes (\tilde{V}, \tilde{B}_j).$$

Von dem Produkt $(V, B_i)\times(\tilde{V}, \tilde{B}_j)$ zu dem Produkt $(V, B_k)\times(\tilde{V}, \tilde{B}_l)$ haben wir den Isomorphismus $t_{ijkl} := s_{ik} \times \tilde{s}_{jl} = id_V \times id_{\tilde{V}}$ und es gilt $t_{ijmn} = t_{klmn} \circ t_{ijkl}$ für $i, k, m \in I, j, l, n \in J$. Wir erhalten mittels der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts nun Isomorphismen u_{ijkl} derart, dass das folgende Diagamm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
(V,B_i)\times(\tilde V,\tilde B_j) \arrow[r, "t_{ijkl}"] \arrow[d, "\phi_{ij}"] & (V,B_k)\times(\tilde V,\tilde B_l) \arrow[d, "\phi_{kl}"] \\
(V,B_i)\otimes(\tilde V,\tilde B_j) \arrow[r, "u_{ijkl}"] & (V,B_k)\otimes(\tilde V,\tilde B_l)
\end{tikzcd}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Isomorphismen folgt auch $u_{ijmn} = u_{klmn} \circ u_{ijkl}$ für $i,k,m \in I, j,l,n \in J$. Also sind alle Vektorräume aus $\{(V,B_i)\otimes(\tilde V,\tilde B_j)\}_{i\in I, j\in J}$ paarweise mit Isomorphismen verbunden, die alle miteinander kommutieren.
Die Isomorphismen u_{ijkl} können nun (wie später gezeigt wird) genutzt werden, um die Vektorräume $F((V,B_i)\otimes(\tilde V,\tilde B_j))$ zu identifizieren, also einen Vektorraum (ohne Basis) $V\otimes\tilde V$ zu definieren, der mittels Abbildungen ψ_{ij} isomorph zu jedem einzelnen Vektorraum aus $\{F((V,B_i)\otimes(\tilde V,\tilde B_j))\}_{i\in I,j\in J}$ ist und diese Isomorphismen kommutieren mit den $F(u_{ijkl})$. Wir zeichnen das zugehörige Diagramm nach Vergessen der Basen auf.

$$\begin{tikzcd}
V\times\tilde V \arrow[r, equal] & F((V,B_i))\times F((\tilde V,\tilde B_j)) \arrow[rr, "F(t_{ijkl})=id_V\times id_{\tilde V}"] \arrow[d, "F(\phi_{ij})"] & & F((V,B_k))\times F((\tilde V,\tilde B_l)) \arrow[r, equal] \arrow[d, "F(\phi_{kl})"] & V\times\tilde V \\
 & F((V,B_i)\otimes(\tilde V,\tilde B_j)) \arrow[rr, "F(u_{ijkl})"] \arrow[dr, "\psi_{ij}"'] & & F((V,B_k)\otimes(\tilde V,\tilde B_l)) \arrow[dl, "\psi_{kl}"] & \\
 & & V\otimes W & &
\end{tikzcd}$$

Unter Beachtung von $F((V,B_i))\times F((\tilde V,\tilde B_j)) = V\times\tilde V$ und $F(t_{ijkl}) = id_V \times id_{\tilde V} = id_{V\times\tilde V}$ erhalten wir auch eine Abbildung $V\times\tilde V \to V\otimes\tilde V$, welche $V\otimes\tilde V$ zu einem Tensorprodukt von V und $\tilde V$ in Vek_k macht.

Bemerkung 3.2. Während die Abbildungen t_{ijkl} der Identität auf den Vektorräumen $V\times\tilde V$ entspricht, entsprechen die Abbildungen u_{ijkl} Basiswechselabbildungen auf den Tensorprodukten, wenn man beachtet, dass die Vektorräume $(V,B_i)\otimes(\tilde V,\tilde B_j)$ als freie Vektorräume über Basen definiert werden.

3.2 Familien identifizierter Objekte

Wir wollen nun die Konstruktion aus dem eben genannten Beispiel abstrakt formulieren und so verallgemeinern. Dazu benötigen wir zunächst eine geeignete Kategorie, in welchen die Mengen $\{(V,B_i)\}_{i\in I}$ zusammen mit den Isomorphismen s_{ij} Objekte sind. Es stellt sich dabei heraus, dass es dafür sinnvoll ist, statt den Mengen $\{(V,B_i)\}_{i\in I}$ Familien zu nehmen, da sonst Probleme bei der Anwendung von Funktoren auftreten, wenn zwei verschiedene Objekte auf das gleiche Objekt abgebildet werden, aber nicht mit der Identität identifiziert werden. Mit Familien kann man dann zulassen, dass Objekte mehrfach in einer Familie auftauchen und nicht mit der Identität identifiziert werden. Die Konstruktionen werden dadurch recht technisch, da stets die Indizes mitzuführen sind.

Definition/Aussage 3.3. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir wollen eine *Kategorie der Familien identifizierter Objekte von* $\mathcal{C}$, welche mit $Fid(\mathcal{C})$ bezeichnet wird, definieren.
Ein Objekt von $Fid(\mathcal{C})$ sei ein Tripel

$$A := (I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I})$$

bestehend aus einer kleinen nicht-leeren Indexmenge I, einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Objekten von $\mathcal{C}$ (Objekte dürfen auch mehrmals in der Familie auftauchen) induziert durch I und einer Familie von *Identifizierungsisomorphismen* $(f_{ij})_{i,j\in I}$, wobei $f_{ij} \in Mor_{\mathcal{C}}(A_i, A_j)$ für $i,j \in I$. Dabei soll für alle $i,j,k \in I$ die Beziehung

$$f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij} \tag{3.1}$$

(also insbesondere $f_{ii} = id_{A_i}$ $(i = j = k)$, $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ $(i = k)$) gelten, das heißt, dass alle Isomorphismen miteinander kommutieren sollen. Man stelle sich ein Objekt als vollständigen Graphen vor, bei dem jede Ecke für ein Objekt von $\mathcal{C}$ steht und eine Kante für zwei zueinander inverse Isomorphismen, welche die Objekte an den Enden der Kante miteinander identifizieren, wobei alle diese Identifizierungen kompatibel sind.
Ein *Morphismus von Familien identifizierter Objekte* von $A := (I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I})$ nach $B := (J, (B_j)_{j\in J}, (g_{ij})_{i,j\in J})$ ist eine Familie von Morphismen

$$\alpha := (\alpha_{ij})_{i\in I, j\in J}$$

mit $\alpha_{ij} \in Mor_{\mathcal{C}}(A_i, B_j)$ derart, dass

$$\alpha_{jk} \circ f_{ij} = g_{lk} \circ \alpha_{il} \tag{3.2}$$

für alle $i,j \in I, k,l \in J$ gilt. Diese Beziehung bedeutet, dass die Morphismen mit den Isomorphismen der Familien identifizierter Objekte sämtlich kommutieren. Insbesondere ist ein Morphismus $\alpha \in Mor_{Fid(\mathcal{C})}(A,B)$ durch einen einzelnen Morphismus $\alpha_{ij} \in Mor_{\mathcal{C}}(A_i, B_j)$ mit $i \in I, j \in J$ eindeutig bestimmt und jeder solche Morphismus α_{ij} induziert ein $\alpha \in Mor_{Fid(\mathcal{C})}(A,B)$. Man stelle sich also einen Morphismus so vor, dass es ein beliebiger Morphismus in $\mathcal{C}$ von einem beliebigen A_i $(i \in I)$ zu einem beliebigen B_j $(j \in J)$ ist und sich alle anderen Morphismen $A_{\tilde{i}} \to B_{\tilde{j}}$ $(\tilde{i} \in I, \tilde{j} \in J)$ automatisch ergeben oder alternativ als Familie von Morphismen, die durch jeden einzelnen Morphismus repräsentiert wird.
Die *Hintereinanderausführung zweier Morphismen* $\alpha \in Mor_{Fid(\mathcal{C})}(A,B), \beta \in Mor_{Fid(\mathcal{C})}(B,C)$ mit $C := (K, (C_k)_{k\in K}, (h_{ij})_{i,j\in K})$ $(A, B$ wie vorher) sei definiert mittels

$$\beta \circ \alpha := (\beta_{jk} \circ \alpha_{ij})_{i\in I, k\in K}$$

für ein beliebiges $j \in J$. Dies ist wohldefiniert, denn es ist mittels Anwendung der Eigenschaft der Morphismen von Familien identifizierter Objekte (3.2) sowie (3.1) nun

$$\beta_{jk} \circ g_{\tilde{j}j} = h_{kk} \circ \beta_{\tilde{j}k} = \beta_{\tilde{j}k} \text{ und } \alpha_{ij} = \alpha_{ij} \circ f_{ii} = g_{\tilde{j}j} \circ \alpha_{i\tilde{j}}$$

und damit

$$\beta_{jk} \circ \alpha_{ij} = (\beta_{\tilde{j}k} \circ g_{\tilde{j}j}^{-1}) \circ (g_{\tilde{j}j} \circ \alpha_{i\tilde{j}}) = \beta_{\tilde{j}k} \circ \alpha_{i\tilde{j}}$$

für $i \in I, j, \tilde{j} \in J, k \in K$. Die Hintereinanderausführung ist also auch durch die Hintereinanderausführung zweier beliebiger Morphismen mit gleichem j gegeben.
Mit dem Identitätsmorphismus $\alpha : A \to A$ definiert mittels

$$(\alpha_{ij})_{i,j\in I} := (f_{ij})_{i,j\in I}$$

(die Morphismuseigenschaft (3.2) $\alpha_{jk} \circ \alpha_{ij} = \alpha_{lk} \circ \alpha_{il}$ folgt aus dem Kommutieren der Identifizierungsisomorphismen (3.1), da beide gleich α_{ik} sind) erhalten wir wie gewünscht eine Kategorie. Dabei ergeben sich Assoziativität und die Eigenschaft des Identitätsmorphismus sofort daraus, dass sich die Morphismen von Familien identifizierter Objekte auf einzelne Morphismen in $\mathcal{C}$ zurückführen lassen und der Identitätsmorphismus α die Eigenschaft $\alpha_{ii} = f_{ii} = id_{A_i}$ für $i \in I$ besitzt.

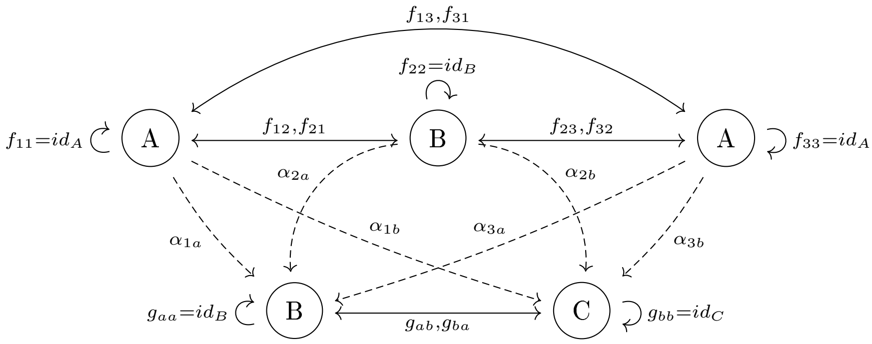
Die folgenden Beispiele illustrieren die eben gemachte Definition.

Beispiel 3.4. Seien A, B, C Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$ und Isomophismen $f_{12} : A \to B$, $f_{23} : B \to A$ und $g_{ab} : B \to C$ gegeben. Definiere $f_{21} := f_{12}^{-1}$, $f_{32} := f_{23}^{-1}$, $f_{13} := f_{23} \circ f_{12}$, $f_{31} := f_{13}^{-1}$, $g_{ba} := g_{ab}^{-1}$, $f_{11} := id_A$, $f_{22} := id_B$, $f_{33} := id_A$, $g_{aa} := id_B$ und $g_{bb} := id_C$. Nun sind

$$\left(\{1,2,3\}, \{(A,1), (B,2), (A,3)\}, (f_{ij})_{i,j\in\{1,2,3\}}\right)$$

$$\text{und } \left(\{a,b\}, \{(B,a),(C,b)\}, (g_{ij})_{i,j\in\{a,b\}}\right)$$

Familien identifizierter Objekte über $\mathcal{C}$.
Sei nun $\alpha_{1a} : A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Definiere $\alpha_{1b} := g_{ab} \circ \alpha_{1a}$, $\alpha_{2a} := \alpha_{1a} \circ f_{21}$, $\alpha_{2b} := g_{ab} \circ \alpha_{1a} \circ f_{21}$, $\alpha_{3a} := \alpha_{1a} \circ f_{31}$ und $\alpha_{3b} := g_{ab} \circ \alpha_{1a} \circ f_{31}$. Dann erhalten wir einen Morphismus von Familien identifizierter Objekte $(\alpha_{ij})_{i\in\{1,2,3\},j\in\{a,b\}}$.



Beispiel 3.5. Sei $\mathcal{C} = Vek_{k,B}$. Nun haben wir zu jedem Vektorraum V die nicht-leere Menge der Basen I_V. Wir erhalten zu jedem Vektorraum V eine Familie identifizierter Objekte

$$(I_V, (V)_{i\in I_V}, (id_V)_{i,j\in I_V}).$$

Ist nun $\phi : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus, dann haben wir auch einen Morphismus von Familien identifizierter Objekte

$$(\phi)_{i\in I_V, j\in I_W} : (I_V, (V)_{i\in I_V}, (id_V)_{i,j\in I_V}) \to (I_W, (V)_{i\in I_W}, (id_W)_{i,j\in I_W}),$$

der überall durch ϕ repräsentiert wird.

Eine ähnliche Konstruktion taucht auch bei Mochizuki auf. Mochizuki definiert in [Mot5] Präorbiobjekte („Pre-orbi-objects") zu einer Kategorie $\mathcal{C}$.

Beispiel/Definition 3.6. (Orbiobjekte) Ein *Präorbiobjekt von* $\mathcal{C}$ ist ein Paar

$$(S, A)$$

bestehend aus einem Objekt S von $\mathcal{C}$ und einer Untergruppe A von der Automorphismengruppe $Aut(S)$.
Ein *Morphismus von Präorbiobjekten* $(S, A) \to (T, B)$ ist ein B-Orbit von Morphismen $S \to T$, die unter A abgeschlossen ist, also eine Menge X von Morphismen $S \to T$ derart, dass für ein und damit alle $x \in X$ die Beziehung $B \circ x = X$ gilt und $X \circ A \subseteq X$ gilt.
Wir erhalten eine *Kategorie von Präorbiobjekten* $Präorb(\mathcal{C})$. Nun entspricht $Fid(Präorb(\mathcal{C}))$ genau der *Kategorie der Orbiobjekte* $Orb(\mathcal{C})$ aus [Mot5][S.28]. Andererseits ist die volle Unterkategorie mit den Objekte von $Orb(\mathcal{C})$, welche die triviale Untergruppe der Automorphismengruppe als zweite Komponente haben, isomorph zu $Fid(\mathcal{C})$.

Definition 3.7. Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ haben eine Inklusion von Kategorien

$$\iota_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \hookrightarrow Fid(\mathcal{C}), \quad A \mapsto (\{A\}, (A)_{i=A}, (id_A)_{i=j=A}), \quad (f : A \to B) \mapsto (f)_{i=A,j=B},$$

wobei wir die einelementige Menge $\{A\}$ als Indexmenge wählen.

Bemerkung 3.8. Statt $\{A\}$ kann man zum Beispiel auch $\{\emptyset\}$ als Indexmenge verwenden.

Diese Inklusion ist eine schwache Äquivalenz von Kategorien, da der Funktor volltreu und wesentlich surjektiv ist (siehe 2.19).
Sei nun $\mathcal{D}$ eine weitere Kategorie. Wir wollen Konstruktionen definieren, welche aus Funktoren F von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ Funktoren von $Fid(\mathcal{C})$ nach $Fid(\mathcal{D})$ oder von $Fid(\mathcal{D})$ nach $Fid(\mathcal{C})$ machen. Der erste Funktor soll dabei F entsprechen und der zweite Funktor einer Art Urbild von F.

Definition 3.9. Zu jedem Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ definieren wir einen *zugehörgen Funktor der Familien identifizierter Objekte*

$$Fid(F) : Fid(\mathcal{C}) \to Fid(\mathcal{D})$$

mittels:

$$(I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I}) \mapsto (I, (F(A_i))_{i\in I}, (F(f_{ij}))_{i,j\in I}), \quad (\alpha_{ij})_{i\in I, j\in J} \mapsto (F(\alpha_{ij}))_{i\in I, j\in J}.$$

Die Funktoreigenschaften von $Fid(F)$ ergeben sich direkt aus der Funktorialität von F.

Bemerkung 3.10. Sind $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren, so gilt $Fid(G) \circ Fid(F) = Fid(G \circ F)$.

Für den zweiten Funktor müssen wir zusätzliche Voraussetzungen an F stellen.

Definition 3.11. Wir nennen einen Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *identifiziert invertierbar*, wenn F volltreu ist und dessen Urbilder $F^{-1}(C)$ für jedes Objekt C von $\mathcal{D}$ eine nichtleere kleine Menge von Objekten von $\mathcal{C}$ bilden. Insbesondere ist F surjektiv.

Nach 2.19 induziert F eine schwache Äquivalenz von Kategorien. Wir haben auch den folgenden Satz zur Charakterisierung von $\mathcal{C}$ und F.

Satz 3.12. *Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ identizifiert invertierbar. Dann ist $\mathcal{C}$ isomorph zu folgender Kategorie $\mathcal{E}$: die Objekte sind Kopien von Objekten A von $\mathcal{D}$, wobei die Kopien von A durch $F^{-1}(A)$ induziert seien und die Morphismenmengen Kopien von den enstprechenden Morphismenmengen in D mit der gleichen Hintereinanderausführung seien. Außerdem kommutiert der im Beweis konstruierte Isomorphismus G mit F und der Projektion $H : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$, das heißt $F \circ G = H$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "H"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir schreiben die Kategorie $\mathcal{E}$ genauer auf. Es ist

$$Ob(\mathcal{E}) = \left\{(A, X) | A \in Ob(\mathcal{D}), X \in F^{-1}(A)\right\}$$

$$\text{und } Mor(\mathcal{E}) = \{(f, (A, X), (B, Y)) | (A, X), (B, Y) \in Ob(\mathcal{E}), f \in Mor_{\mathcal{D}}(A, B)\}.$$

Sind $(A, X), (B, Y), (C, Z) \in Ob(\mathcal{E})$ und $(f_1, (A, X), (B, Y))$, $(f_2, (B, Y), (C, Z))$ Morphismen, so definieren wir ihre Hintereinanderausführung als $(f_2 \circ f_1, (A, X), (C, Z))$. Die Identität von (A, X) ist durch $(id_A, (A, X), (A, X))$ gegeben.
Der Isomorphismus $G : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ wird nun gemäß $G((A, X)) = X$ auf Objekten und mittels $G((f, (A, X), (B, Y)))$ ist der eindeutige Morphismus $\alpha : X \to Y$ mit $F(\alpha) = f$ auf Morphismen definiert.
Da F funktoriell ist und somit bei gegeben $(A, X), (B, Y), (C, Z) \in Ob(\mathcal{E})$, $(f_1, (A, X), (B, Y))$, $(f_2, (B, Y), (C, Z)) \in Mor(\mathcal{E})$ und $\alpha : X \to Y$ sowie $\beta : Y \to Z$ mit $F(\alpha) = f_1$ und $F(\beta) = f_2$ die Relation $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha) = f_2 \circ f_1$ gilt, erhält man mit der Treuheit von F die Funktorialität von G. Die Surjektivität von G auf Objekten folgt direkt aus der Definition. G ist volltreu, da für ein $\alpha : X \to Y$ mit $X, Y \in \mathcal{C}$ nur dann $G((f, (A, X), (B, Y))) = \alpha$ gelten kann, wenn $A = F(X)$, $B = F(Y)$ und $f = F(\alpha)$ gelten und dadurch wird auch ein Morphismus definiert.
Die Projektion H ist durch $(A, X) \mapsto A$ auf Objekten und $(f, (A, X), (B, Y)) \mapsto f$ auf Morphismen gegeben. Es gilt $(F \circ G)((A, X)) = F(X) = A$ und $(F \circ G)((f, (A, X), (B, Y))) = f$ nach Definition. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Definition/Aussage 3.13. Sei nun $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ identifiziert invertierbar. Wir wollen den *zugehörigen Urbildfunktor der Familien identifizierter Objekte*

$$Fid^{-1}(F) : Fid(\mathcal{D}) \to Fid(\mathcal{C})$$

definieren.
Sei dazu ein Objekt $B := (J, (B_j)_{j\in J}, (g_{ij})_{i,j\in J})$ von $Fid(\mathcal{D})$ gegeben. Nun ordnen wir diesem das Objekt $A := (I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I})$ von $Fid(\mathcal{C})$ zu, welches wie folgt beschrieben wird:

$$I := \{(X, j) \mid X \in F^{-1}(B_j), j \in J\},\ A_{(X,j)} := X$$

$$\text{und } f_{(X,i),(Y,j)} : A_{(X,i)} \to A_{(Y,j)} \text{ ist der eindeutige Morphismus mit } F(f_{(X,i),(Y,j)}) = g_{ij}.$$

Die Objekte der Familie $(A_k)_{k\in J}$ sind also genau die Vereinigungen der Urbilder der Objekte von $(B_j)_{j\in J}$, wobei sich der Index j gemerkt wird. Aus der Volltreuheit von F folgen

$$f_{(X,i)(X,i)} = id_X$$

(es ist $F(f_{(X,i)(X,i)}) = g_{ii} = id_{F(X)} = F(id_X)$)

$$\text{und die Eigenschaft (3.1):} f_{(Z,k)(Y,j)} \circ f_{(Y,j)(X,i)} = f_{(Z,k)(X,i)}$$

(es ist $F(f_{(Y,j)(Z,k)} \circ f_{(X,i)(Y,j)}) = F(f_{(Y,j)(Z,k)}) \circ F(f_{(X,i)(Y,j)}) = g_{jk} \circ g_{ij} = g_{ik} = F(f_{(X,i)(Z,k)})$) für alle $(X, i), (Y, j), (Z, k) \in J$ und insbesondere sind die Morphismen $f_{(X,i)(Y,j)}$ Isomorphismen. Also erhält man ein Objekt von $Fid(\mathcal{C})$.
Sei nun $\beta = (\beta_{ij})_{i\in J, j\in \tilde{J}} : B \to \tilde{B}$ ein Morphismus in $Fid(\mathcal{D})$ mit $B = (J, (B_j)_{j\in J}, (g_{ij})_{i,j\in J})$ und $\tilde{B} = (\tilde{J}, (\tilde{B}_j)_{j\in\tilde{J}}, (\tilde{g}_{ij})_{i,j\in\tilde{J}})$. Wir definieren das Bild von β als dasjenige $\alpha := (\alpha_{ij})_{i\in I, j\in\tilde{J}}$ mit

$$I = \{(X, j)|X \in F^{-1}(B_j), j \in J\} \text{ und } \tilde{I} = \{(X, j)|X \in F^{-1}(\tilde{B}_j), j \in \tilde{J}\},$$

welches mit der Volltreuheit von F durch

$$F(\alpha_{(X,i),(Y,j)}) = \beta_{i,j}$$

gegeben ist. Dabei ist $\alpha := (\alpha_{ij})_{i\in I, j\in\tilde{J}}$ ein Morphismus, da die Eigenschaft (3.2), also

$$\alpha_{(Y,j)(Z,k)} \circ f_{(X,i)(Y,j)} = \tilde{f}_{(U,l)(Z,k)} \circ \alpha_{(X,i)(U,l)}$$

mit der Volltreuheit von F aus

$$\beta_{jk} \circ g_{ij} = \tilde{g}_{lk} \circ \beta_{il}$$

folgt, welches (3.2) für β ist.
In analoger Art zum Nachweis, dass es eine Familie identifizierter Objekte ist, kann auch die Funktorialität gezeigt werden.

Bemerkung 3.14. Sind $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ identifiziert invertierbar, dann gilt nicht $Fid^{-1}(F) \circ Fid^{-1}(G) = Fid^{-1}(G \circ F)$, da die Indexmengen verschieden sind. Wir betrachten dieses Problem in Anhang A.

Beispiel 3.15. Seien $\mathcal{C} := Vek_{k,B}$, $\mathcal{D} := Vek_k$ und $F : Vek_{k,B} \to Vek_k$ der Vergissfunktor. Sei nun V ein Vektorraum mit Automorphismus ϕ, B_1 und B_2 Basen von V und $I := \{1, 2\}$. Sei $f_{12} := \phi$ und $f_{21} := \phi^{-1}$. Nun bildet

$$(I, \{(1, V_{B_1}), (2, V_{B_2})\}, \{((1, 1), id_V), ((1, 2), \phi), ((2, 1), \phi^{-1}), ((2, 2), id_V)\})$$

eine Familie identifizierter Objekte von $Vek_{k,B}$. Das Bild unter $Fid(F)$ ist

$$(I, \{(1, V), (2, V)\}, \{((1, 1), id_V), ((1, 2), \phi), ((2, 1), \phi^{-1}), ((2, 2), id_V)\}).$$

Im Fall $\phi = id_V$ und $B_1 \neq B_2$ sind V_{B_1} und V_{B_2} verschiedene Objekte von Vek_B, welche mittels F auf das gleiche Objekt in Vek_k abgebildet werden und mittels der Identität im Bild in der Kategorie Vek_k identifiziert werden.
Der Funktor F ist identifiziert invertierbar, da er volltreu und surjektiv ist und man von der kleinen Menge aller Basen reden kann. Wir erhalten also einen Funktor $Fid^{-1}(F)$. Dieser bildet einen

Vektorraum V (bzw. dessen Bild der Inklusion), also die durch die einelementige Indexmenge $\{V\}$ induzierte Familie identifizierter Objekte $(\{V\}, (V)_{i=V}, (id_V)_{i=j=V})$ auf die Familie identifizierter Objekte

$$(I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I})$$

mit $I := \{((V, B), V) \mid \text{B Basis von V}\}$, $A_{((V,B),V)} := (V, B)$, $f_{ij} := id_V$ (für alle $i, j \in I$) ab. Es werden demnach alle möglichen Basen gewählt und alle so entstehenden Vektorräume mit Basis mittels der Identität auf dem Vektorraum identifiziert.

Wir kommen nun zu dem Begriff, der wichtig ist, um die Identifizierung zu beschreiben.

Definition 3.16. Wir nennen einen Funktor $P : Fid(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ zusammen mit Familien von Isomorphismen $(g_i^A)_{i\in I}$ mit $g_i^A \in Mor_{\mathcal{C}}(A_i, P(A))$, welche zu jedem $A = (I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I}) \in Fid(\mathcal{C})$ existieren mögen, eine *Identifizierungsprojektion*, wenn gilt: Ist $B = (J, (B_i)_{i\in J}, (f_{ij})_{i,j\in J}) \in Fid(\mathcal{C})$ und $(\alpha_{ij})_{i\in I, j\in J} : A \to B$ ein Morphismus, so gilt

$$P((\alpha_{ij})_{i\in I,j\in J}) \circ g_i^A = g_j^B \circ \alpha_{ij} \tag{3.3}$$

für alle $i \in I$, $j \in J$.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\alpha_{ij}"] \arrow[d, "g_i^A"] & B_j \arrow[d, "g_j^B"] \\ P(A) \arrow[r, "P((\alpha_{ij})_{i\in I,j\in J})"'] & P(B) \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt für $A = B$ und $(\alpha_{ij})_{i\in I,j\in J} = id_A = (f_{ij})_{i\in I,j\in J}$ die Beziehung $g_i^A = g_j^A \circ f_{ij}$ für alle $i, j \in I$.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "g_i^A"'] & & A_j \arrow[dl, "g_j^A"] \\ & P(A) & \end{tikzcd}$$

Man bemerke auch, dass zu gegebenen Bijektionen $(g_i^A)_{i\in I} \in Mor_{\mathcal{C}}(A_i, P(A))$ zu Objekten $P(A)$ für alle $A \in Fid(\mathcal{C})$, welche die Beziehung $g_i^A = g_j^A \circ f_{ij}$ für alle $i, j \in I$ erfüllen, mittels (3.3) die Morphismenabbildung von P definiert wird und damit genau ein Funktor P bestimmt wird, der eine Identifizierungsprojektion ist (siehe 3.18).
Fassen wir P als Funktor in die Kategorie der Familien identifizierter Objekte auf (mittels Verkettung mit $\iota_{\mathcal{C}}$), so können wir die Familien $(g_i^A)_{i\in I}$ als natürlichen Isomorphismus von $Id_{Fid(\mathcal{C})}$ nach P verstehen.

Bemerkung 3.17. Wenn $P : Fid(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ zusammen mit den Familien $(g_i^A)_{i\in I}$ eine Identifizierungsprojektion ist, so können wir dies folgendermaßen nutzen, um eine starke Äquivalenz von Kategorien mit den Funktoren $\iota_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to Fid(\mathcal{C})$ und $P : Fid(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ nachzuweisen.
Wir definieren also zwei natürliche Isomorphismen bezüglich dieser Funktoren. Sei $A \in Ob(\mathcal{C})$. Dann ist $g_A^{\iota_{\mathcal{C}}(A)} : A \to P\iota_{\mathcal{C}}(A)$ ein Isomorphismus. Ist nun $B \in Ob(\mathcal{C})$ und $f : A \to B$ ein Morphismus, dann gilt mit (3.3) und der Definition von $\iota_{\mathcal{C}}$

$$P\iota_{\mathcal{C}}(f) \circ g_A^{\iota_{\mathcal{C}}(A)} = g_B^{\iota_{\mathcal{C}}(B)} \circ \iota_{\mathcal{C}}(f)_{A,B} = g_B^{\iota_{\mathcal{C}}(B)} \circ f$$

und wir erhalten den gewünschten natürlichen Isomorphismus $g_{\_}^{\iota_{\mathcal{C}}(\_)} : Id_{\mathcal{C}} \to P\iota_{\mathcal{C}}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_A^{\iota_{\mathcal{C}}(A)}"'] & B \arrow[d, "g_B^{\iota_{\mathcal{C}}(B)}"] \\ P(\iota_{\mathcal{C}}(A)) \arrow[r, "P\iota_{\mathcal{C}}(f)"'] & P(\iota_{\mathcal{C}}(B)) \end{tikzcd}$$

Sei nun $A = (I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I}) \in Ob(Fid(\mathcal{C}))$. Dann ist $(g_i^A)_{i\in I, j=P(A)} : A \to \iota_{\mathcal{C}}(P(A))$ ein Isomorphismus. Ist nun $B = (J, (B_i)_{i\in J}, (f_{ij})_{i,j\in J}) \in Fid(\mathcal{C})$ und $(h_{ij})_{i\in I, j\in J} : A \to B$, so ist nach der Definition der Identifizierungsprojektion mit (3.3) nun $P((h_{ij})_{i\in I, j\in J}) \circ g_i^A = g_j^B \circ h_{ij}$ für alle $i \in I$, $j \in J$. Daraus folgt

$$\iota_{\mathcal{C}} P((h_{ij})_{i\in I, j\in J}) \circ (g_i^A)_{i\in I, j=P(A)} = (g_i^B)_{i\in J, j=P(B)} \circ (h_{ij})_{i\in I, j\in J}$$

und wir erhalten einen natürlichen Isomorphismus $(g_i^{-})_{i\in I, j=P(\_)} : Id_{Fid(\mathcal{C})} \to \iota_{\mathcal{C}} P$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "(h_{ij})_{i\in I,j\in J}"] \arrow[d, "(g_i^A)_{i\in I,j=P(A)}"'] & B \arrow[d, "(g_j^B)_{i\in J,j=P(B)}"] \\
\iota_{\mathcal{C}} P(A) \arrow[r, "\iota_{\mathcal{C}} P((h_{ij})_{i\in I,j\in J})"'] & \iota_{\mathcal{C}} P(B)
\end{tikzcd}$$

Beispiel 3.18. (Identifizierungsprojektionen für Mengen) In der Kategorie der Mengen existiert eine Identifizierungsprojektion: Sei $A = (I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I})$ eine Familie identifizierter Objekte von Set. Nun sind f_{ij} Bijektionen, welche miteinander kommutieren. Man erhält eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der disjunkten Vereinigung $\dot{\bigcup} A_i := \bigcup A_i \times \{i\}$ definiert durch: $A_i \times \{i\} \ni (a_i, i) \sim (a_j, j) \in A_j \times \{j\}$ gilt genau dann, wenn $f_{ij}(a_i) = a_j$. Wir definieren die Menge der Äquivalenzklassen

$$\tilde{A} := \left\{ x | \exists y \in \dot{\cup} A_i \left((y \in x) \wedge \forall z \left(z \in x \leftrightarrow z \sim y \right) \right) \right\}$$

als Bild der Identifizierungsprojektion von A. Nun ist nach Konstruktion in jeder Äquivalenzklasse genau ein Element der Form (a_i, i) mit $a_i \in A_i$ für jedes $i \in I$. Diese Eigenschaft induziert Bijektionen $g_i^A : A_i \to \tilde{A}$, welche nach Konstruktion die Eigenschaft $g_i^A = g_j^A \circ f_{ij}$ haben.
Ist nun $B = (J, (B_i)_{i\in J}, (g_{ij})_{i,j\in J}) \in Fid(Set)$ und ein Morphismus $(\alpha_{ij})_{i\in I, j\in J} : A \to B$ gegeben, dann können wir $P((\alpha_{ij})_{i\in I, j\in J})$ mittels $P((\alpha_{ij})_{i\in I, j\in J}) := g_j^B \circ \alpha_{ij} \circ \left(g_i^A\right)^{-1}$ für beliebiges $i \in I$, $j \in J$ definieren. Wegen $g_i^A = g_j^A \circ f_{ij}$ für $i, j \in I$, $g_i^B = g_j^B \circ g_{ij}$ für $i, j \in J$, $g_{lk} \circ \alpha_{il} = \alpha_{jk} \circ f_{ij}$ für $i, j \in I$, $k, l \in J$ (siehe (3.2)) und $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ für $i, j \in I$ (siehe (3.1)) folgt nun

$$g_j^B \circ \alpha_{ij} \circ \left(g_i^A\right)^{-1} = g_k^B \circ g_{jk} \circ \alpha_{ij} \circ \left(g_l^A \circ f_{il}\right)^{-1} = g_k^B \circ \alpha_{lk} \circ \left(g_l^A\right)^{-1}$$

für $i, l \in I$ und $j, k \in J$ und damit ist $P((\alpha_{ij})_{i\in I, j\in J})$ wohldefiniert.
Ist nun $C = (K, (B_i)_{i\in K}, (h_{ij})_{i,j\in K}) \in Fid(Set)$ und ein Morphismus $(\beta_{ij})_{i\in J, j\in K} : B \to C$ gegeben, so gilt

$$\begin{aligned} P((\beta_{ij})_{i\in J, j\in K}) \circ P((\alpha_{ij})_{i\in I, j\in J}) &= g_k^C \circ \beta_{jk} \circ \left(g_j^B\right)^{-1} \circ g_j^B \circ \alpha_{ij} \circ \left(g_i^A\right)^{-1} = g_k^C \circ (\beta \circ \alpha)_{ik} \circ \left(g_i^A\right)^{-1} \\ &= P(((\beta \circ \alpha)_{ij})_{i\in I, j\in K}) \end{aligned}$$

für beliebige $i \in I$, $j \in J$ und $k \in K$. Weiter bildet P die Identität auf die Identität ab (wähle $i = j$). Man erhält die Funktorialität von P. Nach Definition erfüllt P auch die Eigenschaft (3.3) einer Identifizierungsprojektion und es ist alles für P gezeigt.
Diese Vorgehensweise funktioniert zum Beispiel auch für Monoide, Gruppen, Ringe, k-Vektorräume oder topologischen Räume, indem man die gleiche Identifizierung auf die jeweiligen Grundmengen anwendet und die Struktur auf das so entstandene Objekt überträgt. Wir gehen im nächsten Abschnitt näher darauf ein.

Beispiel 3.19. (Tensorprodukt für Vektorräume) Wir wollen Beispiel 3.1 in der Sprache der Familien identifizierter Objekte beschreiben. Wir benötigen dazu die Kategorie der Paare von Vektorräumen Vek_k^2, die Kategorie der Paare von Vektorräumen mit Basis $Vek_{k,B}^2$ und den Vergissfunktor $F_{2,B} : Vek_{k,B}^2 \to Vek_k^2$, der die Basis vergisst. Außerdem brauchen wir Vek_k^{1+2} und $Vek_{k,B}^{1+2}$ aus 2.16 für Vektorräume ohne und mit Basis und die Inklusionen

$$\iota_{\otimes,B} : Vek_{k,B} \to Vek_{k,B}^{1+2} \text{ und } \iota_{\otimes} : Vek_k \to Vek_k^{1+2}.$$

Wir haben dann den Universalitätsfunktor

$$F_{\otimes,B} : Vek_{k,B}^{1+2} \to Univ_{Vek_{k,B}^{1+2},Vek_{k,B},\iota_{\otimes,B}} \text{ zu } \iota_{\otimes,B} : Vek_{k,B} \to Vek_{k,B}^{1+2}$$

mittels der Konstruktion des Tensorprodukts mit Basen aus 1.21 und den Vergissfunktor

$$F_{Univ,B} : Univ_{Vek_{k,B}^{1+2},Vek_{k,B},\iota_{\otimes,B}} \to Univ_{Vek_k^{1+2},Vek_k,\iota_\otimes},$$

der die Basen vergisst. Zuletzt haben wir noch eine Identifizierungsprojektion

$$P : Fid\left(Univ_{Vek_k^{1+2},Vek_k,\iota_\otimes}\right) \to Univ_{Vek_k^{1+2},Vek_k,\iota_\otimes}.$$

Verketten wir nun die Funktoren

- $Vek_k^2 \hookrightarrow Fid\left(Vek_k^2\right)$,
- $Fid^{-1}\left(F_{2,B}\right) : Fid\left(Vek_k^2\right) \to Fid\left(Vek_{k,B}^2\right)$,
- $Fid\left(\iota_{\otimes,B}\right) : Fid\left(Vek_{k,B}^2\right) \to Fid\left(Vek_{k,B}^{1+2}\right)$,
- $Fid\left(F_{\otimes,B}\right) : Fid\left(Vek_{k,B}^{1+2}\right) \to Fid\left(Univ_{Vek_{k,B}^{1+2},Vek_{k,B},\iota_\otimes,B}\right)$,
- $Fid\left(F_{Univ,B}\right) : Fid\left(Univ_{Vek_{k,B}^{1+2},Vek_{k,B},\iota_\otimes,B}\right) \to Fid\left(Univ_{Vek_k^{1+2},Vek_k,\iota_\otimes}\right)$
- und $P : Fid\left(Univ_{Vek_k^{1+2},Vek_k,\iota_\otimes}\right) \to Univ_{Vek_k^{1+2},Vek_k,\iota_\otimes}$,

so erhalten wir einen Funktor $Vek_k^2 \to Univ_{Vek_k^{1+2},Vek_k,\iota_\otimes}$, der jedem Paar von Vektorräumen einen universellen Morphismus zu $\iota_\otimes$ zuordnet.

$$\begin{tikzcd}
Fid\left(Vek_{k,B}^2\right) \arrow[rr, "Fid(\iota_{\otimes,B})"] & & Fid\left(Vek_{k,B}^{1+2}\right) \arrow[r, "Fid(F_{\otimes,B})"] & Fid\left(Univ_{Vek_{k,B}^{1+2},Vek_{k,B},\iota_\otimes,B}\right) \arrow[d, "Fid(F_{Univ,B})"] \\
Fid\left(Vek_k^2\right) \arrow[u, "Fid^{-1}(F_{2,B})"] & Vek_k^2 \arrow[l, hook'] \arrow[r, dashed] & Univ_{Vek_k^{1+2},Vek_k^2,\iota_\otimes} & Fid\left(Univ_{Vek_k^{1+2},Vek_k,\iota_\otimes}\right) \arrow[l, "P"']
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 3.20. Es ist hier natürlicher in der Kategorie Vek_k^{1+2} zu beginnen und einen Universalitätsfunktor zu $\iota_\otimes$ zu konstruieren. Dann kann man auch auf den Schritt $Fid\left(\iota_{\otimes,B}\right) : Fid\left(Vek_{k,B}^2\right) \to Fid\left(Vek_{k,B}^{1+2}\right)$ verzichten. Um die Korrespondenz zu 3.1 zu behalten, haben wir uns für diese Version entschieden.
Als Alternative zu der Vorgehensweise mit dem identifiziert invertierbaren Funktor $F_{2,B}$ kann man auch stets in der jeweiligen Kategorie ohne Basen weiterarbeiten und die Information lediglich in der Indexmenge der Familie speichern. Dadurch spart man den Schritt $Fid(F_{Univ,B})$ ein, aber die Erklärung der Schritte $Fid^{-1}\left(F_{2,B}\right)$ und $Fid\left(F_{\otimes,B}\right)$ ist auf andere Weise zu realisieren.

Wir wollen nun die Konstruktion auch allgemein für universelle Morphismen ausführen und beweisen, dass sich auch die universelle Eigenschaft überträgt.

Satz 3.21. *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ zwei Kategorien und $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Funktor zu welchem ein Universalitätsfunktor G existiere. Dann gibt es auch einen Universalitätsfunktor $\tilde{G}$ zu dem Funktor $Fid(F)$.*

Beweis. Wir führen die üblichen Bezeichnungen $U_X := P_{\mathcal{D}} \circ G(X)$ und $u_X := P_{Mor} \circ G(X)$ für das universelle Objekt und den zugehörigen Morphismus ein, die durch G gegeben sind.
Sei nun $A = (I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I}) \in Fid(\mathcal{C})$. Wir ordnen diesem das folgende Objekt in $Univ_{Fid(\mathcal{C}),Fid(\mathcal{D}),Fid(F)}$ zu:

$$\tilde{A} := ((I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I}), (I, U_{A_i}, (\tilde{f}_{ij})_{i,j\in I}), (F(\tilde{f}_{ij}) \circ u_{A_i})_{i,j\in I}),$$

wobei $\tilde{f}_{ij}$ mittels universeller Eigenschaft von U_{A_i} und u_{A_i} der eindeutige Morphismus mit

$$u_{A_j} \circ f_{ij} = F(\tilde{f}_{ij}) \circ u_{A_i} \tag{3.4}$$

sei.

$$\begin{tikzcd}
F(U_{A_j}) & A_j \arrow[l, "u_{A_j}"'] & U_{A_j} \\
F(U_{A_i}) \arrow[u, dashed, "F(\tilde{f}_{ij})"] & A_i \arrow[l, "u_{A_i}"'] \arrow[u, "f_{ij}"'] & U_{A_i} \arrow[u, dashed, "\tilde{f}_{ij}"']
\end{tikzcd}$$

[Nachweis, dass das Bild in $Univ_{Fid(\mathcal{C}),Fid(\mathcal{D}),Fid(F)}$ liegt:
Aus $u_{A_j} \circ f_{ij} = F(\tilde{f}_{ij}) \circ u_{A_i}$ (nach (3.4)) und $u_{A_k} \circ f_{jk} = F(\tilde{f}_{jk}) \circ u_{A_j}$ (nach (3.4)) folgt mit (3.1) und der Funktorialität von F nun

$$u_{A_k} \circ f_{ik} = u_{A_k} \circ f_{jk} \circ f_{ij} = F(\tilde{f}_{jk}) \circ u_{A_j} \circ f_{ij} = F(\tilde{f}_{jk}) \circ F(\tilde{f}_{ij}) \circ u_{A_i} = F(\tilde{f}_{jk} \circ \tilde{f}_{ij}) \circ u_{A_i}$$

und da durch $u_{A_k} \circ f_{ik} = F(\tilde{f}_{ik}) \circ u_{A_i}$ der Morphismus $\tilde{f}_{ik}$ eindeutig bestimmt wird, erhalten wir $\tilde{f}_{ik} = \tilde{f}_{jk} \circ \tilde{f}_{ij}$ für $i, j, k \in I$, welches (3.1) für $(I, U_{A_i}, (\tilde{f}_{ij})_{i,j\in I})$ ist. Da wir für $\tilde{f}_{ii}$ die Identität $id_{U_{A_i}}$ erhalten, ist $\tilde{f}_{ij}$ für $i, j \in I$ ein Isomorphismus und tatsächlich gilt $(I, U_{A_i}, (\tilde{f}_{ij})_{i,j\in I}) \in Fid(\mathcal{D})$.
$(F(\tilde{f}_{ij}) \circ u_{A_i})_{i,j\in I}$ ist ein Morphismus von A nach $(I, F(U_{A_i}), (F(\tilde{f}_{ij}))_{i,j\in I})$, da nun $F(\tilde{f}_{jk}) \circ u_{A_j} = u_{A_k} \circ f_{jk}$ (nach (3.4)), (3.1) für A, $u_{A_k} \circ f_{ik} = F(\tilde{f}_{ik}) \circ u_{A_i}$ (nach (3.4)), (3.1) für $(I, U_{A_i}, (\tilde{f}_{ij})_{i,j\in I})$ und die Funktorialität von F gelten und damit

$$F(\tilde{f}_{jk}) \circ u_{A_j} \circ f_{ij} = u_{A_k} \circ f_{jk} \circ f_{ij} = u_{A_k} \circ f_{ik} = F(\tilde{f}_{ik}) \circ u_{A_i} = F(\tilde{f}_{lk} \circ \tilde{f}_{il}) \circ u_{A_i} = F(\tilde{f}_{lk}) \circ F(\tilde{f}_{il}) \circ u_{A_i}$$

für $i, j, k, l \in I$ gilt, welches (3.2) für den Morphismus ist.]
Es reicht nun zu zeigen, dass für jedes A das Bild $\tilde{A}$ einen universellen Morphismus beschreibt, da sich daraus der Universalitätsfunktor automatisch ergibt. Wähle dazu zu gegebenem A (wie oben) ein $i_0 \in I$. Wir betrachten A_{i_0}, sein zugehöriges universelles Objekt $U_{A_{i_0}}$ und deren Inklusionen $\iota_{\mathcal{C}}$ in $Fid(\mathcal{C})$. Nun ist $\iota_{\mathcal{D}}(U_{A_{i_0}})$ zusammen mit $\iota_{\mathcal{C}}(u_{A_{i_0}})$ ein universeller Morphismus zu $\iota_{\mathcal{C}}(A_{i_0})$ bezüglich $Fid(F)$. (Dies gilt offensichtlich in den Bilder von $\iota_{\mathcal{C}}$ und $\iota_{\mathcal{D}}$, da diese isomorph zu $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sind. Andererseits ist jedes Objekt von $Fid(\mathcal{C})$ isomorph zu einem Objekt, welches im Bild von $\iota_{\mathcal{C}}$ liegt und dies gilt ebenso für $Fid(\mathcal{D})$ und $\iota_{\mathcal{D}}$.)
Wir haben weiter Isomorphismen $(\alpha_{ij})_{i=A_{i_0},j\in I} : \iota_{Fid(\mathcal{C})}(A_{i_0}) \to A$ definiert durch den einzelnen Morphismus $\alpha_{A_{i_0}i_0} := id_{A_{i_0}}$ und $(\beta_{ij})_{i=U_{A_{i_0}},j\in I} : \iota_{Fid(\mathcal{C})}(U_{A_{i_0}}) \to \tilde{A}$ definiert durch den einzelnen Morphismus $\beta_{U_{A_{i_0}}i_0} := id_{U_{A_{i_0}}}$ und aus der Beziehung (es gilt $\tilde{f}_{i_0i_0} = id_{U_{A_{i_0}}}$ da es ein Identifizierungsisomorphismus ist, siehe (3.1))

$$F(\tilde{f}_{i_0i_0}) \circ u_{A_{i_0}} \circ \alpha_{A_{i_0}i_0} = u_{A_{i_0}} = \beta_{U_{A_{i_0}}i_0} \circ u_{A_{i_0}}$$

folgt, da die Hintereinanderausführung von Morphismen von Familien durch eine einzelne Hintereinanderausführung gegeben ist,

$$(F(\tilde{f}_{ij}) \circ u_{A_i})_{i,j\in I} \circ (\alpha_{ij})_{i=A_{i_0},j\in I} = (\beta_{ij})_{i=U_{A_{i_0}},j\in I} \circ \iota_{Fid(\mathcal{C})}(u_{A_{i_0}}).$$

Also sind $\iota_{Fid(\mathcal{C})}(A_{i_0})$ und A sowie $\iota_{Fid(\mathcal{C})}(U_{A_{i_0}})$ und $\tilde{A}$ jeweils zueinander isomorph und der universelle Morphismus zu $\iota_{Fid(\mathcal{C})}(A_{i_0})$ kommutiert mit $(F(\tilde{f}_{ij}) \circ u_{A_i})_{i,j\in I}$ und den genannten

Isomorphismen. Somit bilden auch $\tilde{A}$ und $(F(\tilde{f}_{ij}) \circ u_{A_i})_{i,j \in I}$ einen universellen Morphismus. (Wir nutzen hier, dass ein zu einem gegebenen universellen Morphismus in $Univ_{Fid(\mathcal{C}),Fid(\mathcal{D}),Fid(F)}$ isomorphes Objekt wieder ein universeller Morphismus ist. Das konstruierte Objekt hängt nicht von einer Auswahl ab.) □

Wir betrachten einen identifiziert invertierbaren Funktor $F_{\mathcal{C}} : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ und wollen natürliche Isomorphismen zwischen $Fid(F_{\mathcal{C}})Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})$ beziehungsweise $Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})Fid(F_{\mathcal{C}})$ und dem jeweiligen Identitätsfunktor definieren. Man behalte stets die Vorstellung des Bild- und Urbildfunktors und 3.12 im Hinterkopf. Bevor wir den allgemeinen Fall nachweisen, zeigen wir jeweils zunächst den Fall für einelementige Familien.

Definition/Aussage 3.22. Sei zunächst A ein Objekt von $\mathcal{C}$, welches wir mittels der Inklusion $\iota_{\mathcal{C}}$ als Objekt von $Fid(\mathcal{C})$ auffassen. Nun ist

$$Fid(F_{\mathcal{C}})(Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\mathcal{C}}(A))) = (I, (A)_{i \in I}, (id_A)_{i,j \in I}) \text{ mit } I := \left\{(X, A) | X \in F_{\mathcal{C}}^{-1}(A)\right\}.$$

Wir haben mittels $(id_A)_{i \in I, j = A}$ einen Isomorphismus

$$i_{\mathcal{C}}(A) : Fid(F_{\mathcal{C}})(Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\mathcal{C}}(A))) \to \iota_{\mathcal{C}}(A).$$

Ist $\alpha : A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so ist $Fid(F_{\mathcal{C}})(Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\mathcal{C}}(\alpha))) = (\alpha)_{i \in I, j \in J}$ mit $J := \left\{(X, B) | X \in F_{\mathcal{C}}^{-1}(B)\right\}$. Wegen

$$\iota_{\mathcal{C}}(\alpha) \circ (id_A)_{i \in I, j = A} = (id_B)_{i \in J, j = B} \circ (\alpha)_{i \in I, j \in J}$$

gilt

$$\iota_{\mathcal{C}}(\alpha) \circ i_{\mathcal{C}}(A) = i_{\mathcal{C}}(B) \circ Fid(F_{\mathcal{C}})(Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\mathcal{C}}(\alpha)))$$

und damit ist diese Konstruktion natürlich.

$$\begin{tikzcd}
Fid(F_{\mathcal{C}})(Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\mathcal{C}}(A))) \arrow[r, "Fid(F_{\mathcal{C}})(Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\mathcal{C}}(\alpha)))"] \arrow[d, "i_{\mathcal{C}}(A)"] & Fid(F_{\mathcal{C}})(Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\mathcal{C}}(B))) \arrow[d, "i_{\mathcal{C}}(B)"] \\
\iota_{\mathcal{C}}(A) \arrow[r, "\iota_{\mathcal{C}}(\alpha)"] & \iota_{\mathcal{C}}(B)
\end{tikzcd}$$

Die gleiche Argumentation funktioniert auch mit einer Familie identifizierter Objekte $A := (I, (A_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i,j \in I})$. Dann ist

$$Fid(F_{\mathcal{C}})(Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(A)) = (J, (A_i)_{(X,i) \in J}, (f_{ij})_{(X,i),(Y,j) \in J}) \text{ mit } J := \left\{(X, i) | X \in F_{\mathcal{C}}^{-1}(A_i), i \in I\right\}.$$

Wir haben mit $(f_{ij})_{(X,i) \in J, j \in I}$ einen Isomorphismus (die Morphismuseigenschaft folgt direkt aus der Morphismeneigenscgaft von A)

$$i_{\mathcal{C}}(A) : Fid(F_{\mathcal{C}})(Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(A)) \to A,$$

welcher auch von der Natürlichkeit der Konstruktion für einelementige Familien induziert wird. Die Verträglichkeit mit Morphismen folgt daraus, dass dies für einelementige Familien gilt, die Morphismen von Familien identifizierter Objekte bereits von einem Morphismus der Morphismenfamilie eindeutig bestimmt sind und die genannte Konstruktion für Familien sich aus der Konstruktion für einelementige Familien zusammensetzt. Wir erhalten einen natürlichen Isomorphismus

$$i_{\mathcal{C}} : Fid(F_{\mathcal{C}}) \circ Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}}) \to Id_{Fid(\mathcal{C})}.$$

Definition/Aussage 3.23. Sei nun A ein Objekt von $\tilde{\mathcal{C}}$, welches wir wieder als Objekt von $Fid(\tilde{\mathcal{C}})$ betrachten. Nun gilt

$$Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(Fid(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\tilde{\mathcal{C}}}(A))) = (I, (X)_{(X,A) \in I}, (f_{XY})_{(X,A),(Y,A) \in I})$$

$$\text{mit } I := \{(X,A) | X \in F_{\mathcal{C}}^{-1}(F_{\mathcal{C}}(A))\}$$

und f_{XY} als eindeutigen Morphismus $f_{XY} : X \to Y$ mit $F_{\mathcal{C}}(f_{XY}) = id_{F_{\mathcal{C}}(A)}$. Wir erhalten mittels $(f_{XA})_{(X,A)\in I, j=A}$ einen Isomorphismus

$$_{\mathcal{C}}i(A) : Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(Fid(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\tilde{\mathcal{C}}}(A))) \to \iota_{\tilde{\mathcal{C}}}(A).$$

Ist $\alpha : A \to B$ ein Morphismus mit $B \in Ob(\tilde{\mathcal{C}})$ und

$$Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(Fid(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\tilde{\mathcal{C}}}(B))) = (J, (X)_{(X,B)\in J}, (g_{XY})_{(X,B),(Y,B)\in J})$$

mit $J := \{(X,B) | X \in F_{\mathcal{C}}^{-1}(F_{\mathcal{C}}(B))\}$, so ist

$$Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(Fid(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\tilde{\mathcal{C}}}(\alpha))) = (g_{BY} \circ \alpha \circ f_{XA})_{(X,A)\in I,(Y,B)\in J}.$$

Es gilt unter Beachtung von $g_{BY} = g_{YB}^{-1}$ nun

$$\iota_{\tilde{\mathcal{C}}}(\alpha) \circ (f_{XA})_{(X,A)\in I, j=A} = (g_{YB})_{(Y,B)\in I, j=B} \circ (g_{BY} \circ \alpha \circ f_{XA})_{(X,A)\in I,(Y,B)\in J}$$

und damit

$$\iota_{\tilde{\mathcal{C}}}(\alpha) \circ_{\mathcal{C}} i(A) =_{\mathcal{C}} i(B) \circ Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}})(Fid(F_{\mathcal{C}})(\iota_{\tilde{\mathcal{C}}}(\alpha)))$$

und somit ist diese Konstruktion natürlich. Der allgemeine Fall folgt wieder wie in der vorherigen Definition (der Isomorphismus wird dabei von der Natürlichkeit der einelementigen Konstruktion induziert). Wir erhalten einen natürlichen Isomorphismus

$$_{\mathcal{C}}i : Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}}) \circ Fid(F_{\mathcal{C}}) \to Id_{Fid(\mathcal{C})}.$$

Wir können nun den zentralen Satz nachweisen.

Satz 3.24. *Seien $\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{D}, \tilde{\mathcal{D}}$ Kategorien und $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}, \tilde{F} : \tilde{\mathcal{D}} \to \tilde{\mathcal{C}}, F_{\mathcal{C}} : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}, F_{\mathcal{D}} : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ Funktoren, wobei $F_{\mathcal{C}} \circ \tilde{F} = F \circ F_{\mathcal{D}}$ gelte und $F_{\mathcal{C}}, F_{\mathcal{D}}$ identifiziert invertierbar seien.*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{\mathcal{C}} \\ {\scriptstyle F_{\mathcal{D}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{\mathcal{C}}} \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \end{array}$$

Weiter seien zu $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Identifizierungsprojektionen gegeben. Dann gilt: Ist ein Universalitätsfunktor $\tilde{G}$ bezüglich $\tilde{F}$ gegeben, so haben wir auch einen Universalitätsfunktor bezüglich F.

Beweis. Aus der Relation $F_{\mathcal{C}} \circ \tilde{F} = F \circ F_{\mathcal{D}}$ folgt $Fid(F_{\mathcal{C}}) \circ Fid(\tilde{F}) = Fid(F) \circ Fid(F_{\mathcal{D}})$ und wir erhalten auch folgendes kommutatives Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} Fid(\tilde{\mathcal{D}}) & \xrightarrow{Fid(\tilde{F})} & Fid(\tilde{\mathcal{C}}) \\ {\scriptstyle Fid(F_{\mathcal{D}})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Fid(F_{\mathcal{C}})} \\ Fid(\mathcal{D}) & \xrightarrow{Fid(F)} & Fid(\mathcal{C}) \end{array}$$

Da wir zu $\tilde{F}$ einen Universalitätsfunktor haben, haben wir auch zu $Fid(\tilde{F})$ einen Universalitätsfunktor wegen 3.21. Die Funktoren $Fid(F_{\mathcal{C}})$, $Fid(F_{\mathcal{D}})$ induzieren mit $Fid^{-1}(F_{\mathcal{C}}), Fid^{-1}(F_{\mathcal{D}})$, $i_{\mathcal{C}}, {}_{\mathcal{C}}i, i_{\mathcal{D}}, {}_{\mathcal{D}}i$ Äquivalenzen von Kategorien, sodass wir wegen 2.27 und 2.29 auch zu $Fid(F)$ einen Universalitätsfunktor haben. Da wir zu $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Identifizierungsprojektionen haben, gibt es mit 3.17, 2.27 und 2.29 also auch zu F einen Universalitätsfunktor und damit folgt die Behauptung. □

Beispiel 3.25. (Tensorprodukt) Wählt man in dem vorherigen Satz $\mathcal{D} = Vek_k$, $\tilde{\mathcal{D}} = Vek_{k,B}$, $\mathcal{C} = Vek_k^{1+2}$ und $\tilde{\mathcal{C}} = Vek_{k,B}^{1+2}$, sowie F, $\tilde{F}$ als Inklusionen und $F_{\mathcal{C}}$ und $F_{\mathcal{D}}$ als die Vergissfunktoren, die Basen vergessen, so konstruiert der Beweis aus einem Universalitätsfunktor des Tensorprodukts für Vektorräume mit Basen einen Universalitätsfunktor für Vektorräume und diese Konstruktion ist speziestheoretisch.

Wir erkennen an dem Beispiel wie man den Satz auch in anderen Fällen anwenden kann. Man muss dazu mittels der Auswahl (in diesem Fall der Basis) neue Kategorien definieren, welche lediglich die zusätzliche Information speichern. Der Universalitätsfunktor mit Auswahl kann nun mit dem Satz in einen Universalitätsfunktor ohne Auswahl überführt werden. Wichtige Voraussetzung dafür, dass dies funktioniert, ist, dass die Auswahlen nur kleine Mengen beschreiben.

3.3 Identifizierungsprojektionen und Strukturtransport

In diesem Abschnitt soll das Beispiel 3.18 für Identifizierungsprojektionen verallgemeinert werden. Dafür wird Strukturtransport eine wichtige Rolle spielen.
Zunächst beschreiben wir den Strukturtransport anhand des Beispiels der Monoide explizit.

Beispiel 3.26. Sei $(M, \circ)$ mit $\circ : M \times M \to M$ ein Monoid, N eine Menge und $f : M \to N$ eine Bijektion. Definiere $\tilde{\circ} : N \times N \to N$ mittels $a \tilde{\circ} b := f(f^{-1}(a) \circ f^{-1}(b))$. Nun ist $(N, \tilde{\circ})$ ein Monoid, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
(a\tilde{\circ}b)\tilde{\circ}c &= f(f^{-1}(f(f^{-1}(a)\circ f^{-1}(b)))\circ f^{-1}(c)) = f((f^{-1}(a)\circ f^{-1}(b))\circ f^{-1}(c)) \\
&= f(f^{-1}(a)\circ(f^{-1}(b)\circ f^{-1}(c))) = f(f^{-1}(a)\circ f^{-1}(f((f^{-1}(b)\circ f^{-1}(c))))) = a\tilde{\circ}(b\tilde{\circ}c) \\
&\text{für } a, b, c \in N \text{ und} \\
a\tilde{\circ}f(e) &= f(f^{-1}(a)\circ f^{-1}(f(e))) = f(f^{-1}(a)\circ e) = f(f^{-1}(a)) = a \\
f(e)\tilde{\circ}a &= f(f^{-1}(f(e))\circ f^{-1}(a)) = f(e\circ f^{-1}(a)) = f(f^{-1}(a)) = a \\
&\text{für } a \in N, e \text{ neutrales Element von } M, \text{ also } f(e) \text{ neutrales Element für } N.
\end{aligned}$$

Außerdem ist f ein Isomorphismus, da f eine Bijektion ist und

$$f(a)\tilde{\circ}f(b) = f(f^{-1}(f(a))\circ f^{-1}(f(b))) = f(a\circ b)$$

für $a, b \in M$ gilt.

Der folgende Satz verallgemeinert nun die Konstruktion aus Beispiel 3.18 in einer abstrakten Art und Weise. Wir setzen dabei eine Bedingung voraus, die man sich als Strukturtransport vorstellen kann.

Satz 3.27. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $F : \mathcal{C} \to Set$ ein Funktor mit folgender Eigenschaft. Zu jedem Objekt X_1 von $\mathcal{C}$ zusammen mit einer Bijektion $f : F(X_1) \to Y_2$ mit einer Menge Y_2 lasse sich genau ein Objekt $X_2 \in Ob(\mathcal{C})$ mit $F(X_2) = Y_2$ derart zuordnen, dass ein Isomorphismus $\tilde{f} : X_1 \to X_2$ mit $F(\tilde{f}) = f$ existiert und dieser Isomorphismus ist dann eindeutig mit dieser Eigenschaft bestimmt. Sind $\mathcal{C}$ und F in dieser Weise gegeben, dann gibt es zu $\mathcal{C}$ eine Identifizierungsprojektion.*

$$X_1 \overset{\tilde{f}}{\dashrightarrow} X_2$$

$$F(X_1) \xrightarrow{f} Y_2 = F(X_2)$$

Beweis. Sei $A = (I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I}) \in Fid(\mathcal{C})$. Wir bilden A mittels $Fid(F)$ ab und erhalten die Familie identifizierter Objekte $(I, (F(A_i))_{i\in I}, (F(f_{ij}))_{i,j\in I})$ in Set. Wir wenden darauf die Identifizierungsprojektion für Mengen an (notiert mit Index ^{M}) und erhalten eine Menge A^M zusammen mit Bijektionen $g_i^A : F(A_i) \to A^M$ für $i \in I$.
Ist nun $B = (J, (B_i)_{i\in J}, (g_{ij})_{i,j\in J}) \in Fid(\mathcal{C})$ und $(\alpha_{ij})_{i\in I, j\in J} : A \to B$ ein Morphismus mit Bild $\alpha^M : A^M \to B^M$ unter der Identifizierungsprojektion für Mengen, dann besagt nun die Gleichung für Identifizierungsprojektionen (3.3), dass

$$\alpha^M \circ g_i^A = g_j^B \circ \alpha_{ij}$$

für $i \in I, j \in J$ gilt.
Nach der Voraussetzung an $\mathcal{C}$ und F angewandt auf $F(A_i)$, A^M und g_i^A erhalten wir Objekte $\tilde{A}_i$

mit $F(\tilde{A}_i) = A^M$ zusammen mit Isomorphismen $h_i^A : A_i \to \tilde{A}_i$, für welche $F(h_i^A) = g_i^A$ gilt. Für $i \in I$ erfüllen jedoch nicht nur $\tilde{A}_i$ und h_i^A diese Voraussetzungen, sondern auch $\tilde{A}_j$ und $h_j^A \circ f_{ij}$ für beliebiges $j \in I$, denn $F(\tilde{A}_j) = A^M$ und

$$F(h_j^A \circ f_{ij}) = F(h_j^A) \circ F(f_{ij}) = g_j^A \circ F(f_{ij}) = g_i^A,$$

wobei wir bei der letzten Gleichheit der Spezialfall von (3.3) genutzt wird. Wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung folgt nun $\tilde{A}_i = \tilde{A}_j$ für $i, j \in I$.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "h_i^A"] \arrow[d, leftrightarrow, "{f_{ij}, f_{ji}}"'] & \tilde{A}_i \\ A_j \arrow[r, "h_j^A"] & \tilde{A}_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A_i) \arrow[r, "g_i^A"] \arrow[d, leftrightarrow, "{g_{ij}, g_{ji}}"'] & A^M = F(\tilde{A}_i) \arrow[d, leftrightarrow, "id_{A^M}"] \\ F(A_j) \arrow[r, "g_j^A"] & A^M = F(\tilde{A}_j) \end{tikzcd}$$

Die zu konstruierende Identifizierungsprojektion P ordne nun A ein Objekt $\tilde{A}_i$ mit $i \in I$ zu, wobei die Isomorphismen durch h_i^A gegeben sind.
Einem Morphismus $(\alpha_{ij})_{i \in I, j \in J} : A \to B$ kann der Morphismus $\tilde{\alpha}$ zugeordnet werden, der durch $\tilde{\alpha} = h_j^B \circ \alpha_{ij} \circ \left(h_i^A\right)^{-1}$ bestimmt ist. Wir erhalten so eine Identifizierungsprojektion (vergleiche mit dem Beweis in 3.18). □

Bemerkung 3.28. Man bemerke, dass F für diese Schlussfolgerungen nur auf Isomorphismen definiert sein muss.

Wir wollen nun für ein paar Beispiele den Funktor F in konkreten Fällen angeben. Die Nachweise, dass die Funktoren tatsächlich die Voraussetzungen des Satzes erfüllen, verlaufen mit ähnlichen Überlegungen wie in Beispiel 3.26 und werden hier nicht aufgeführt.

Beispiel 3.29.

- Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der Monoide. F bilde einen Monoid auf die Menge der Elemente des Monoids ab und einen Monoidmorphismus auf sich selbst.
- Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der Gruppen. F bilde eine Gruppe auf die Menge der Gruppenelemente ab und einen Gruppenmorphismus auf sich selbst.
- Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der Ringe. F bilde einen Ring auf die Menge der Ringelemente ab und einen Ringmorphismus auf sich selbst.
- Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der k-Vektorräume. F bilde einen Vektorraum auf die Menge der Vektoren ab und einen Vektorraummorphismus auf sich selbst.
- Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie allgemeiner Algebren. F bilde ein Objekt von $\mathcal{C}$ auf seine Grundmenge ab und einen Morphismus auf sich selbst.
- Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der topologischen Räume. F bilde einen topologischen Raum auf die Grundmenge des Raumes ab und eine stetige Abbildung auf sich selbst.

Beispiel 3.30. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der topologischen Räume mit Äquivalenzklassen homotoper Abbildungen als Morphismen. Nun kann man den topologischen Raum zwar auf seine Grundmenge abbilden, jedoch weiß man nicht, wie die Morphismen abgebildet werden sollen.

Diese Beispiele aus 3.29 funktionieren, wie man erkennt, stets nach dem gleichen Muster. Um uns einer abstrakten Formulierung dieser Beispiele zu nähern, können wir die Von-Neumann-Hierarchie zu beliebiger Grundmenge nutzen. Der Nachteil ist, dass man üblicherweise Monoide und andere Kategorien nicht in dieser Art in der Mengenlehre „repräsentiert". Man benötigt zunächst eine „Übersetzung" zu einer „Repräsentation" wie sie in den Von-Neumann-Hierarchien notwendig ist (siehe 1.33, 1.35, 1.36). Die folgende Definition soll aufzeigen, welche Eigenschaften man nach der „Übersetzung" fordern sollte.

Definition 3.31. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen sind. Wir nennen $\mathcal{C}$ eine *Kategorie von Objekten mit Grundmenge*, wenn ein Funktor $F : \mathcal{C} \to Set$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (Objekt bezüglich der Grundmenge) Für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ existiert eine Ordinalzahl α derart, dass $X \in \psi_{F(X)}(\alpha)$
- (Strukturtransport) Ist $X_1 \in Ob(\mathcal{C})$, $f : F(X_1) \to Y_2$ eine Bijektion und $X_1 \in \psi_{F(X_1)}(\alpha)$ für eine Ordinalzahl α, so ist $X_2 := f_\alpha(X_1)$ ein Objekt von $\mathcal{C}$ mit $F(X_2) = Y_2$ und es gibt genau einen Isomorphismus $\tilde{f} : X_1 \to X_2$ mit $F(\tilde{f}) = f$
- (Eindeutigkeit) Ist $\tilde{f} : X_1 \to X_2$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$ und $f = F(\tilde{f})$, dann ist $X_2 = f_\alpha(X_1)$ für eine hinreichend große Ordinalzahl α

Wenn wir eine Kategorie von Objekten mit Grundmenge haben, so erfüllt der Funktor F die Voraussetzungen von Satz 3.27.
Wir wollen für einige Beispiele aufschreiben, welche Ordinalzahl und welche Abbildungen man wählen kann, um einen Strukturtransport nach der „Übersetzung“ zu realisieren.

Beispiel 3.32.
- **(Topologische Räume)** Wir wählen zur Grundmenge des topologischen Raumes M die Grundmenge der Von-Neumann-Hierarchie $M \dot\cup \{\emptyset\}$. Nun können wir den topologischen Raum als Teilmenge der Potenzmenge von M auffassen und diese in der Von-Neumann-Hierarchie als Element von $\psi_{M\dot\cup\{\emptyset\}}(2)$. Ist nun $f : M \to N$ eine Bijektion, so induziert $(f \dot\cup id_{\{\emptyset\}})_2$ einen Strukturtransport.
- **(Monoide)** Wir wählen zur Grundmenge des Monoids M die Grundmenge der Von-Neumann-Hierarchie M. Der Monoid wird nun durch die Abbildung $M \times M \to M$ vollständig beschrieben. Eine solche Abbildung ist eine Teilmenge von $M \times M \times M$. Elemente von $M \times M$ kann man als Elemente von $\psi_M(2)$ auffassen, da das Kuratowski-Paar zwei Klammern setzt. Entsprechend sind Elemente von $M \times M \times M$ in der „Übersetzung“ Elemente von $\psi_M(4)$. Eine Teilmenge von $M \times M \times M$ kann also als Element von $\psi_M(5)$ aufgefasst werden. Ist nun $f : M \to N$ eine Bijektion, so induziert f_5 einen Strukturtransport.
- **(Multiplikation mit natürlichen Zahlen)** Sei M eine Menge, auf der eine Multiplikation mit natürlichen Zahlen definiert ist, also eine Abbildung $\mathbb{N} \times M \to M$. Wir haben eine zugehörige Kategorie, wobei die Morphismen Abbildungen zwischen den Mengen sind, welche mit der Multiplikation natürlicher Zahlen kompatibel ist. Wir wählen als Grundmenge der Von-Neumann-Hierarchie die Menge $M \dot\cup \{\emptyset\}$. Eine Abbildung $\mathbb{N} \times M \to M$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{N} \times M \times M$. Wir können Elemente von $\mathbb{N}$ als Elemente von $\psi_{M\dot\cup\{\emptyset\}}(\omega)$ auffassen. Dementsprechend sind Elemente von $\mathbb{N} \times M \times M$ in der „Übersetzung“ in $\psi_{M\dot\cup\{\emptyset\}}(\omega + 4)$. Die Abbildung kann demnach als Element von $\psi_{M\dot\cup\{\emptyset\}}(\omega + 5)$ aufgefasst werden. Ist nun $f : M \to N$ eine Bijektion, so induziert $(f \dot\cup id_{\{\emptyset\}})_{\omega+5}$ einen Strukturtransport. Wir erkennen an diesem Beispiel, dass wir auch Mengen, die aus der leeren Menge konstruiert wurden, verwenden können. Dies ist zum Beispiel bei Folgen wichtig.
- **(k-Vektorräume)** Sei k ein beliebiger fest gewählter Körper und M ein k-Vektorraum. Wir wählen $k \dot\cup M$ als Grundmenge der Von-Neumann-Hierarchie. Die Addition auf M kann als Element von $\psi_{k\dot\cup M}(5)$ aufgefasst werden. Dies gilt auch für die skalare Multiplikation. Als Paar einer Addition und einer Multiplikation können wir den Vektorraum als Element von $\psi_{k\dot\cup M}(7)$ auffassen. Ist nun $f : M \to N$ eine Bijektion, so induziert $(id_k \dot\cup f)_7$ einen Strukturtransport. Wir sehen an diesem Beispiel, dass man so auch Parameter verwenden kann.

3.4 Anafunktoren

Die Kategorientheorie abstrahiert Konstruktionen, um sie als Graph zu formulieren. Dabei wird der Isomorphiebegriff häufig als Gleichheit angesehen, da dies zu gleichen Eigenschaften der Objekte führt. In diesem Sinn ist es unnatürlich, kanonische Objekte definieren zu wollen. Eine Alternative zu der Wahl eines speziellen Funktors ist die Verallgemeinerung des Begriffs des Funktors zum Anafunktor, dessen Konstruktion auf Makkai zurückgeht. Mit diesem Begriff kann man einem Objekt alle Objekte zuordnen, welche zu dem vom entsprechendem Funktor definierten Objekt isomorph sind. In dieser Weise kann häufig auf das Auswahlaxiom verzichtet werden. Wir entnehmen die Definition aus [Mak], wobei wir sie für Mengen abwandeln (sie sind dort für Klassen definiert).

Definition 3.33. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien bezüglich eine Grothendieck-Universums U. Ein *Anafunktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus:

- einer Menge $|F| \subseteq U$ zusammen mit Abbildungen $\sigma : |F| \to Ob(\mathcal{C})$ (Quelle) und $\tau : |F| \to Ob(\mathcal{D})$ (Ziel). Wir schreiben $|F|X := \{s \in F | \sigma(s) = X\}$ für ein $X \in \mathcal{C}$ und $F_x(X) := \tau(X)$, wobei vorausgesetzt wird, dass $\sigma(x) = X$,
- einer Funktion $\{(x, y, f) | x, y \in |F|, f \in Mor_{\mathcal{C}}(\sigma(x), \sigma(y))\} \to Mor_{\mathcal{D}}$, welcher zu allen $X, Y \in \mathcal{C}, x \in |F|X, y \in |F|Y$ und allen Morphismen $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F_{x,y}(f) : F_x(X) \to F_y(Y)$ in $\mathcal{D}$ zuordnet,

welche die folgenden Eigenschaften erfüllen mögen:

- für alle $X \in \mathcal{C}$ ist $|F|X$ nichtleer,
- für alle $X \in \mathcal{C}, x \in |F|X$ gilt $F_{x,x}(id_X) = id_{|F|_x(X)}$,
- für alle $X, Y, Z \in \mathcal{C}, x \in |F|X, y \in |F|Y, z \in |F|Z$ und alle Morphismen $f : X \to Y, g : Y \to Z$ gilt mit $h := g \circ f$: $F_{x,z}(h) = F_{y,z}(g) \circ F_{x,y}(f)$.

Wir schreiben für $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$ und einen Anafunktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nun

$$|F|(X, Y) := \{s \in |F|X \mid F_s(X) = Y\}.$$

Ein Anafunktor heißt *saturiert*, wenn zu jedem $X \in Ob(\mathcal{C})$, $Y_1, Y_2 \in Ob(\mathcal{C})$ und $s \in |F|(X, Y_1)$, jedem Isomorphismus $\mu : Y_1 \to Y_2$ in $\mathcal{D}$ genau ein $t \in |F|(X, Y_2)$ mit $\mu = F_{s,t}(id_X)$ zugeordnet werden kann.

Ein Anafunktor verallgemeinert also einen Funktor derart, dass man mehrere Zielobjekte einem Objekt zuordnen kann. Man beachte, dass die Bildobjekte eines Objekts X zueinander isomorph sein müssen, da $F_{y,x}(id_X)$ und $F_{x,y}(id_X)$ für $x, y \in |F|X$ zueinander invers sind. Man erhält zu einem Anafunktor und einem Objekt $X \in Ob(\mathcal{C})$ mit kleiner Menge $|F|X$ eine Familie identifizierter Objekte

$$(|F|X, (\tau(s))_{s \in |F|X}, (F_{s,t}(id_X))_{s,t \in |F|X}).$$

Dies funktioniert auch auf Morphismen. Ist $f : X \to \tilde{X}$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so erhalten wir einen Morphismus

$$(|F|X, (\tau(s))_{s \in |F|X}, (F_{s,t}(id_X))_{s,t \in |F|X}) \to (|F|\tilde{X}, (\tau(s))_{s \in |F|\tilde{X}}, (F_{s,t}(id_{\tilde{X}}))_{s,t \in |F|\tilde{X}})$$

$$\text{mittels } (F_{s,t}(f))_{s \in |F|X, t \in |F|\tilde{X}}.$$

Die Morphismeneigenschaft für Familien identifizierter Objekte (3.2) folgt dabei direkt aus der Funktorialitätseigenschaft für Anafunktoren. Wir können so einen Anafunktor mit kleinen Mengen $|F|X$ als Funktor $\mathcal{C} \to Fid(\mathcal{D})$ auffassen. (Man erhält so auch einen Funktor $Fid(\mathcal{C}) \to Fid(\mathcal{D})$.) Ist ein Anafunktor saturiert, so bedeutet dies, dass die zugehörigen Familien identifizierter Objekte maximal mit der Eigenschaft sind, dass kein Objekt mit sich selbst durch die Identität identifiziert wird (wir wollen hier lediglich zur besseren Vorstellung von Saturiertheit ausnahmsweise große Indexmengen für Familien identifizierter Objekte zur Existenz solcher maximaler Mengen erlauben). Tatsächlich erhält in der Definition für $Y = Y_1 = Y_2$ für gegebenes s eine Bijektion zwischen den Automorphismen von Y und der Menge $|F|(X, Y)$, die durch $F_{s,\_}(id_X)$ gegeben ist.

Beispiel 3.34. Sei $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Wählen wir $|F| := Ob(\mathcal{C})$, $\sigma := id_{Ob(\mathcal{C})}$, $\tau := G$ und $F_{x,y}(f) := G(f)$ für einen Morphismus $f : X \to Y$ mit $x = X, y = Y \in Ob(\mathcal{C})$, so erhalten wir einen Anafunktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.
Sei nun $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein identifiziert invertierbarer Funktor. Wählen wir nun $|F| := Ob(\mathcal{C})$, $\tau := id_{Ob(\mathcal{C})}$, $\sigma := G$ und $F_{x,y}(f)$ als den einzigen Morphismus $g : x \to y$ mit $G(g) = f$ für einen Morphismus $f : X \to Y$ mit $X, Y \in Ob(\mathcal{D})$ und $G(x) = X, G(y) = Y$, so erhalten wir einen Anafunktor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, welcher $Fid^{-1}(F) \circ \iota_{\mathcal{D}}$ entspricht.
Hingegen scheint der Begriff der Identifizierungsprojektion nicht in die Sprache der Anafunktoren zu passen.

Beispiel 3.35. Sei $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor zu dem universelle Morphismen existieren. Sei nun

$$|F| := \{(A, U, u) | (U, u) \text{ ist universeller Morphismus von } A \text{ nach } F\},$$

$\sigma(A, U, u) := A$, $\tau(A, U, u) := U$ und $F_{x,y}(f)$ der durch $G(F_{x,y}(f)) \circ u_x = u_y \circ f$ eindeutig bestimmte Morphismus, wobei $x = (A_x, U_x, u_x)$ und $y = (A_y, U_y, u_y)$ seien.

$$\begin{tikzcd}
G(U_y) & A_y \arrow[l, "u_y"'] & & U_y \\
G(U_x) \arrow[u, "G(F_{x,y}(f))"] & A_x \arrow[l, "u_x"'] \arrow[u, "f"'] & & U_x \arrow[u, "F_{x,y}(f)"']
\end{tikzcd}$$

Nun ist F ein saturierter Anafunktor.

Wir haben gesehen, dass Anafunktoren ähnliche Funktionen wie Familien identifizierter Objekte haben können und dass Relationen zwischen ihnen bestehen. Allerdings sind Anafunktoren im Allgemeinen nicht absolut und scheinen sich nicht für die Konstruktion speziestheoretischer Objekte zu eignen.

4 Kurven, Funktionenkörper und Riemannsche Flächen

Im letzten Kapitel wollen wir uns mit zwei Äquivalenzen von Kategorien beschäftigen. Die erste Äquivalenz besteht zwischen der Kategorie der nicht-singulären, projektiven Kurven $Kur_{k,ns,proj}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit dominanten Morphismen und der Kategorie der eindimensionalen Funktionenkörper $Kör_k^1$ über k und k-Homomorphismen. Für den Körper $\mathbb{C}$ zeigen wir, dass die zweite Kategorie äquivalent zur Kategorie der kompakten Riemannschen Flächen *Rie* mit nicht-konstanten holomorphen Abbildungen ist. Bei der ersten Äquivalenz werden wir zwei verschiedene Beweise angeben und bei allen Beweisen auf die speziestheoretischen Aspekte eingehen.

4.1 Vorbereitungen

In diesem Abschnitt werden die gemeinsamen Grundlagen für die beiden Beweise der Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der Kurven und der Kategorie der Funktionenkörper gelegt. Begriffe, die hier nicht definiert werden, mögen aus Standardwerken über Algebra (wie [Lan2]) oder Algebraische Geometrie (wie [Har]) entnommen werden.
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 4.1. Die *Kategorie der eindimensionalen Funktionenkörper über* k ist die Kategorie $Kör_k^1$ der über k endlich erzeugten Körper, welche Transzendenzgrad 1 über k haben, zusammen mit k-Homomorphismen als Morphismen.

Definition 4.2. Eine *Kurve* (über k) ist eine eindimensionale (irreduzible) Varietät über k (im Sinne von [Har, S.3]).

Nach [Har, S.104] entsprechen Kurven über k den ganzen, eindimensionalen Schemata über k, die quasi-projektiv über k sind.
Wir wollen nun die Regularität von Kurven und einige weitere Begriffe definieren und eine Charakterisierung der Regularität für affine Kurven angeben. Mit der Definition der Nicht-Singularität sehen wir auch die Kategorie $Kur_{k,ns,proj}$ als definiert an.

Definition 4.3. Ist R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so heißt R *regulär*, wenn $dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = dim\, R$ gilt, wobei κ der Restklassenkörper von R sei und die Dimensionen im Falle $dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ die Vektorraumdimension und im Fall $dim\, R$ die Krulldimension seien.
Eine Varietät heißt *nicht-singulär*, wenn ihre lokalen Ringe regulär sind (diese Ringe sind stets noethersch, da sie durch Bilden von Quotienten und Lokalisierungen aus einem Polynomring entstehen).
Ein *Dedekindring* ist ein ganz abgeschlossener, noetherscher, eindimensionaler Integritätsbereich.
Ein *diskreter Bewertungsring* ist ein Bewertungsring, der von einer diskreten Bewertung kommt.

Es gelten die folgenden beiden Aussagen. Die eindimensionalen, noetherschen, lokalen Integritäsbereiche sind genau dann regulär, wenn sie diskrete Bewertungsringe sind [Ati, S.94-95]. Ist R ein noetherscher, eindimensionaler Integritätsbereich, dann ist dieser genau dann ein Dedekindring (d.h. ganz abgeschlossen), wenn alle Lokalisierungen an maximalen Idealen diskrete Bewertungsringe sind [Ati, S.95].
Hat man also eine affine Kurve gegeben, die nicht-singulär ist, so sind ihre lokalen Ringe regulär und damit diskrete Bewertungsringe. Damit ist der Koordinatenring ein Dedekindring. Im affinen Fall entspricht demnach die Eigenschaft einer Kurve nicht-singulär zu sein, genau der Eigenschaft des Koordinatenrings ganz abgeschlossen zu sein.

Definition des Funktors Zur Definition der Äquivalenz von Kategorien definieren wir zunächst einen Funktor von $Kur_{k,ns,proj}$ nach $Kör_k^1$. Dazu ordnen wir jeder Kurve $\mathcal{C}$ ihren Funktionenkörper $K(\mathcal{C})$ zu. Zum Nachweis, dass $K(\mathcal{C})$ ein Objekt von $Kör_k^1$ ist, bemerken wir, dass $K(\mathcal{C}) \cong K(\tilde{\mathcal{C}})$ für eine beliebige offene affine Teilmenge $\tilde{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}$. $K(\tilde{\mathcal{C}})$ ist endlich erzeugt über k, da $K(\tilde{\mathcal{C}}) \cong Quot(\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{C}}))$ und $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{C}})$ als Ring der regulären Funktionen einer affinen Kurve eine endlich erzeugte

k-Algebra ist. $K(\tilde{\mathcal{C}})$ ist von Transzendenzgrad 1 über k, da die Dimension einer affinen Varietät gleich der Dimension des Koordinatenrings ist (siehe [Har][S.6]) und

$$1 = dim\, \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{C}}) = tr - deg_k\, Quot(\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{C}})) = tr - deg_k\, K(\tilde{\mathcal{C}})$$

(siehe [Ati, S.124-125]). Weiter induziert bekanntlich ein dominanter Morphismus durch Zurückziehen einen k-Homomorphismus der Funktionenkörper (siehe [Har, S.25-26]).

Funktor ist treu Seien $\phi, \psi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Morphismen, welche $\alpha, \beta : K(\mathcal{D}) \to K(\mathcal{C})$ induzieren. Ist nun $\phi(x) \neq \psi(x)$ für ein $x \in \mathcal{C}$, so wähle man ein $f \in K(\mathcal{D})$, welches $\phi(x)$ und $\psi(x)$ separiert (man kann dafür zum Beispiel eine offene affine Teilmenge $\tilde{\mathcal{D}}$ wählen, welche $\phi(x)$ und $\psi(x)$ enthält und dann ein geeignetes lineares Polynom). Nun ist $\alpha(f)(x) \neq \beta(f)(x)$, also insbesondere $\alpha \neq \beta$.

Zum Nachweis, dass dieser Funktor voll ist, nutzen wir [Har, S.25-26].

Funktor ist voll Sei dazu $\phi : K_1 \to K_2$ ein k-Homomorphismus, wobei K_1 und K_2 die Funktionenkörper zweier projektiver Kurven $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ seien. Sei U eine offene, affine Untervarietät von $\mathcal{C}_1$. Nun ist $\mathcal{O}(U)$ endlich erzeugt, sagen wir durch $x_1, \ldots, x_n$. Wir betrachten die Bilder $\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)$. Es gibt nun eine offene Untermenge V von $\mathcal{C}_2$ auf der $\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)$ regulär sind. Wir erhalten einen k-Algebra-Homomorphismus $\phi|_{\mathcal{O}(U)} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$, der injektiv ist, da ϕ injektiv ist. Dieser korrespondiert zu einem dominanten Morphismus $V \to U$. Mit dem folgenden Satz erhalten wir einen dominanten Morphismus $\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$, der zu ϕ korrespondiert (beachte, dass wegen der Projektivität $\bar{U} = \mathcal{C}_1$ gilt).

Der folgende Satz stammt aus [Die].

Satz 4.4. *Ist $\mathcal{C}$ eine nicht-singuläre Kurve und $f : \mathcal{C} \to \mathbb{P}_k^n$ eine rationale Abbildung, dann definiert f einen Morphismus von $\mathcal{C}$ nach $\mathbb{P}_k^n$.*

Beweis. Sei $U \subseteq \mathcal{C}$ eine offene Teilmenge auf der f durch $(f_0, \ldots, f_n) \in \mathcal{O}(U)^{n+1} \subseteq K(\mathcal{C})^{n+1}$ gegeben ist, also $f(x) = (f_0(x) : \cdots : f_n(x))$ (man kann z.B. U derart wählen, dass $f(U)$ in einem affinen Raum liegt, um eine solche Darstellung zu erreichen). Sei weiter $P \in \mathcal{C}$. Nun ist $\mathcal{O}_P$ ein diskreter Bewertungsring, da $\mathcal{C}$ nicht-singulär ist. Sei ν eine diskrete Bewertung auf $K(\mathcal{C})$, welche $\mathcal{O}_P$ induziert und $t \in K(\mathcal{C})$ mit $\nu(t) = 1$. Sei nun $m := -min(\nu(f_0), \ldots, \nu(f_n))$. Dann ist $\nu(t^m f_i) \geq 0$ (also $t^m f_i$ regulär in P) für $i \in \{0, \ldots, n\}$ und es gibt ein $j \in \{0, \ldots, n\}$ mit $\nu(t^m f_j) = 0$, also $t^m f_j \in \mathcal{O}_P^*$ und damit $t^m f_j(P) \neq 0$. Demnach definiert $(t^m f_0 : \cdots : t^m f_n)$ eine reguläre Funktion in einer Umgebung von P, welche offensichtlich in einer gemeinsamen offenen Menge mit f übereinstimmt. Wir haben f zu einem beliebigen Punkt P fortgesetzt. Mit der Eindeutigkeit der Fortsetzung (siehe [Har, S.24]) folgt die Behauptung. □

Es bleibt zu zeigen, dass dieser Funktor wesentlich surjektiv ist, um 2.19 zu nutzen. Dies werden wir in den folgenden beiden Abschnitten auf zwei verschiedene Arten beweisen.

4.2 Zusammenkleben affiner Desingularisierungen

Die erste Möglichkeit zum Nachweis, dass der Funktor wesentlich surjektiv ist, geht über das Zusammenkleben affiner Desingularisierungen. Wir nutzen dazu im ganzen Abschnitt [Die]. Zunächst wollen wir zeigen, dass es zu jeder Kurve eine Desingularisierung gibt.

Satz 4.5. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kurve und $L|K(\mathcal{C})$ eine endliche Körpererweiterung. Dann gibt es eine nicht-singuläre Kurve $\mathcal{D}$ zusammen mit einem $K(\mathcal{C})$-Isomorphismus $\alpha : K(\mathcal{D}) \cong L$ und einen endlichen Morphismus $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Das Tripel $(\mathcal{D}, \pi, \alpha)$ ist bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ eine offene, affine Überdeckung der Kurve $\mathcal{C}$. Wir bezeichen für einen Integritätsbereich R seinen ganzen Abschluss in einem Oberkörper K von $Quot(R)$ mit $Cl(R, K)$. Wir betrachten die Schemata $\mathcal{D}_i := Spec\, Cl(\mathcal{O}(\mathcal{C}_i), L)$ für $i \in I$. Nun ist $\mathcal{O}(\mathcal{D}_i) = Cl(\mathcal{O}(\mathcal{C}_i), L)$ ein

endlicher $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i)$-Modul und damit eine endlich erzeugte k-Algebra, welche wieder eindimensional ist (siehe [Zar][S.267-268]). Damit ist $\mathcal{D}_i$ eine affine und damit quasi-projektive Kurve. Wir erhalten mittels $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i) \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{D}_i)$ einen endlichen Morphismus $\pi_i : \mathcal{D}_i \to \mathcal{C}_i$.
Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$ für $i, j \in I$ wieder affin ist. Sei ohne Einschränkung $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \mathcal{C}_i$. Nun ist $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$ eine nicht-leere offene Menge von $\mathcal{C}_i$. Da $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i)$ noethersch ist, ist $\mathcal{C}_i$ ein noetherscher Raum (siehe [Har][S.80]) und $\mathcal{C}_i \backslash (\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j)$ zerfällt in endlich viele irreduzible Komponenten, die maximalen Idealen in $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i)$ beziehungsweise abgeschlossenen Punkten von $\mathcal{C}_i$ entsprechen. Es reicht damit zu zeigen, dass für $P \in \mathcal{C}_i$ die Menge $\mathcal{C}_i \backslash P$ wieder affin ist. Sei dazu $\mathfrak{m}_P (= P)$ das zugehörige maximale Ideal. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{m}_P \cap \bigcap_{\mathfrak{m} \in J} (\mathcal{O}(\mathcal{C}_i) \backslash \mathfrak{m}) \neq \emptyset$, wobei J die Menge der maximalen Ideale von $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i)$, welche verschieden von $\mathfrak{m}_P$ sind, sei. Wäre das Gegenteil der Fall, so wäre $\mathfrak{m}_P \subseteq \bigcup_{\mathfrak{m} \in J} \mathfrak{m}$. Da $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i)$ noethersch ist, ist $\mathfrak{m}_P$ endlich erzeugt und es würde $\mathfrak{m}_P \subseteq \bigcup_{\mathfrak{m} \in \tilde{J}} \mathfrak{m}$ für eine endliche Teilmenge $\tilde{J} \subseteq J$ gelten. Nach [Ati][S.8] wäre dann schon $\mathfrak{m}_P \subseteq \mathfrak{m}$ für ein $\mathfrak{m} \in \tilde{J}$, welches für zwei verschiedene maximale Ideale nicht möglich ist. Wir finden also ein $f_P \in \mathfrak{m}_P \cap \bigcap_{\mathfrak{m} \in J} (\mathcal{O}(\mathcal{C}_i) \backslash \mathfrak{m})$. Nun gilt, da eine offene Menge eines affinen Schemas $Spec\, A$ der Form $D(f)$ mit $f \in A$ isomorph zum affinen Schema $Spec\, A_f$ ist (siehe [Har][S.79]), dass $\mathcal{C}_i \backslash P$ isomorph zum affinen Schema des Rings $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i)_{f_P}$ ist.
Weiter ist $\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j)$ ein endlicher $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j)$-Modul. Um dies nachzuweisen, zeigen wir wieder nur den Fall für einen Punkt P. Wie eben gesehen erhalten wir $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i \backslash P)$ aus $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i)$ durch Lokalisieren an f_P. Wir wollen zeigen, dass $\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i \backslash P)$ durch Lokalisieren von $\mathcal{O}(\mathcal{D}_i)$ an $\pi_i^*(f_P)$ entsteht. Es reicht dazu zu zeigen, dass $\pi_i^{-1}(P) = V(\pi_i^*(f_P))$ gilt. Ist das maximale Ideal $\mathfrak{n} \in V(\pi_i^*(f_P))$, so gilt $\pi_i^*(f_P) \in \mathfrak{n}$ und damit $f_P \in (\pi_i^*)^{-1}(\mathfrak{n}) = \pi_i(\mathfrak{n})$. Dies ist nach Definition von f_P nur für $P = \pi_i(\mathfrak{n})$ möglich und demnach gilt $\mathfrak{n} \in \pi_i^{-1}(P)$. Ist andererseits $\mathfrak{n} \in \pi_i^{-1}(P)$, so gilt $P = \pi_i(\mathfrak{n})$ und es folgen $f_P \in \pi_i(\mathfrak{n})$, $\pi_i^*(f_P) \in \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n} \in V(\pi_i^*(f_P))$ und damit die Zwischenbehauptung. Da Lokalisieren als Tensorprodukt geschrieben werden kann (siehe [Ati][S.39]), also in diesem Fall $\mathcal{O}(\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i \backslash P)) = \mathcal{O}(\mathcal{D}_i) \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{C}_i)} \mathcal{O}(\mathcal{C}_i \backslash P)$, folgt, da $\mathcal{O}(\mathcal{D}_i)$ endlicher $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i)$-Modul ist, dass $\mathcal{O}(\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i \backslash P))$ endlicher $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i \backslash P)$-Modul ist.
Aus der Nichtsingularität von $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$ folgt, unter Beachtung des kanonischen Isomorphismus $Quot(\mathcal{O}(\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j))) \cong L$, dass wir die kanonische Isomorphie $\mathcal{O}(\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j)) \cong Cl(\mathcal{O}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j), L)$ als Ringerweiterungenen von $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j)$ erhalten. Entsprechend gilt $\mathcal{O}(\pi_j^{-1}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j)) \cong Cl(\mathcal{O}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j), L)$. Also sind auch $\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j)$ und $\pi_j^{-1}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j)$ über $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$ kanonisch isomorph und das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi_j^{-1}(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j) \arrow[dl] \\
& \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j &
\end{tikzcd}$$

Wir können also die Kurven und Morphismen zu einem irreduziblen, eindimensionalen Schema D zusammen mit einem endlichen Morphismus $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zusammenkleben (siehe [Har][S.80]). Aus der Konstruktion erhalten wir auch einen Isomorphismus $\alpha : K(\mathcal{D}) \cong L$. Außerdem ist $\mathcal{D}$ nicht-singulär.
Wir zeigen, dass das entstandene Schema $\mathcal{D}$ quasi-projektiv über k ist, falls die Indexmenge I endlich ist und nutzen dazu Ideen aus [Har][S.44-45]. Sei $\breve{\mathcal{D}}$ der (nicht-leere) Schnitt der D_i für $i \in I$. Betrachte (durch Wahl eines Erzeugendensystems von $\mathcal{O}(\mathcal{D}_i)$) Einbettungen von $\mathcal{D}_i$ in affine Räume $\mathbb{A}_k^{n_i}$. Durch Einbettungen von $\mathbb{A}_k^{n_i}$ in $\mathbb{P}_k^{n_i}$ und Produktbildung erhalten wir eine Einbettung $\breve{\mathcal{D}} \to \prod_i \mathcal{D}_i \to \prod_i \mathbb{P}_k^{n_i}$. Diese Abbildung induziert mit 4.4 Morphismen $\phi_i : \mathcal{D}_i \to \prod_i \mathbb{P}_k^{n_i}$ und wegen der Eindeutigkeit in 4.4 erhalten wir auch einen einzigen Morphismus $\phi : \mathcal{D} \to \prod_i \mathbb{P}_k^{n_i}$ mit $\phi|_{\mathcal{D}_i} = \phi_i$ für $i \in I$. Sei Y das Bild von ϕ. Y liegt im Abschluss des Bildes der Abbildung $\breve{\mathcal{D}} \to \prod_i \mathbb{P}_k^{n_i}$, welcher eine projektive Kurve ist. Also ist Y eine (quasi-projektive) Kurve. Wir wollen zeigen, dass Y isomorph zu $\mathcal{D}$ ist. Zunächst ist ϕ eine Bijektion. Wir haben das folgende kommutative Diagramm dominanter Morphismen für $i \in I$, wobei $\bar{\mathcal{D}}_i$ der Abschluss von $\mathcal{D}_i$ in $\mathbb{P}_k^{n_i}$

und p_i die Projektion auf den i-ten Faktor sei.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\phi"] & Y \arrow[d, "p_i"] \\ \mathcal{D}_i \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \bar{\mathcal{D}}_i \end{tikzcd}$$

Ist nun $P \in \mathcal{D}_i$, welcher auch als Punkt in $\mathcal{D}$ oder $\bar{\mathcal{D}}_i$ aufgefasst werden kann, so haben wir die Inklusionen

$$\mathcal{O}_{P,\bar{\mathcal{D}}_i} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\phi(P),Y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{P,\mathcal{D}}.$$

Die äußeren Ringe sind isomorph und demnach ist $\mathcal{O}_{\phi(P),Y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{P,\mathcal{D}}$ ein Isomorphismus. Zusammenfassend sind $\mathcal{D}$ und Y homöomorph (ϕ ist bijektiv und die abgeschlossenen Mengen sind die endlichen Mengen und der ganze Raum) und die lokalen Ringe sind isomorph. Mit [Har][S.21] folgt die Isomorphie von $\mathcal{D}$ und Y und damit ist $\mathcal{D}$ quasi-projektiv.
Wir wollen zuletzt noch die Eindeutigkeit zeigen. Daraus folgt dann, dass man auch für unendliche Indexmengen die Quasiprojektivität erhält. Sei dazu ein weiteres derartiges Tripel $(\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\pi}, \tilde{\alpha})$ gegeben. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} K(\tilde{\mathcal{D}}) \arrow[rr, "\tilde{\alpha}"] & & L \arrow[r, equal, "\alpha"] & K(\mathcal{D}) \\ \mathcal{O}(\tilde{\pi}^{-1}(\mathcal{C}_i)) \arrow[u] & & Cl(\mathcal{O}(\mathcal{C}_i), L) \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathcal{O}(\mathcal{D}_i) \\ & \mathcal{O}(\mathcal{C}_i) \arrow[ul] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Da $\tilde{\mathcal{D}}$ nicht-singulär ist, erhalten wir eindeutige Isomorphismen $\mathcal{O}(\tilde{\pi}^{-1}(\mathcal{C}_i)) \to Cl(\mathcal{O}(\mathcal{C}_i), L)$ über $\mathcal{O}(\mathcal{C}_i)$ für $i \in I$. Aus der Eindeutigkeit folgt, dass diese Isomorphismen kompatibel (mit den Einschränkungen) sein müssen. Wir erhalten also auch einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{D}$ und $\tilde{\mathcal{D}}$. Nach Konstruktion ist dieser Isomorphismus mit π und $\tilde{\pi}$ sowie α und $\tilde{\alpha}$ verträglich. $\square$

Satz 4.6. *Ist K ein eindimensionaler Funktionenkörper über k, so existiert eine nicht-singuläre, projektive Kurve, die K als Funktionenkörper besitzt.*

Beweis. Wir haben für den Funktionenkörper von $\mathbb{P}^1_k$ einen Isomorphismus $k(x) \cong K(\mathbb{P}^1_k)$. Indem wir x auf ein Element aus $K \backslash k$ abbilden, erhalten wir eine endliche Körpererweiterung $K|k(x)$. Wir können mit dem vorherigen Satz 4.5 die Desingularisierung $(\mathcal{D}, \pi, \alpha)$ von $\mathbb{P}^1_k$ in K bilden.
Wir müssen nun nur noch zeigen, dass $\mathcal{D}$ projektiv ist. Sei dazu $\mathcal{D} \to \mathbb{P}^n_k$ eine Einbettung in einen projektiven Raum. Nach Satz 4.4 faktorisiert $\mathcal{D} \to \mathbb{P}^1_k$ über seinen Abschluss $\bar{\mathcal{D}}$ in $\mathbb{P}^n_k$ und wir erhalten eine Abbildung $\rho : \bar{\mathcal{D}} \to \mathbb{P}^1_k$. Nun ist $\mathcal{D} \hookrightarrow \bar{\mathcal{D}}$ offensichtlich affin. Wir wollen zeigen, dass die Inklusion auch endlich ist, denn dann folgt aus der Eigenschaft endlicher Morphismen abgeschlossen zu sein (siehe [Har][S.91]), dass $\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}}$ gilt. Sei nun $P \in \bar{\mathcal{D}}$. Wähle eine offene affine Umgebung U von P in $\bar{\mathcal{D}}$ und eine offene affine Umgebung V von $\rho(P)$ in $\mathbb{P}^1_k$ mit $\rho^{-1}(V) \subseteq U$. (Zur Wahl von U ist zu beachten, dass für $Q \in \bar{\mathcal{D}}$ mit $\rho(Q) = \rho(P)$ stets $Q \in U$ gelten muss. Eine solche Wahl ist möglich, da die Menge $\{Q \in \bar{\mathcal{D}} | \rho(Q) = \rho(P)\}$ endlich ist, da π als endlicher Morphismus endliche Fasern hat (siehe [Har][S.91]) und $\bar{\mathcal{D}} \backslash \mathcal{D}$ eine endliche Menge ist. Bei der Wahl von V nutzt man, dass π (und damit auch ρ) surjektiv ist und nur endlich viele Punkte entfernt werden müssen, um $\rho^{-1}(V) \subseteq U$ zu erhalten.) Nun ist auch $\rho^{-1}(V)$ als offene Untermenge von U wieder affin. Wir betrachten das kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(\rho^{-1}(V) \cap \mathcal{D}) & & \mathcal{O}(V) \arrow[ll, "\pi^*"'] \arrow[dl, "\rho^*"] \\ & \mathcal{O}(\rho^{-1}(V)) \arrow[ul, hook] & \end{tikzcd}$$

Da $\mathcal{O}(\rho^{-1}(V) \cap \mathcal{D})$ ein endlicher $\mathcal{O}(V)$-Modul ist, ist es auch ein endlicher $\mathcal{O}(\rho^{-1}(V))$-Modul. Damit haben wir eine Umgebung von P gefunden, welche die Eigenschaft für die Endlichkeit erfüllt. Es folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 4.7. Wir haben in den beiden Beweisen dieses Abschnitts im Wesentlichen zwei Auswahlen getroffen. Eine Auswahl fand bei der Wahl der Überdeckung in 4.5 statt. Wir können dort die feinste Überdeckung wählen und somit auf eine Auswahl verzichten. Die andere Auswahl haben wir bei der Wahl des Elements $x \in K\backslash k$ in 4.6 getätigt. Hier gibt es keine kanonische Wahl. Wir können jedoch die Resultate aus Kapitel 3 nutzen, um die Kurven, die für $x \in K\backslash k$ entstehen, zu identifizieren. Wir bilden dazu eine Familie identifizierter Objekte dieser Kurven (parametrisiert über $x \in K\backslash k$), deren Identifizierungsisomorphismen durch die Volltreue des Funktors und die Identität $K \to K$ gegeben sind (hier stecken auch die Isomorphismen $K(\mathcal{D}) \cong K$ drin). Eine Identifizierungsprojektion (man überlege sich eine Identifizierungsprojektion für topologische Räume mit Garben) ergibt eine Kurve $\mathcal{D}_0$ und einen Isomorphismus $K(\mathcal{D}_0) \cong K$, welche von keinen Wahlen abhängen. Die Auswahlen für die Quasi-Projektivität der Kurven sind irrelevant, da eine Einbettung in einen projektiven Raum nicht zum Datum gehört.
Mit dem Beweis von Satz 2.19 erhalten wir so auch eine starke Äquivalenz von Kategorien. Wenn man sich den Beweis von 2.19 ansieht, so erkennt man, dass die Auswahl nur bei der Anwendung der wesentlichen Surjektivität notwendig ist. Wir haben hier jedoch die Isomorphismen $K(\mathcal{D}_0) \cong K$ ohne Auswahl hingeschrieben.

4.3 Abstrakte Kurven

Die zweite Möglichkeit zum Nachweis, dass der Funktor wesentlich surjektiv ist, nutzt abstrakte Kurven, die man zu einem eindimensionalen Funktionenkörper über k definieren kann. Wir stellen den Beweis aus [Har][S.41-45] dar. Wir beginnen mit der Definition abstrakter Kurven.

Definition 4.8. Sei K ein eindimensionaler Funktionenkörper. Wir ordnen K die unendliche Menge (siehe [Har][S.31]) ihrer diskreten Bewertungsringe über k, die wir mit C_K benennen, zu. Wir definieren auf C_K eine Topologie, indem wir als abgeschlossene Mengen die endlichen Mengen und den ganzen Raum nehmen. Wir wollen auf dem topologischen Raum eine Garbe von k-Algebren definieren. Für jede offene Menge $U \subseteq C_K$ definieren wir $\mathcal{O}(U) := \bigcap_{P \in U} P \subseteq K$. Die Identität induziert die Restriktionsabbildung.
Ist nun $f \in \mathcal{O}(U)$, so können wir f als Funktion $U \to k$ auffassen, indem wir $P \mapsto [f]_{\mathfrak{m}_P}$ definieren, wobei $[f]_{m_P}$ die Restklasse von f modulo $\mathfrak{m}_P$ beschreibt (beachte ${}^{P}/_{\mathfrak{m}_P} \cong k$; siehe [Har][S.42]). Sind nun $f, g \in \mathcal{O}(U)$ und definieren f, g die gleiche Funktion, so gilt $f - g \in \mathfrak{m}_P$ für unendlich viele $P \in C_K$ und damit gilt $f = g$ (siehe [Har][S.41]). Diese Eigenschaften implizieren, dass eine Garbe von Ringen auf C_K definiert wird. Das so definierte Schema besitzt einen Funktionenkörper, welcher isomorph zu K ist, da jedes $f \in K$ auf einer offenen Menge $U \subseteq C_K$ regulär ist (siehe [Har][S.41]).
Wir nennen diesen lokal-geringten Raum die *abstrakte nicht-singuläre Kurve von $K|k$*. Eine *abstrakte nicht-singuläre Kurve* ist eine offene Teilmenge U von C_K für einen Funktionenkörper $K|k$ mit der induzierten Garbe.

Wir kommen nun zu Morphismen zwischen Varietäten und abstrakten Kurven.

Definition 4.9. Ein Morphismus $\phi : X \to Y$, wobei X, Y abstrakte nicht-singuläre Kurven oder Varietäten seien, ist eine stetige Abbildung $\phi : X \to Y$ derart, dass für alle offenen Mengen $V \subseteq Y$ und alle regulären Funktionen $f : V \to k$, die Funktion $f \circ \phi$ eine reguläre Funktion auf $\phi^{-1}(V)$ ist.

Wir wollen zeigen, dass C_K zu einer nicht-singulären, projektiven Kurve isomorph ist und so die wesentliche Surjektivität nachweisen, da C_K Funktionenkörper K besitzt. Bevor wir diesen Satz zeigen, benötigen wir noch zwei Lemmata, welche Zusammenhänge zwischen Varietäten und abstrakten Kurven aufzeigen.

Lemma 4.10. *Jede nicht-singuläre (quasi-projektive) Kurve $\mathcal{C}$ ist isomorph zu einer abstrakten nicht-singulären Kurve.*

Beweis. Sei $K := K(\mathcal{C})$, $U \subseteq C_K$ die Menge der lokalen Ringe von $\mathcal{C}$ und $\phi : \mathcal{C} \to U$ die Bijektion, die durch $P \mapsto \mathcal{O}_P$ definiert wird (beachte, dass wegen der Nicht-Singularität von $\mathcal{C}$ die lokalen Ringe diskrete Bewertungsringe sind und verschiedene Punkte auch verschiedene Bewertungsringe liefern, siehe [Har][S.41]). Sei $\tilde{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}$ eine offene, affine Menge mit zugehöriger Menge lokaler Ringe $\tilde{U} \subseteq C_K$. Nun wird $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{C}})$ von endlich vielen Elementen $x_1, \ldots, x_n$ über k erzeugt. $\tilde{U}$ besteht genau aus allen diskreten Bewertungsringen $P \in C_K$ mit $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{C}}) \subseteq P$. Denn, falls es einen weiteren diskreten Bewertungsring $P \in C_K$ mit $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{C}}) \subseteq P$ und $P \notin \tilde{U}$ gäbe, also mit einem uniformisierenden Element t, welches in $\tilde{\mathcal{C}}$ keine Nullstelle hat, so würde auch $t^{-1} \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{C}}) \subseteq P$ gelten. Dies steht im Widerspruch dazu, dass t uniformisierendes Element von P ist. Also gilt $\tilde{U} = \bigcap U_i$ mit $U_i = \{P \in C_K | x_i \in P\}$. Die Mengen $C_K \backslash U_i$ sind endlich (siehe [Har][S.41]) und damit sind auch $C_K \backslash \tilde{U}$ und $C_K \backslash U$ endlich. Somit ist U offen in C_K.
Um Nachzuweisen, dass ϕ ein Isomorphismus ist, müssen wir zeigen, dass die regulären Funktionen unter dem Isomorphismus die gleichen Funktionen sind. Allerdings ist eine Funktion auf $V \subseteq \mathcal{C}$ genau dann regulär, wenn sie in jedem Punkt von V regulär ist, also $\mathcal{O}(V) = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_{P,\mathcal{C}}$. Es folgt direkt die Behauptung. □

Lemma 4.11. *Sei $X \subseteq C_K$ eine abstrakte nicht-singuläre Kurve, $P \in X$ und $\phi : X \backslash \{P\} \to \mathbb{P}^n_k$ ein Morphismus. Dann existiert genau ein Morphismus $\bar{\phi} : X \to \mathbb{P}^n_k$ mit $\bar{\phi}|_{X \backslash \{P\}} = \phi$.*

Beweis. Sei U die offene Menge, die durch $x_0 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0$ definiert wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\phi(X \backslash \{P\}) \cap U \neq \emptyset$ (man wähle sonst einen geeigeneten Automorphismus von $\mathbb{P}^n_k$ der dies liefert).
Nun sind $\frac{x_i}{x_j}$ regulär auf U für $i, j \in \{0, \ldots, n\}$. Mittels Zurückziehen erhalten wir Elemente $f_{ij} := \phi^*(\frac{x_i}{x_j}) \in \mathcal{O}(\phi^{-1}(U)) \subseteq K$. Sei nun ν eine diskrete Bewertung auf K zum Bewertungsring P. Sei $r_i := \nu(f_{i0})$. Dann ist $\nu(f_{ij}) = r_i - r_j$. Wähle k derart, dass $r_k = min(r_0, \ldots, r_n)$. Nun ist $\nu(f_{ik}) \geq 0$ für alle i, also $f_{0k}, \ldots, f_{nk} \in P$.
Sei nun $\bar{\phi}(Q) := \phi(Q)$ für $Q \neq P$ und $\bar{\phi}(P) := (f_{0k} : \cdots : f_{nk})$. Um Nachzuweisen, dass $\bar{\phi}$ ein Morphismus ist, reicht es zu zeigen, dass Funktionen, die in einer Umgebung von $\bar{\phi}(P)$ regulär sind, zu regulären Funktionen zurückgezogen werden. Sei dazu $U_k \subseteq \mathbb{P}^n_k$ die offene, affine Menge die durch $x_k \neq 0$ gegeben ist. Es ist $\bar{\phi}(P) \in U_k$, da $f_{kk}(P) = 1$. Ziehen wir $\frac{x_i}{x_k} \in \mathcal{O}(U_k)$ mittels $\bar{\phi}$ zurück, so erhalten wir nach Definition f_{ik} auf $\phi^{-1}(U_k) \backslash \{P\}$ und ebenso $f_{ik}(P)$ im Punkt P, da $\frac{f_{ik}(P)}{f_{kk}(P)} = f_{ik}(P)$ (betrachte $\bar{\phi}(P)$). Nun ist f_{ik} jedoch auf $\phi^{-1}(U_k)$ regulär. Da $\left\{ \frac{x_i}{x_k} | i \in \{0, \ldots, n\} \right\}$ den Ring $\mathcal{O}(U_k)$ erzeugt, werden reguläre Funktionen auf U_k mittels $\bar{\phi}$ zu regulären Funktionen auf $\bar{\phi}^{-1}(U_k)$ zurückgezogen. Entsprechend gilt dies dann auch für offene Mengen $V \subseteq U_k$ und $\bar{\phi}^{-1}(V)$. Also ist $\bar{\phi}$ ein Morphismus. □

Satz 4.12. *Sei K ein Funktionenkörper von Dimension 1 über k. Dann ist die abstrakte nicht-singuläre Kurve C_K isomorph zu einer nichtsingulären projektiven Kurve.*

Beweis. Nach [Har][S.42] gibt es für jeden Bewertungsring $P \in C_K$ eine nicht-singuläre affine Kurve V und einen Punkt $Q \in V$ mit $P \cong \mathcal{O}_Q$. Der Funktionenkörper von V ist dann K und aus 4.10 folgt, dass V isomorph zu einer offenen Untermenge von C_K ist. Also können wir C_K mit offenen affinen nicht-singulären Kurven überdecken. Da C_K quasi-kompakt ist (die abgeschlossenen Mengen verschieden von C_K sind endlich), können wir eine endliche Überdeckung wählen.
Sei also $(U_i)_{i \in I}$ eine endliche Überdeckung von C_K mit offenen affinen nicht-singulären Kurven. Wir können mittels einer Wahl eines Erzeugendensystems von $\mathcal{O}(U_i)$ Inklusionen $U_i \subseteq \mathbb{A}^{n_i}_k \subseteq \mathbb{P}^{n_i}_k$ erhalten. Sei Y_i der Abschluss des Bildes von U_i in $\mathbb{P}^{n_i}_k$. Wir betrachten die Abbildungen $\phi_i : U_i \to Y_i$. Wir können nun mittels (mehrfacher Anwendung) des vorherigens Lemmas 4.11 ϕ_i zu einer Abbildung $\bar{\phi}_i : C_K \to Y_i$ fortsetzen ($C_K \backslash U_i$ ist endlich) und mittels Diagonalenabbildung und Produktbildung dieser Abbildungen eine Abbildung $\phi : \mathcal{C}_K \to \prod_{i \in I} \mathcal{C}_K \to \prod_{i \in I} Y_i$ definieren. Sei Y der Abschluss des Bildes der Abbildung. Nun ist Y eine projektive Varietät und $\phi : C \to Y$ ist

ein dominanter Morphismus. Also ist Y eine projektive Kurve.
Sei $P \in C_K$. Es ist $P \in U_i$ für ein $i \in I$. Nun erhalten wir mit der Projektion $\pi : Y \to Y_i$ ein kommutatives Diagramm von dominanten Morphismen.

$$\begin{tikzcd} C_K \arrow[r, "\phi"] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ U_i \arrow[u, hook] \arrow[r, "\phi_i"] & Y_i \end{tikzcd}$$

Dies induziert Inklusionen $\mathcal{O}_{\phi_i(P),Y_i} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\phi(P),Y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{P,C_K}$. Die äußeren Ringe sind isomorph, also ist auch $\phi_P^* : \mathcal{O}_{\phi(P),Y} \to \mathcal{O}_{P,C_K}$ ein Isomorphismus.
Sei nun Q ein Punkt von Y. Nun wird $\mathcal{O}_Q$ von einem diskreten Bewertungsring $P \in C_K$ von $K|k$ dominiert (man nehme zum Beispiel den ganzen Abschluss von $\mathcal{O}_Q$ in K und lokalisiere diesen an einem maximalen Ideal; siehe Bemerkungen zu Beginn des Kapitels). Wegen $\mathcal{O}_{\phi(P)} \cong P$ (mittels ϕ_P^*) gilt $\mathcal{O}_{\phi(P)} \supseteq \mathcal{O}_Q$, also mit [Har][S.41] $\mathcal{O}_{\phi(P)} = \mathcal{O}_Q$ und damit $\phi(P) = Q$. Also ist ϕ surjektiv. Ebenso ist ϕ injektiv, da verschiedene Punkte von C_K zu verschiedenen Unterringen von K korrespondieren (beachte wieder die Isomorphismen ϕ_P^*).
Zusammenfassend ist ϕ bijektiv und ϕ_P^* ist ein Isomorphismus für $P \in C_K$. Mit [Har][S.21] folgt daraus die Isomorphie. □

Bemerkung 4.13. Im Gegensatz zur Konstruktion des vorherigen Abschnitts kommen wir hier direkt auf eine speziestheoretische Kurve mit dem richtigen Funktionenkörper. Wir erreichen auf die gleiche Weise wie in 4.7 auch eine starke Äquivalenz von Kategorien.

4.4 Riemannsche Flächen

Wir wollen nun die Äquivalenz zwischen den Kategorien der kompakten Riemannschen Flächen mit nicht-konstanten holomorphen Abbildungen und der Kategorie der eindimensionalen Funktionenkörper über $\mathbb{C}$ nachweisen. Die dafür notwendigen Definitionen können [For] entnommen werden.
Wir setzen dazu den Satz von Riemann-Roch voraus [For][S.129-130].

Satz 4.14. ***(Satz von Riemann-Roch)*** *Sei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X von Genus g. Dann sind $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ und $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ endlich-dimensionale Vektorräume und es gilt*

$$dim_{\mathbb{C}}\, H^0(X, \mathcal{O}_D) - dim_{\mathbb{C}}\, H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + deg\, D.$$

Außerdem gilt $dim_{\mathbb{C}}\, H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$, wenn $deg\, D > 2g - 2$.

Außerdem benötigen wir das folgende Lemma (siehe [For][S.129]).

Lemma 4.15. *Seien $D \leq D'$ Divisoren auf einer kompakten Riemannschen Fläche X. Dann induziert die Inklusion $\mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D'}$ einen Epimorphismus*

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'}).$$

Definition des Funktors Zunächst haben wir einen Funktor von der Kategorie der kompakten Riemannschen Flächen in die Erweiterungskörper von $\mathbb{C}$, indem wir jeder kompakten Riemannschen Fläche X ihren Körper der meromorphen Funktionen $M(X)$ zuordnen und einer nicht-konstanten holomorphen Abbildung zwischen Riemannschen Flächen den Körperhomomorphismus, der durch Zurückziehen entsteht.
Wir wollen nun zeigen, dass das Bild dieses Funktors stets Funktionenkörper von Dimension 1 über $\mathbb{C}$ sind. Wir nutzen dazu das Buch von Miranda [Mir][S.174-176].

Aussage 4.16. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist der Körper der meromorphen Funktionen über $\mathbb{C}$ eine Körpererweiterung von Transzendenzgrad 1.

Beweis. Zunächst existiert eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf X. Demnach ist der Transzendenzgrad dieses Körpers mindestens 1 (wir weisen dies bei der Treuheit des Funktors nach).
Angenommen es existieren nun zwei meromorphe Funktionen f, g auf X, die algebraisch unabhängig sind. Sei nun D ein nicht-negativer Divisor mit $-D \leq (f)$ und $-D \leq (g)$, also $f, g \in \mathcal{O}_D(X)$. Nun gilt für $i + j \leq n$ mit $i, j \geq 0$ stets $f^i g^j \in \mathcal{O}_{nD}(X)$, da $-nD \leq i(f) + j(g) = (f^i g^j)$. Da f und g algebraisch unabhängig sind, ist die Menge $\left\{f^i g^j | i, j \geq 0\right\}$ linear unabhängig. Also gilt

$$dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_{nD}) = dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{nD}(X) \geq \# \{(i,j) | i \geq 0 \wedge j \geq 0 \wedge i + j \leq n\} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Andererseits gilt nach Lemma 4.15

$$dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_{nD}) \geq dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_0) = dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}) = g_X,$$

wobei g_X der Genus von X ist. Also folgt mit dem Satz von Riemann-Roch angewandt auf den Divisor nD:

$$dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_{nD}) = 1 + deg\,(nD) + dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_{nD}) - g_X \leq 1 + deg\,(nD) = 1 + n\,deg\,(D).$$

Es folgt

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \leq dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_{nD}) \leq 1 + n\,deg\,(D).$$

und dies ist ein Widerspruch für große $n \in \mathbb{N}$. □

Aussage 4.17. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und A ein Divisor auf X. Sei weiter f eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf X und $D := (f)_\infty$ der *Divisor der Pole* von f, also $(f)_\infty(x) := -(f)(x)$, falls $(f)(x) \leq 0$ und $(f)_\infty(x) := 0$, falls $(f)(x) > 0$ für $x \in X$. Dann existiert eine natürliche Zahl $m > 0$ und eine meromorphe Funktion g auf X derart, dass

$$A - (g) \leq mD.$$

Außerdem kann g so gewählt werden, dass es ein Polynom in f ist.
Im Fall $A = -(h)$ für eine meromorphe Funktion h, ist also $g \cdot h \in \mathcal{O}(mD)$ für geeignetes $g = r(f)$ mit $r \in \mathbb{C}[t]$, $r \neq 0$ und hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $P_1, \ldots, P_k$ die Menge der Punkte, die im Support von A liegen, für die $A(P_i) \geq 1$ gilt und welche keine Pole von f sind. Setze $g := \prod (f - f(P_i))^{A(P_i)}$. Nun ist (g) nur an den Polstellen von f negativ und $A - (g)$ nimmt in den Punkten $P_1, \ldots, P_k$ den Wert 0 an. Damit kann $A - (g)$ nur an den Polstellen von f positiv sein und demnach existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A - (g) \leq mD$, denn D ist nach Definition an den Polstellen von f positiv. □

Aussage 4.18. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, f eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf X und $D := (f)_\infty$ der Divisor der Pole von f. Angenommen $[M(X) : \mathbb{C}(f)] \geq k$. Dann existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{mD}(X) \geq (m - m_0 + 1)k$$

für alle $m \geq m_0$ gilt.

Beweis. Seien $g_1, \ldots, g_k$ Elemente von $M(X)$, welche linear unabhängig über $\mathbb{C}(f)$ sind. Nach der vorherigen Aussage 4.17 finden wir Polynome $r_i \in \mathbb{C}$, $r_i \neq 0$ derart, dass $h_i := r_i(f)g_i$ nur Pole an den Stellen hat, wo auch f Polstellen besitzt. Die meromorphen Funktionen $h_1, \ldots, h_k$ sind nun wieder linear unabhängig über $\mathbb{C}(f)$ (da $r_i(f) \in \mathbb{C}(f)$) und es gibt ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $h_i \in \mathcal{O}_{m_0 D}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.
Für ganze Zahlen $m \geq m_0$ ist nun $f^i h_j \in \mathcal{O}_{mD}$ solange $0 \leq i \leq m - m_0$, da

$$(f^i h_j) = i(f) + (h_j) \geq -iD - m_0 D \geq -mD.$$

Da die meromorphen Funktionen $f^i h_j \in \mathcal{O}_{mD}$ für $0 \leq i \leq m - m_0$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind, erhalten wir wie behauptet

$$dim_{\mathbb{C}}\, \mathcal{O}_{mD}(X) \geq (m - m_0 + 1)k.$$

□

Aussage 4.19. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und f eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf X und sei $D := (f)_\infty$. Dann gilt

$$[M(X) : \mathbb{C}(f)] \leq deg\,(D)$$

und damit ist $M(X)$ endlich über $\mathbb{C}$ erzeugt.

Beweis. Angenommen $[M(X) : \mathbb{C}(f)] \geq deg\,(D) + 1$. Nach dem vorherigen Lemma 4.18 gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$dim_{\mathbb{C}}\, \mathcal{O}_{mD}(X) \geq (m - m_0 + 1)(1 + deg\,(D)).$$

Nach früheren Überlegungen aus 4.16 gilt jedoch auch

$$dim_{\mathbb{C}}\, \mathcal{O}_{mD}(X) = dim_{\mathbb{C}}\, H^0(X, \mathcal{O}_{mD}) \leq 1 + m\, deg\,(D).$$

Es ergibt sich ein Widerspruch für hinreichend großes m. □

Wir erhalten also einen Funktor in die endlich erzeugten Körper von Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{C}$, welches die eindimensionalen Funktionenkörper über $\mathbb{C}$ sind.

Funktor ist essentiell surjektiv Zum Nachweis, dass der Funktor essentiell surjektiv ist, benötigen wir den folgenden Satz aus [For][S.53-54, S.57].

Satz 4.20. ***(Existenz und Eindeutigkeit algebraischer Funktionen)*** *Sei X eine Riemannsche Fläche und $P(T) \in M(X)[T]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n. Dann existiert eine Riemannsche Fläche Y, eine verzweigte holomorphe n-fache Überlagerung $\pi : Y \to X$ und eine meromorphe Funktion $F \in M(Y)$ derart, dass $(\pi^* P)(F) = 0$. Das Tripel (Y, π, F) ist im folgenden Sinn eindeutig bestimmt. Wenn (Z, τ, G) die entsprechenden Eigenschaften besitzt, dann existiert genau eine biholomorphe, fasererhaltende Abbildung $\sigma : Z \to Y$ derart, dass $G = \sigma^* F$.*
Außerdem gilt $M(Y) \cong {}^{M(X)[T]}/_{(P(T))}$, wenn man $M(X)$ mittels π^* als Unterkörper von $M(Y)$ betrachtet. Ist X kompakt, so ist auch Y kompakt.

Sei nun K ein eindimensionaler Funktionenkörper über $\mathbb{C}$. Sei $f \in K$ transzendent über $\mathbb{C}$. Nun ist $K|\mathbb{C}(f)$ eine endlich erzeugte algebraische Körpererweiterung und damit eine endliche Körpererweiterung. Nach dem Satz vom primitiven Element existiert ein $g \in K$ (welches algebraisch über $\mathbb{C}(f)$ ist) mit $K = \mathbb{C}(f)[g]$.
Sei nun $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (wir haben also $M(X) \cong \mathbb{C}(f)$) und sei $P(T) \in M(X)[T]$ das Minimalpolynom von g über $\mathbb{C}(f)$. Nach dem Satz über die Existenz algebraischer Funktionen gibt es also eine kompakte Riemannsche Fläche Y mit $M(Y) \cong {}^{M(X)[T]}/_{P(T)} \cong K$.

Funktor ist treu Wir nutzen hier Ideen aus [For][S.130-131]. Seien $f, g : X \to Y$ zwei nicht-konstante holomorphe Abbildungen zwischen kompakten Riemannschen Flächen X, Y und $f^*, g^* : M(Y) \to M(X)$ die zugehörigen Abbildungen durch Zurückziehen. Sei $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$ gegeben. Sei g_Y der Genus von Y und D der Divisor, der durch $D(f(x)) = g + 1$ und $D(y) = 0$ für $y \neq f(x)$ gegeben ist. Es gilt wegen des Satzes von Riemann-Roch 4.14 nun

$$dim_{\mathbb{C}}\, H^0(Y, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g_Y + deg\, D = 2.$$

Also existiert eine nicht-konstante Funktion $\alpha \in H^0(Y, \mathcal{O}_D) = \mathcal{O}_D(Y)$ und damit hat α genau einen Pol an der Stelle $f(x)$. Also hat $f^*(\alpha)$ einen Pol im Punkt x und $g^*(\alpha)$ keinen Pol im Punkt x. Es folgt $f^*(\alpha) \neq g^*(\alpha)$ und damit $f^* \neq g^*$.

Funktor ist voll Wir wollen nun noch zeigen, dass dieser Funktor voll ist.

Seien also zwei kompakte Riemannsche Flächen X und Y und ein $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismus $h : M(Y) \to M(X)$ gegeben. Wir suchen eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung $X \to Y$ derart, dass h die zugehörige Abbildung auf den Körpern meromorpher Funktionen ist.
Da $M(Y)$ und $M(X)$ Körpererweiterungen von $\mathbb{C}$ von Transzendenzgrad 1 sind und h als Körperhomomorphismus injektiv ist, ist $M(X)$ mittels h eine algebraische Körpererweiterung über $M(Y)$. Diese Erweiterung ist auch endlich, da $M(X)$ über $\mathbb{C}$ endlich erzeugt ist. Nach dem Satz vom primitiven Element existiert ein $\alpha \in M(X)$ mit $M(Y)[\alpha] \cong M(X)$. Sei P das Minimalpolynom von α über $M(Y)$ und sei $n := deg\, P$. Wegen der Existenz der algebraischen Funktionen 4.20 angewandt auf Y und P gibt es eine kompakte Riemannsche Fläche $\tilde{X}$ zusammen mit einer verzweigten holomorphen n-fachen Überlagerung $\tau : \tilde{X} \to Y$ und einem Element $F \in M(\tilde{X})$ derart, dass $(\tau^*P)(F) = 0$ gilt. Außerdem gilt $M(\tilde{X}) \cong {}^{M(Y)[T]}/_{(P(T))}$ und wir erhalten mittels ${}^{M(Y)[T]}/_{(P(T))} \cong M(X)$, $T \mapsto \alpha$ auch einen Isomorphismus $\phi : M(X) \cong M(\tilde{X})$, der mit den Einbettungen $h : M(Y) \to M(X)$ und $\tau^* : M(Y) \to M(\tilde{X})$ kommutiert. Wir haben damit das Problem auf den Fall der Riemannschen Flächen X und $\tilde{X}$ und den Isomorphismus $\phi^{-1} : M(\tilde{X}) \cong M(X)$ reduziert.

$$\begin{tikzcd} M(X) & M(\tilde{X}) \arrow[l, "\phi^{-1}"'] \\ & M(Y) \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "\tau^*"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "?"] \arrow[dr, dashed, "?"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\tau"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Wie bei dem Nachweis der essentiellen Surjektivität des Funktors können wir nun ein Element $f \in M(X)$, welches transzendent über $\mathbb{C}$ ist, und ein $g \in M(X)$ mit $\mathbb{C}(f)[g] \cong M(X)$ wählen. Sei nun Q das Minimalpolynom von g über $\mathbb{C}(f)$. Nun ist f eine meromorphe Funktion auf X, welche wir als holomorphe Abbildung $\hat{f} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ betrachten können (siehe [For][S.7-8]). Dabei gilt nach Definition für die zugehörige Abbildung zwischen den Körpern der meromorphen Funktionen $\hat{f}^* : M(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \to M(X)$ die Beziehung $\hat{f}^*(t) = f$. Sei $\hat{Q}$ das Polynom, welches man erhält, wenn man Q mittels des Isomorphismus $\mathbb{C}(t) \cong \mathbb{C}(f)$, $t \mapsto f$ als Polynom über $\mathbb{C}(t) \cong M(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ auffasst. Nun definiert $(X, \hat{f}, g)$ eine algebraische Funktion bezüglich $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und $\hat{Q}$. Analog kann man dieses Vorgehen auch auf $\tilde{X}$ mit $\phi(f)$ und $\phi(g)$ anwenden und erhält so eine algebraische Funktion $(\tilde{X}, \hat{\phi(f)}, \phi(g))$ bezüglich $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und $\hat{\phi(Q)}$. Dabei gilt nach Konstruktion $\hat{\phi(Q)} = \hat{Q}$, da die Isomorphismen $\mathbb{C}(t) \cong \mathbb{C}(f)$, $\mathbb{C}(t) \cong \mathbb{C}(\phi(f))$ und $\phi|_{\mathbb{C}(f)}$ miteinander kommutieren. Aus der Eindeutigkeit algebraischer Funktionen 4.20 erhält man eine eindeutige biholomorphe Abbildung $\sigma : X \to \tilde{X}$, welche mit den Abbildungen $\hat{f}$ und $\hat{\phi(f)}$ nach $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ kommutiert und welche die Eigenschaft $\sigma^*(\phi(g)) = g$ besitzt. Das Kommutieren mit $\hat{f}$ und $\hat{\phi(f)}$ impliziert $\sigma^*(\phi(f)) = f$ (betrachte die Bilder von $t \in M(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$). Da ein $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismus $M(\tilde{X}) \to M(X)$ durch die Bilder von $\phi(f)$ und $\phi(g)$ eindeutig bestimmt ist ($\phi(f)$ und $\phi(g)$ erzeugen $M(\tilde{X})$ über $\mathbb{C}$), erhalten wir $\sigma^* = \phi^{-1}$. Es folgt die Behauptung.

Bemerkung 4.21. Für die Äquivalenz der Kategorien treten hier nur relevante Auswahlen bei dem Nachweis der essentiellen Surjektivität auf und die Auswahlen der Polynome f und g sind dort nicht kanonisch. (Wir wollen uns hier nicht näher damit beschäftigen, ob die Konstruktion für den Beweis von 4.20 speziestheoretisch ist, da wir aufgrund der universellen Eigenschaft eine speziestheoretische Konstruktion mit Mittels aus Kapitel 3 erhalten, wenn die Auswahlen im Beweis von 4.20 zu kleinen Mengen führen und Identifizierungsprojektionen existieren. Wir wollen annehmen, dass dies möglich ist.) Wir können jedoch wie in 4.7 die Resultate aus Kapitel 3 nutzen, um die Auswahlen der Polynome f und g wieder „aufzuheben“. Dazu betrachten wir alle Riemannschen Flächen, die durch Wahl von f und g entstehen. Unter der Nutzung der Volltreuheit des Funktors und der kanonischen Isomorphie ihrer Funktionenkörper können wir Identifizierungsisomorphismen zwischen den Flächen definieren. Auf die entstandene Familie identifizierter Objekte wird dann eine Identifizierungsprojektion angewandt (man überlege sich eine Identifizierungsprojektion für Riemannsche Flächen). Dadurch erhalten wir eine speziestheoretische Riemannsche Fläche, welche einen kanonisch isomorphen Funktionenkörper zu dem gewünschten Funktionenkörper besitzt.

Kurzzusammenfassung

Die Diplomarbeit beginnt mit den grundlegenden logischen und mengentheoretischen Definitionen der Mathematik und betont dabei den Standpunkt, dass für den Beweis eines Satzes, ausgehend von den Axiomen, keine Modelle notwendig sind. Es werden demnach die hinter den Objekten stehenden Formeln in den Mittelpunkt gestellt. Wir führen die damit in Zusammenhang stehenden Begriffe der formalisierten Eigenschaft und des formalisierten Objekts neu ein. Die Frage, ob es zu jeder formalisierten Eigenschaft, welche nicht die leere Menge beschreibt, ein zugehöriges formalisiertes Objekt gibt, muss negativ beantwortet werden. Wir bauen nun grundlegende Definitionen darauf auf und gehen dabei insbesondere darauf ein, wie sich Auswahlen auf eine Formel auswirken. Wir nennen formalisierte Eigenschaften, welche von keinen ungewünschten Variablen abhängen, speziestheoretisch. Eine Einführung in Ordinal- und Kardinalzahlen, in welcher wir die Von-Neumann-Hierarchien auf beliebige Grundmengen verallgemeinern, legt die Grundlage für die darauffolgende Charakterisierung der Grothendieck-Universen. Das Existenzaxiom für Grothendieck-Universen wird den ZFC-Axiomen hinzugefügt und es wird diskutiert, welche Vorteile sich aus diesem Axiom ergeben und es wird der Begriff der Absolutheit eingeführt.

Wir können nun im zweiten Kapitel, unter Nutzung der Grothendieck-Universen, die Kategorientheorie auf ein mengentheoretisches Fundament stellen. Universelle Morphismen werden daraufhin intensiver untersucht und wir definieren eine geeignete Kategorie, in der man universelle Morphismen betrachten sollte. Außerdem erhalten wir eine Korrespondenz zu Familien von Funktoren, zu denen universelle Elemente existieren, welche es uns ermöglicht, die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts mit einem Funktor, zu dem universelle Morphismen existieren, zu formulieren. Aus einigen Lemmata über Äquivalenzen von Kategorien folgern wir, dass universelle Morphismen unter Äquivalenzen von Kategorien erhalten bleiben. Diese theoretischen Konzepte bilden eine geeignete Grundlage für aufbauende Sätze im dritten Kapitel. Die Speziestheorie kann nun unter Nutzung des Standpunkts, der zu Beginn der Arbeit erläutert und mit den zugehörigen Begriffen neu eingeführt wurde, als Variante der Kategorientheorie aufgefasst werden. Die Definitionen der Speziestheorie werden aufgeführt und es werden Probleme bei diesen Definitionen erkannt. An Beispielen wird die Speziestheorie erklärt.

Bei der Beschäftigung mit Speziestheorie stellt sich die Frage, wie man bei der Definition von Objekten unnötige Auswahlen vermeiden kann. Wir erklären im dritten Kapitel zunächst an einem Beispiel, wie man aus einer Konstruktion mit Auswahlen zu einer Konstruktion ohne Auswahl kommen kann und bauen darauf die Theorie der Familien identifizierter Objekte auf. Nach der Definition der Kategorie der Familien identifizierter Objekte zu einer gegebenen Kategorie können wir untersuchen, wie sich Funktoren auf die Familien übertragen und für welche Funktoren eine Art Urbildfunktor gebildet werden kann. Es wird der wichtige Begriff der Identifizierungsprojektion eingeführt und nachgewiesen, dass Identifizierungsprojektionen zur Kategorie der Mengen existieren. Wir erhalten den zentralen Satz, der aus einem Universalitätsfunktor (also einem Funktor, der einem Objekt einen universellen Morphismus zuordnet), der jedoch auf unnötigen Auswahlen basiert, einen Universalitätsfunktor ohne solche Auswahlen macht, wobei nur geringe Voraussetzungen an die Situation gestellt werden. Das zu Beginn des Kapitels betrachtete Beispiel wird in der neuen Sprache formuliert und es wird gezeigt, wie der zentrale Satz auf dieses Beispiel angewendet werden kann. Die Identifizierungsprojektionen für andere Kategorien stehen im Zusammenhang zum Strukturtransport und werden mit diesem in einem abstrakten, mengentheoretischen Kontext erläutert. Dazu wird die Verallgemeinerung der Von-Neumann-Hierarchien genutzt. Am Ende des dritten Kapitels werden die Anafunktoren vorgestellt, welche ebenfalls eingeführt wurden, um unnötige Auswahlen zu vermeiden und wir erkennen Parallelen und Unterschiede der Konzepte.

Zuletzt werden noch zwei Äquivalenzen von Kategorien nachgewiesen. Die Theorien der Kurven und Riemannschen Flächen befinden sich in thematischer Nähe zu den Arbeiten Mochizukis. Wir weisen nach, dass die Kategorie der nicht-singulären, projektiven Kurven über einem algebraisch abgeschlossenen Körper mit dominanten Morphismen äquivalent zur Kategorie der eindimensionalen Funktionenkörper über diesem algebraisch abgeschlossen Körper ist. Die letztgenannte Kategorie ist im Fall der komplexen Zahlen äquivalent zur Kategorie der Riemannschen Flächen mit nicht-konstanten holomorphen Abbildungen. Anhand dieser komplexen Beispiele wird die Nütz-

lichkeit der Ausarbeitungen zu Familien identifizierter Objekte bei der Vermeidung unnötiger Auswahlen offensichtlich.
Die Ziele der Diplomarbeit konnten zu großen Teilen umgesetzt werden. So haben wir, mit der Einführung der logischen und mengentheoretischen Grundlagen, unter dem selbst gewählten, speziellen Standpunkt, die Definitionen der Speziestheorie als Variante der Kategorientheorie aufgefasst und die dabei zu beachtenden Aspekte bei der Ausführung mathematischer Konstruktionen mit der Einführung eigener Begriffe herausgearbeitet. Dadurch konnten wir auch mögliche Probleme bei diesen Definitionen erkennen. Das sich aus der Speziestheorie ergebende Problem der Konstruktion von Objekten ohne Auswahlen, konnte für wichtige Konstruktionen in einem sehr allgemeinen, abstrakten Kontext gelöst werden und anhand der Beispiele auch die praktische Relevanz nachgewiesen werden. Zusätzlich konnten wir einige Fragen, die sich bei der Beschäftigung mit den Themen stellten, erfolgreich lösen, welches wiederum zu geeigneten Begriffen und Konstruktionen führte, die für die weitere Arbeit nützlich waren. Auch wenn die Definitionen der Speziestheorie als solche verstanden wurden, war es jedoch, aufgrund des Umfangs und des Niveaus der Arbeiten Mochizukis, nicht möglich die tatsächliche Anwendung dieser Theorie in seinem Beweisversuch herauszuarbeiten.

A Anhang: Ergänzungen zu Familien identifizierter Objekte

Wir wollen in diesem Anhang einige Begriffe definieren, die bei der Arbeit mit Familien identifizierter Objekte naheliegend sind. Es soll dabei insbesondere das Problem behandelt werden, dass iterierte Anwendung von $Fid(F) \circ Fid^{-1}(F)$ für einen identifiziert invertierbaren Funktor F die Familien immer weiter vergrößert. Man erhält so Familien, bei denen viele Identifizierungsisomorphimen die Identität sind. Die folgende Definition behandelt diesen Aspekt. (Man betrachte in dieser Hinsicht auch die Interpretation der saturierten Anafunktoren.)

Definition A.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir nennen eine Familie identifizierter Objekte $A = (I, (A_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i,j \in I})$ *reduziert*, wenn es keine $i, j \in I$ mit $i \neq j$, $A_i = A_j$ und $f_{ij} = id_{A_i}$ gibt. Wir erhalten eine *Kategorie der reduzierten Familien identifizierter Objekte* von $\mathcal{C}$, welche wir mit

$$Fid_{red}(\mathcal{C})$$

bezeichnen. Wir haben eine Inklusion $Fid_{red}(\mathcal{C}) \hookrightarrow Fid(\mathcal{C})$.
Wir haben auch einen *Reduktionsfunktor* $F_{red,\mathcal{C}} : Fid(\mathcal{C}) \to Fid_{red}(\mathcal{C})$. Dieser bilde
$A = (I, (A_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i,j \in I})$ auf das Objekt

$$\tilde{A} = (\tilde{I}, (\tilde{A}_i)_{i \in \tilde{I}}, (\tilde{f}_{ij})_{i,j \in \tilde{I}})$$

ab, welches wie folgt bestimmt wird. Wir haben eine Äquivalenzralation $\sim$ auf I, wobei $i \sim j$ genau dann gilt, wenn $A_i = A_j$ und $f_{ij} = id_{A_i}$. $\tilde{I}$ sei nun die Menge der Äquivalenzklassen von I bezüglich dieser Relation. Für $i \in \tilde{I}$ sei $\tilde{A}_i := A_j$ für ein beliebiges $j \in i$. Für $i, j \in \tilde{I}$ sei $\tilde{f}_{ij} := f_{kl}$ für beliebige $k \in i$ und $l \in j$. $\tilde{A}$ ist nun eine reduzierte Familie identifizierter Objekte.
Ist $B = (J, (B_i)_{i \in J}, (g_{ij})_{i,j \in J}) \in Fid(\mathcal{C})$ mit Bild $\tilde{B} = (\tilde{J}, (\tilde{B}_i)_{i \in \tilde{J}}, (\tilde{g}_{ij})_{i,j \in \tilde{J}})$ und $\alpha = (\alpha_{ij})_{i \in I, j \in J} : A \to B$ ein Morphismus, so wird für $i \in \tilde{I}$, $j \in \tilde{J}$ durch

$$\beta_{ij} := \alpha_{kl}$$

mit $k \in i$, $l \in j$ ein Morphismus

$$\beta = (\beta_{ij})_{i \in \tilde{I}, j \in \tilde{J}} : \tilde{A} \to \tilde{B}$$

definiert. Dies hängt nicht von der Wahl der i, j, k und l ab.
Ist A ein Objekt von $Fid(\mathcal{C})$, so nennen wir $F_{red,\mathcal{C}}(A)$ (oder seine Inklusion nach $Fid(\mathcal{C})$) die *Reduktion von A*.

Beispiel A.2. Die erste Familie identifizierter Objekte in 3.4 ist im Fall $A \neq B$ genau dann reduziert, wenn $f_{13} \neq id_A$. Wir haben in 3.15 gesehen, dass $Fid(F)$ für einen Funktor F nicht stets reduzierte Familien identifizierter Objekte wieder auf reduzierte Familien abbildet.

Sei nun $\mathcal{D}$ eine weitere Kategorie.

Beispiel A.3. Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein identifiziert invertierbaren Funktor, so bildet $Fid^{-1}(F)$ reduzierte Objekte wieder auf reduzierte Objekte ab. Würden nämlich in der Notation von 3.13 $A_{(X,i)} = X$ und $A_{(Y,j)} = Y$ mit der Identität identifiziert, so wäre notwendigerweise $X = Y$. Die Relation $id_{F(X)} = F(id_X) = F(f_{(X,i)(Y,j)}) = g_{ij}$ ergibt nun mit der Reduziertheit der ursprünglichen Familie auch $i = j$. Also folgt $(X, i) = (Y, j)$ und damit ist das Bild reduziert.

Wir können nun die Reduktion nutzen, um bei Anwendung gewisser Funktoren überflüssige Objekte in der Bildfamilie zu eliminieren.

Definition A.4. Für einen beliebigen Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ definieren wir $\tilde{Fid}(F) := F_{red,\mathcal{C}} \circ Fid(F)$. Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ identifiziert invertierbar, so nennen für ein Objekt A in $Fid(\mathcal{C})$ das Objekt

$$Fid^{-1}(F)(\tilde{Fid}(F)(A))$$

den *(reduzierten) Abschluss von A bezüglich F* und den Funktor

$$F_{absl,F} := Fid^{-1}(F) \circ \tilde{Fid}(F)$$

Abschlussfunktor (mit Reduktion) bezüglich F.

Bei Familien identifizierter Objekte ist es naheliegend zwei Familien als „gleich“ zu betrachten, wenn sie sich nur in der Indexmenge unterscheiden.

Definition A.5. Zwei Familien identifizierter Objekte $A = (I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I})$ und $B = (J, (B_k)_{k\in J}, (g_{kl})_{k,l\in J})$ heißen *gleich bis auf Indexmenge*, wenn es eine Bijektion $\alpha : I \to J$ derart gibt, dass $A_i = B_{\alpha(i)}$ und $f_{ij} = g_{\alpha(i)\alpha(j)}$ für alle $i, j \in I$ gelten.
Ein Funktor $F : Fid(\mathcal{C}) \to Fid(\mathcal{D})$ heißt *indexmengentreu*, wenn zwei Objekte, die gleich bis auf Indexmenge sind, wieder auf zwei Objekte abbildet, die gleich bis auf Indexmenge sind. Sind zwei Funktoren indexmengentreu, so ist es auch ihre Hintereinanderausführung. Die Funktoren $Fid(F)$, $Fid^{-1}(F)$ sind für alle geeigneten Funktoren F indexmengentreu und auch $F_{red,\mathcal{C}}$ ist indexmengentreu. Dies ergibt sich sofort aus den Konstruktionen.
Zwei Funktoren $F, G : Fid(\mathcal{C}) \to Fid(\mathcal{D})$ heißen *gleich bis auf Indexmenge*, wenn für alle $A \in Ob(Fid(\mathcal{C}))$ die Objekte $F(A)$ und $G(A)$ gleich bis auf Indexmenge sind.

Beispiel A.6. Sind zwei identifiziert invertierbare Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ gegeben, so sind $Fid^{-1}(F) \circ Fid^{-1}(G)$ und $Fid^{-1}(G \circ F)$ gleich bis auf Indexmenge.

Der folgende Satz zeigt nun, dass mittels Reduktion und Abschlussbildung die Funktoren $Fid(F) \circ Fid^{-1}(F)$ und $Fid^{-1}(F) \circ Fid(F)$ im Wesentlichen die Identität sind.

Satz A.7. *Für ein reduziertes Objekt A von $Fid(\mathcal{D})$ ist $\tilde{Fid}(F)(Fid^{-1}(F)(A))$ gleich bis auf Indexmenge zu A. Ebenso sind für eine beliebige Familie identifizierter Objekte A die Bilder $F^2_{absl,F}(A)$ und $F_{absl,F}(A)$ stets gleich bis auf Indexmenge.*

Beweis. Sei also $A := (I, (A_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i,j\in I})$ reduziert. Es ist per Definiton

$$Fid^{-1}(F)(A) = (J, (B_k)_{k\in J}, (g_{kl})_{k,l\in J})$$

$$\text{mit } J := \{(X, i)|X \in F^{-1}(A_i)\}, B_{(X,i)} := X \text{ und } g_{(X,i)(Y,j)} : B_{(X,i)} \to B_{(Y,j)}$$
$$\text{ist der eindeutige Morphismus mit } F(g_{(X,i)(Y,j)}) = f_{ij}.$$

Anwenden von $Fid(F)$ ergibt $C := (J, (C_k)_{k\in J}, (g_{kl})_{k,l\in J})$ mit $C_{(X,i)} := F(B_{(X,i)}) = F(X) = A_i$ und $h_{(X,i)(Y,j)} : C_{(X,i)} \to C_{(Y,j)}$ ist per Definition $F(g_{(X,i)(Y,j)})$, also gleich f_{ij}.
Bildet man nun die Reduktion, so ist zu untersuchen, wann $f_{ij} = id_{A_i}$ gilt. Da A reduziert ist, kann dies nur für $i = j$ gelten und wegen der Definition der Familien identifizierter Objekte gilt auch $f_{ii} = id_{A_i}$. Demnach wird bei der Reduktion J in die Äquivalenzklassen der Form $\{(X, i)|X \in F^{-1}(A_i)\}$ für $i \in I$ aufgeteilt. Diese sind in offensichtlicher Bijektion zu I.
Unter dieser Bijektion sind A und $\tilde{Fid}(F)(Fid^{-1}(F)(A))$ gleich bis auf Indexmenge.
Es gilt $F^2_{absl,F} = Fid^{-1}(F) \circ (\tilde{Fid}(F) \circ Fid^{-1}(F)) \circ \tilde{Fid}(F)$. Im Bild von $\tilde{Fid}(F)$ liegen nur reduzierte Objekte. Also sind $(\tilde{Fid}(F) \circ Fid^{-1}(F)) \circ \tilde{Fid}(F)$ und $\tilde{Fid}(F)$ gleich bis auf Indexmenge. Wegen der Indexmengentreue von $Fid^{-1}(F)$ sind also auch $F^2_{absl,F}(A)$ und $F_{absl,F}(A)$ gleich bis auf Indexmenge. □

B Anhang: Abstraktion und formale Beweise

Wir wollen in diesem Anhang ein paar Bemerkungen dazu machen, wie in dieser Arbeit abstrakte Konstruktionen mit der Notwendigkeit des konkreten Beweises wechselwirken. Unter Abstraktion verstehen wir in diesem Kontext die von konkreten Dingen losgelöste Idee. Ein formaler Beweis ist hier ein Beweis in der ZFC-Mengenlehre (gegebenenfalls mit Existenzaxiom für Grothendieck-Universen). Auch wenn die ZFC-Mengenlehre an sich als sehr abstrakt angesehen werden kann, ist sie allein dadurch, dass wir sie hier als Grundlage der Mathematik ansehen wollen und damit mathematische Ideen in dieser formuliert werden müssen, bezüglich den mathematischen Ideen die konkrete Welt. Wenn man sich auf den Standpunkt stellt, dass der Beweis der zentrale Punkt aller Überlegungen ist, so sind auch die Modelle, welche man sich vorstellt, abstrakter als die Formeln mit denen man eigentlich arbeitet.
Auch wenn wir in dieser Arbeit manchmal die konkreten Formeln nicht hingeschrieben haben, so müsste man für den vollständigen Beweis tatsächlich konkrete Formeln wählen, welche die gewünschten Dinge realisieren. So haben wir zum Beispiel nicht beschrieben, was wir unter einer disjunkten Vereinigung verstehen. Die „Realisierungen", die getätigt wurden (zum Beispiel bei der Definition einer Kategorie), können natürlich auch anders gewählt werden.
Auch nach der Einigung auf Realisierungen sind immer noch „Übersetzungen" notwendig. So braucht man bei einer disjunkten Vereinigung eine „Übersetzung" um von einem Element der disjunkten Vereinigung zu einem Element einer der ursprünglichen Mengen zu kommen und es gibt als Menge einen Unterschied zwischen $\mathbb{Z}$-Moduln und abelschen Gruppen, sodass zwischen diesen auch eine „Übersetzung" notwendig ist. In diesem Sinn ist es nicht ungewöhnlich solche „Übersetzungen" auch bei den Von-Neumann-Hierarchien zu nutzen.
Dabei sollte man daran denken, dass eine Menge nur dann sinnvoll als Objekt einer gewissen Kategorie interpretiert werden kann, wenn man bereits weiß, dass es aus dieser Kategorie stammt. So ist ein Monoid auch eine Menge und die Elementrelation liefert nach Definition entweder die Menge, welche die Grundmenge des Monids als Element enthält oder die Menge die die Grundmenge des Monoids und die Operation auf der Grundmenge als Elemente enthält und *nicht* ein Element der Grundmenge. Eine Menge enthält nicht die Information in welcher Kategorie man sie betrachten soll und wählt man eine andere „Realisierung", so ist sie nicht einmal Element der Kategorie, die man betrachten möchte.
Diese Bemerkungen sollen lediglich dazu dienen, sich bewusst zu sein, dass man mit solchen Dingen arbeiten muss, wenn man den Beweis wirklich aufschreiben wöllte. Es geht hier nicht darum zu fordern, dass man Beweise in dieser Art aufschreiben sollte, jedoch soll die Kenntnis dazu führen, mögliche Probleme (siehe 2.32) in Beweisen zu erkennen. Die mathematischen Ideen müssen also in der Mengenlehre geeignet formulierbar sein.

Symbolverzeichnis

$\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$, $=$, (,)	logische Symbole	1.1
$x \notin y$	x ist kein Element von y	1.3
$\emptyset$	leere Menge	1.3
$x \neq y$	x und y sind nicht gleich	1.3
$x \cap y$	Schnitt zweier Mengen x und y	1.3
$(Sn)_C$	die Elemente von C erfüllen das n-te Axiom der ZFC-Mengenlehre	1.3
$\exists!$	Quantor für die Existenz genau einer Menge	1.5
$\mid$	Trennstrich bei der Beschreibung einer Menge	S.8
$x \cup y$	Vereinigung zweier Mengen x und y	1.14
$\{x_1, \ldots, x_n\}$	Beschreibung einer Menge durch Aufzählen der Elemente	1.14
(x, y)	Paar aus x und y	1.14
$(x_1, \ldots, x_n)$	Tupel der Mengen x_1, …, x_n	1.14
$P(x)$	Potenzmenge von x	1.14
$\bigcup x$	Vereinigung der Elemente von x	1.14
$x \times y$	Produkt von zwei Mengen x und y	1.14
$Rel(r)$	r ist eine Relation	1.15
$Fkt(f)$	f ist eine Funktion	1.15
$Def(f)$	Definitionsbereich von f	1.15
$Wb(f)$	Wertebereich von f	1.15
$f : x \rightarrow y$	f ist von Funktion von x nach y	1.15
$f : x \twoheadrightarrow y$	f ist von Surjektion von x nach y	1.15
$(a_i)_{i \in x}$	Schreibweise einer Funktion als Familie	1.15
$\subseteq, \subset$	Teilmenge und echte Teilmenge	1.15
$Op_M(f)$	f ist eine zweistellige Operation auf M	1.17
$Ass_M(f)$	f ist eine assoziative Operation auf M	1.17
$Komm_M(f)$	f ist eine kommutative Operation auf M	1.17
$Neutr_{M,f}(e)$	e ist neutrales Element der Operation f, welche auf M wirkt	1.17
$Mon(x)$	x ist ein Monoid	1.17
$Torsfr_M(\circ)$	$\circ$ ist torsionsfrei	1.17
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$	die Mengen der ganzen und rationalen Zahlen	1.18
$\setminus$	Differenzmenge	1.18
$\otimes$	die Operation des Tensorprodukts zweier Vektorräume	1.21
$A \otimes_R B$	das Tensorprodukt von zwei R-Algebren	1.23
$deg(f)$	der Grad des Polynoms f	1.24
$Trans(x)$	x ist transitiv	1.26
$Zus(x)$	x ist zusammenhängend	1.26
$Ord(x)$	x ist eine Ordinalzahl	1.26
$<, \leq$	Ordnungsrelationen auf Ordinalzahlen	1.27

$0, 1, \ldots, n, n{+}1$	natürliche Zahlen als Ordinalzahlen, Nachfolgerzahl	1.27
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	1.28
$\alpha + \beta$	Addition der Ordinalzahlen α und β	S.15
$\rho(x)$	Rang der Menge x	1.30
$\psi(\beta)$	Von-Neumann-Hierarchie bezüglich der Ordinalzahl β	1.31
$\psi_A(\beta)$	verallgemeinerte Von-Neumann-Hierarchie bezüglich der Ordinalzahl β und der Grundmenge A	1.32
f_β	zugehörige Abbildung auf der verallgemeinerten Von-Neumann-Hierarchie	1.32
$\lvert x\rvert$	Kardinalität der Menge x	S.17
$(G_M n)$	n-te Bedingung für Grothendieck-Universen nach MacLane	1.39
$(G_W n)$	n-te Bedingung für Grothendieck-Universen nach Williams	1.39
$[\phi]^P$	Relativierung von ϕ bezüglich P	1.47
dom, cod	Quell- und Zielobjekt	2.1
$Ob(\mathcal{C})$	Objekte der Kategorie $\mathcal{C}$	2.2
$Mor(\mathcal{C})$	Morphismen der Kategorie $\mathcal{C}$	2.2
$id(\mathcal{C})$	Zuordnung der Identitätsmorphismen zu den Objekten für die Kategorie $\mathcal{C}$	2.2
$\circ_{\mathcal{C}}$	Hintereinanderausführung der Morphismen der Kategorie $\mathcal{C}$	2.2
$Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$	Menge der Morphismen von A nach B in der Kategorie $\mathcal{C}$	2.2
Vek_k	Kategorie der Vektorräume über k	2.5
$Vek_{k,B}$	Kategorie der Vektorräume mit Basis über k	2.5
$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$	Produkt der Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$	2.6
$Univ_{\mathcal{C},\mathcal{D},F}$	Kategorie, in welcher die universellen Morphismen bezüglich $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ beschrieben werden können	2.11
$P_{\mathcal{C}}, P_{\mathcal{D}}, P_{Mor}$	Projektionen auf die jeweilige Komponente der Tripel von $Univ_{\mathcal{C},\mathcal{D},F}$	2.11
$Bil(V \times W, U)$	Menge der bilinearen Abbildungen von $V \times W$ nach U	2.14
$\otimes$	bilineare Abbildung des Tensorprodukts	2.14
f_*, f^*	für eine Funktion g mit geeignetem Funktions- bzw. Wertebereich gilt per Definition $f^*(g) := g \circ f$ bzw. $f_*(g) := f \circ g$	S.27
Vek_k^{1+2}	Objekte dieser Kategorie sind Vektorräume oder Paare von Vektorräumen	2.16
$E \in \mathfrak{S}_0$	E ist 0-Exemplar der 0-Spezies $\mathfrak{S}_0$	2.30
$\mathfrak{F} : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}'$	Schreibweise für die Formel der 1-Exemplare	2.30
$\mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}' \circ \mathfrak{F}$	Formel dafür, dass $\mathfrak{F}''$ die Hintereinanderausführung der zu $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ gehörenden 1-Exemplare ist	2.30
$F' \circ F$	Hintereinanderausführung der 1-Exemplare F und F'	2.30
id_E	1-Exemplar, welches die Identität des 0-Exemplars E beschreibt	2.30
$E \in \mathfrak{S}_1$,	E ist 0-Exemplar der 1-Spezies $\mathfrak{S}_1$	2.30
$\mathfrak{M}(E)$, $\mathfrak{M}(F)$	Schreibweise für die Bilder eines 0- und eines 1-Exemplars unter der Mutation $\mathfrak{M}$	2.30

$\mathfrak{Z}(E)$	Bild des 0-Exemplars E unter dem Morphismus von Mutationen $\mathfrak{Z}$	2.30
$\mathfrak{S}^{top}$	Spezies der topologischen Räume und stetigen Abbildungen	2.35
$\mathfrak{S}^{u-top}$	Spezies der topologischen Räume mit universellen Überlagerungen	2.35
$\mathfrak{S}^{gp}$	Spezies der Gruppen mit äußeren Homomorphismen	2.35
$\mathfrak{S}^{mon}$	Spezies der torsionsfreien abelschen Monoide mit Monoidhomomorphismen	2.36
$\mathfrak{F}^{mon} = \mathfrak{F}_p^{mon}$	Monoid-Frobenius-Mutation	2.36
$\mathfrak{F}^{pf}$	Monoid-p-Vervollkommnungsmutation	2.36
$Fid(\mathcal{C})$	Kategorie der Familien identifizierter Objekte über $\mathcal{C}$	3.3
$Präorb(\mathcal{C})$, $Orb(\mathcal{C})$	Kategorien der Präorbiobjekte und Orbiobjekte über $\mathcal{C}$	3.6
$\iota_{\mathcal{C}}$	Inklusionsfunktor von $\mathcal{C}$ nach $Fid(\mathcal{C})$	3.7
$Fid(F)$	zugehöriger Funktor der Familien identifizierter Objekte	3.9
$F^{-1}(A)$	Menge der Objekte $B \in \mathcal{D}$ mit $F(B) = A$ für einen Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und ein Objekt A von $\mathcal{C}$	3.11
$Fid^{-1}(F)$	zugehöriger Urbildfunktor der Familien identifizierter Objekte	3.13
$i_{\mathcal{C}}$, ${}_{\mathcal{C}}i$	zwei natürliche Isomorphismen von Funktoren	3.22, 3.23
$Vek_{k,B}^{1+2}$	Objekte dieser Kategorie sind Vektorräume mit Basis oder Paare von Vektorräumen mit Basis	3.19
$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$	Anafunktor	3.33
Rie	Kategorie der kompakten Riemannschen Flächen	S.59
$Kur_{k,ns,proj}$	Kategorie der nicht-singulären, projektiven Kurven über k	S.59
$Kör_k^1$	Kategorie der eindimensionalen Funktionenkörper über k	4.1
$dim_\kappa(V)$	Vektorraumdimension von V über κ	4.3
$dim\, R$	Krulldimension des Rings R	4.3
$K(\mathcal{C})$	Körper der rationalen Funktionen auf $\mathcal{C}$	S.59
$\mathcal{O}(V)$	Ring der regulären Funktionen auf der offenen Teilmenge V	S.59
$Quot(R)$	Quotientenkörper von R	S.59
$tr - deg_k(K)$	Transzendenzgrad von $K \vert k$	S.60
$\bar{U}$	Abschluss von U	S.60
$\mathbb{P}_k^n$	n-dimensionaler projektiver Raum über k	4.4
$\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{P,\mathcal{C}}$	lokaler Ring in P der Varietät $\mathcal{C}$	4.4
$Cl(R,K)$	ganzer Abschluss von R in K	4.5
A_f	Lokalisierung von A an der multiplikativen Menge $\{1, f, f^2, \dots\}$	4.5
π^*	zugehörige Abbildung auf den Funktionenkörpern durch Zurückziehen	4.6
$\mathbb{A}_k^n$	n-dimensionaler affiner Raum über k	4.5
C_K	abstrakte Kurve von $K \vert k$	4.8

$\mathcal{O}_D$	Menge der meromorphen Funktionen, deren Divisor größergleich $-D$ ist	4.14
$H^0(X,\mathfrak{F})$	Nullte Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in der Garbe $\mathfrak{F}$	4.14
$H^1(X,\mathfrak{F})$	Erste Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in der Garbe $\mathfrak{F}$	4.14
$deg\, D$	Grad des Divisors D	4.14
$M(X)$	Körper der meromorphen Funktionen von X	S.65
(f)	Divisor von f	4.16
$(f)_\infty$	Divisor der Pole von f	4.17
$[L:K]$	Körpererweiterungsgrad von $L\|K$	4.18
π^*	zugehörige Abbildung auf den Körpern meromorpher Funktionen durch Zurückziehen	4.20
$Fid_{red}(\mathcal{C})$	Kategorie der reduzierten Familien identifizierter Objekte	A.1
$F_{red,\mathcal{C}}$	Reduktionsfunktor	A.1
$F_{absl,F}$	Abschlussfunktor bezüglich F	A.4

Stichwortverzeichnis

Literatur

[Ati] M. Atiyah, I. G. MacDonald: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Series in Mathematics (1969).

[Die] C. Diem: *Algebraische Geometrie*, Mitschrift zur Vorlesung, gehalten im Wintersemester 2012/2013 an der Universität Leipzig

[Drk] F. Drake: *Set theory: An introduction to large cardinals*, North Holland Publishing Company (1974).

[Ebb] H.-D. Ebbinghaus: *Einführung in die Mengenlehre*, Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 4.Auflage (2003)

[For] O. Forster: *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics 81, Springer (1981)

[Har] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer (1977)

[Ivo] C. Ivorra Castillo: *Lógica y teoría de conjuntos*, Skript, 2011, verfügbar unter `http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Logica.pdf` (abgerufen am 27.02.2014)

[Kru] A. H. Kruse: *Grothendieck universes and the super-complete models of Shepherdson*, Compositio Mathematica, 17, (1965-1966), S.96-101.

[Lan] S. Lang: *Die abc-Vermutung*, Elemente der Mathematik 48, Birkhäuser Verlag (1993)

[Lan2] S. Lang: *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 211, Springer (2002)

[Mak] M. Makkai: *Avoiding the axiom of choice in general category theory*, Journal of Pure and Applied Algebra 108, (1996), S.109-173 .

[McL] S. MacLane: *One Universe as a Foundation for Category Theory*, Reports of the Midwest Category Seminar III, Lecture Notes in Mathematics Volume 106 (1969), S. 192-200.

[McL2] S. MacLane: *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer (1987)

[Mir] R. Miranda: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics 5, American Mathematical Society (1953)

[Mos] A. Mostowski: *Constructible sets with applications*, Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland Publishing Company (1969)

[Mot1] S. Mochizuki: *Inter-universal Teichmuller Theory I: Construction of Hodge Theaters.* verfügbar unter `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-english.html` (abgerufen am 19.11.2014)

[Mot2] S. Mochizuki: *Inter-universal Teichmuller Theory II: Hodge-Arakelov-theoretic Evaluation.* verfügbar unter `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-english.html` (abgerufen am 19.11.2014)

[Mot3] S. Mochizuki: *Inter-universal Teichmuller Theory III: Canonical Splittings of the Log-theta-lattice.* verfügbar unter `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-english.html` (abgerufen am 19.11.2014)

[Mot4] S. Mochizuki: *Inter-universal Teichmuller Theory IV: Log-volume Computations and Set-theoretic Foundations.* verfügbar unter `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-english.html` (abgerufen am 19.11.2014)

[Mot5] S. Mochizuki: *Topics in Absolute Anabelian Geometry III: Global Reconstruction Algorithms.* verfügbar unter `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-english.html` (abgerufen am 19.11.2014)

[Shp] J. C. Shepherdson: *Inner Models for set theory*, Journal for Symbolic Logic, Volume 16, Issue 3 (1951), 161-190.

[Wil] N. H. Williams: *On Grothendieck universes*, Compositio Mathematica, 21, 1 (1969), S.1-3.

[Yam] G. Yamashita: *FAQ on „Inter-Universality“*, verfügbar unter `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/FAQ%20on%20Inter-Universality.pdf` (abgerufen am 24.09.2015)

[Zar] O. Zariski, P. Samuel: *Commutative Algebra I*, Graduate Texts in Mathematics 28, Springer (1975).

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort Datum Unterschrift