Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Zur Injektivität eines durch die Normresteabbildung induzierten Homomorphismus

Diplomarbeit

Leipzig, 28. April 2014

vorgelegt von
Felix Cremer
Diplom Mathematik

Betreuender Hochschullehrer:
Prof. Dr. B. Herzog
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Lücke in der Ausarbeitung des Preprints „On the spinor norm and $A_0(X, K_1)$ for quadrics"[Ros88] von Rost durch A.Matthes in [Mat12] zu schließen. In der gesamten Arbeit betrachten wir nur Körper mit einer Charakteristik ungleich 2.

Die Hauptaussage von [Ros88] ist:

1.1 Theorem (M. Rost). *Sei φ eine reguläre quadratische Form über einem Körper F. Wenn jedes Element der speziellen Clifford-Gruppe $\overline{S\Gamma(\varphi)}$ als Produkt zweier ebener Elemente dargestellt werden kann, dann ist die Abbildung*

$$N_\varphi : A_0(X_\varphi, K_1) \to K_1^M(F)$$

injektiv.

Diese Aussage von Rost ist ein Baustein im Beweis der Milnor-Vermutung durch Wladimir Voevodsky. Die Milnor-Vermutung besagt, dass es einen Isomorphismus zwischen den Milnor K-Gruppen eines Körpers F modulo einer Potenz von 2 und der Galois-Kohomlogie gibt:

$$K_n^M(F)/2^m \cong H^n(F, \mu_m^{\otimes m}).$$

Hierbei bezeichnet μ_m die Gruppe der m-ten primitiven Einheitswurzeln.

1.1 wurde von Voevodsky in [Voe96] benutzt, um das Verschwinden einer Kohomologie-Gruppe zu beweisen. Eine ausführliche Beweisskizze der Milnor-Vermutung findet man durch Bruno Kahn in [Kah97] oder durch Fabien Morel in [Mor98].

Das Theorem von Rost 1.1 ist eine Aussage in der Milnor-K-Theorie für Quadriken. Es ist äquivalent zur Exaktheit der Gersten-Sequenz

$$\ldots \to \bigoplus_{x \in (X_\varphi)_{(2)}} K_{n+2}^M(\kappa(x)) \to \bigoplus_{x \in (X_\varphi)_{(1)}} K_{n+1}^M(\kappa(x)) \to \bigoplus_{x \in (X_\varphi)_{(0)}} K_n^M(\kappa(x)) \to K_n^M(F)$$

an der letzten Stelle für n=1.

Im ersten Abschnitt werde ich die wichtigsten Begriffe und die für unsere Betrachtungen notwendigen Ergebnisse der Theorie der quadratischen Formen zusammentragen.

Im zweiten Abschnitt folgen die wichtigsten Definitionen aus der algebraischen Geometrie, da wir diese brauchen um die projektive Quadrik X_φ zu definieren, was ich im dritten Abschnitt machen werde. Im vierten Abschnitt gebe ich einen Überblick über die Begriffe der Milnor-K-Theorie im Hinblick auf die uns interessierende Situation. Im fünften Abschnitt werde ich dann die beiden Lücken schließen und das Theorem von Rost beweisen.

2 Quadratische Form

Im Folgenden werde ich die Definition der quadratischen Form und die wichtigsten Eigenschaften nennen. Diese kann man in [Sch85] nachlesen.

2.1 Definition. Seien F ein Körper und V ein F-Vektorraum, dann ist eine **quadratische Form** eine Abbildung

$$\varphi : V \to F \text{ mit } \varphi(\alpha v) = \alpha^2 \varphi(v), \quad \alpha \in F, \quad v \in V,$$

sodass die Abbildung b_φ mit

$$b_\varphi(v, w) := \frac{1}{2}(\varphi(v + w) - \varphi(v) - \varphi(w))\; v, w \in V$$

bilinear ist. Die Abbildung b_φ heißt zu φ **assoziierte Bilinearform** und ist nach Definition symmetrisch.

Das Paar (V,φ) wird quadratischer Raum genannt. Für jeden Unterraum $V_0 \subseteq V$ ist $\varphi_{|V_0}$ eine **Unterform** von φ. Unterformen von φ werden oft mit φ_0 bezeichnet.

Bemerkung. Der hier benutzte Begriff der quadratischen Form stimmt für unendliche Körper mit der klassischen Betrachtung als homogenes Polynom vom Grad 2 überein, da ein homogenes Polynom vom Grad 2 der Definition einer quadratischen Form genügt und wir in 2.7 sehen, dass eine quadratische Form ein homogenes Polynom vom Grad 2 definiert.

2.2 Proposition. *Sei b eine symmetrische Bilinearform, dann kann man zu b durch*

$$q_b(x) = b(x, x)$$

eine quadratische Form definieren. Dann gilt:

1. $b_{q_b} = b$
2. $q_{b_\varphi} = \varphi$

Beweis.

1. $b_{q_b}(x, y) = \frac{1}{2}(q_b(x + y) - q_b(x) - q_b(y)) = \frac{1}{2}(b(x + y, x + y) - b(x, x) - b(y, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)) = b(x, y)$
2. $q_{b_\varphi}(x) = b_\varphi(x, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x + x) - \varphi(x) - \varphi(x)) = \varphi(x)$

q_b ist eine quadratische Form, da gilt $q_b(ax) = b(ax, ax) = ab(x, x)a = a^2 b(x, x) = a^2 q_b(x)$ und die assoziierte Bilinearform ist nach 1. gerade b also bilinear.

$\square$

2.3 Definition. Zwei Elemente v,w aus V heißen orthogonal bezüglich b_φ, falls gilt: $b_\varphi(v,w) = 0$. Sei W $\subseteq$ V eine Untermenge, dann wird das **orthogonale Komplement** definiert durch:

$$W^\perp := \{v \in V | b_\varphi(v,w) = 0 \textit{ für alle } w \in W\}.$$

Das orthogonale Komplement von V mit sich selbst $rad\ V = V^\perp$ wird **Radikal von V** genannt. Die quadratische Form φ heißt **regulär**, falls gilt rad V = 0, andernfalls **singulär**.

2.4 Definition. Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\varphi(v) = 0$ heißt **isotrop**, ansonsten **anisotrop**. Enthält V einen isotropen Vektor, so heißt φ **isotrop**, ansonsten **anisotrop**. Gilt rad V = V, so heißt V **total isotrop**.

2.5 Definition. Zwei quadratische Formen φ, ψ über einem Körper F heißen ähnlich, falls es ein $a \in F^*$ gibt mit

$$\psi \cong a \cdot \varphi.$$

2.6 Definition. Sei (V, φ) ein quadratischer Raum über dem Körper F. Sei K/F eine Körpererweiterung. Dann kann man einen quadratischen Raum über K definieren durch

$$(V,\varphi)_K = (V \otimes_F K, \varphi_K)$$

$$b_{\varphi_K}(v \otimes a, w \otimes b) = ab_\varphi(v,w)b.$$

Daher gilt dann

$$\varphi_K(v \otimes a) = b_{\varphi_K}(v \otimes a, v \otimes a) = ab_\varphi(v,v)a = a^2\varphi(v).$$

2.7 Proposition. *Jeder quadratische Raum (V,q) besitzt eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren.*

Beweis. Siehe [Sch85, Theorem 3.5. S.7] □

Bemerkung. Man kann daher jede quadratische Form durch die Werte der Elemente der Orthogonalbasis beschreiben. Sei eine Orthogonalbasis $\{e_1, ..., e_n\}$ gegeben, dann bezeichne:

$$\langle a_1, ..., a_n \rangle$$

die quadratische Form mit, $q(e_i) = a_i$. Dann gilt für $x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ mit $c_k \in F$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 a_k$$

2.8 Definition. Sei (V, φ) ein quadratischer Raum über F, dann nennt man einen Erweiterungskörper K/F **Zerfällungskörper** von φ, wenn φ_K isotrop ist.

2.9 Proposition. *Sei (V, φ) ein anisotroper quadratischer Raum über F, dann gibt es einen Zerfällungskörper K/F mit $[K : F] = 2$.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen von 2.7 gilt $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 a_k$. Für $y = 1 \cdot e_1 + \sqrt{-\frac{a_1}{a_2}} e_2$ gilt daher

$$\varphi(y) = a_1 - \frac{a_1}{a_2} a_2 = a_1 - a_1 = 0.$$

Damit ist y ein isotroper Punkt der quadratischen Form $(V, \varphi)_{F(\sqrt{-\frac{a_1}{a_2}})}$. Da φ anisotrop ist, kann $-\frac{a_1}{a_2}$ nicht in F liegen, daher hat $F(-\frac{a_1}{a_2})$ den Erweiterungsgrad 2.

□

2.1 Spezielle Clifford-Gruppe und Spinornorm

2.10 Definition. Sei F ein Körper und seien $a, b \in F^*$. Wir definieren die Quaternionenalgebra zu a und b

$$\left(\frac{a, b}{F}\right)$$

als die vierdimensionale F-Algebra mit der Basis

$$1, i, j, ij,$$

sodass gilt

$$i^2 = a,\ j^2 = b,\ ij = -ji.$$

Bemerkungen. Sei $q = s + ti + uj + vij$ ein Quaternion.

1. Der Übergang zum Konjugierten $\overline{q} := s - ti - uj - vij$ definiert eine Involution auf der Quaternionenalgebra. Dadurch kann man eine Normabbildung

$$Nrd : \left(\frac{a, b}{F}\right) \to F$$

$$q \mapsto q \cdot \overline{q}$$

definieren, sodass gilt

$$Nrd(q) = s^2 - at^2 - bu^2 + abv^2.$$

2. Sei K/F eine Körpererweiterung, dann erhält man durch Basiserweiterung aus der Quaternionenalgebra über F eine Quaternionenalgebra über K.

$$\left(\frac{a, b}{F}\right) \otimes K = \left(\frac{a, b}{K}\right)$$

2.11 Proposition. *Sei* $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ *eine Quaternionenalgebra, dann gibt es folgende Isomorphismen:*

1. $\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{ac^2, bd^2}{F}\right)$

2. $\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{a,b\tilde{a}}{F}\right)$

Wobei $\tilde{a}$ eine Norm der Körpererweiterung $F(\sqrt{a})/F$ ist.

Beweis. Siehe [GT06, 1.1.2 und 1.4.4]

□

2.12 Definition. Sei (V, φ) ein quadratischer Raum, dann definiert man die Clifford-Algebra von φ wie folgt als Faktoralgebra der Tensoralgebra $T^*(V)$:

$$C(\varphi) := T^*(V)/\langle v \otimes v - \varphi(v) | v \in V\rangle$$

Die Restklasse von $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ wird mit $v_1 \cdot \ldots \cdot v_n$ bezeichnet. Auf der Clifford-Algebra kann man eine Involution definieren mit

$$\overline{v_1 \cdot \ldots \cdot v_n} = v_n \cdot \ldots \cdot v_1.$$

Mit dieser Involution kann man eine Norm

$$N : C(\varphi) \to C(\varphi), \alpha \mapsto \alpha \cdot \overline{\alpha}$$

auf $C(\varphi)$ definieren.

Bemerkung. Da $v \otimes v - \varphi(v)$ ein Element der geraden Tensorpotenz ist, wird die Clifford-Algebra zu einer graduierten Algebra.

2.13 Theorem. *Seien φ, ψ zwei quadratische Formen über F, dann gilt*

$$C(\varphi \perp \psi) = C(\varphi)\hat{\otimes}C(\psi)$$

Hierbei bezeichne $\hat{\otimes}$ das graduierte Tensorprodukt im Sinne der Supermathematik.

Beweis. Siehe [Sch85, Theorem 9.2.5]. □

2.14 Proposition. *Sei φ eine quadratische Form über F und K/F eine Körpererweiterung, dann gilt*

$$C(\varphi_K) = C(\varphi) \otimes_F K$$

Beweis. Siehe [Knu91, Proposition IV 1.2.3]. □

2.15 Proposition. *Sei φ eine quadratische Form über F und $f \in F^*$. Dann gilt:*

1. $C_0(\varphi) = C_0(f \cdot \varphi)$
2. *Sei $\varphi = \psi \perp \langle f\rangle$, dann gilt $C_0(\varphi) \cong C(-f\psi)$*

Beweis. Siehe [EKM08, 11.4]. □

2.16 Beispiel. *Seien $a, b, c \neq 0$ und $\varphi = \langle a, b, c\rangle$ eine quadratische Form über F dann gilt:*

$$C(\varphi) = \left(\frac{-ac, -bc}{F}\right) \otimes C(\langle -abc\rangle)$$

und

$$C_0(\varphi) = \left(\frac{-ac, -bc}{F}\right)$$

Beweis. Siehe [Sch85, Lemma 9.2.9, S.332]. Man beachte, dass bei Scharlau die Quaternionenalgebra mit der trivialen Graduierung auftritt und daher das graduierte Tensorprodukt mit dem normalen Tensorprodukt übereinstimmt. □

2.17 Beispiel. *Sei φ eine reguläre quadratische Form über F mit $\dim \varphi = 4$, dann gibt es $a, b, c \in F$, sodass gilt $C_0(\varphi) = \left(\frac{a,b}{F}\right) \otimes C(\langle c\rangle)$.*

Beweis. Sei $\varphi = \langle u, v, w, x\rangle$, nach 2.15 gilt $C_0(\varphi) = C_0(\lambda\varphi)$. Mit $\lambda = \frac{w}{uv}$ können wir also annehmen, es gilt $\varphi = \langle \frac{w}{v}, \frac{w}{u}, \frac{w^2}{uv} \frac{xw}{uv}\rangle$. Nach geeigneter Substitution können wir also annehmen, es gilt

$$\varphi = \langle -a, -b, ab, c\rangle.$$

Damit gilt nach 2.15

$$\begin{aligned} C_0(\varphi) &= C(-c\langle -a, -b, ab\rangle) \\ &= C(\langle ac, bc, -abc\rangle) \\ &= \left(\frac{acabc, bcabc}{F}\right) \otimes C(\langle acbcabc\rangle) \\ &\cong \left(\frac{a, b}{F}\right) \otimes C(\langle c\rangle). \end{aligned} \tag{1}$$

□

2.18 Lemma. *Zwei 4-dimensionale quadratische Formen über F sind ähnlich genau dann, wenn ihre geraden Clifford-Algebren isomorph sind.*

Beweis. Siehe [Knu88, Theorem 9.7, S.78]. □

2.19 Definition. Die spezielle Clifford-Gruppe $S\Gamma(\varphi)$ ist definiert als Teilmenge des geraden Teils der Clifford-Algebra $C_0(\varphi)$.

$$S\Gamma(\varphi) := \{\alpha \in C_0(\varphi)^* | \alpha V \alpha^{-1} = V \ in \ C(\varphi)\}.$$

Für die Details der Definition siehe [Mat12, Abschnitt 1.3.] oder [Sch85, Definition 3.4 S.336].

2.20 Lemma. *Sei (V, φ) eine reguläre quadratische Form. Dann ist die von der Norm der Clifford-Algebra auf der speziellen Clifford-Gruppe induzierte Abbildung*

$$sn : S\Gamma(\varphi) \to K^*$$

ein Gruppenhomomorphismus. Diesen nennt man Spinornorm. Das Bild der Spinornorm werde ich im Folgenden mit $D_1(\varphi)$ bezeichnen.

Beweis. Siehe [Sch85, 9.3.2 S. 335].

□

2.21 Beispiel. *Sei $dim\ \varphi \leq 3$, dann gilt*

$$S\Gamma(\varphi) = C_0(\varphi)^*.$$

Sei $dim\ \varphi = 4$, dann gilt

$$S\Gamma(\varphi) = \{\alpha \in C_0(\varphi) | N(\alpha) \in F^*\}.$$

Beweis. $S\Gamma(\varphi)$ liegt nach Definition in $C_0(\varphi)^*$. Nach 2.20 liegt die Norm eines Elements von $S\Gamma(\varphi)$ in F^*. Falls gilt $dim\ \varphi = 3$, dann ist die Norm von jedem Element von $C_0(\varphi)^*$ ein Element von F^*, da $C_0(\varphi)$ nach 2.16 eine Quaternionenalgebra über F ist. Wir müssen daher nur die umgekehrte Enthaltenseinsrelation zeigen.

Sei $\alpha \in C_0(\varphi)^*$. Da $C_0(\varphi)$ eine Algebra ist, liegt α^{-1} in $C_0(\varphi)$. Aufgrund der Graduierung der Clifford-Algebra liegt also $\alpha v \alpha^{-1}$ in $C_1(\varphi)$. Im Fall $dim\ \varphi \leq 2$ gilt, $dim\ C_1(\varphi) = dim\ V$, daher gilt $V = C_1(\varphi)$ und somit $S\Gamma(\varphi) = C_0(\varphi)^*$.

Sei nun $dim\ \varphi \in \{3, 4\}$.

Nach der Definition der Norm der Clifford-Algebra gilt

$$\alpha^{-1} = \overline{\alpha} \cdot N(\alpha)^{-1}$$

und da $N(\alpha)$ nach Voraussetzung in F^* liegt, reicht es zu zeigen

$$\alpha v \overline{\alpha} \in V.$$

Allgemein gilt

$$\overline{\alpha v \overline{\alpha}} = \overline{\overline{\alpha}} \cdot \overline{v} \cdot \overline{\alpha} = \alpha v \overline{\alpha}.$$

Nun reicht es zu zeigen, dass Elemente aus $C_1(\varphi)$, die invariant unter der Involution sind, in V liegen. Sei $\beta \in C_1(\varphi)$ mit $\beta = w + \gamma$ mit $w \in V$ und γ eine Linearkombination von Gliedern der Gestalt $a \cdot e_i e_j e_k$ mit $1 \leq i < j < k \leq dim\ \varphi$ und $a \in F$. Angenommen es gilt $\overline{\beta} = \beta$, d.h

$$w + \gamma = \overline{w + \gamma} = \overline{w} + \overline{\gamma} = w + \overline{\gamma}.$$

Das heißt es gilt $\gamma = \overline{\gamma}$.

Außerdem gilt

$$\overline{e_i e_j e_k} = e_k e_j e_i = -e_k e_i e_j = e_i e_k e_j = -e_i e_j e_k,$$

also $\gamma = -\overline{\gamma}$. Zusammen gilt $\gamma = -\gamma$, also $\gamma = 0$. Daher sind nur Elemente aus V invariant unter der Involution.

□

2.22 Definition. Ein Element $\alpha \in S\Gamma(\varphi)$ heißt eben, wenn es eine zweidimensionale Unterform $\varphi_0 \subseteq \varphi$ gibt mit $\alpha \in S\Gamma(\varphi_0)$.

2.23 Proposition. *Sei φ eine reguläre quadratische Form. Jedes Element von $S\Gamma(\varphi)$ kann als Produkt von $\left[\frac{dim\varphi}{2}\right]$ ebenen Elementen geschrieben werden.*

Beweis. Siehe [Mat12, Satz 2.6]. □

2.24 Definition. Wir interessieren uns hier nicht hauptsächlich für die spezielle Clifford-Gruppe, sondern für die Faktor-Gruppe der speziellen Clifford-Gruppe

$$\overline{S\Gamma(\varphi)} := S\Gamma(\varphi)/\left\langle [a,b], cd^{-1} | a,b,c,d \in S\Gamma(\varphi) \text{ } und \text{ } c,\ d \text{ } eben \text{ } mit \text{ } sn(c) = sn(d) \right\rangle.$$

Die Spinornorm induziert dann eine Spinornorm

$$\overline{sn} : \overline{S\Gamma(\varphi)} \to K^*.$$

2.25 Proposition. *Sei φ eine reguläre quadratische Form. Falls jedes Element aus $\overline{S\Gamma(\varphi)}$ als Produkt zweier ebener Elemente geschrieben werden kann, dann ist $\overline{sn}$ injektiv.*

Beweis. Sei $\overline{\alpha} \in ker\ \overline{sn}$, dann gibt es nach Voraussetzung zwei Elemente $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2} \in \overline{S\Gamma(\varphi)}$ eben mit

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2}.$$

Wegen $\overline{\alpha} \in ker\ \overline{sn}$ gilt

$$1 = \overline{sn}(\overline{\alpha}) = \overline{sn}(\overline{\alpha_1 \alpha_2}) = \overline{sn}(\overline{\alpha_1}) \cdot \overline{sn}(\overline{\alpha_2}),$$

daraus folgt

$$\overline{sn}(\overline{\alpha_1}) = \overline{sn}(\overline{\alpha_2})^{-1}.$$

Da $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}$ eben sind, gilt

$$\overline{\alpha_1} = \overline{\alpha_2}^{-1},$$

daher gilt

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2} = \overline{\alpha_2}^{-1} \cdot \overline{\alpha_2} = 1.$$

□

3 Algebraische Geometrie

Im Folgenden benenne ich kurz die wichtigsten Begriffe der algebraischen Geometrie, die für die Definition der projektiven Quadrik benötigt werden. Eine gute Übersicht bietet Hartshorne in [Har77]. Für einen ausführlichen Kurs in algebraischer Geometrie sei auf das Skript von Vargil [Var13] verwiesen.

3.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum, dann gibt es eine Kategorie $\mathcal{T}op(X)$, deren Objekte die offenen Teilmengen von X sind und deren Morphismen die Inklusionen sind. Das heißt die Morphismenmengen sind entweder leer oder bestehen aus genau einem Element. Eine Prägarbe auf X ist ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{T}op(X)$ in eine der Kategorien Ringe, Gruppen, Moduln, Mengen. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X mit den folgenden zwei zusätzlichen Eigenschaften:

1. Für jede offene Teilmenge U von X, jede offene Überdeckung $\{V_i\}$ von U und $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{V_i} = t|_{V_i}$ für alle i, gilt s=t.

2. Für jede offene Teilmenge U von X, jede offene Überdeckung $\{V_i\}$ von U und Elemente $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ für alle i, sodass für alle i,j gilt: $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, existiert ein Element $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{V_i} = s_i$ für alle i.

Bemerkung. Im Folgenden betrachten wir nur Prägarben beziehungsweise Garben, die in die Kategorie der Ringe mit 1 abbilden. Diese werde ich im Folgenden Ringprägarben bzw. Ringgarben nennen.

3.2 Definition. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Ringprägarben auf einem topologischen Raum X. Ein **Ringgarbenmorphismus** $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ besteht aus einem Ringhomomorphismus $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für jede offene Teilmenge U von X, sodass für jede Inklusion $\rho : V \to U$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi(U)"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\rho)"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathcal{G}(\rho)"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi(V)"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd} \tag{2}$$

kommutiert.

3.3 Proposition. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X. Es gibt dann eine bis auf Isomorphismen eindeutige Garbe $\mathcal{F}^+$ und einen Ringprägarbenmorphismus $\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ mit der folgenden Universalitätseigenschaft.*
Für jede Garbe $\mathcal{G}$ und jeden Morphismus $\phi; \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ gibt es einen eindeutigen Morphismus $\varrho : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$, sodass gilt $\phi = \varrho \circ \rho$. Das Paar $(\mathcal{F}^+, \rho)$ ist bis auf Isomorphismen eindeutig. $\mathcal{F}^+$ nennt man die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe. Den Übergang zur assoziierten Garbe nennt man auch Garbifizierung. Siehe dazu [Har77, II,1.2].

3.4 Definition. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen. Für jede Garbe $\mathcal{G}$ von X definieren wir die **direkte Bildgarbe** $f_*\mathcal{G}$ auf Y durch:

$$(f_*\mathcal{G})(V) = \mathcal{G}(f^{-1}(V)).$$

Siehe [Har77, Definition S.65].

3.5 Definition. Sei P ein Punkt des topologischen Raumes X. Für eine Garbe $\mathcal{F}$ von X ist der Halm $\mathcal{F}_P$ an P der direkte Limes der Ringe $\mathcal{F}(U)$ über die offenen Teilmengen U, die P enthalten.

$$\mathcal{F}_P := \varinjlim_{P \in U\ offen} \mathcal{F}(U).$$

3.6 Definition. Ein mit einer Ringgarbe $\mathcal{O}$ versehener topologischer Raum X ist ein **lokal geringter Raum**, wenn für jeden Punkt $P \in X$ der Halm $\mathcal{O}_P$ ein lokaler Ring ist. Der lokal geringte Raum wird mit $(X, \mathcal{O})$ bezeichnet.

3.7 Definition. Ein Morphismus zwischen lokal geringten Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ besteht aus einem Paar $(f, f^{\#})$ mit einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Morphismus von Ringgarben $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$, sodass für jeden Punkt $P \in X$ die induzierte Abbildung von lokalen Ringen $f_P^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$ ein lokaler Homomorphismus von lokalen Ringen ist. Die lokal geringten Räume bilden mit diesen Morphismen eine Kategorie.

Siehe [Hol12, 10.2].

3.1 Spektrum eines Ringes

Mit dem Spektrum eines Ringes kann man zu einem gegebenen Ring einen lokal geringten topologischen Raum konstruieren. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Bezeichne *Spec R* die Menge der Primideale von R. Für jedes Ideal $I \subseteq R$ sei $V(I) \subseteq Spec\ R$ die Menge aller Primideale, die I enthalten.

3.8 Proposition. *Die V(I) haben die Eigenschaften:*

1. *Seien I,J Ideale von R, dann gilt* $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.
2. *Für eine Menge* $\{I_n\}$ *von Idealen von R gilt:* $V(\sum I_n) = \cap V(I_n)$.
3. *Es gilt* $V((0)) = Spec\ R$ *und* $V(R) = \emptyset$.

Damit kann man eine Topologie auf Spec R definieren, indem man die V(I) als abgeschlossene Teilmengen definiert.

Beweis. Zu 1.) „$\subseteq$“: Sei $p \in V(IJ)$, d.h. $IJ \subseteq p$ und o.B.d.A gelte $I \nsubseteq p$, d.h. es gibt ein $i \in I$ mit $i \notin p$. Für jedes $j \in J$ gilt $ij \in p$. Da p ein Primideal ist, gilt also $j \in p$, d.h. $J \subseteq p$, also gilt $p \in V(J)$ damit also $p \in V(I) \cup V(J)$.

„$\supseteq$“: Sei o.B.d.A $p \in V(I)$, wegen $IJ \subseteq I \cap J \subseteq I \subseteq p$ gilt $p \in V(IJ)$.

Zu 2.) Sei p ein Primideal von R. Da $\sum I_n$ das kleinste Ideal ist, das alle I_n enthält, gilt: p enthält $\sum I_n$ genau dann, wenn p alle I_n enthält. □

Bemerkungen.

1. Man nennt die so definierte Topologie auf Spec R Zariski-Topologie.
2. Man kann zu jedem Element $a \in R$ die Menge $D(a) := \{p \in SpecR | a \notin p\}$ definieren, diese Mengen bilden eine Topologie-Basis der Zariski-Topologie

Nun da wir einen topologischen Raum Spec R haben, können wir daran gehen, eine Ringgarbe $\mathcal{O}$ auf Spec R zu definieren. Sei R_p die Lokalisierung nach dem Primideal p.

Für eine offene Teilmenge $U \subseteq Spec\ R$ sei $\Delta(U) := R \backslash (\bigcup_{p \in U} p)$, dies ist eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Für zwei offene Teilmengen U und V von Spec R gilt:

$$U \subseteq V \Rightarrow \Delta(U) \supseteq \Delta(V).$$

Wir können eine Prägarbe $\tilde{\mathcal{O}}$ auf Spec R durch

$$\tilde{\mathcal{O}}(U) = \Delta(U)^{-1} R$$

definieren. Für $U \subseteq V$ definieren wir die zugehörige Einschränkung als

$$\rho^{\tilde{\mathcal{O}}}_{V,U} : \Delta(V)^{-1} R \to \Delta(U)^{-1} R$$

$$\frac{r}{s} \mapsto \frac{r}{s}.$$

Diese ist wohldefiniert, da gilt $\Delta(V) \subseteq \Delta(U)$.

Die Garbifizierung von $\tilde{\mathcal{O}}$ gibt dann eine Garbe $\mathcal{O}$. Sei $p \in Spec\ R$, dann ist der Halm $\mathcal{O}_p = \varinjlim_{p \in U\ offen} \mathcal{O}(U)$ gerade die Lokalisierung R_p von R.

Siehe dazu [Har77, Proposition 2.2 S.71].

Bemerkung. Lokal geringte Räume, die zu einem lokal geringten Raum der Gestalt (Spec R, $\tilde{\mathcal{O}}$) isomorph sind, heißen affine Schemata. Sie bilden eine volle Teilkategorie der Kategorie der lokal geringten Räume.

3.9 Proposition. *Die Funktoren*

$$\begin{pmatrix} kommutative \\ Ringe\ mit\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} affine \\ Schemata \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$R \longmapsto (Spec\ R, \mathcal{O}_{Spec\ R})$$

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longleftarrow\!\!\shortmid (X, \mathcal{O}_X)$$

sind zueinander quasi-inverse Äquivalenzen von Kategorien.

Beweis. Siehe [Liu02, Remark, 2.3.24].

□

Bemerkung. Wir werden im folgenden den Übergang von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der affinen Schemata mit Spec und die Umkehrung mit Γ bezeichnen.

3.10 Definition. Ein Schema ist ein lokal geringter Raum, in dem jeder Punkt eine offene Umgebung U hat, sodass die Einschränkung der Garbe auf U isomorph zum Spektrum eines Ringes ist. Ein Morphismus von Schemata ist ein Morphismus von lokal geringten Räumen.

3.11 Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Schema. Die **Dimension** von X ist das Supremum über die Länge d aller aufsteigenden Ketten von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_d.$$

Die Dimension hängt nur vom zugrunde liegenden topologischen Raum ab.

3.12 Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Schema, dann ist für $x \in X$ der **Restekörper** $\kappa(x)$ definiert als der Faktor des lokalen Ringes $O_{X,x}$ nach seinem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_X$.

3.2 F-Schemata

3.13 Definition. Sei F ein Körper. Ein Schema über F oder auch F-Schema, ist ein Schema X mit einem Morphismus $X \to \mathit{Spec}\ F$. Seien X und Y F-Schemata. Ein F-Schema-Morphismus $f : X \to Y$ ist ein Schema-Morphismus $f : X \to Y$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & \mathit{Spec}\ F & \end{tikzcd} \tag{4}$$

Die F-Schemata bilden mit den so definierten F-Schema-Morphismen eine Kategorie. Siehe [Har77, Definition, S.78].

Bemerkung. Sei X ein F-Schema. Im Weiteren bezeichne $(X)_{(i)}$ die Menge der Elemente von X, deren Abschluss die Dimension i hat. Sei $\kappa(x)$ der Restekörper eines Punktes x. Der Körpergrad $[\kappa(x) : F]$ heißt Grad des Elementes x.

3.14 Definition. Seien F ein Körper und X,Y F-Schemata. Das Faserprodukt von X und Y über F ist ein F-Schema $X \times_F Y$ mit zwei F-Schemamorphismen $p : X \times_F Y \to X$ und $q : X \times_F Y \to Y$, das die folgende universelle Eigenschaft hat:

Seien $f : Z \to X$ und $g : Z \to Y$ zwei F-Schemamorphismen, dann gibt es einen eindeutigen F-Schemamorphismus $(f, g) : Z \to X \times_F Y$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} & X \\ Z \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "(f{,}g)"] \arrow[dr, "g"'] & X \times_F Y \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

p und q werden auch Projektionen genannt.

Bemerkung. Für den Fall, dass X= Spec A und Y= Spec B affine Schemata sind, so ist

$$Spec\ A \otimes_F B$$

das Faserprodukt von X und Y. Den allgemeinen Fall erhält man durch Verkleben. Siehe hierzu [Har77, Theorem 3.3. S.87].

3.15 Definition. Seien F ein Körper, $(X, \mathcal{O})$ ein F-Schema und K/F eine Körpererweiterung. Die Injektion $F \hookrightarrow K$ induziert einen Schemamorphismus $Spec\ K \to Spec\ F$. Den Übergang zum Faserprodukt $X_K := Spec\ K \times_F X$ nennt man Basiswechsel. Man kann X_K durch die Projektion auf Spec K als K-Schema auffassen.

3.16 Definition. Sei $(X, \mathscr{O})$ ein F-Schema und K/F eine Körpererweiterung. Die Menge X(K) der K-rationalen Punkte von X ist die Menge der F-Schema-Morphismen $Spec\ K \to X$.

Bemerkungen.

1. Ein Morphismus von Spec K nach X besteht aus einer Abbildung

$$f : \ Spec\ K \to X \ : (0) \mapsto x$$

und einem lokalen Homomorphismus von F-Algebren

$$f^{\#}_{(0)} : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Spec\ K,(0)} = K.$$

Da dies ein lokaler Ringhomomorphismus ist, gilt $ker\ f^{\#}_{(0)} = \mathfrak{m}_x$ und nach dem Homomorphie-Satz faktorisiert sich $f^{\#}_{(0)}$ über $\kappa(x)$

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \kappa(x) \hookrightarrow K.$$

2. Seien $T = (T_1, \ldots, T_n)$ Unbestimmte und $I \subseteq F[T]$ ein Ideal. Dann betrachten wir den Ring $R := F[T]/I$ und das affine Schema X=Spec R. Bezeichen $\overline{T_i}$ das Bild von T_i unter der natürlichen Abbildung. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : X(K) &\to \{x \in K^n | f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\} \\ \phi &\mapsto (\Gamma(\phi)(\overline{T_1}), \ldots \Gamma(\phi)(\overline{T_n})) \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis.

1. Dies gilt aufgrund der Definition des F-Schema-Morphismus.

2. Die Abbildung ρ^{-1} definiert durch

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \vartheta \mapsto Spec\ \vartheta,$$

ist die Umkehrabbildung zu ρ, wobei ϑ der F-Algebra-Homomorphismus

$$\begin{aligned} F[T]/I &\to K \\ g(\bar{T}) &\mapsto g(\alpha) \end{aligned}$$

ist.

□

3.17 Proposition. *Sei X = Spec R ein F-Schema mit einer endlich-erzeugten F-Algebra R. Sei K/F eine algebraische Erweiterung. Dann gibt es eine Abbildung*

$$\delta : X(K) \to Hom_F(R, K) \to Specm\ R \tag{5}$$

$$\phi \mapsto \Gamma(\phi) \mapsto ker(\Gamma(\phi)).$$

Die Einschränkung der bis auf K-Automorphismen von $\bar{F}$ definierten Abbildung

$$Specm\ R \to X(\bar{F}) \tag{6}$$

$$x \mapsto Spec\ (R \to R/x = \kappa(x) \hookrightarrow \bar{F})$$

ist ein Schnitt von δ mit den folgenden Eigenschaften

1. *x liegt im Bild von (5) genau dann, wenn sich die Einbettung $\kappa(x) \hookrightarrow \bar{F}$ so wählen lässt, dass gilt*
$$\kappa(x) \hookrightarrow K.$$

2. *Für $\Gamma(\phi_1), \Gamma(\phi_2) \in Hom_F(R, K)$ gilt $ker(\Gamma(\phi_1)) = ker(\Gamma(\phi_2))$ genau dann, wenn gilt $\Gamma(\phi_1) = \sigma \circ \Gamma(\phi_2)$ mit $\sigma \in Aut(\bar{F}/F)$.*

Identifiziert man F-konjugierte Punkte von X(K), d.h. Punkte, die bei einem $\sigma \in Aut(\bar{F}/F)$ ineinander übergehen, so wird X(K) zu einer Teilmenge von Specm R. Specm R ist gerade die Vereinigung solcher Teilmengen, wenn K die algebraischen Erweiterungen von F durchläuft.

Beweis.

1. "$\Leftarrow$":

   Sei $x \in Specm\ R$ mit $\kappa(x) \hookrightarrow K$, dann ist die Abbildung

   $$f : R \to R/x = Q(R/x) = \kappa(x) \hookrightarrow K$$

   ein Element von $Hom_F(R, K)$. Da f die Zusammensetzung der natürlichen Abbildung $R \to R/x$ und einer injektiven Abbildung ist, gilt ker f = x.

"⇒":

Nach Voraussetzung existiert ein $f \in Hom_F(R, K)$ mit $ker(f) = x$. Nach dem Homomorphiesatz gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & K \arrow[r, hook] & \bar{F} \\ & R/ker(f) \arrow[ur, "\alpha"'] & & \end{tikzcd} \tag{7}$$

mit α injektiv. Da K/F algebraisch ist, ist R/ker(f) als nullteilerfreie endlich erzeugte F-Algebra ein Körper, d.h. es ist $R/ker(f) = \kappa(x)$ und α ist die gesuchte Einbettung $\kappa(x) \hookrightarrow K$.

2. "⇒":

   Sei $ker(f_1) = ker(f_2) = x$ mit F-Algebrahomomorphismen $f_1, f_2 : R \to K$. Dann sind nach dem nullten Homomorphiesatz die Bilder der f_i beide F-isomorph zu $R/x = \kappa(x)$, d.h. es gibt einen F-Isomorphismus

   $$\sigma : Im(f_1) \to Im(f_2)$$

   mit $f_2 = \sigma \circ f_1$. Wegen $Im(f_i) \subseteq K \subseteq \bar{F}$ lässt sich σ zu einem F-Automorphismus von $\bar{F}$ fortsetzen.

   "⇐"

   Der Kern einer Abbildung wird durch Komposition mit einem Automorphismus nicht verändert.

□

3.18 Lemma. *Sei F ein Körper, X ein F-Schema und $x \in (X)_{(0)}$ ein Punkt mit Restekörper K. Dann gibt es einen Punkt $\tilde{x} \in (X_K)_{(0)}$ über x, sodass gilt*

$$\kappa(\tilde{x}) = K.$$

Beweis. Sei Spec R eine affine Umgebung von x. Dann hat die Projektion

$$p : X_K \to X$$

lokal die Gestalt

$$Spec\ R \otimes K \to Spec\ R$$

$$R \otimes K \leftarrow R.$$

Da uns nur die Punkte über x interessieren, schränken wir diese Abbildung auf $p^{-1}(\overline{\{x\}}$ das Urbild von $\overline{\{x\}}$ ein. Da x abgeschlossen ist, gilt $\overline{\{x\}} = \{x\} = Spec\ R/x$ und für das Urbild gilt:

$$p^{-1}(\overline{\{x\}} = Spec\ (R \otimes K)/(x \otimes K) = Spec\ R/x \otimes K = K \otimes K.$$

Wir erhalten dann eine Abbildung

$$Spec\ K \otimes K \to Spec\ K.$$

Betrachten wir die Abbildung ρ:

$$\theta : R/x \otimes K = K \otimes K \to K$$

$$r\ mod\ x \otimes a \mapsto (r\ mod\ x) \cdot a.$$

Diese ist eine surjektive Abbildung in den Körper K. Der Kern von θ ist daher maximal und hat nach dem Homomorphiesatz den Restekörper K. Dies ist also ein Punkt über x mit dem Restekörper K. $\square$

3.3 Projektive Schema zu einem graduierten Ring

Eine wichtige Klasse von Schemata bilden die projektiven Schemata der graduierten Ringe R. Diese werden mit Proj R bezeichnet. Sei $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ ein graduierter Ring und sei $R_+ = \bigoplus_{n>0} R_n$ das irrelevante Ideal. Wir werden im folgenden die vereinfachende Annahme machen, dass R als R_0-Algebra von R_1 endlich erzeugt wird [Har77, vgl. , Bedingung + nach II, 7.8.6 S.160]. Dann definieren wir das **projektive Schema** Proj R zu R als Menge der homogenen Primideale von R die R_+ nicht enthalten.

$$Proj\ R = \{p \subset R | \text{prim und homogen}, R_+ \nsubseteq p\}$$

Für jedes homogene Ideal I sei $V(I) := \{p \in ProjR | I \subseteq p\}$. Die Topologie von Proj R kann man definieren, indem man als geschlossene Mengen die Teilmengen V(I) definiert. Diese haben die gleichen Eigenschaften wie im affinen Fall. Siehe [Har77, Lemma 2.4 S.76].

Man kann nun eine Ringgarbe $\mathcal{O}$ auf Proj R definieren. Hierzu definiert man zunächst die Mengen

$$D_+(f) := \{\mathfrak{p} \in Proj\ R | f\ homogen\ und\ f \notin \mathfrak{p}\}$$

für alle homogenen Elemente f von R. Die $D_+(f)$ sind offen, da gilt $D_+(f) = Proj\ R \backslash V((f))$. Für jedes Element $p \in Proj\ R$ gilt $R_+ \nsubseteq p$, daher gibt es ein homogenes Element $f \in R$ mit $p \in D_+(f)$, d.h. die $D_+(f)$ bilden eine offene Abdeckung von Proj R.

Wir können die Elemente von $D_+(f)$ als Primideale von $R_{(f)}$ dem Ring der Elemente vom Grad 0 der Lokalisierung von R nach f auffassen. Daher können wir $D_+(f)$ mit der Schema-Struktur von $Spec\ R_{(f)}$ versehen. Sei ein weiteres homogenes Element $g \in R$ gegeben, dann gilt

$$D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$$

und als Schema gilt

$$Spec\ R_{(f)}|_{D_+(fg)} = Spec\ R_{(fg)} = Spec\ (R_{(f)})_{(\frac{g^{deg\ f}}{f^{deg\ g}})}.$$

Da dies symmetrisch ist in f und g, können wir die Garben verkleben und erhalten so eine Garbe auf Proj R. Siehe für die Verklebung [EH00, I.2.4.].

1. Für $p \in ProjR$ gilt, der Halm$\mathcal{O}_p$ ist isomorph zu $R_{(p)}$, dem Ring der Elemente vom Grad 0 der Lokalisierung von R nach den homogenen Elementen aus $R \backslash p$.

Bemerkungen.

1. Der Abschluss der einelementigen Menge $\{p\} \in ProjR$ ist V(p).
2. Die Dimension einer abgeschlossenen Teilmenge Y von Proj R ist das Supremum über alle aufsteigenden Ketten von Elementen von Y.
3. Die Bedingung von R_1 erzeugt zu werden, ist keine Einschränkung, da man durch eine Gradverschiebung bei einem endlich-erzeugten graduierten Ring über R_0 einen über R_0 endlich-erzeugten graduierten Ring $R^{'}$ erhält, der von R_1 erzeugt wird. Siehe [GW10, Remark 13.11].

Beweis.

1. Da V(p) abgeschlossen ist, gilt $\bar{\{p\}} \subseteq V(p)$. Sei I ein homogenes Ideal mit $V(I) = \bar{\{p\}}$. Wegen $p \in I$ gilt $I \subseteq p$. Sei $q \in V(p)$, dann gilt $I \subseteq p \subseteq q$, also gilt $q \in V(I) = \bar{\{p\}}$.
2. Dies gilt, da die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von Proj R die Gestalt V(p) haben, für ein homogenes Primideal p.
3. Siehe [GW10, Remark 13.11, S.372].

□

4 Projektive Quadrik

Siehe hierzu auch [EKM08, Abschnitt 22, S.93ff].

Sei (φ, V) eine quadratische Form, dann bezeichnet man mit X_φ die zu φ gehörige projektive Quadrik. Diese stellt Informationen über das Isotropieverhalten von φ dar.

4.1 Definition. Sei V ein Vektorraum, $T(V)$ die Tensoralgebra von V und $T^n(V)$ die n-fache Tensorpotenz von V. Dann bezeichne $J^n(V)$ den von den Elementen der Gestalt

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n - v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}, \quad \sigma \in S(n)$$

erzeugten linearen Unterraum von $T^n(V)$. Dann ist

$$J(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} J^n(V)$$

ein homogenes Ideal der Tensoralgebra, welches von den Elementen der Gestalt

$$a \otimes b - b \otimes a \text{ mit } a, b \in V$$

erzeugt wird. Daher ist die **symmetrische Algebra** des Vektorraums V

$$S^*(V) := T(V)/J(V)$$

eine graduierte kommutative Algebra.

4.2 Definition. Sei (φ, V) eine quadratische Form über dem Grundkörper F und $S^*(V^*)$ die zum Dual von V gehörige symmetrische Algebra. Dann ist φ ein Element von $S^2(V^*)$. Daher ist $S^*(V^*)/(\varphi)$ eine graduierte Algebra. Wir können die zu φ **assoziierte projektive Quadrik** definieren als

$$X_\varphi := Proj(S^*(V^*)/(\varphi)).$$

4.3 Proposition. *Sei (V, φ) eine quadratische Form über F mit dim $V = n$ und einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ und X_φ die zugehörige Quadrik und $x \in X_\varphi$ ein abgeschlossener Punkt mit dem Restekörper $\kappa(x)$. Dann können wir x als Punkt der Projektivierung*

$$\mathbb{P}(V_{\kappa(x)}) := (V_{\kappa(x)} \backslash \{0\})/\kappa(x)^*$$

auffassen, welcher Nullstelle des homogenen Polynoms φ ist. $\mathbb{P}(V_{\kappa(x)})$ ist die Menge der Geraden in $V_{\kappa(x)}$ durch den Ursprung.

Beweis. Sei $x_1, \ldots, x_n$ die zu $e_1, \ldots, e_n$ duale Basis von V^*, dann können wir $S^*(V^*)$ mit $F[x_1, \ldots, x_n]$ identifizieren. Da $F[x_1, \ldots, x_n]$ von Elementen vom Grad 1 erzeugt wird, gibt es ein x_i mit $x_i \notin x$. Daher liegt x in der affinen Umgebung

$$D_+(x_i) := Spec\ (F[x_1, \ldots, x_n]/(\varphi))_{(x_i)} = Spec\ F[\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}]/(\varphi|_{D_+(x_i)}).$$

Da x rational ist über $\kappa(x)$, sind wir nun in der Situation der Bemerkung 2 zu 3.16. Wir erhalten einen Punkt

$$\rho(x) := (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

aus $\{v \in \kappa(x)^{n-1} | \varphi(v) = 0\}$. Durch homogenisieren an der Stelle i erhalten wir einen Punkt

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

aus $\mathbb{P}(\kappa(x)^n) \cong \mathbb{P}(V_{\kappa(x)})$.

□

4.4 Lemma. *Sei (V, φ) eine quadratische Form über einem Körper k und $x \in (X_\varphi)_{(0)}$ ein Punkt vom Grad zwei mit dem Restekörper $K = k(\sqrt{d})$. Dann gibt es eine zweidimensionale Unterform σ von φ, sodass $x \in (X_{\sigma_K})_{(0)}$.*

Beweis. Nach 4.3 können wir x als Punkt von V_K auffassen. Nach 2.6 gilt $x = v + w\sqrt{d}$ mit $v, w \in V$. Daher liegt x in der von v und w erzeugten Unterform von φ □

5 Milnorsche K-Theorie

5.1 Zahmes Symbol und Norm

5.1 Definition. Sei F ein Körper. Die n-te K-Gruppe von Milnor ist definiert als

$$K_n^M(F) := (F^*)^{\otimes n} / \langle a_1 \otimes \ldots \otimes a_n | a_i + a_j = 1 \text{ für ein } (i,j) \rangle.$$

Die direkte Summe dieser K-Gruppen

$$K_n^M := \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n^M(F)$$

ist ein graduierter Ring und wird Milnorring genannt.

Bemerkungen. Für die ersten K-Gruppen gilt:

$$K_0^M(F) = \mathbb{Z}$$

$$K_1^M(F) = F^*$$

5.2 Definition. Für einen diskret bewerteten Körper F mit der Bewertung $v : F^* \to \mathbb{Z}$, dem Bewertungsring A und dem Restklassenkörper κ können wir die Bewertung v auf die n-ten K-Gruppen fortsetzen. Dies ergibt Abbildungen

$$\delta^M : K_n^M(F) \to K_{n-1}^M(\kappa)$$

mit

$$\delta^M(\{u_1, \ldots, u_{n-1}, \pi\}) = \{\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_{n-1}\}$$

für $u_i \in A^*$ und π ein lokaler Parameter des Bewertungsringes A. Dabei bezeichne $\bar{u}_i$ das Bild von u_i unter dem natürlichen Homomorphismus $A \to \kappa$. Diese Abbildungen heißen zahme Symbole.

Siehe [FV02, Chapter 9.2.].

5.3 Definition. Sei K/F eine endliche Körpererweiterung. Die Norm der Milnor K-Theorie ist eine Abbildung zwischen den zugehörigen K-Gruppen

$$N_{K/F} : K_n^M(K) \to K_n^M(F)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für n=0 ist $N_{K/F} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die Multiplikation mit dem Erweiterungsgrad [K:F].

2. Für n=1 ist $K^* \to F^*$ die Körpernorm.

3. Es gibt einen Gruppenhomomorphismus

   $$j_{K/k} : K_n^M(F) \to K_n^M(K),$$

   sodass gilt

   $$(N_{K/F} \circ j_{K/F})(x) = [K : F] \cdot x.$$

4. Für $a \in K_n^M(F)$ und $b \in K_n^M(K)$ gilt: $N_{K/F}(\{j_{K/F}(a), b\}) = \{a, N_{K/F}(b)\}$.

5. Für endliche Körpererweiterungen K/F und $K^{'}/K$ gilt

$$N_{K'/F} = N_{K/F} \circ N_{K'/K}.$$

Sei X ein F-Schema, dann induzieren die Normabbildungen der Restekörper der Punkte aus $X_{(0)}$ eine Abbildung

$$N : \bigoplus_{x \in X_{(0)}} K_1(\kappa(x)) \to K_1 F \text{ mit } N = \sum_{x \in X_{(0)}} N^M_{\kappa(x)/F}.$$

Siehe [FV02, Chapter 9.3].

5.4 Definition. Wir konstruieren im Folgenden das zahme Symbol für exzellente Schemata wie in [Kat86]. Seien X ein exzellentes Schema und $x \in (X_\varphi)_{(i)}$ und $y \in (X_\varphi)_{(i+1)}$ und $K_n^M(x)$ die n-te Milnor K-Gruppe des Restekörpers von x, dann kann man einen Homomorphismus

$$\delta_x^y : K^M_{*+1}(y) \to K^M_*(x)$$

wie folgt definieren. Er ist trivial, falls $x \notin \overline{\{y\}}$. Sei Y die Normalisierung des reduzierten Schemas $\overline{\{y\}}$, dann gilt:

$$\delta_x^y = \sum_{x' \in Y, x' \mapsto x} N_{\kappa(x')/\kappa(x)} \circ \delta_{x'}.$$

Dabei durchläuft $x^{'}$ alle Punkte von Y, die über x liegen. Diese Summe ist aufgrund der Definition des exzellenten Schemas endlich. $\delta_{x'}$ bezeichne das zahme Symbol

$$K^M_{*+1}(y) \to K^M_*(x^{'})$$

zum diskreten Bewertungsring $O_{Y,x'}$ und $N_{\kappa(x')/\kappa(x)}$ die Norm. Das zahme Symbol wird dann als Summe der Abbildungen δ_x^y definiert.

$$d : \bigoplus_{y \in (X_\varphi)_{(i+1)}} K^M_{*+1}(y) \to \bigoplus_{x \in (X_\varphi)_{(i)}} K^M_{*+1}(x), y \mapsto \sum_{x \in (X_\varphi)_{(i)}} \delta_x^y(y).$$

5.2 Gerstenkomplex

Durch die Abbildungen d wird nach [Kat86, Proposition 1] ein Analogen des Gersten-Quillen-Komplexes für die Milnor-K-Theorie definiert:

$$\dots \bigoplus_{x \in (X)_{(2)}} K^M_{n+2}(\kappa(x)) \longrightarrow \bigoplus_{x \in (X)_{(1)}} K^M_{n+1}(\kappa(x)) \longrightarrow \bigoplus_{x \in (X)_{(0)}} K^M_n(\kappa(x)). \tag{8}$$

5.5 Proposition. *Dem Gersten-Komplex (8) kann man noch die Abbildung N anfügen und erhält dann einen Komplex*

$$\bigoplus_{y \in (X_\varphi)_{(1)}} K_2(\kappa(y)) \xrightarrow{d_\varphi} \bigoplus_{x \in (X_\varphi)_{(0)}} K_1(\kappa(x)) \xrightarrow{N} K_1(F). \tag{9}$$

Beweis. Siehe [Mat12]. $\square$

Bemerkung. Im Folgenden bezeichne [{a},x] das Element von $\bigoplus_{x \in (X)_{(0)}} K_1(\kappa(x))$, dessen Koordinate zum Punkt x gleich {a} ist und zu allen anderen Punkten {1}.

5.6 Definition. Um zu untersuchen, ob dieser Komplex exakt ist, betrachtet man den Kokern von d. Diesen bezeichnen wir mit $A_0(X_\varphi, K_1)$. Die Norm induziert dann eine Abbildung

$$N_\varphi : A_0(X_\varphi, K_1) \to K_1^M(k),$$

deren Injektivität äquivalent ist mit der Exaktheit des Komplexes 5.5.

5.3 Transfer

Sei X ein F-Schema und K/F eine endliche Körpererweiterung. Der Transfer für eine endliche Körpererweiterung K/F ist eine Abbildung

$$N_{K/F}^M : \bigoplus_{x \in (X_K)_{(i)}} K_{i+1}(\kappa(x)) \to \bigoplus_{x \in (X)_{(i)}} K_{i+1}(\kappa(x)),$$

welche die Normabbildung der K-Theorie auf Schemata verallgemeinert. Sei $x \in (X)_{(0)}$ und $\{x'\}_{x' \mapsto x} \subseteq (X_K)_{(0)}$ die Menge der Punkte über x. Dann gibt es für Punkte $x' \mapsto x$ Abbildungen

$$N_{\kappa(x')/\kappa(x)}^M : K_1(\kappa(x')) \to K_1(\kappa(x)).$$

Diese induzieren eine Normabbildung

$$N_{K/F}^M : \bigoplus_{x \in (X_K)_{(0)}} K_1(\kappa(x)) \to \bigoplus_{x \in (X)_{(0)}} K_1(\kappa(x)).$$

Man erhält dann ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{y \in (X_K)_{(1)}} K_2(\kappa(y)) \arrow[r, "d_{\varphi_K}"] \arrow[d] & \bigoplus_{x \in (X_K)_{(0)}} K_1(\kappa(x)) \arrow[r] \arrow[d] & A_0(X_{\varphi_K}, K_1) \arrow[d, dashed] \\
\bigoplus_{y \in (X)_{(1)}} K_2(\kappa(y)) \arrow[r, "d_\varphi"] & \bigoplus_{x \in (X)_{(0)}} K_1(\kappa(x)) \arrow[r] & A_0(X_\varphi, K_1)
\end{tikzcd}$$

Nach [GT06, 7.4.3. S.212] ist die linke Seite kommutativ und induziert damit den rechten Pfeil, diesen nennen wir Transfer. Analog erhält man die Abbildung

$$j_{K/F} : A_0(X_\varphi, K_1) \to A_0(X_{\varphi_K}, K_1).$$

5.7 Proposition. *$A_0(X_\varphi, K_1)$ wird erzeugt von Bildern des Transfers von Zerfällungskörpern von φ.*

Beweis. Da $A_0(X_\varphi, K_1)$ eine Faktorgruppe von $\bigoplus_{x \in (X_K)_{(0)}} K_1(\kappa(x)) := G$ ist, reicht es, die Aussage für G zu zeigen. G wird als direkte Summe von den Elementen der Form $[a_{ij}, x_i]$ erzeugt, wobei x_i alle abgeschlossenen Punkte von X_φ und a_{ij} die Elemente von $\kappa(x_i)$ durchläuft. Da $\kappa(x_i)$ als Restekörper eines abgeschlossenen Punktes von X_φ ein endlicher Erweiterungskörper von F ist und der Transfer $N_{\kappa(x_i)/F}$ an der Stelle x_i die identische Abbildung ist, liegt $[a_{ij}, x_i]$ im Bild des Transfers $N_{\kappa(x_i)/F}$. Nun ist aber $\kappa(x_i)$ ein Zerfällungskörper von φ.

□

6 Beweis des Theorems von Rost

Im letzten Kapitel werde ich das Theorem von Rost beweisen. Für isotrope Formen und für den Fall $dim\ \varphi \leq 3$ wurde es von Merkurjev und Suslin bzw. Elman, Karpenko und Merkurjev bewiesen. Für den Beweis des Theorems von Rost 1.1 definiert man eine Abbildung $\omega_\varphi : \overline{S\Gamma(\varphi)} \to A_0(X_\varphi, K_1)$, mit deren Hilfe man den Kern von N_φ mit dem Kern von $\overline{sn}$ vergleichen kann. Für die Definition benötigt man eine Aussage über zwei Punkte aus $(X_\varphi)_0$ vom Grad 2. Diese Aussage wurde von A. Matthes für den Fall verschiedener Restekörper in [Mat12] bewiesen. Ich beweise nun den Fall gleicher Restekörper. Da ω_φ für einen Körper mit geeigneten Eigenschaften surjektiv ist, kann man aus der Injektivität von $\overline{sn}$, falls $\overline{S\Gamma(\varphi)}$ die Voraussetzungen von 1.1 erfüllt, auf die Injektivität von N_φ schließen. Im Folgenden seien alle quadratischen Formen regulär.

6.1 Lemma. *Sei φ eine isotrope quadratische Form, dann ist der Komplex* (5.5) *eine exakte Sequenz.*

Beweis. Dies wurde von Merkurjev und Suslin in [MS91, Lemma 2.4] bewiesen. □

6.2 Lemma. *Sei φ eine quadratische Form mit $dim\ \varphi \leq 3$, dann ist der Komplex* (5.5) *exakt.*

Beweis. Dies wird in [EKM08, Theorem 46.1] bewiesen. □

6.3 Lemma. *Für zwei Punkte $x_1, x_2 \in (X_\varphi)_{(0)}$ mit gleichem Restekörper K gilt:*

$$[\{b\}, x_1] - [\{b\}, x_2] \in Im\ d$$

für $b \in K^*$.

Beweis. Betrachten des Diagramms von (5.3)

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus\limits_{y\in(X_{\varphi_K})_{(1)}} K_2^M(\kappa(y)) & \xrightarrow{d_{\varphi_K}} & \bigoplus\limits_{x\in(X_{\varphi_K})_{(0)}} K_1^M(\kappa(x)) & \xrightarrow{N_{\varphi_K}} & K_1^M(K) \\
\downarrow{\scriptstyle N_{K/F}} & & \downarrow{\scriptstyle N_{K/F}} & & \downarrow{\scriptstyle N_{K/F}} \\
\bigoplus\limits_{y\in(X_{\varphi})_{(1)}} K_2^M(\kappa(y)) & \xrightarrow{d_{\varphi}} & \bigoplus\limits_{x\in(X_{\varphi})_{(0)}} K_1^M(\kappa(x)) & \longrightarrow & K_1^M(F)
\end{array}$$

Da φ_K isotrop ist, ist die obere Zeile nach Lemma 6.1 exakt. Nach 3.18 gibt es Punkte $\tilde{x_i}$ für $i = 1, 2$ von X_{φ_K} über x_i, sodass gilt $\kappa(\tilde{x_i}) = \kappa(x_i) = K$. Dann induziert $N_{K/F}$ auf dem direkten Summanden $K_1(\kappa(\tilde{x_i})$ die identische Abbildung, d.h.

$$N_{\varphi_K}([\{b\}, \tilde{x_1}] - [\{b\}, \tilde{x_2}]) = \{b\} - \{b\} = 0,$$

d.h.

$$\{b\}(\tilde{x_1} - \tilde{x_2}) \in ker\, N_{\varphi_K} = Im\, d_{\varphi_K}.$$

Dann gibt es ein Element $\bar{y} \in \bigoplus\limits_{y\in(X_{\varphi_K})_{(1)}} K_2^M(\kappa(y))$ mit

$$d_{\varphi_K}(\bar{y}) = \{b\}(\tilde{x_1} - \tilde{x_2}).$$

Setze $y := N_{K/F}(\bar{y})$, dann gilt aufgrund der Kommutativität von (5.3)

$$d(N_{K/F}(\bar{y}) = N_{K/F}(d(\bar{y}) = N_{K/F}(\{b\}(\tilde{x_1} - \tilde{x_2})) = \{b\}(x_1 - x_2).$$

□

6.4 Lemma. *Sei φ eine quadratische Form und $x_1, x_2 \in (X_\varphi)_{(0)}$ Punkte vom Grad 2 mit gleichem Restekörper K. Seien $a_1, a_2 \in K^*$ mit*

$$N_{K/F}(a_1) = N_{K/F}(a_2).$$

Dann liegt, $[\{a_1\}, x_1] - [\{a_2\}, x_2]$ im Bild des zahmen Symbols.

Beweis. Es gilt:

$$[\{a_1\}, x_1] - [\{a_2\}, x_2] = [\{\frac{a_1}{a_2}\}, x_1] - [\{\frac{a_2}{a_2}\}, x_2] + \{a_2\}(x_1 - x_2).$$

Nach 6.3 liegt $\{a_2\}(x_1 - x_2)$ im Bild des zahmen Symbols und für die ersten beiden Summanden gilt:

$$[\{\frac{a_1}{a_2}\}, x_1] - [\{\frac{a_2}{a_2}\}, x_2] = [\{\frac{a_1}{a_2}\}, x_1] - [\{1\}, x_2] = [\{\frac{a_1}{a_2}, x_1]$$

$$N([\{\frac{a_1}{a_2}\}, x_1] = N_{K/F}(\{\frac{a_1}{a_2}\}) = \frac{N_{K/F}(a_1)}{N_{K/F}(a_2} = 1 \tag{10}$$

D.h. $[\{\frac{a_1}{a_2}\}, x_1]$ liegt im Kern von N. Nach 4.4 liegt x_1 in einer zweidimensionalen, und damit auch in einer dreidimensionalen Unterform, damit liegt nach 6.2 auch (10) im Bild des zahmen Symbols. Zusammen ergibt sich, dass $[\{a_1\}, x_1] - [\{a_2\}, x_2]$ im Bild des zahmen Symbols liegt.

□

6.5 Proposition. *Sei φ eine anistrope quadratische Form mit dim $\varphi \geq 3$. Dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus*

$$\omega_\varphi : \overline{S\Gamma(\varphi)} \to A_0(X_\varphi, K_1)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Sei φ dreidimensional, dann gilt: $\omega_\varphi = N_\varphi^{-1} \circ \overline{sn}$.*
2. *Für eine Unterform $i^* : \varphi_0 \to \varphi$ gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \overline{S\Gamma(\varphi_0)} \arrow[r, "\omega_{\varphi_0}"] \arrow[d, "i^*"'] & A_0(X_{\varphi_0}, K_1) \arrow[d, "i^*"] \\ \overline{S\Gamma(\varphi)} \arrow[r, "\omega_\varphi"] & A_0(X_\varphi, K_1) \end{tikzcd} \tag{11}$$

Beweis. Dies wurde von A. Matthes in [Mat12, Theorem 5.4] unter Zuhilfenahme von 6.4 bewiesen. Man beachte, N_φ ist nach 6.2 im dreidimensionalen Fall injektiv. □

6.6 Proposition. *Sei (V, φ) ein isotroper quadratischer Raum. Dann kann man die Abbildung ω_φ definieren durch*

$$\omega_\varphi := N_\varphi^{-1} \circ \overline{sn}.$$

Beweis. Siehe [Mat12, Korollar 5.6.]. Man beachte, N_φ ist nach 6.1 im isotropen Fall injektiv. □

6.7 Lemma. *Sei φ eine reguläre quadratische Form. Dann gilt*

$$N_\varphi \circ \omega_\varphi = \overline{sn}.$$

Beweis. Da dies Homomorphismen sind, reicht es, die Aussage auf einem Erzeugendensystem von $\overline{S\Gamma(\varphi)}$ zu zeigen. Nach 2.23 bilden die ebenen Elemente ein Erzeugendensystem von $\overline{S\Gamma(\varphi)}$. Sei $\alpha \in \overline{S\Gamma(\varphi_0)}$ ein ebenes Element mit zugehöriger Unterform φ_0. Dann können wir φ_0 in eine dreidimensionale Unterform φ' einbetten. Für φ' gilt nach Definition $\omega_{\varphi'} = N_{\varphi'}^{-1} \circ \overline{sn}$. Damit gilt für α:

$$N_{\varphi'} \circ \omega_{\varphi'} = N_{\varphi'} \circ N_{\varphi'}^{-1} \circ \overline{sn}(\alpha) = \overline{sn}.$$

□

6.8 Lemma. *Sei φ eine quadratische Form über F mit $\dim \varphi = 4$ und K/F eine quadratische Körpererweiterung. Sei $\alpha \in D_1(\varphi_K)$, dann gibt es über F zwei dreidimensionale Unterformen φ_1, φ_2 von φ, sodass gilt*

$$\alpha \in D_1(\varphi_{1K}) \cdot D_1(\varphi_{2K}).$$

Beweis. Nach 2.17 gilt

$$C_0(\varphi) = \left(\frac{a,b}{F}\right) \otimes C(\langle c \rangle)$$

und nach 2.14

$$C_0(\varphi_K) = \left(\frac{a,b}{F}\right) \otimes C(\langle c \rangle) \otimes K = \left(\frac{a,b}{K}\right) \otimes C(\langle c \rangle).$$

Da sn in den Grundkörper abbildet, gilt damit

$$D_1(\varphi_K) = Nrd(\left(\frac{a,b}{K}\right) \otimes C(\langle c \rangle) \cap K^*.$$

Wir können $C(\langle c \rangle)$ als

$$F \oplus F \cdot e$$

schreiben mit $e^2 = c$. Sei $q = q_1 + q_2 e \in \left(\frac{a,b}{K}\right) \otimes C(\langle c \rangle)$ ein Element der speziellen Clifford-Gruppe mit $Nrd(q) = \alpha$ und $q_1, q_2 \in \left(\frac{a,b}{K}\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha = Nrd(q) &= q \cdot \overline{q} \\ &= (q_1 + q_2 e)(\overline{q_1} + \overline{q_2} e) \\ &= q_1\overline{q_1} + q_1\overline{q_2}e + q_2 e\overline{q_1} + q_2 e \overline{q_2} e \\ &= Nrd(q_1) + Nrd(q_2)c + e \cdot (q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1}). \end{aligned}$$

Da α nach Voraussetzung in F^* liegt, gilt

$$0 = q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1} = q_2\overline{q_1} + \overline{q_2\overline{q_1}}.$$

Nun machen wir eine Fallunterscheidung nach $Nrd(q_1)$.

Angenommen $Nrd(q_1)$ sei ungleich null, dann können wir α schreiben als

$$\alpha = Nrd(q_1) * (1 + c\frac{Nrd(q_2)}{Nrd(q_1)}) = Nrd(q_1) * (1 + cNrd(\frac{q_2}{q_1}).$$

Wähle $\varphi_1 = \langle -a, -b, ab \rangle$, dann gilt nach 2.16

$$C_0(\varphi_{1K}) = \left(\frac{-(-a)ab, -(-b)ab}{F}\right) \otimes K \cong \left(\frac{a,b}{K}\right).$$

Daher gilt $Nrd(q_1) \in D_1(\varphi_{1K})$.

Betrachten wir nun $1+cNrd(\frac{q_2}{q_1}) = 1+cNrd(\frac{q_2\overline{q_1}}{Nrd(q_1)})$. Da $q_2\overline{q_1}+\overline{q_2\overline{q_1}} = 0$ gilt, ist $\frac{q_2\overline{q_1}}{Nrd(q_1)}$ ein reines Quaternion, das wir im Folgenden mit $\tilde{q}$ bezeichnen. Sei nun $\tilde{q} = ui+vj+wij$, dann gilt

$$1 + cNrd(\tilde{q}) = 1 + c(-u^2a - v^2b + w^2ab) = 1 - u^2ca - cb(v^2 - w^2a).$$

Dies ist die Norm eines Quaternions der Quaternionenalgebra $\left(\frac{ca,c\tilde{b}}{K}\right)$ mit $\tilde{b} := b(v^2 - w^2a)$. Also ist $1+cNrd(\tilde{q}) \in D_1(\langle -ac, -\tilde{b}c, a\tilde{b}\rangle_K)$. Sei nun $\varphi^{'} = \langle -ac, -\tilde{b}c, a\tilde{b}c^2, c\rangle$, dann gilt für $\varphi^{'}$:

$$\begin{aligned}
C_0(\varphi^{'}) &= \left(\frac{ac, \tilde{b}c}{F}\right) \otimes C(\langle c\rangle) \\
&\left(= \left(\frac{ac, \tilde{b}c}{F(\sqrt{c})}\right) \text{falls c in F kein Quadrat ist}\right) \\
&\cong \left(\frac{a, \tilde{b}}{F}\right) \otimes C(\langle c\rangle) \\
&\cong \left(\frac{a, b}{F}\right) \otimes C(\langle c\rangle) \\
&= C_0(\varphi),
\end{aligned} \tag{12}$$

wobei die erste Äquivalenz besteht, weil c ein Quadrat in $F(\sqrt{c})$ ist und die zweite Äquivalenz nach 2.11, da $v^2 - aw^2$ eine Norm der Körpererweiterung $F(\sqrt{a})/F$ ist. Da φ und $\varphi^{'}$ die gleiche gerade Clifford-Algebra haben, sind sie nach 2.18 ähnlich. Nach Wahl von $\varphi^{'}$ gibt es also auch eine dreidimensionale Unterform φ_2 von φ, die zu $\langle -ac, -\tilde{b}c, a\tilde{b}\rangle$ ähnlich ist. Dann ist aber $1 + cNrd(\tilde{q}) \in D_1(\varphi_{2K})$.

Für $Nrd(q_1) = 0$ können wir q_1 durch 0 ersetzen, ohne dass α sich ändert, also annehmen, es gilt $q = q_2e$. Da e als Basisvektor des Unterraums zu $\langle c\rangle$ in $C_1(\varphi)$ liegt, muss q_2 homogen von ungeradem Grad, also ein reines Quaternion, sein. Dann gilt aber mit der gleichen Argumentation wie oben, dass $cNrd(q_2)$ in $D_1(\varphi_2)$ liegt.

□

6.9 Lemma. *Sei φ eine reguläre quadratische Form über F und K/F eine quadratische Erweiterung. Dann gilt:*

$$N^M_{K/F}(Im\ \omega_{\varphi_K}) \subseteq Im\ \omega_\varphi.$$

Beweis. Da $\overline{S\Gamma(\varphi_K)}$ nach 2.23 von über K ebenen Elementen erzeugt wird und diese über F maximal vierdimensional sind, können wir annehmen, es gilt $dim\ \varphi = 4$. Sei $\alpha \in S\Gamma(\varphi_K)$ eben, dann existieren nach 6.8 dreidimensionale Unterformen $\varphi^{'}, \varphi^{''}$ und $\alpha^{'} \in S\Gamma(\varphi^{'}_K), \alpha^{''} \in S\Gamma(\varphi^{''}_K)$, sodass gilt

$$sn(\alpha) = sn(\alpha^{'}) \cdot sn(\alpha^{''}).$$

Dann gilt nach Definition auch

$$\overline{sn}(\overline{\alpha}) = \overline{sn}(\overline{\alpha^{'}}) \cdot \overline{sn}(\overline{\alpha''}).$$

Nach 2.25 ist $\overline{sn}$ injektiv, daher gilt

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha^{'}} \cdot \overline{\alpha''}.$$

Wir wenden $N \circ \omega_{\varphi_K}$ an und erhalten

$$N^M_{K/F}(\omega_{\varphi_K}(\alpha)) = N_{K/F}(\omega_{\varphi_K}(\alpha^{'}) + \omega_{\varphi_K}(\alpha^{''})) = N_{K/F}(\omega_{\varphi_K}(\alpha^{'})) + N_{K/F}(\omega_{\varphi_K}(\alpha^{''})).$$

Es reicht also zu zeigen, dass die Aussage für den dreidimensionalen Fall gilt. Im dreidimensionalen Fall ist aber ω_φ nach Definition surjektiv.

□

6.10 Proposition. *Sei F ein Körper und p eine Primzahl, dann gibt es eine algebraische Körpererweiterung K/F mit den folgenden Eigenschaften*

1. *Für jede endliche Teilerweiterung k/F von K/F ist der Grad [L:F] relativ prim zu p.*
2. *Für jede endliche Erweiterung L/K gilt $[L : K] = p^m$ mit $m \geq 0$.*
3. *Sei $x \in K^M_n(F)$ mit $p^m x = 0$ für ein $m \geq 0$ und $j_{K/F}(x) = 0$, dann gilt $x = 0$.*

Beweis. Siehe [FV02, IX, 3.5.]. □

6.11 Proposition. *Sei F ein Körper ohne Erweiterungen von ungeradem Grad und φ eine reguläre quadratische Form über F, dann ist*

$$\omega_\varphi : \overline{S\Gamma(\varphi)} \to A_0(X_\varphi, K_1)$$

surjektiv.

Beweis. Nach 5.7 wird $A_0(X_\varphi, K_1)$ durch die Transfers von Zerfällungskörpern K von φ erzeugt. Über K ist φ isotrop und damit ω_K nach 6.6 surjektiv.

Nach 6.9 gilt $N_{K/k}(Im\ \omega_{\varphi_K}) \subseteq Im\ \omega_\varphi$ und damit gilt

$$Im\ \omega_\varphi = A_0(X_\varphi, K_1).$$

□

6.12 Theorem (M. Rost). *Wenn jedes Element der speziellen Clifford-Gruppe $\overline{S\Gamma(\varphi)}$ als Produkt zweier ebener Elemente dargestellt werden kann, dann ist die Abbildung*

$$N_\varphi : A_0(X_\varphi, K_1) \to K^M_1(k)$$

injektiv.

Beweis. Nach 6.1 ist N_φ injektiv für isotrope quadratische Formen. Daher können wir annehmen, φ sei anisotrop. Nach 2.9 gibt es einen Zerfällungskörper L/F mit $[L : F] = 2$. Sei $x \in ker\ N_\varphi$, aufgrund des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} A_0(X_{\varphi_L}, K_1^M) & \xrightarrow{N_{\varphi_L}} & K_1^M L \\ {\scriptstyle i_{L/F}}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle i_{L/F}} \\ A_0(X_\varphi, K_1^M) & \xrightarrow{N_\varphi} & K_1^M F \end{array} \tag{13}$$

gilt $i_{L/F}(x) \in ker\ N_{\varphi_L} = 0$. Daher gilt

$$2x = N_{L/F} \circ i_{L/F}(x) = N_{L/F}(0) = 0.$$

Nach 6.10 reicht es zu zeigen, für jedes $x \in ker\ N_\varphi$ gilt $i_{K/F}(x) = 0$ mit einer Erweiterung K wie in 6.10 mit p=2. Da gilt $i_{K/F}(ker\ N_\varphi) \subseteq ker\ N_{\varphi_K}$, reicht es zu zeigen, $ker\ N_{\varphi_K} = 0$.

Nach 6.11 ist in dieser Situation ω_φ surjektiv. Nach 6.7 und 2.25 gilt dann:

$$Ker\ N_\varphi = \omega_\varphi(Ker\ \overline{sn}) = \omega_\varphi(0) = 0.$$

□

Liste der Bezeichnungen

Wichtige Begriffe

Literatur

[EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The Geometry of Schemes.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2000.

[EKM08] Richard Elman, Nikita Karpenko, and Alexander Merkurjev. *The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms.* American Mathematical Society, 2008.

[FV02] Ivan B. Fesenko and S.V. Vostokov. *Local Fields and Their Extensions*, volume 121 of *Translations of mathematical monographs.* American Mathematical Society, 2002.

[GT06] Philippe Gille and Támas Szamuely. *Central Simple Algebras and Galois Cohomology.* Cambrigde Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, Sao Paulo, 2006.

[GW10] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry I.* Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1977.

[Hol12] Audun Holme. *A Royal Road to Algebraic Geometry.* Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 2012.

[Kah97] Bruno Kahn. La conjecture de milnor (d'apres v. voevodsky). Preprint, K-theory Preprint Archives,http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0210/, 1997.

[Kat86] Kazuya Kato. Milnor k-theory and the chow group of zero cycles. In *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part 1*, volume 55 of *Contemporary Mathematics*, pages 241–253. American Mathematical Society, 1986.

[Knu88] Max-Albert Knus. *Quadratic Forms, Clifford Algebras and Spinors.* IMECC-UNICAMP, Campinas, 1988.

[Knu91] Max-Albert Knus. *Quadratic and Hermitian Forms over Rings.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Heidelberg, Berlin, London, New York, 1991.

[Liu02] Qing Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford graduate texts in mathematics. Oxford University Press, New York, 2002.

[Mat12] Anne-Sophie Matthes. Über eine Normabbildung der K-Theorie von Milnor. Diplomarbeit, Universität Leipzig, Leipzig, 2012.

[Mor98] Fabien Morel. Voevodsky's proof of milnor's conjecture. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 35(2):123–143, 1998.

[MS91] Alexander Merkurjev and Andrei Suslin. The norm residue homomorphism of degree three. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 36(2):349–367, 1991. http://iopscience.iop.org/0025-5726/36/2/A07.

[Ros88] Markus Rost. On the spinor norm and $A_0(X, K_1)$ for quadrics. Preprint, 1988.

[Sch85] Winfried Scharlau. *Quadratic and Hermitian Forms.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[Var13] Ravi Vargil. Math 216: Foundations of algebraic geometry. Preprint, http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGjun1113public.pdf, 2013.

[Voe96] Vladimir Voevodsky. The milnor conjecture. Preprint, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170/, 1996.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort Datum Unterschrift