

Sensitivitätsstudien verschiedener Invertierungsverfahren für die akustische Laufzeit-tomographie in der Atmosphäre

G. Fischer, M. Barth, A. Ziemann und A. Raabe

Zusammenfassung

Das Verfahren der akustischen Laufzeit-tomographie ermöglicht es, flächengemittelte Temperaturverteilungen zu rekonstruieren. Zur Ableitung der gesuchten Temperaturwerte aus den Informationen, die entlang bekannter Ausbreitungswege akustischer Signale durch ein Untersuchungsvolumen gewonnen werden, existieren zahlreiche Invertierungsverfahren. Mit Sensitivitätsstudien sowohl synthetisch erzeugter als auch experimenteller Datenreihen wurden die erhaltenen Rekonstruktionsergebnisse mittels Matrixinversion, iterativer algebraischer Rekonstruktionstechniken und stochastischer Inversion bezüglich ihrer Auflösung und Genauigkeit beurteilt. Letztere zeichneten sich besonders durch ihre hoch auflösbaren und exakt rekonstruierten Verteilungen aus, wobei die relativ langen Rechenzeiten dieser Methode für Echtzeit-Auswertungen realer Messkampagnen eher nachteilig sind. Dies stellt jedoch einen Vorteil der anderen getesteten Invertierungsverfahren dar.

Summary

Acoustic travel-time tomography allows to reconstruct area average temperature distributions. However, to calculate meteorological fields from the information gained by acoustic signals along different paths through a distinct volume several inversion methods can be chosen. Using sensitivity tests of both synthetically generated and experimental data, the reconstruction results obtained with the help of the matrix inverse, iterative algebraic reconstruction techniques, and the stochastic inverse were estimated concerning resolution and accuracy. The latter was characterized by the consistent reconstruction of high resolved and accurate temperature fields. Nevertheless, the relatively long computing time of this method is quite unfavourable for field studies. The other available inversion methods allow the data to be analysed in real time.

1 Einleitung

Tomographische Methoden bezeichnen bildgebende Verfahren, die Schnittbilder aus Messungen entlang verschiedener Wege liefern. Grundsätzlich nutzt die Methode der akustischen Laufzeit-tomographie die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Temperatur und Strömung. Basierend auf Laufzeitmessungen akustischer Signale zwischen definierten Sender- und Empfängerpositionen in einem Messgebiet können Flächenmittelwerte der Schallgeschwindigkeit rekonstruiert und daraus die Temperatur- und Strömungsfelder abgeleitet werden.

Zur Invertierung der entlang verschiedener Strecken bestimmten Laufzeiten wurden in den letzten Jahren zahlreiche Rekonstruktionsalgorithmen, die ursprünglich aus den Bereichen Medizin, Geophysik und Ozeanographie stammen, in die Atmosphäre übertragen. Die ersten theoretischen und experimentellen Arbeiten diesbezüglich wurden von Spiesberger und Frstrup (1990) sowie Wilson und Thomson (1994) unternommen. Letztere stellten die akustische Laufzeitotomographie in der Atmosphäre als ein direktes Verfahren zur Bestimmung von Flächenmittelwerten der gesuchten meteorologischen Größen vor. Diese Autoren verwendeten die Methode der stochastischen Inversion, welche zusätzliche Informationen über das Medium benötigt. Dagegen existieren Verfahren, die Absolutwerte von meteorologischen Größen ohne weitere Vorabinformation bereitstellen. Zu diesen gehören die iterativen algebraischen Rekonstruktionsalgorithmen (siehe z.B. Ziemann *et al.*, 1999a) und die Matrixinversionen (Menke, 1989).

Hinsichtlich der Vielzahl der unterschiedlichen Invertierungstechniken setzen besonders zukünftige experimentelle Untersuchungen eine kritische Bewertung derjenigen voraus, um im Vorfeld von Messkampagnen abschätzen zu können, welcher Invertierungsalgorithmus den gestellten Anforderungen bezüglich der Auflösung und Genauigkeit der zu rekonstruierenden Verteilungen genügt. Das Ziel der vorliegenden Arbeit liegt darin, die einzelnen Rekonstruktionsalgorithmen und deren Ergebnisse bei gleichen Eingangsdaten anhand des Beispiels der Rekonstruktion von zweidimensionalen Temperaturverteilungen gegenüberzustellen. Dabei soll herausgefunden werden, welcher Algorithmus mit welchen Parametereinstellungen zur Bestimmung spezieller Temperaturfelder im Bereich der Atmosphäre bevorzugt geeignet ist.

2 Invertierungsalgorithmen

Die Laufzeit des Schalls von einem Sender zu einem Empfänger hängt von der effektiven Schallgeschwindigkeit c_{eff} innerhalb des durchlaufenen Volumens ab. Diese setzt sich aus der temperaturabhängigen Laplaceschen Schallgeschwindigkeit $c_L = \sqrt{\gamma_{\text{tr}} R_{\text{tr}} T_{\text{av}}}$ (Salomons, 2001) und dem Einfluss der Strömungsgeschwindigkeit v entlang des Ausbreitungsweges zusammen:

$$c_{\text{eff}} = c_L(T_{\text{av}}) + v. \quad (1)$$

T_{av} bezeichnet die akustisch virtuelle Temperatur und die meteorologischen Parameter $\gamma_{\text{tr}} = 1.4$ bzw. $R_{\text{tr}} = 287.05 \text{ J}(\text{kgK})^{-1}$ kennzeichnen das Verhältnis der Wärmekapazitäten von Luft bei konstantem Druck und konstantem Volumen bzw. die spezifische Gaskonstante trockener Luft.

Da die Temperatur- und Strömungsfelder getrennt voneinander rekonstruiert werden sollen, müssen die gemessenen Laufzeiten zunächst hinsichtlich dieser beiden Einflussfaktoren separiert werden. Dies erfolgt gemäß Barth und Raabe (2005) durch die Analyse der Schallausbreitung entlang paralleler bzw. reziproker Schallstrecken. Um flächengemittelte Temperaturverteilungen bestimmen zu können, werden in dieser Studie nur die temperaturabhängigen Laufzeiten τ betrachtet.

Die Laufzeit τ berechnet sich dann aus dem Linienintegral über die reziproke Laplacesche Schallgeschwindigkeit entlang des jeweiligen Schallausbreitungsweges L in der

tomographischen Fläche

$$\tau = \int_L \frac{dl}{c_L(T_{av}(\mathbf{r}))}, \quad (2)$$

wobei dl ein Wegelement entlang der entsprechenden Ausbreitungsstrecke L repräsentiert (Ziemann *et al.*, 1999b). Da stets eine fest vorgegebene Anzahl von Sendern und Empfängern zur Verfügung steht, können die gesuchten Temperaturfelder lediglich mit einer endlichen Auflösung rekonstruiert werden. Somit muss die Gleichung (2) diskretisiert werden. Der unter anderem von Arnold *et al.* (1999) verwendete Ansatz zur Diskretisierung unterteilt das tomographische Volumen in J einzelne quadratische Gitterzellen, für die jeweils ein konstanter Temperaturwert bestimmt wird. Andererseits kann die Diskretisierung auch erfolgen, indem die Temperaturwerte an definierten Punkten im Messfeld rekonstruiert werden und mittels geeigneter Interpolationsverfahren ein kontinuierliches Tomogramm erzeugt wird (Wilson und Thomson, 1994; Vecherin *et al.*, 2006).

Die im Rahmen der vorliegenden Studie analysierten Invertierungsmethoden gehören zu den Arten der Matrixinversionsverfahren, der iterativen algebraischen Rekonstruktionstechniken sowie der stochastischen Inversionsverfahren. Eine Übersicht und eine detaillierte Beschreibung der Umsetzung dieser Algorithmen für die akustische Laufzeit-tomographie in der Atmosphäre ist in Fischer (2008) zu finden.

Bei den Matrixinversionsverfahren wird die tomographisch zu untersuchende Fläche in Gitterzellen unterteilt. Nach der Diskretisierung von Gleichung (2) bietet sich zur Bestimmung der Flächenmittelwerte der Temperatur mit dieser Methode die Singulärwertzerlegung an (Menke, 1989), da in den meisten Fällen der akustischen Laufzeit-tomographie die Anzahl der Schallstrahlen nicht der Anzahl der Gitterzellen entspricht und damit eine direkte Matrixinvertierung nicht möglich ist.

Ebenso wie die Verfahren der Matrixinversion beruhen die iterativen algebraischen Rekonstruktionstechniken auf der Minimierung der Summe über die Differenzen zwischen den rekonstruierten und gemessenen Laufzeitwerten der entsprechenden Schallstrahlen. Die iterativen algebraischen Rekonstruktionstechniken zeichnen sich gegenüber den anderen Algorithmen dadurch aus, dass die gesuchte Lösung durch iterative Annäherung bestimmt wird. Die zahlreichen Unterarten dieser Rekonstruktionsverfahren weisen den gleichen schematischen Aufbau auf, der sich in vier Hauptschritte unterteilen lässt. Den Ausgangspunkt bildet eine Startverteilung für die reziproken Laplaceschen Schallgeschwindigkeiten, die meistens durch eine einfache Rückprojektion der gemessenen Laufzeitwerte auf die Gitterzellen erhalten wird. Danach werden die Korrekturen für die modellierten Größen berechnet und auf die vorherigen Werte angewandt. Dieser iterative Prozess wird bis zum Erreichen eines Konvergenz- oder Abbruchkriteriums wiederholt. In der vorliegenden Studie werden die Charaktere drei verschiedener Rekonstruktionstechniken, der algebraischen Rekonstruktionstechnik (ART), der simultanen iterativen Rekonstruktionstechnik (SIRT) sowie der multiplikativen algebraischen Rekonstruktionstechnik (MART) betrachtet (siehe z.B. Gordon *et al.*, 1970; Ziemann, 2000). Die verschiedenen iterativen algebraischen Algorithmen unterscheiden sich dabei einerseits in der Art und Weise, wie die Korrekturen berechnet und andererseits wie diese auf

die reziproken Schallgeschwindigkeiten angewendet werden. Sowohl die Rekonstruktionsergebnisse von ART als auch von MART hängen dabei von der Reihenfolge der Implementierung der Schallstrahlen im Invertierungsprozess ab.

Die stochastischen Verfahren unterscheiden sich von der Methode der Singulärwertzerlegung und den iterativen algebraischen Rekonstruktionstechniken dadurch, dass nicht die Summe der Differenzen zwischen der geschätzten Lösung und der wahren Lösung sondern der individuelle, erwartete quadratische Fehler minimal wird. Des Weiteren beziehen die stochastischen Verfahren zusätzlich statistische Analysen in die Rekonstruktionen ein (Wilson und Thomson, 1994). Für die Bestimmung der gesuchten Temperaturverteilungen müssen einerseits die Turbulenzparameter und andererseits die Modell-Daten- sowie Daten-Daten-Kovarianzmatrizen bekannt sein. Erstere können mittels konventionellen Messungen oder aus Turbulenz-Theorien abgeleitet werden (Wilson und Thomson, 1994). Für die Kovarianzmatrizen können verschiedene Ansätze gewählt werden (Vecherin, 2007), wie z.B. der hier verwendete Gaußsche Ansatz. Die mittels stochastischer Invertierung erhaltenen Temperaturverteilungen setzen sich üblicherweise aus einem auf die gesamte Fläche bezogenen konstanten Temperaturmittelwert und dessen Abweichungen zu einem Zeitpunkt an betrachteten Punkten der Messfläche zusammen. Zur Gewährleistung der Vergleichbarkeit der einzelnen verschiedenen Algorithmen wurde jedoch die Messfläche auch für die stochastische Invertierung in quadratische Gitterzellen unterteilt. Die Rekonstruktion der Temperaturfluktuationen erfolgte für die Mittelpunkte der Zellenflächen, wobei die erhaltenen Werte an den entsprechenden Koordinaten als konstant für die jeweilige Zelle angenommen wurden. Der Vorteil der stochastischen Inversion besteht in der sehr hohen Auflösung der rekonstruierten Felder, so dass selbst kleinste Temperaturinhomogenitäten identifiziert werden können (Vecherin *et al.*, 2006).

3 Sensitivitätsstudien

3.1 Auswertung synthetischer Laufzeitdaten

Sensitivitätsstudien mit synthetisch erzeugten Laufzeiten bieten den Vorteil, dass die rekonstruierten Temperaturverteilungen mit den vorgegebenen verglichen und so die optimalen Parametereinstellungen für das jeweilige Invertierungsverfahren bestimmt werden können. Außerdem ist es damit in einer ersten Anwendung möglich, die Unterschiede zwischen den Algorithmen abzuschätzen.

Die Erzeugung synthetischer Laufzeiten erfordert zunächst die Vorgabe einer Messgeometrie und mehrerer Verteilungen der gesuchten Zustandsgröße im Messfeld. Dabei ist die Qualität der tomographisch rekonstruierten Temperaturfelder von der Anzahl und der Anordnung der Sensoren im Untersuchungsgebiet abhängig. Je dichter und homogener die Schallstrahlen, welche die Verbindungslinien zwischen den Sendern und Empfängern darstellen, das Messgebiet durchdringen, desto höher aufgelöst und exakter können die meteorologischen Felder bestimmt werden.

Die Dimension des hier vorgegebenen Messfeldes beträgt $(2.0 \times 2.0) \text{ m}^2$. Zur Gewährleistung der Trennung des Temperatur- und Strömungseinflusses auf die effektive Schall-

geschwindigkeit wurde zu jedem Sender im Abstand von 0.2 m ein Empfänger angeordnet, so dass eine Betrachtung paralleler Schallausbreitungsstrecken möglich war. In Abbildung 1(b) ist das in $(0.4 \times 0.4) \text{ m}^2$ Gitterzellen aufgelöste tomographisch zu sondierende Gebiet mit der Verteilung der 8 vorgegebenen Sender-Empfänger-Paare und den sich daraus ergebenden Schallstrahlen dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass durch die gewählte Anordnung der Sensorpaare das Messgebiet homogen von Schallstrahlen durchdrungen wird.

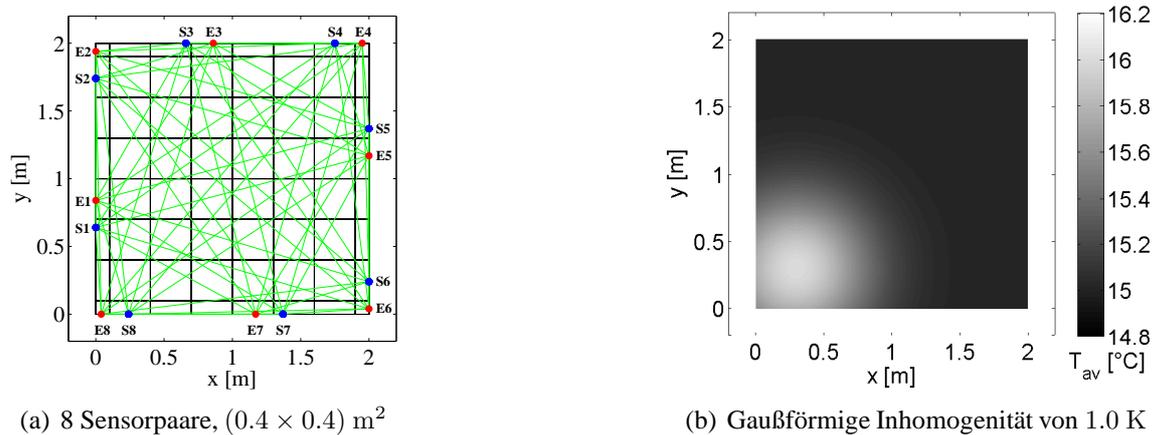


Abbildung 1: *Links*: Anordnung der Sender (S) und Empfänger (E) sowie den sich daraus ergebenden Schallstrahlen im $(2.0 \times 2.0) \text{ m}^2$ Versuchsfeld. *Rechts*: Simulierte Verteilung der akustisch virtuellen Temperatur mit einer Auflösung von $(0.01 \times 0.01) \text{ m}^2$.

Nach Festlegung der theoretischen Messgeometrie konnten anschließend die synthetischen Datenreihen der Laufzeit generiert werden. Die Basis dafür bildeten verschiedene strukturierte, auf die Untersuchungsfläche projizierte akustisch virtuelle Temperaturverteilungen mit einer räumlichen Auflösung von $(0.01 \times 0.01) \text{ m}^2$. Durch Umrechnung dieser in Schallgeschwindigkeitswerte und unter Verwendung der definierten Sender- und Empfängerpositionen konnten die synthetischen Laufzeitdaten berechnet werden. Bei einem Typ von Simulationen wurde die Temperatur innerhalb des Messfeldes kontinuierlich in x - oder y -Richtung mit verschiedenen Temperaturgradienten variiert (Typ: „Gradient“). Den anderen synthetischen Datensätzen lagen konstante Temperaturfelder zugrunde, die von einer wärmeren oder kälteren Inhomogenität überlagert wurden (Typ: „Mitte“, „Ecke“). Die Generierung dieser Inhomogenitäten erfolgte dabei mit einer Gauß-Verteilung

$$T_{av}(x, y) = T_{av,0} + \gamma \exp \left\{ \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (3)$$

wobei $T_{av,0}$ die konstante akustisch virtuelle Hintergrundtemperatur, γ den Verstärkungsfaktor der Temperaturänderung und σ die Standardabweichung repräsentieren. Den Punkt des Temperaturextremwertes bezeichnet die Koordinate (x_0, y_0) . Die Abbildung 1(b) zeigt exemplarisch ein konstantes Hintergrundfeld von 15.0 °C mit einer im Maximum um 1.0 K höheren, Gaußförmigen Inhomogenität in der linken unteren Ecke

der Untersuchungsfläche. Die mit dieser und anderen vorgegebenen Temperaturverteilungen errechneten Laufzeitdatensätze wurden anschließend den verschiedenen Invertierungsalgorithmen übergeben.

Zur Berechnung der Temperaturfelder unter Verwendung der Matrixinversion muss die Gleichung 2 diskretisiert und in Matrixform geschrieben werden (Ziemann, 2000). Die entstehende, zu lösende Gleichung beinhaltet unter anderem die Schallstrahlabschnittsmatrix L , deren Elemente l_{ij} die Längen der Schallstrahlen i in der jeweiligen j -ten Gitterzelle repräsentieren. Die gesuchten Temperaturwerte ergeben sich aus der Bildung der Inversen der Schallstrahlabschnittsmatrix mittels Singulärwertzerlegung. Zur Bestimmung der möglichen räumlichen Auflösung der rekonstruierten Verteilungen mit der Matrixinversion dient die Konditionierungszahl α , welche aus dem Verhältnis zwischen minimalem und maximalem Singulärwert λ der Schallstrahlabschnittsmatrix L gebildet wird:

$$\alpha = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}. \quad (4)$$

Je größer der Wert für α ist, desto exakter lässt sich die Inverse der Schallstrahlabschnittsmatrix bilden und desto genauer können die gesuchten Temperaturwerte ermittelt werden. Die Abhängigkeit dieses Parameters von der Dimension der Gitterzellen, auf die die gesuchten Temperaturwerte projiziert werden, zeigt Abbildung 2.

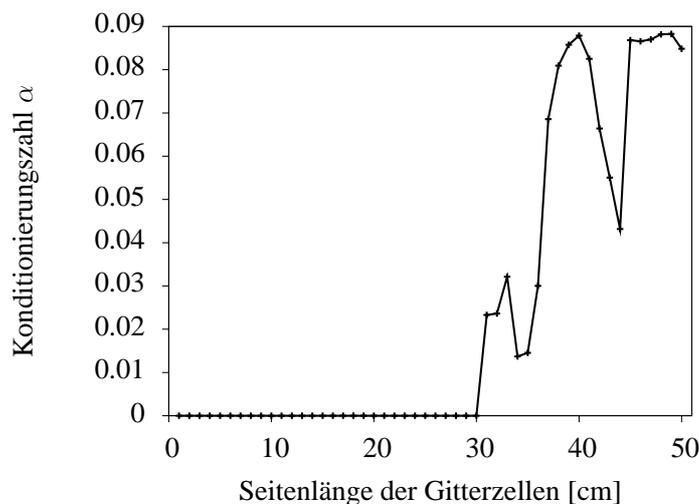


Abbildung 2: Abhängigkeit der Konditionierungszahl von der Größe der Gitterzellen.

Mit Reduzierung der Zellengröße und somit größerer Dimensionierung der Schallstrahlabschnittsmatrix infolge der zunehmenden Gesamtanzahl von Gitterzellen nimmt die Konditionierung der Schallstrahlabschnittsmatrix ab. Die Minima zeigen Übergangsbereiche einer sich ändernden Gesamtzellenanzahl im tomographischen Volumen an. Mit den vorgegebenen 8 Sender-Empfänger-Paaren kann eine maximale Auflösung des Temperaturfeldes von $(0.31 \times 0.31) \text{ m}^2$ erreicht werden. Darunter ist die Schallstrahlabschnittsmatrix laut Definition von α schlecht konditioniert. Eine Verdopplung der Sender- und Empfängeranzahl bewirkt eine Erhöhung der möglichen Auflösung, da die Konditionierungszahl in diesem Fall erst bei $(0.16 \times 0.16) \text{ m}^2$ den Wert Null annimmt (Fischer, 2008).

Die iterativen algebraischen Rekonstruktionsverfahren führen im Gegensatz zu der schon betrachteten Matrixinversionsmethode keine Invertierung der gesamten Schallstrahlabschnittsmatrix aus. Jedoch hängen deren mögliche räumlichen Auflösungen auch von der Konditionierung dieser Matrix ab. Jene Rekonstruktionstechniken können nur eine exakte Lösung der gesuchten Temperaturen für das Gleichungssystem (2) finden, wenn die Anzahl der Schallstrahlen gleich bzw. größer als die Gitterzellenzahl ist. Bei einer Auflösung von 0.4 m und den sich dabei ergebenden 36 Gitterzellen (siehe Abbildung 1(a)) können sowohl die Matrixinversion als auch die iterativen algebraischen Rekonstruktionsalgorithmen die gesuchten meteorologischen Felder gut auflösen.

Die Algorithmen ART, SIRT und MART führen den allgemein beschriebenen iterativen Zyklus solange aus, bis ein Konvergenz- oder Abbruchkriterium erreicht wird. Um ein Kriterium für den Iterationsprozess festzulegen und die Stabilität der Lösung zu testen, wurden nach Todd und Ramachandran (1994) sowie Krajewski *et al.* (1989) folgende quantitative Größen betrachtet:

$$PDD = \frac{1}{I} \sqrt{\sum_{i=1}^I (\tau_i^{\text{mess}} - \tau_i^n)^2} \quad \text{und} \quad ED = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (c_j - c_j^n)^2. \quad (5)$$

Dabei stellen I bzw. J die Gesamtanzahl der Laufzeiten bzw. Gitterzellen dar. Die Quadratwurzel aus der Summe der quadrierten Residuen aus den gemessenen Laufzeiten τ_i^{mess} und den simulierten Laufzeiten τ_i^n des n -ten Iterationsschrittes charakterisiert den PDD -Wert (Projection Data Distance). Im Idealfall nimmt PDD von Iterationsschritt zu Iterationsschritt ab. Ein minimaler PDD -Wert entspricht einem Maximum der Entropie der Lösung (Ziemann, 2000). Infolgedessen ist die Abnahme der PDD -Werte eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz gegen die richtige Lösung.

Der Euklidische Abstand ED beschreibt die Übereinstimmung zwischen Vorgabe und Rekonstruktion. Dessen Berechnung im n -ten Iterationsschritt erfolgt mittels Summation der quadratischen Differenzen aus der vorgegebenen Schallgeschwindigkeit c_j und der aktuell berechneten Schallgeschwindigkeit c_j^n für jede Gitterzelle j . Meist ist die rekonstruierte Verteilung der Vorgabe umso ähnlicher, je kleinere Werte ED annimmt. Jedoch können aufgrund unzureichender Überdeckung des Untersuchungsgebietes mit Schallstrahlen oder fehlerhaften Messungen der Laufzeit sowie der Sender- und Empfängerpositionen im rekonstruierten Bild Artefakte entstehen. Das Auftreten dieser im Tomogramm kann vermieden werden, indem der iterative Zyklus nach Erreichen eines nahezu konstanten Wertes von PDD bzw. ED abgebrochen wird (Krajewski *et al.*, 1989). Während realer Messungen kann ED aber nicht berechnet werden, da die wahre Verteilung im Experiment nicht bekannt ist.

Den drei Arten der iterativen algebraischen Rekonstruktionsmethoden wurden zahlreiche simulierte Laufzeitdatensätze übergeben und deren Rekonstruktionen in den einzelnen Iterationsschritten beobachtet, indem innerhalb jedes Iterationsschrittes jeweils ein Wert für ED und PDD ermittelt wurde. Die resultierenden quantitativen Kriterien für drei synthetisch erzeugte Datensätze der Laufzeit sind in Abbildung 3 dargestellt.

In den ersten Iterationsschritten nehmen die Werte für ED ab, erreichen ein Minimum

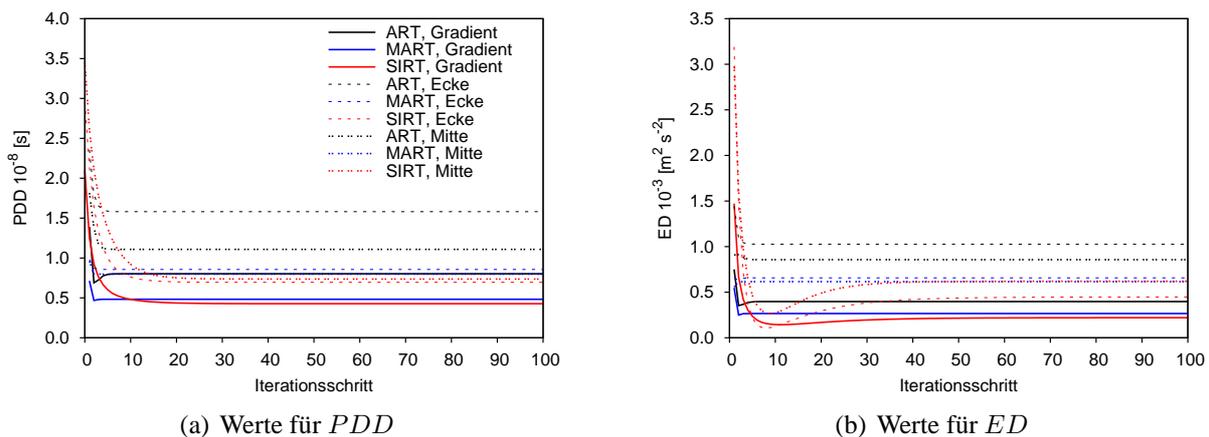


Abbildung 3: Veränderung der quantitativen Kriterien mit zunehmender Anzahl von Iterationsschritten für drei synthetisch erzeugte Laufzeitdatensätze, deren Temperaturfelder für eine Auflösung von $(0.4 \times 0.4) \text{ m}^2$ berechnet wurden. Den Laufzeiten lagen ein konstanter Temperaturgradient in x -Richtung (Gradient), eine Gaußförmige Inhomogenität in der Ecke (Ecke) bzw. in der Mitte (Mitte) des Messfeldes gemäß Abbildung 1(b) zugrunde.

nach wenigen iterativen Zyklen und steigen danach langsam wieder an. Die Sensitivitätsstudien vielfältiger simulierter Laufzeitdaten ergaben, dass das Minimum im ART- und MART-Algorithmus meistens beim dritten Iterationsschritt auftritt, wohingegen das Minimum des SIRT-Algorithmus meist erst beim zehnten Iterationsschritt zu finden ist (Fischer, 2008). Der erkennbare Anstieg der ED -Werte nach dem Extremum weist möglicherweise auf die Entstehung von Artefakten im Tomogramm hin. Die PDD -Werte (Abbildung 3(a)) zeigen ein ähnliches Verhalten. Für einige Simulationen konvergiert PDD gegen einen konstanten Wert, für andere erreicht die Differenz zwischen den geschätzten und den simulierten Laufzeiten ein Minimum und nimmt anschließend wieder zu. Folglich können die Invertierungsverfahren nach dem Erreichen des minimalen Wertes, also bei ART und MART nach drei und bei SIRT nach zehn Iterationsschritten abgebrochen werden, da das Ergebnis anschließend nicht optimaler wird.

Weiterhin ist zu erkennen, dass jede der drei Methoden für eine zugrunde liegende lineare Verteilung von 0.5 K/m (Gradient) die kleinsten Werte der quantitativen Kriterien errechnet, gefolgt von der Situation einer Gaußförmigen Inhomogenität in der Mitte des Messfeldes. Dies deutet darauf hin, dass Temperaturfelder mit einer Anomalie in der Ecke einer Untersuchungsfläche gegenüber denen mit der Inhomogenität in der Mitte und kontinuierlichen Verteilungen in einer Richtung schlechter aufgelöst werden. Dieselbe Abstufung der rekonstruierten Genauigkeiten konnte auch bei den Matrixinversionsverfahren nachgewiesen werden.

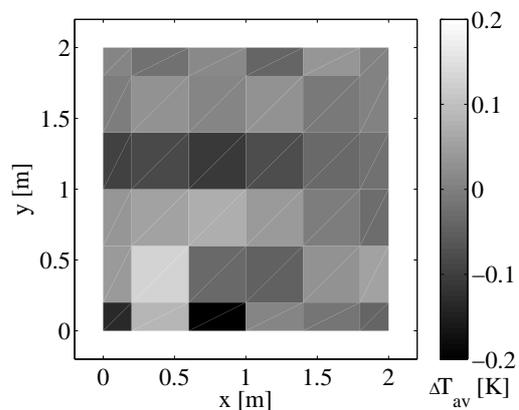
Die Rekonstruktionsergebnisse der stochastischen Inversion hängen wesentlich von der Bestimmung der Turbulenzparameter ab. In den durchgeführten numerischen Experimenten mussten diese abgeschätzt werden. Für die Korrelationslänge der Temperatur wurde der Wert von $l_T = 1 \text{ m}$ bevorzugt, da dieser sowohl in experimentellen Studien gemessen als auch oft zur Modellierung der akustischen Streuung (Gilbert *et al.*, 1990) eingesetzt wird.

Eine weitere zentrale Rolle spielt die Konditionierung der Kovarianzmatrizen, wobei besonders die Daten-Daten-Kovarianzmatrix sehr empfindlich auf die Regularisierung reagiert (Vecherin *et al.*, 2006). Rauschen wirkt sich in diesem Fall positiv auf die Konditionierung dieser Kovarianzmatrix aus. Indem trotz rauschfreier, synthetisch generierter Laufzeiten ein konstanter Fehlerwert der Größenordnung 10^{-5} auf die Diagonalelemente der Daten-Daten-Matrix addiert wurde, lieferte die stochastische Inversion Rekonstruktionsergebnisse mit einer sehr hohen Genauigkeit. Die Größenordnung des Fehlerterms entspricht dabei ungefähr der derzeitig erreichbaren Genauigkeit der Laufzeitmessungen eines an der Universität Leipzig entwickelten Tomographiemodells ähnlicher Dimension (Barth und Raabe, 2006).

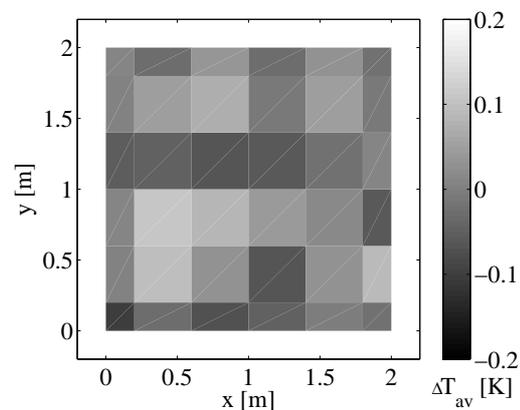
Um die Rekonstruktionsgenauigkeiten der modellierten Algorithmen miteinander zu vergleichen, sind in Abbildung 4(a-e) für alle Verfahren die Differenzen zwischen vorgegebener und rekonstruierter Temperaturverteilung für eine Auflösung des Untersuchungsgebietes von $(0.4 \times 0.4) \text{ m}^2$ der Gaußförmigen Inhomogenität von Abbildung 1(b) dargestellt. Zu erkennen ist, dass alle Algorithmen die Struktur der vorgegebenen Verteilung gut wiedergeben, da der Unsicherheitsbereich der Temperaturwerte kleiner als 0.2 K ist. Jedes betrachtete Inversionsverfahren rekonstruierte die größten Abweichungen von der Vorgabe im Bereich der Gaußförmigen Inhomogenität und an den Rändern des Messgebietes, hervorgerufen durch die geringe Anzahl von Schallstrahlen in den kleineren Randzellen. Die größten Differenzen berechneten ART und die Matrixinversion, wohingegen die stochastische Inversion die kleinsten Abweichungen aufwies. Bei fehlerfreien Ausgangsfeldern mit geringen Temperaturunterschieden lieferten die Matrixinversion sowie die Algorithmen ART und MART eine über das gesamte betrachtete Feld mittlere absolute Genauigkeit kleiner als 0.05 K. Die mittleren Abweichungen von SIRT mit Werten kleiner als 0.03 K waren insgesamt geringer als die von ART und MART. Eine Verdopplung der Anzahl von Sensoren im Messfeld bewirkte ungefähr eine Halbierung des Fehlerbereichs.

Zugrunde liegende simulierte Verteilungen mit einer Temperaturanomalie von 5.0 K bzw. einem Temperaturgradienten von 2.5 K/m bewirkten bei allen Algorithmen eine Vergrößerung der mittleren Differenzen um eine Größenordnung. Ferner nahmen die maximalen absoluten Differenzen, außer bei der stochastischen Inversion, Werte bis zu 2.0 K an. Diese Resultate zeigen, dass die Genauigkeit der Rekonstruktionen von der Stärke der Schallgeschwindigkeitsunterschiede im Messfeld abhängt. In den Tomogrammen von ART, MART und der Matrixinversion bildeten sich oft schachbrettartige Strukturen aus. Dies war bei SIRT nur sehr schwach ausgeprägt und bei der stochastischen Inversion nicht vorzufinden. Folglich sind die letztgenannten Invertierungsverfahren zu bevorzugen, da diese die besten und stabilsten Rekonstruktionsergebnisse lieferten. Darüber hinaus war es mit der stochastischen Inversion möglich, Temperaturfelder mit einer hohen Auflösung von 0.01 m und einer hohen Genauigkeit zu bestimmen (Abbildung 4(f)). Für den Vergleich mit der Vorgabe musste die Temperaturskala um eine Größenordnung kleiner gewählt werden, damit ein Unterschied zwischen Rekonstruktion und Vorgabe sichtbar wurde.

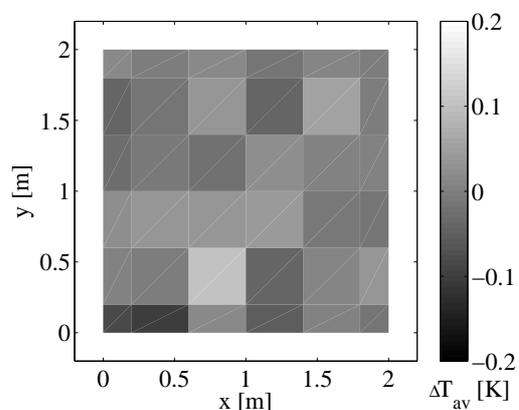
Bei optimaler Konditionierung der Daten-Daten-Matrix konnte mit diesen numerischen



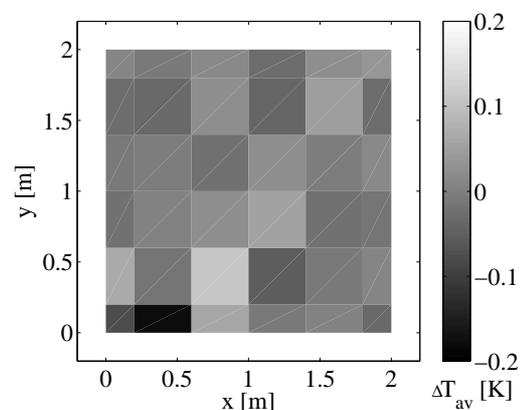
(a) Matrixinversion



(b) ART



(c) MART



(d) SIRT

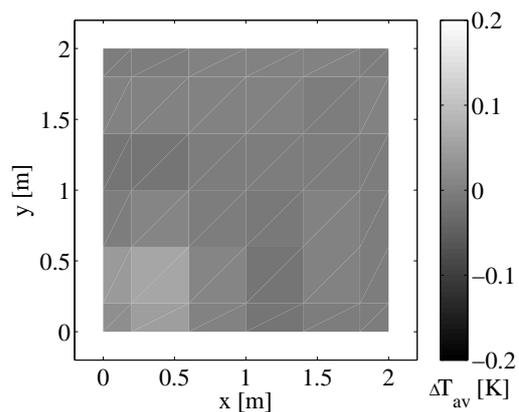
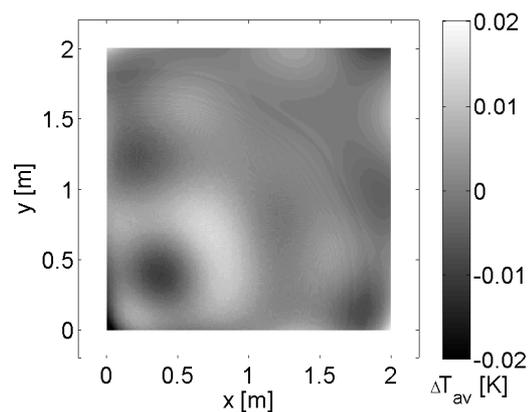
(e) Stochastische Inversion, $(0.4 \times 0.4) \text{ m}^2$ (f) Stochastische Inversion, $(0.01 \times 0.01) \text{ m}^2$

Abbildung 4: Temperaturdifferenz zwischen Rekonstruktion und Simulation einer Gaußförmigen Inhomogenität (Abbildung 1(b)) für eine Auflösung von $(0.4 \times 0.4) \text{ m}^2$ bzw. $(0.01 \times 0.01) \text{ m}^2$ (Abb. 4f).

Experimenten gezeigt werden, dass mit der stochastischen Inversion über den Ansatz einer Gauß-Verteilung kleinräumige Strukturen innerhalb eines Mediums mit einer hohen Auflösung und Genauigkeit reproduziert werden können. Obwohl die gesuchten Felder unter Verwendung der stochastischen Inversion kleinräumiger auflösbar sind, benötigt diese Methode für die hier vorgestellten Tomogramme mit einer Auflösung von $(0.4 \times 0.4) \text{ m}^2$ eine mittlere Rechenzeit von circa 50 s, wohingegen die SIRT-Resultate nach 8 ms vorliegen. Für höhere Auflösungen ergeben sich entsprechend längere Rechenzeiten, so dass sich die stochastische Inversion nicht zur Echtzeit-Auswertung von experimentellen Messungen eignet. Dies ist jedoch mit den iterativen Rekonstruktionstechniken und der Matrixinversion möglich.

Sensitivitätsstudien mit fehlerbehafteten Laufzeitdaten, verursacht durch Messfehler bei der Laufzeitbestimmung und bei der Messung der Sender- und Empfängerpositionen, lieferten ähnliche Resultate. Mit zunehmenden Messfehlern und zunehmenden Temperaturunterschieden im Messfeld verstärkten sich die Abweichungen von der wahren Lösung. Die Matrixinversion und der ART-Algorithmus wiesen im Mittel die größten Abweichungen von der wahren Lösung auf (Fischer, 2008). Dagegen zeichneten sich der SIRT-Algorithmus und die stochastische Inversion wiederum durch ihre relativ stabilen Lösungen mit geringen Unsicherheitsbereichen aus. Die Ursache dafür ist nicht zuletzt der Fakt, dass beide Rekonstruktionstechniken eine Art Mittelungsprozedur beinhalten (siehe z.B. Ziemann, 2000; Vecherin *et al.*, 2006).

3.2 Auswertung experimenteller Laufzeitdaten

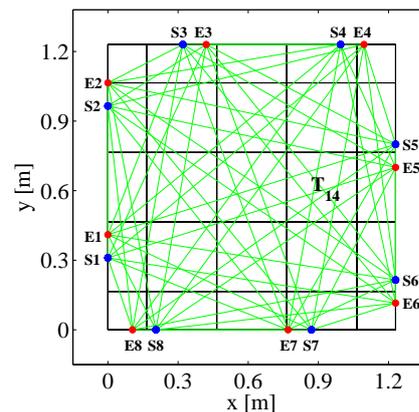
Die numerischen Experimente ermöglichten eine erste Beurteilung der umgesetzten Algorithmen für die akustische Laufzeit tomographie. Zur Verifizierung dieser Ergebnisse bezüglich Anwendungen jener Verfahren in der Atmosphäre wurden zunächst experimentelle, mit einem Tomographiemesssystem im Labor bestimmte Laufzeitdaten verwendet.

Das am Leipziger Institut für Meteorologie entwickelte Tomographiemodell zur Bestimmung von kleinskaligen Verteilungen meteorologischer Größen bietet die Möglichkeit, die Methode der akustischen Laufzeit tomographie zu demonstrieren sowie neue Rekonstruktionsverfahren mit variablen Parametern zu analysieren (Barth *et al.*, 2004). Die Basisfläche des Modells besteht aus einer Rahmenkonstellation von Aluminiumprofilen mit einer Ausdehnung von $(1.23 \times 1.23) \text{ m}^2$ (Abbildung 5(a)). Auf dieser Konstruktion können flexibel mehrere Sender und Empfänger angeordnet werden. Die hier gewählte Positionierung der vorgegebenen 8 Sensorpaare entlang des Messfeldrandes ist in Abbildung 5(b) schematisch dargestellt. Für diese Anordnung kann die Messfläche in der Mitte in $(0.3 \times 0.3) \text{ m}^2$ Gitterzellen unterteilt werden, für die jeweils ein konstanter Temperaturwert ermittelt werden soll.

Die auftretenden, relativ kurzen Schallstrecken im Untersuchungsgebiet können durch ungenaue Messungen der Laufzeit sowie der Sender- und Empfängerpositionen zu hohen Unsicherheitsbereichen der rekonstruierten Temperaturverteilungen führen. Deswegen ist es in diesem Skalenbereich von Vorteil, relative Änderungen der Temperatur in Bezug zu einem bekannten Referenzzustand zu messen (Fischer, 2008). Trotzdem kön-



(a) Foto des Tomographiemodells



(b) Schematische Versuchsanordnung

Abbildung 5: Gewählte Versuchsanordnung zur Messung experimenteller Laufzeitdaten. Die tomographische Fläche wurde in neun (0.3×0.3) m² Gitterzellen unterteilt.

nen die auf den direkten Strecken zwischen den Sender-Empfänger-Paaren mit einer Länge von 0.1 m gemessenen Laufzeiten nicht zur Auswertung verwendet werden, infolge des größeren Messfehlers auf diesen sehr geringen Entfernungen (siehe z.B. Barth und Raabe, 2006).

Der Messaufbau gestaltete sich so, dass analog zu den numerischen Sensitivitätsstudien eine reale Oberflächeninhomogenität simuliert wurde. Der Hintergrund dessen ist, dass im Bereich der atmosphärischen Grenzschicht verschiedene Oberflächenbeschaffenheiten, auch unter anderem von der Tageszeit abhängige, jeweilige spezifische Erwärmungs- und Abkühlungsprozesse der darüber liegenden Luftschichten hervorrufen. Zur Untersuchung derartiger Situationen wurde in einer ersten Vereinfachung im Labor eine Temperaturanomalie erzeugt. Dies erfolgte mittels Simulation einer Inhomogenität durch Einschalten einer im Bereich der tomographischen Messfläche positionierten Heizplatte auf maximale Heizleistung. Nach Erreichen eines Temperaturmaximums erfolgte die Abschaltung der Heizplatte und der zeitliche Abkühlungsprozess konnte beobachtet werden. Während der gesamten Messzeit wurde im Labor eine konstante mittlere akustisch virtuelle Temperaturverteilung von 21.8 °C angenommen, die mit einem Assmann Psychrometer ermittelt wurde. Des Weiteren mussten strömungsfreie Verhältnisse im Labor gewährleistet werden, damit die gemessenen Laufzeiten lediglich von der Temperaturverteilung der zu untersuchenden Fläche beeinflusst wurden.

Die in Abständen von 20 s gemessenen Laufzeitdatensätze wurden jeweils den fünf Invertierungsverfahren übergeben, aus denen diese die Temperaturfelder zu den verschiedenen Zeitpunkten rekonstruierten. Dabei erfolgten die Berechnungen der Rekonstruktionen analog zu den numerischen Sensitivitätstests für ART und MART über drei bzw. für SIRT über zehn Iterationsschritte. Aufgrund realer Messbedingungen und der Verkleinerung der Dimension des Messfeldes gegenüber den numerischen Sensitivitätsstudien wurde für das stochastische Inversionsverfahren eine Korrelationslänge von 0.8 m und eine Standardabweichung von 0.8 K zur Auswertung der Laufzeitdaten verwendet. In Abbildung 6 sind die errechneten Flächenmittelwerte der Temperatur der Gitterzelle

14 (vgl. Abbildung 5(b)), unter welcher sich die Wärmequelle befand, über den gesamten Messzeitraum für alle Algorithmen dargestellt. Zu Beginn der Messung rekonstruierten alle Algorithmen für diese Zelle einen im Mittel um 0.4 K höheren Temperaturwert gegenüber der mit dem Psychrometer *in situ* bestimmten Mitteltemperatur. Ungefähr 80 s nach dem Anschalten der Heizplatte errechneten alle Verfahren eine Erwärmung der näher betrachteten Gitterzelle. Der flächengemittelte Temperaturwert dieser Zelle stieg anschließend immer weiter an, wobei jedoch die ART-Rekonstruktion die stärkste Temperaturerhöhung bestimmte. Diese Ergebnisse entsprechen denen der numerischen Sensitivitätsstudien, wobei festgestellt wurde, dass meistens die mit ART und Matrixinversion berechneten Temperaturwerte die größten absoluten Abweichungen von der Vorgabe aufweisen. Die in Abbildung 6 zu erkennenden Temperaturschwankungen von Messung zu Messung, welche teilweise mehr als 1.0 K betragen, stimmen zumindest qualitativ bei allen Invertierungsalgorithmen überein. Im Wesentlichen wird dieser Prozess wahrscheinlich dadurch verursacht, dass sich die entstehenden Warmluftblasen über der Wärmequelle nicht ständig und kontinuierlich von der wärmeren Oberfläche abheben. Somit können zufällige, thermisch induzierte Wirbel die erheblichen Schwankungen des Flächenmittelwertes der Temperatur in der Gitterzelle 14 hervorgerufen haben.

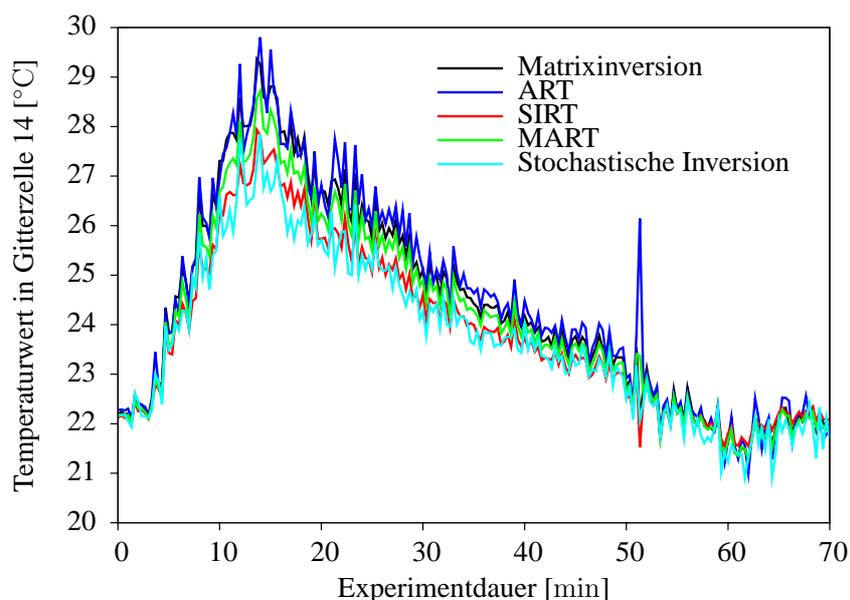


Abbildung 6: Zeitliche Änderung des flächengemittelten Temperaturwertes der Gitterzelle 14 des optimalen tomographischen Messfeldes (Abbildung 5(b)).

Weiterhin ist in Abbildung 6 zu erkennen, dass sich mit Abnahme der Stärke der Temperaturinhomogenität durch Ausschalten der Heizplatte auch die Differenzen zwischen den berechneten Temperaturwerten der jeweiligen Algorithmen verringern. Dies stimmt ebenso mit den Resultaten der Auswertung synthetischer Laufzeiten überein. Der auftretende ART-Peak nach 53 min ist auf ein erzeugtes Artefakt zurückzuführen.

Die mittels SIRT und stochastischer Inversion bei bekannten Turbulenzparametern rekonstruierten Temperaturwerte sind geringer als diejenigen der anderen Algorithmen und weisen zueinander Unterschiede von bis zu 1.7 K auf. Die numerischen Sensitivitätstests haben gezeigt, dass diese zwei Methoden die Temperaturfelder mit einer hohen

Genauigkeit rekonstruieren. Ausgehend von jenen Resultaten kann eingeschätzt werden, dass diese zwei Invertierungsverfahren große Temperaturunterschiede im tomographischen Messfeld am besten wiedergeben.

4 Schlussfolgerung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit konnte gezeigt werden, dass sich alle analysierten Invertierungsverfahren zur Rekonstruktion von flächengemittelten Temperaturverteilungen mit dem Verfahren der akustischen Laufzeittomographie eignen. Diese Algorithmen und die erzielten Ergebnisse können bei entsprechender Skalierung auch in anderen Wissenschaftsbereichen der Atmosphärenforschung, wie z.B. bei dem Verfahren der bodengestützten GPS Wasserdampf-Tomographie (Bender und Raabe, 2005) oder der DOAS Tomographie (Differentielle optische Absorptionsspektroskopie; Laepfle *et al.*, 2004) Verwendung finden.

Sowohl die Auswertung synthetisch erzeugter als auch experimenteller Laufzeitdaten ergab, dass die Rekonstruktionen der Algorithmen ART, MART und Matrixinversion größere Fehlerbereiche, besonders in den Randzellen und in den Bereichen der Temperaturinhomogenitäten, gegenüber SIRT und der stochastischen Inversion aufweisen. Nur wenn die Turbulenzparameter der stochastischen Inversion exakt bekannt sind, ist es mit diesem Verfahren möglich, die gesuchten Temperaturfelder mit einer sehr hohen Auflösung und Genauigkeit zu rekonstruieren. Im Vergleich zur SIRT-Methode besitzt die stochastische Inversion den Nachteil, dass damit während Messkampagnen infolge längerer Rechenzeiten keine Echtzeit-Datenauswertung möglich ist. Mit SIRT kann jedoch nicht die gleiche hohe räumliche Auflösung der Temperaturfelder, wie mit der stochastischen Inversion erreicht werden. Die Ursache dafür ist die Abhängigkeit der iterativen algebraischen Rekonstruktionstechniken und der Matrixinversionsmethoden von der Konditionierung der Schallstrahlabschnittsmatrix.

Die Aufgabe zukünftiger Experimente ist es, das Verhalten der verschiedenen Algorithmen bei einer Laufzeittomographie auf größeren Skalen (Ausdehnungen bis zu mehreren hundert Metern) während Anwendungen innerhalb der atmosphärischen Grenzschicht zu bewerten. Dann müssen zusätzliche Einflüsse der Strömung auf die Ausbreitung der Schallwelle sowie meteorologische Effekte wie Refraktion an vertikalen Gradienten der Temperatur und Windgeschwindigkeit, Bodenreflexionen, Luftabsorption und Streuung Beachtung finden. Da nicht nur Temperaturverteilungen sondern auch die Felder der Strömung mittels akustischer Laufzeittomographie rekonstruiert werden können, bleibt außerdem die Analyse dieser Invertierungsverfahren zur gleichzeitigen Rekonstruktion von Temperatur- und Strömungsfeldern zu zeigen.

Literatur

Arnold, K., A. Ziemann und A. Raabe, 1999: Acoustic tomography inside the atmospheric boundary layer. *Phys. Chem. Earth (B)*, **24**, 133–137.

- Barth, M., P. Holstein, A. Raabe und M. Seliger, 2004: An educational model for acoustic tomographic imaging. 30. Jahrestagung für Akustik, Tagungsband CFA/DAGA 2004, Straßburg, Frankreich, 1183–1184.
- Barth, M. und A. Raabe, 2006: Akustische Tomographie zur gleichzeitigen Bestimmung von Temperatur- und Strömungsfeldern in Innenräumen. *Wiss. Mitt. Inst. für Meteorol. Univ. Leipzig*, **37**, 71–80.
- Bender, M. und A. Raabe, 2005: Bodengestützte GPS Wasserdampf-Tomographie. *Wiss. Mitt. Inst. für Meteorol. Univ. Leipzig*, **37**, 55–70.
- Fischer, G., 2008: Invertierungsalgorithmen für die akustische Laufzeit-tomographie in der Atmosphäre. *Diplomarbeit am Institut für Meteorologie der Universität Leipzig*.
- Gilbert, K. E., R. Raspet und X. Di, 1990: Calculation of turbulence effects in an upward-refracting atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, **87**, 2428–2437.
- Gordon, R., R. Bender und G. T. Herman, 1970: Algebraic reconstruction techniques (ART) for 3-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *J. Theor. Biol.*, **29**, 471–481.
- Krajewski, C., L. Dresen, C. Gelbke und H. Ruter, 1989: Iterative tomographic methods to locate seismic low-velocity anomalies - a model study. *Geophys. Prosp.*, **37**, 717–751.
- Laeppele, T., V. Knab, K. U. Mettendorf und I. Pundt, 2004: Longpath doas tomography on a motorway exhaust gas plume: numerical studies and application to data from the BAB II campaign. *Atmos. Chem. Phys.*, **4**, 1323–1342.
- Menke, W., 1989: *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. International Geophysical Series, Volume 45, Academic Press, London, 289 S.
- Salomons, E. M., 2001: *Computational atmospheric acoustics*. Kluwer Academic Publishers, 335 S.
- Spiesberger, J. L. und K. M. Fristrup, 1990: Passive localization of calling animals and sensing of their acoustic environment using acoustic tomography. *Am. Natural.*, **135**, 107–153.
- Todd, L. und G. Ramachandran, 1994: Evaluation of algorithms for tomographic reconstruction of chemical concentrations in indoor air. *Am. Ind. Hyg. Assoc. J.*, **55**, 403–417.
- Vecherin, S. N., 2007: Acoustic travel-time tomography of the atmosphere. Dissertation, New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico.
- Vecherin, S. N., V. E. Ostashev, G. H. Goedecke, D. K. Wilson und A. G. Voronovich, 2006: Time-dependent stochastic inversion in acoustic travel-time tomography of the atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, **119**, 2579–2588.

Wilson, D. K. und D. W. Thomson, 1994: Acoustic tomographic monitoring of the atmospheric surface-layer. *J. Atmos. Ocean. Technol.*, **11**, 751–769.

Ziemann, A., 2000: Eine theoretische Studie zur akustischen Tomographie in der atmosphärischen Grenzschicht. *Wiss. Mitt. Inst. für Meteorol. Univ. Leipzig und Inst. für Troposphärenforschg. Leipzig*, **19**, 1–138.

Ziemann, A., K. Arnold und A. Raabe, 1999a: Acoustic tomography in the atmospheric surface layer. *Ann. Geophysicae*, **17**, 139–148.

Ziemann, A., K. Arnold und A. Raabe, 1999b: Acoustic travel time tomography - a method for remote sensing of the atmospheric surface layer. *Meteorol. Atmos. Phys.*, **71**, 43–51.

Adressen der Autoren

Gabi Fischer (gfischer@uni-leipzig.de), Manuela Barth (mbarth@uni-leipzig.de),
Astrid Ziemann (ziemann@uni-leipzig.de), Armin Raabe (raabe@uni-leipzig.de)
Universität Leipzig
Institut für Meteorologie
Stephanstraße 3
04103 Leipzig